

Formulario di Elettronica dello stato solido

Lorenzo Rossi

Anno Accademico 2020/2021

Email: lorenzo14.rossi@mail.polimi.it

GitHub: <https://github.com/lorossi>

Quest'opera è distribuita con Licenza Creative Commons Attribuzione

Non commerciale 4.0 Internazionale 

Versione aggiornata al 24/06/2021

Indice

1	Riguardo al formulario	1
2	Richiami di Base	1
2.1	Serie	1
2.2	Elettromagnetismo	1
3	Struttura cristallina	2
3.1	Packing factor	2
3.2	Indici di Miller	2
3.2.1	Caso particolare	2
4	Radiazione di corpo nero	3
4.1	Cavità di corpo nero all'equilibrio, monodimensionale	3
5	Onde e particelle	4
5.1	Onde	4
5.1.1	Pacchetti d'onda	4
5.2	Particelle	5
6	Meccanica quantistica	6
6.1	Teorema di Bloch	6
6.2	Operatori	6
6.3	Tunnelling	7
6.4	Incidenza	7
6.5	Buca di potenziale	8
6.5.1	A pareti infinite	8
6.5.2	A pareti finite	8
6.5.3	Parabolica	8
6.5.4	Coppie di buche	8
7	Teoria semi classica del trasporto	9
7.1	Tight Binding	9
7.1.1	Semiconduttori	10
7.2	Weak binding	12
7.2.1	Metalli	12
7.3	Formule valide sia per lacune che per elettroni	13
7.4	Livelli di energia	13
8	Correnti macroscopiche	13
8.1	Effetto Hall	13
8.2	Correnti di diffusione	14
9	Distribuzioni	14

1 Riguardo al formulario

Quest'opera è distribuita con Licenza Creative Commons - Attribuzione Non commerciale 4.0 Internazionale 

Questo formulario verrà espanso (ed, eventualmente, corretto) periodicamente fino a fine corso (o finché non verrà ritenuto completo).

Link repository di GitHub: <https://github.com/lorossi/formulario-stato-solido>

L'ultima versione può essere scaricata direttamente cliccando [su questo link](#).

In questo formulario ho cercato prima di tutto di mettere le formule importanti per la risoluzione degli esercizi, preferendole a quelle utili alla comprensione della materia.

2 Richiami di Base

2.1 Serie

- Serie geometrica $s_n = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \dots$ converge a $s_n = \frac{1}{1-q}$ se $|q| < 1$
- Serie armonica $s_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge se $\alpha > 1$

2.2 Elettromagnetismo

- Forza $|F| = \frac{|V|}{|x|}$
- Forza vettoriale $\vec{F} = -\vec{\nabla}V = -\frac{1}{q}\vec{\nabla}U$
- Campo elettrico $E = -qV$
- Energia $\delta E = qF\delta x, \frac{\partial E}{\partial T} = qFv_g$

3 Struttura cristallina

- Packing factor $PF = \frac{4/3 \cdot \pi r^3}{a^3}$
- Densità del reticolo $l = \frac{\text{n}^\circ \text{atomi} / \text{cella}}{\text{area cella}}$
- Interferenza del passo reticolare (diffrazione alla Bragg) $2a \sin \theta = n\lambda$ con n ordine di diffrazione

3.1 Packing factor

Struttura	Metalli che la presentano in natura	Packing Factor
Cubico	Po	$\frac{\pi}{6} \approx 0.52$
GBB	Cr, Fe, Mo, Ta	$\pi \frac{\sqrt{3}}{8} \approx 0.68$
FCC	Ag, Au, Cu, Ni, Pb	$\pi \frac{\sqrt{2}}{6} \approx 0.74$

3.2 Indici di Miller

- Distanza interplanare $\frac{a}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$

3.2.1 Caso particolare

Ipotesi: il piano interseca in $\{m, n, 0\}$

- Indici di Miller $\{n, m, 0\}$
- Distanza interplanare $d = \frac{a}{\sqrt{n^2 + m^2}}$

