Formulario di Elettronica dello stato solido

Lorenzo Rossi

Anno Accademico 2020/2021

Email: lorenzo14.rossi@mail.polimi.it

GitHub: https://github.com/lorossi

Versione aggiornata al 24/06/2021

Indice

1 Riguardo al formulario

Questo formulario verrà espanso (ed, eventualmente, corretto) periodicamente fino a fine corso (o finché non verrà ritenuto completo).

Link repository di GitHub: https://github.com/lorossi/formulario-stato-solido

L'ultima versione può essere scaricata direttamente cliccando su questo link.

In questo formulario ho cercato prima di tutto di mettere le formule importanti per la risoluzione degli esercizi, preferendole a quelle utili alla comprensione della materia.

2 Richiami di Base

2.1 Serie

- Serie geometrica $s_n = \sum_{n=0}^{+\inf} q^n = 1 + q + q^2 + ...$ converge a $s_n = \frac{1}{1-q}$ se $|q| < 1$
- Serie armonica $s_n = \sum_{n=0}^{+\inf} \frac{1}{n^\alpha}$ converge se $\alpha > 1$

2.2 Elettromagnetismo

- Forza $|F| = \frac{|V|}{|x|}$
- Forza vettoriale $\vec{F} = -\vec{\nabla} V = -\frac{1}{q} \vec{\nabla} U$
- Campo elettrico $E = -qV$
- Energia $\delta E = qF\delta x$, $\frac{\partial E}{\partial T} = qFv_g$

3 Struttura cristallina

- Packing factor $PF = \dfrac{4/3 \cdot \pi r^3}{a^3}$
- Densità del reticolo $l = \dfrac{\text{n°atomi / cella}}{\text{area cella}}$
- Interferenza del passo reticolare (diffrazione alla Bragg) $2a \sin\theta = n\lambda$ con n ordine di diffrazione

3.1 Packing factor

Struttura	**Metalli che la presentano in natura**	**Packing Factor**
Cubico	Po	$\frac{\pi}{6} \approx 0.52$
GBB	Cr, Fe, Mo, Ta	$\pi\frac{\sqrt{3}}{8} \approx 0.68$
FCC	Ag, Au, Cu, Ni, Pb	$\pi\frac{\sqrt{2}}{6} \approx 0.74$

3.2 Indici di Miller

Ipotesi: il piano interseca in $\{m, n, 0\}$

- Indici di Miller $\{n, m, 0\}$
- Distanza interplanare $d = \dfrac{a}{\sqrt{n^2 + m^2}}$

4 Radiazione di corpo nero

- Legge di Wien $\lambda_p \cdot T = c_{\text{wien}}$
- Legge di Stefan-Boltzmann $\int\limits_0^{\text{inf}} R_T d\nu = \sigma T^4$
- Potenza emessa dal corpo nero $P = \sigma T^4 A = RA$, con A area della superficie del corpo

4.1 Cavità di corpo nero all'equilibrio, monodimensionale

- Lunghezze d'onda permesse $a = n\dfrac{\lambda}{2}$
- Frequenze permesse $\nu = \dfrac{c}{2a}n$ con n intero e non nullo
- Free spectral range $\text{FSR} = \nu_n - \nu_{n-1} = \dfrac{c}{2a}$

5 Onde e particelle

5.1 Onde

- Frequenza / lunghezza d'onda $\nu = \dfrac{c}{\lambda}$
- Energia associata ad un'onda $E = h\nu = \hbar\omega$
- Vettore d'onda $k = \dfrac{2\pi}{h}$
- Velocità di fase $v_f = \dfrac{d\omega}{dt}$
- Velocità di gruppo $v_g = \dfrac{\partial\,\omega}{\partial k} = \dfrac{1}{\hbar}\dfrac{\partial E}{\partial k} = \dfrac{\hbar k}{m}$

5.1.1 Pacchetti d'onda

- Formula generale $\Psi(x,t) = \int g(k) e^{i(kx-\omega t)} dk$
- Densità di probabilità $|\Psi(x,t)|^2 = \exp\left\{-\dfrac{(x-v_g t)^2}{2\alpha(1+{}^{\beta^2 t^2}/_{\alpha^2})}\right\}\sqrt{\dfrac{\pi^2}{\alpha^2+\beta^2 t^2}}$
- Deviazione standard $\sigma_x(t) = \sqrt{\dfrac{\alpha^2+\beta^2 t^2}{\alpha}}$
- Pacchetto gaussiano:
  - Velocità $v_g = \dfrac{\partial\,\omega}{\partial k}$
  - Dispersione $\beta = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 E}{\partial^2 k}$
  - Oscillazione $\omega = \omega_0 + v_g \cdot (k-k_0) + \beta \cdot (k-k_o)^2$
  - Il picco si sposta con $v = v_g$

5.2 Particelle

- Energia $E = E_k + U$
  - Energia cinetica $E_k = \dfrac{1}{2}mv^2 = \dfrac{h^2}{2m\lambda^2}$
  - Principio di equipartizione dell'energia, particella con l gradi di libertà: $E_k = \dfrac{l}{2}kT$
  - Energia potenziale di una particella in un potenziale V: $U = qV$
- Relazione di De Broglie $\lambda = \dfrac{h}{p}$, $p = \hbar k$
- Relazione di dispersione $E = \dfrac{h^2 k^2}{2m}$
- Vettore d'onda $k = \dfrac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$
- Lunghezza d'onda $\lambda = \dfrac{h}{\sqrt{2mE}}$

6 Meccanica quantistica

- Principio di indeterminazione di Heisenberg $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$
- Equazione di Schrödinger $i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}(x,t) = \hat{H}\Psi(x,t)$
- Flusso quantistico $J = \frac{\hbar k}{m} |\Psi|^2$

6.1 Teorema di Bloch

Ipotesi:

- Struttura reticolare con passo a
- Il potenziale è periodico $V(x+a) = V(x)$
- La funzione d'onda si ripete a meno di un fattore di fase $\psi(x+a) = \psi(x)e^{ika}$
- La densità di probabilità è periodica $|\psi(x+a)|^2 = |\psi(x)|^2$

Allora: $|\psi(x)| = u_k(x)e^{-ikx}$ con $u_k(x)$ funzione di Bloch *(periodica)*, quindi $u_k(x+a) = u_k(x)$. e e^{-ikx} inviluppo.
Normalmente è costruita da $\sin^2$ *o* $\cos^2$*, con i massimi in corrispondenza dei centri delle barriere.*
Inoltre $\psi(x+a) = u_k(x+a)e^{ikx}e^{ika}$, con e^{ika} sfasamento.

6.2 Operatori

- Operatore Hamiltoniano $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2mi}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V$
- Operatore quantità di moto (momento) $\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$
- Operatore energia cinetica $\hat{E}_{tot} = -i\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$
- Operatore energia totale $\hat{E}_k = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$
- Operatore potenziale $\hat{V} = V$
- Commutatore $H = [\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = \hat{C}$
  - Se $\hat{C} = 0$, allora i due operatori *commutano*.

6.3 Tunnelling

- Probabilità di tunnelling $|T|^2 \approx 16\left(\frac{\alpha k}{\alpha^2 + k^2}\right)^2 \exp\{-2\alpha a\} \approx \exp\{-2\alpha a\}$
  - Trasmissione risonante $p = |T|^2 = 1$
- Tempo medio di tunnelling $\langle t \rangle = \frac{t_{a/r}}{p_t} = \frac{2a}{vp_{\text{tun}}}$

- Approssimazione WKB:
  - Probabilità $p = |T|^2 = P_T = \exp\{-2\alpha a\}$
  - Penetrazione media $x_p = \dfrac{\hbar}{\sqrt{2m(V_0 - E)}} = \dfrac{1}{\alpha}$
  - **L'approssimazione è valida se e solo se** $\alpha a \gg 1$
- Approssimazione di Fowler–Nordheim **barriera triangolare**
  - Probabilità $P_T = \exp\left\{-\dfrac{4}{3}\dfrac{\sqrt{2m}}{\hbar q V} W (V - E)^{3/2}\right\}$

6.4 Incidenza

- Coefficiente di riflessione $R = \left(\dfrac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2$
- Coefficiente di trasmissione $T = \left(\dfrac{2k_1}{k_1 + k_2}\right)^2 = 1 - R^2$

6.5 Buca di potenziale

6.5.1 A pareti infinite

- Autovalori $E_n = \dfrac{h^2}{8ma^2} n^2$, spaziatura $\propto n^2$

6.5.2 A pareti finite

- Funzioni pari $\tan\left(\dfrac{a}{2\hbar}\sqrt{2mE}\right) = \sqrt{\dfrac{V_0 - E}{E}}$
- Funzioni dispari $\tan\left(\dfrac{a}{2\hbar}\sqrt{2mE}\right) = -\sqrt{\dfrac{E}{V_0 - E}}$
- La soluzione delle equazioni avviene per via grafica

6.5.3 Parabolica

- Profilo di potenziale $U = \dfrac{1}{2}\alpha x^2$
- Pulsazione caratteristica $\omega = \sqrt{\dfrac{\alpha}{m}}$, con *alpha* coefficiente del quadrato di x
- Autovalori $E_n = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\hbar\omega$, spaziatura $\propto n$