4 Radiazione di corpo nero

- Legge di Wien $\lambda_p \cdot T = c_{\text{wien}}$
- Legge di Stefan-Boltzmann $\int_0^{\infty} R_T d\nu = \sigma T^4$
- Potenza emessa dal corpo nero $P = \sigma T^4 A = RA$, con A area della superficie del corpo

4.1 Cavità di corpo nero all'equilibrio, monodimensionale

- Lunghezze d'onda permesse $a = n \frac{\lambda}{2}$
- Frequenze permesse $\nu = \frac{c}{2a} n$ con n intero e non nullo
- Free spectral range FSR $= \nu_n - \nu_{n-1} = \frac{c}{2a}$

5 Onde e particelle

5.1 Onde

- Frequenza / lunghezza d'onda $\nu = \frac{c}{\lambda}$
- Energia associata ad un'onda $E = h\nu = \hbar\omega$
- Vettore d'onda $k = \frac{2\pi}{h}$
- Velocità di fase $v_f = \frac{d\omega}{dk}$
- Velocità di gruppo $v_g = \frac{\partial\omega}{\partial k} = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E}{\partial k} = \frac{\hbar k}{m}$

5.1.1 Pacchetti d'onda

- Formula generale $\Psi(x, t) = \int g(k) e^{i(kx - \omega t)} dk$
- Densità di probabilità $|\Psi(x, t)|^2 = e^{-\frac{(x - v_g t)^2}{2\alpha(1 + \beta^2 t^2 / \alpha^2)}} \sqrt{\frac{\pi^2}{\alpha^2 + \beta^2 t^2}}$
- Deviazione standard $\sigma_x(t) = \sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2 t^2}{\alpha}}$
- Pacchetto gaussiano:
 - Velocità $v_g = \frac{\partial\omega}{\partial k}$
 - Dispersione $\beta = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}$
 - Oscillazione $\omega = \omega_0 + v_g \cdot (k - k_0) + \beta \cdot (k - k_0)^2$
 - Il picco si sposta con $v = v_g$

5.2 Particelle

- Energia $E = E_k + U$
 - Energia cinetica $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{h^2}{2m\lambda^2}$
 - Principio di equipartizione dell'energia, particella con l gradi di libertà: $E_k = \frac{l}{2}kT$
 - Energia potenziale di una particella in un potenziale V : $U = qV$
- Relazione di De Broglie $\lambda = \frac{h}{p}$, $p = \hbar k$
- Relazione di dispersione $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$
- Vettore d'onda $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$
- Lunghezza d'onda $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE}}$

6 Meccanica quantistica

- Principio di indeterminazione di Heisenberg $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$
- Equazione di Schrödinger $i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}(x, t) = \hat{H} \Psi(x, t)$
- Flusso quantistico $J = \frac{\hbar k}{m} |\Psi|^2$

6.1 Teorema di Bloch

Ipotesi:

- Struttura reticolare con passo a
- Il potenziale è periodico $V(x + a) = V(x)$
- La funzione d'onda si ripete a meno di un fattore di fase $\psi(x + a) = \psi(x)e^{ika}$
- La densità di probabilità è periodica $|\psi(x + a)|^2 = |\psi(x)|^2$

Allora: $|\psi(x)| = u_k(x)e^{-ikx}$ con $u_k(x)$ funzione di Bloch (*periodica*), quindi $u_k(x + a) = u_k(x)$. e e^{-ikx} involuppo.

Normalmente è costruita da $\sin^2(x)$ o $\cos^2(x)$, con i massimi in corrispondenza dei centri delle barriere.

Inoltre $\psi(x + a) = u_k(x + a)e^{ikx}e^{ika}$, con e^{ika} sfasamento.