6.5.4 Coppie di buche

- Funzione degli autovalori $\tan\left(k\frac{a}{2}\right) = -\frac{\hbar^2 k}{m u_0}$
- Soluzioni della funzione:
  - Pari $\tan(ka) = 0$
  - Dispari $\tan(ka) = -\frac{\hbar^2 k}{m_0 u_0}$
- Proporzionalità della ddp $|\psi|^2 \propto \cos\left(\frac{E_2 - E_1}{\hbar} t\right) = \cos\left(2\pi \frac{E_2 - E_1}{h} t\right)$
  - Oscillazione degli autovalori $\omega = \frac{E_2 - E_1}{\hbar}$
  - Frequenza degli autovalori $\nu = \frac{E_2 - E_1}{h}$

7 Teoria semi classica del trasporto

- Formula fondamentale $\frac{dk}{dt} = \frac{F}{\hbar} \Rightarrow k = \frac{F}{\hbar} t + k_0$
- Velocità termica $v_{th} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$

7.1 Tight Binding

- Velocità di gruppo dell'elettrone $v_g = \frac{1}{\hbar}\frac{\partial E}{\partial k}$
- Massa efficace dell'elettrone $m^* = \frac{\mathfrak{F}}{a} = \frac{\hbar^2}{\frac{\partial^2 E}{\partial k^2}}$
- Relazione di dispersione $E(k) = E_{0-} + 2\gamma \cos(ka)$
- Oscillazioni di Bloch $\omega = \frac{aqF}{\hbar}$, $\nu = \frac{aqF}{h}$
- Libero cammino medio $\lambda = v_{th} \cdot \tau_m$
- Modello di Drude:
  - Formula $\frac{dk}{dt} + \frac{k}{\tau_m} = \frac{F}{\hbar}$ **vale solo per gli elettroni**
  - Soluzione generale $k = \frac{q\tau_m F}{\hbar}\left(1 - e^{t/\tau_m}\right)$
  - Soluzione stazionaria $\frac{\partial k}{\partial t} = 0 \rightarrow \bar{k} = \frac{qF}{\hbar}\tau_m$
- Masse DOS:
  - Elettroni $m^{\star}_{DOS_n} = g^{2/3} \cdot m_t^{\star\,2/3} \cdot m_l^{\star\,1/3}$

– Lacune $m^\star_{DOS_p} = \left({m^\star_{hh}}^{3/2} + {m^\star_{lh}}^{3/2}\right)^{2/3}$

- Masse di conduzione:
  – Elettroni $\dfrac{n^\circ m^\star_{c_n}}{m^\star_{c_n}} = \dfrac{n^\circ m^\star_l}{m^\star_l} + \dfrac{n^\circ m^\star_t}{m^\star_t}$
  – Lacune $\dfrac{1}{m^\star_{c_p}} = \dfrac{{m^\star_{hh}}^{1/2} + {m^\star_{lh}}^{1/2}}{{m^\star_{hh}}^{3/2} + {m^\star_{lh}}^{3/2}}$

7.1.1 Semiconduttori

- Distribuzione di Fermi $f(E) = \dfrac{1}{1 + e^{\dfrac{E - E_F}{kT}}}$
- Densità di stati di energia:
  – Caso 1D $g(E) = \dfrac{1}{\pi\hbar}\sqrt{\dfrac{2\,m^\star_{DOS}}{E - E_F}}$
  – Caso 2D $g(E) = \dfrac{m^\star_{DOS}}{\pi\hbar}$
  – Caso 3D $g(E) = \dfrac{(2\,m^\star_{DOS})^{3/2}}{2\pi^2\hbar^3}\sqrt{E - E_F}$
- Densità di portatori:
  – Densità efficace di stati:
    * In banda di conduzione $N_c = \dfrac{2}{h^3}\left(2\pi\, m^\star_{DOS_n}\, kT\right)^{3/2} \approx 10^{19}$
    * In banda di valenza $N_v = \dfrac{2}{h^3}\left(2\pi\, m^\star_{DOS_p}\, kT\right)^{3/2} \approx 10^{19}$
  – Concentrazione intrinseca $n_i = \sqrt{N_c N_v} e^{-\dfrac{E_g}{2kt}}$
  – Elettroni $n = \displaystyle\int_{E_F}^{\infty} g(E) f(E)\, dE \approx N_c \cdot e^{-\dfrac{-E_c - E_f}{kt}}$
  – Lacune $p = \displaystyle\int_{0}^{E_F} g(E)\,(1 - f(E))\; dE \approx N_v \cdot e^{\dfrac{E_v - E_f}{kt}}$
- Concentrazione di drogante neutro:
  – Donore $n_0 = \dfrac{n}{1 + \dfrac{1}{2}\, e^{\dfrac{E_n - E_f}{kt}}}$
  – Accettore $p_0 = \dfrac{p}{1 + \dfrac{1}{4}\, e^{\dfrac{E_f - E_p}{kt}}}$