6.2 Operatori

- Operatore Hamiltoniano $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2mi} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V$
- Operatore quantità di moto (momento) $\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$
- Operatore energia cinetica $\hat{E}_{tot} = -i\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$
- Operatore energia totale $\hat{E}_k = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$
- Operatore potenziale $\hat{V} = V$
- Commutatore $H = [\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = \hat{C}$
 - Se $\hat{C} = 0$, allora i due operatori *commutano*.

6.3 Tunnelling

- Probabilità di tunnelling $|T|^2 \approx 16 \left(\frac{\alpha k}{\alpha^2 + k^2} \right)^2 e^{-2\alpha a} \approx e^{-2\alpha a}$
 - Trasmissione risonante $p = |T|^2 = 1$
- Tempo medio di tunnelling $\langle t \rangle = \frac{t_{a/r}}{p_t} = \frac{2a}{vp_{\text{tun}}}$
- Approssimazione WKB:
 - Probabilità $p = |T|^2 = P_T = e^{-2\alpha a}$
 - Penetrazione media $x_p = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(V_0 - E)}} = \frac{1}{\alpha}$
 - **L'approssimazione è valida se e solo se $\alpha a \gg 1$**
- Approssimazione di Fowler–Nordheim **barriera triangolare**
 - Probabilità $P_T = e^{-\frac{4}{3} \frac{\sqrt{2m}}{\hbar q V} W(V-E)^{3/2}}$

6.4 Incidenza

- Coefficiente di riflessione $R = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2$
- Coefficiente di trasmissione $T = \left(\frac{2k_1}{k_1 + k_2} \right)^2 = 1 - R^2$

6.5 Buca di potenziale

6.5.1 A pareti infinite

- Autovalori $E_n = \frac{h^2}{8ma^2}n^2$, spaziatura $\propto n^2$

6.5.2 A pareti finite

- Funzioni pari $\tan\left(\frac{a}{2\hbar}\sqrt{2mE}\right) = \sqrt{\frac{V_0 - E}{E}}$
- Funzioni dispari $\tan\left(\frac{a}{2\hbar}\sqrt{2mE}\right) = -\sqrt{\frac{E}{V_0 - E}}$
- La soluzione delle equazioni avviene per via grafica

6.5.3 Parabolica

- Profilo di potenziale $U(x) = \frac{1}{2}\alpha x^2$
- Pulsazione caratteristica $\omega = \sqrt{\frac{\alpha}{m}}$, con *alpha* coefficiente del quadrato di x
- Autovalori $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$, spaziatura $\propto n$

6.5.4 Coppie di buche

- Funzione degli autovalori $\tan\left(k\frac{a}{2}\right) = -\frac{\hbar^2 k}{mu_0}$
- Soluzioni della funzione:
 - Pari $\tan(ka) = 0$
 - Dispari $\tan(ka) = -\frac{\hbar^2 k}{mu_0}$
- Proporzionalità della ddp $|\psi|^2 \propto \cos\left(\frac{E_2 - E_1}{\hbar}t\right) = \cos\left(2\pi\frac{E_2 - E_1}{h}t\right)$
 - Oscillazione degli autovalori $\omega = \frac{E_2 - E_1}{\hbar}$
 - Frequenza degli autovalori $\nu = \frac{E_2 - E_1}{h}$

7 Teoria semi classica del trasporto

- Formula fondamentale $\frac{dk}{dt} = \frac{F}{\hbar} \Rightarrow k = \frac{F}{\hbar}t + k_0$
- Velocità termica $v_{th} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$