- Energia media dell'elettrone $\langle E \rangle = \frac{1}{n}\int_{E_F}^{\text{inf}} E \cdot g(E)f(E)\,dE$
  - Caso 2D $\langle E \rangle = \frac{E_F}{2}$
  - Caso 3D $\langle E \rangle = \frac{3}{5}E_F$
- Energia cinetica dell'elettrone $E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_n^\star}$
- Legge di Matthiessen $\frac{1}{\mu_n} = \frac{1}{\mu_{n,f}} + \frac{1}{\mu_{n,i}}$
- Saturazione della velocità:
  - Velocità limite $v_{\text{sat}} = \sqrt{\frac{\hbar\,\omega_0}{2m^\star}}$
  - Velocità dell'elettrone sopra questo valore $v_n = \frac{\mu_n F}{1 + {}^{F}/_{F_{sat}}} = \frac{\mu_n F}{1 + {}^{\mu_n F}/_{v_{sat}}}$
- Rapporto delle grandezze al variare della temperatura:
  - Mobilità $\frac{\mu(T_2)}{\mu(T_1)} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{-3/2}$
  - Densità di stati in banda $\frac{N_c(T_2)}{N_c(T_1)} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{3/2}$
  - Densità intrinseca $\frac{n_i(T_2)}{n_i(T_1)} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{3/2} e^{-\frac{E_g}{2k}\left(\frac{1}{T_2}-\frac{1}{T_1}\right)}$
  - Conducibilità $\frac{\sigma(T_2)}{\sigma(T_1)} = e^{-\frac{E_g}{2k}\left(\frac{1}{T_2}-\frac{1}{T_1}\right)}$

7.2 Weak binding

- Valore di aspettazione dell'energia al margine della funzione di Brillouin $< E >= \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 = E_n^+ - |u_n|$

7.2.1 Metalli

- Energia di Fermi $E_F(T) = E_F(0K)\left[1 - \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{E_F(0K)}\right)^2\right]$
- Densità di portatori **approssimazione** $n \approx \int_0^{E_F} g(E)dE$

7.3 Formule valide sia per lacune che per elettroni

- Mobilità $\mu = \dfrac{q\tau_m}{m^\star}$
- Velocità di deriva $v = \mu F$
- Conducibilità $\sigma = qn\mu$
- Resistività $\rho = \dfrac{1}{\sigma}$
- Densità di corrente $j = qn\mu F = \sigma F$

7.4 Livelli di energia

- Livello di Fermi $E_f = \dfrac{(3\pi^2 n)^{2/3}}{2m_n^*}\hbar^2$
- Livello di energia intrinseco $E_i = \dfrac{E_C + E_V}{2} + \dfrac{KT}{2}\ln\left(\dfrac{m_p^*}{m_n^*}\right)$

8 Correnti macroscopiche

- Effetto termoionico $J = AT^2 e^{-\dfrac{w}{kt}}$, $A = \dfrac{4\pi m^\star q k^2}{h^3}$
- Equazione di continuità della corrente $\dfrac{\partial n}{\partial t} = \dfrac{1}{q}\dfrac{\partial J_n}{\partial x} + g_n - r_n$, $\dfrac{\partial p}{\partial t} = -\dfrac{1}{q}\dfrac{\partial J_p}{\partial x} + g_n - r_n$

8.1 Effetto Hall

- Mobilità dei portatori $\mu_p = \dfrac{1}{B}\dfrac{V_H}{V_L}\dfrac{L}{W}$
- Densità di drogante $p = N_A = \dfrac{j_P}{q\mu_p F}$

8.2 Correnti di diffusione

- Legge di Einstein $D_n = \dfrac{kT}{q}\mu_n$
- 1° legge di Fick $\Phi_n = -D_n\dfrac{\partial n}{\partial x}$, $\Phi_p = -D_p\dfrac{\partial p}{\partial x}$
- 2° legge di Fick $\dfrac{\partial n}{\partial t} = D_n\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$, $\dfrac{\partial p}{\partial t} = D_p\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$

9 Distribuzioni

- Fermi Dirac $f_{FD}(e) = \dfrac{1}{1 + e^{\dfrac{E - E_f}{kt}}}$

- Maxwell Boltzmann $f_{MB}(e) = e^{-\dfrac{E - E_f}{kt}}$