7.1 Tight Binding

- Velocità di gruppo dell'elettrone $v_g = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E}{\partial k}$
- Massa efficace dell'elettrone $m^* = \frac{\mathfrak{F}}{a} = \frac{\hbar^2}{\frac{\partial^2 E}{\partial k^2}}$
- Relazione di dispersione $E(k) = E_{0-} + 2\gamma \cos(ka)$
- Oscillazioni di Bloch $\omega = q \frac{aF}{\hbar}, \nu = q \frac{aF}{h}$
- Libero cammino medio $\lambda = v_{th} \cdot \tau_m$
- Modello di Drude:
 - Formula $\frac{dk}{dt} + \frac{k}{\tau_m} = \frac{F}{\hbar}$ **valida solo per gli elettroni**
 - Soluzione generale $k = \frac{q\tau_m F}{\hbar} (1 - e^{t/\tau_m})$
 - Soluzione stazionaria $\frac{\partial k}{\partial t} = 0 \rightarrow \bar{k} = \frac{qF}{\hbar} \tau_m$
- Masse DOS:
 - Elettroni $m_{DOS_n}^* = g^{2/3} \cdot m_t^{*2/3} \cdot m_l^{*1/3}$
 - Lacune $m_{DOS_p}^* = (m_{hh}^{*3/2} + m_{lh}^{*3/2})^{2/3}$
- Masse di conduzione:
 - Elettroni $\frac{n^\circ m_{c_n}^*}{m_{c_n}^*} = \frac{n^\circ m_l^*}{m_l^*} + \frac{n^\circ m_t^*}{m_t^*}$
 - Lacune $\frac{1}{m_{c_p}^*} = \frac{m_{hh}^{*1/2} + m_{lh}^{*1/2}}{m_{hh}^{*3/2} + m_{lh}^{*3/2}}$

7.1.1 Semiconduttori

- Densità di stati di energia:

- Caso 1D $g(E) = \frac{1}{\pi\hbar} \sqrt{\frac{2m_{DOS}^*}{E - E_F}}$

- Caso 2D $g(E) = \frac{m_{DOS}^*}{\pi\hbar}$

- * Densità di elettroni nel metallo $n \approx \frac{m_{DOS}^*}{\pi\hbar} E_F$

- Caso 3D $g(E) = \frac{(2m_{DOS}^*)^{3/2}}{3\pi^2\hbar^3} \sqrt{E - E_F}$

- * Densità di elettroni nel metallo $n \approx \frac{(2m_{DOS}^*)^{3/2}}{3\pi^2\hbar^3} (E_F)^{3/2}$

- Densità di portatori:

- Densità efficace di stati:

- * In banda di conduzione $N_c = \frac{1}{4\hbar^3} \left(\frac{m_{DOS_n}^* kT}{\pi} \right)^{3/2}$

- * In banda di valenza $N_v = \frac{1}{4} \left(\frac{m_{DOS_p}^* kT}{\pi\hbar^2} \right)^{3/2}$

- Concentrazione intrinseca $n_i = \sqrt{N_c N_v} \cdot e^{-\frac{E_g}{2kT}}$

- Elettroni $n = \int_{E_F}^{\infty} g(E) f(E) dE \approx N_c \cdot e^{-\frac{E_c - E_F}{kT}}$

- Lacune $p = \int_0^{E_F} g(E) (1 - f(E)) dE \approx N_v \cdot e^{-\frac{E_F - E_v}{kT}}$

- Concentrazione di drogante neutro:

- Donore $n_0 = \frac{n}{1 + \frac{1}{2} e^{\frac{E_n - E_f}{kT}}}$

- Accettore $p_0 = \frac{p}{1 + \frac{1}{4} e^{\frac{E_f - E_p}{kT}}}$

- Energia media dell'elettrone $\langle E \rangle = \frac{1}{n} \int_{E_F}^{\infty} E \cdot g(E) f(E) dE$
 - Caso 2D $\langle E \rangle = \frac{1}{2} E_F$
 - Caso 3D $\langle E \rangle = \frac{3}{5} E_F$
- Energia cinetica dell'elettrone $E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_n^*}$
- Legge di Matthiessen $\frac{1}{\mu_n} = \frac{1}{\mu_{n,f}} + \frac{1}{\mu_{n,i}}$
- Saturazione della velocità:
 - Velocità limite $v_{\text{sat}} = \sqrt{\frac{\hbar \omega_0}{2m^*}}$
 - Velocità dell'elettrone sopra questo valore $v_n = \frac{\mu_n F}{1 + F/F_{\text{sat}}} = \frac{\mu_n F}{1 + \mu_n F/v_{\text{sat}}}$
- Rapporto delle grandezze al variare della temperatura:
 - Mobilità $\frac{\mu(T_2)}{\mu(T_1)} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{-3/2}$
 - Densità di stati in banda $\frac{N_c(T_2)}{N_c(T_1)} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{3/2}$
 - Densità intrinseca $\frac{n_i(T_2)}{n_i(T_1)} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{3/2} e^{-\frac{E_G}{2k} \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)}$
 - Conducibilità $\frac{\sigma(T_2)}{\sigma(T_1)} = e^{-\frac{E_G}{2k} \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)}$

7.2 Weak binding

- Valore di aspettazione dell'energia $\langle E \rangle = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 = E_n^+ - |u_n|$

7.2.1 Metalli

- Energia di Fermi $E_F(T) = E_F(0 \text{ K}) \cdot \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{E_F(0 \text{ K})} \right)^2 \right]$
- Densità di portatori **approssimazione:**

$$\begin{aligned} - n &\approx \int_0^{E_F} g(E) dE \\ - p &= 0 \end{aligned}$$

- Temperatura di Fermi $T_F = \frac{E_F}{kT}$

7.3 Formule valide sia per lacune che per elettroni

- Mobilità $\mu = \frac{q\tau_m}{m^*}$
- Velocità di deriva $v = \mu F$
- Conducibilità $\sigma = qn\mu$
- Resistività $\rho = \frac{1}{\sigma}$
- Densità di corrente $j = qn\mu F = \sigma F$

7.4 Livelli di energia

- Livello di Fermi $E_f = \frac{E_c + E_v}{2} = \frac{(3\pi^2 n)^{2/3}}{2m_n^*} \hbar^2$
- Livello di energia intrinseco:
 - Rispetto alla densità di stati di energia $E_i = E_F + \frac{1}{2}kT \ln \left(\frac{N_v}{N_c} \right)$
 - Rispetto alle masse DOS $E_i = E_F + \frac{3}{4}kT \ln \left(\frac{m_h^*}{m_e^*} \right)$

8 Correnti macroscopiche

- Effetto termoionico $J = AT^2 e^{-\frac{w}{kT}}$, $A = \frac{4\pi m^* q k^2}{h^3}$
- Equazione di continuità della corrente:
 - Elettroni $\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{q} \frac{\partial J_n}{\partial x} + g_n - r_n$
 - Lacune $\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{q} \frac{\partial J_p}{\partial x} + g_p - r_p$
- Tasso di ricombinazione:
 - Elettroni $r_n = \frac{n - n_0}{\tau_n}$
 - Lacune $r_p = \frac{p - p_0}{\tau_p}$

8.1 Effetto Hall

- Mobilità dei portatori $\mu_p = \frac{1}{B} \frac{V_H}{V_L} \frac{L}{W}$
- Densità di drogante $p = N_A = \frac{j_P}{q\mu_p F}$

8.2 Correnti di diffusione

- Legge di Einstein $D_n = \frac{kT}{q} \mu_n$
- 1° legge di Fick $\Phi_n = -D_n \frac{\partial n}{\partial x}$, $\Phi_p = -D_p \frac{\partial p}{\partial x}$
- 2° legge di Fick $\frac{\partial n}{\partial t} = D_n \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $\frac{\partial p}{\partial t} = D_p \frac{\partial^2}{\partial x^2}$

9 Distribuzioni

- Fermi Dirac $f_{FD}(e) = \frac{1}{1 + e^{\frac{E - E_f}{kT}}}$
- Maxwell Boltzmann $f_{MB}(e) = e^{\frac{E_F - E}{kT}}$