

# Formulario di Elettronica dello stato solido

Lorenzo Rossi

Anno Accademico 2020/2021

Email: [lorenzo14.rossi@mail.polimi.it](mailto:lorenzo14.rossi@mail.polimi.it)

GitHub: <https://github.com/lorossi>

Quest'opera è distribuita con Licenza Creative Commons Attribuzione

Non commerciale 4.0 Internazionale 

Versione aggiornata al 07/05/2021

# Indice

<b>1</b>	<b>Riguardo al formulario</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Richiami di Base</b>	<b>1</b>
2.1	Serie . . . . .	1
2.2	Elettromagnetismo . . . . .	1
<b>3</b>	<b>Struttura cristallina</b>	<b>1</b>
3.1	Indici di Miller . . . . .	3
<b>4</b>	<b>Radiazione di corpo nero</b>	<b>3</b>
4.1	Cavità di corpo nero all'equilibrio . . . . .	3
4.1.1	Cavità monodimensionale . . . . .	3
<b>5</b>	<b>Onde e particelle</b>	<b>3</b>
5.1	Onde . . . . .	3
5.1.1	Pacchetti d'onda . . . . .	3
5.2	Particelle . . . . .	4
<b>6</b>	<b>Meccanica quantistica</b>	<b>4</b>
6.1	Teorema di Bloch . . . . .	4
6.2	Operatori . . . . .	5
6.3	Tunneling . . . . .	5
6.4	Incidenza . . . . .	5
6.5	Buca di potenziale . . . . .	6
6.5.1	A pareti infinite . . . . .	6
6.5.2	A pareti finite . . . . .	6
6.5.3	Parabolica . . . . .	6
6.5.4	Coppie di buche . . . . .	6
<b>7</b>	<b>Teoria semiclassica del trasporto</b>	<b>6</b>
7.1	Tight Binding . . . . .	7
7.2	Weak binding . . . . .	7
7.3	Formule valide sia per lacune che per elettroni . . . . .	7

# 1 Riguardo al formulario

Quest'opera è distribuita con Licenza Creative Commons - Attribuzione Non commerciale 4.0 Internazionale 

Questo formulario verrà espanso (ed, eventualmente, corretto) periodicamente fino a fine corso (o finché non verrà ritenuto completo).

Link repository di GitHub: <https://github.com/lorossi/formulario-stato-solido>

L'ultima versione può essere scaricata direttamente cliccando [su questo link](#).

In questo formulario ho cercato prima di tutto di mettere le formule importanti per la risoluzione degli esercizi, preferendole a quelle utili alla comprensione della materia.

## 2 Richiami di Base

### 2.1 Serie

- Serie geometrica  $s_n = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \dots$  converge a  $s_n = \frac{1}{1-q}$  se  $|q| < 1$
- Serie armonica  $s_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  converge se  $\alpha > 1$

### 2.2 Elettromagnetismo

- Forza  $|F| = \frac{|V|}{|x|}$
- Forza vettoriale  $\vec{F} = -\vec{\nabla}V = -\frac{1}{q}\vec{\nabla}U$
- Campo elettrico  $E = -qV$
- Energia  $\delta E = qF\delta x, \frac{\partial E}{\partial T} = qFv_g$

## 3 Struttura cristallina

- Packing factor  $PF = \frac{4/3 \cdot \pi r^3}{a^3}$
- Densità del reticolo  $l = \frac{\text{n° atomi} / \text{cella}}{\text{area cella}}$
- Interferenza del passo reticolare (diffrazione alla Bragg)  $2a \sin \theta = n\lambda$  con  $n$  ordine di diffrazione

Struttura	Metalli che la presentano in natura	Packing Factor
Cubico	Po	$\frac{\pi}{6} \approx 0.52$
GBB	Cr, Fe, Mo, Ta	$\pi \frac{\sqrt{3}}{8} \approx 0.68$
FCC	Ag, Au, Cu, Ni, Pb	$\pi \frac{\sqrt{2}}{6} \approx 0.74$

### 3.1 Indici di Miller

**Ipotesi:** il piano interseca in  $\{m, n, 0\}$

- Indici di Miller  $\{n, m, 0\}$
- Distanza interplanare  $d = \frac{a}{\sqrt{n^2 + m^2}}$

## 4 Radiazione di corpo nero

- Legge di Wien  $\lambda_p \cdot T = c_{\text{wien}}$
- Legge di Stefan-Boltzman  $\int_0^{\text{inf}} R_T d\nu = \sigma T^4$
- Potenza emessa dal corpo nero  $P = \sigma T^4 A = RA$ , con  $A$  area della superficie del corpo

### 4.1 Cavità di corpo nero all'equilibrio

#### 4.1.1 Cavità monodimensionale

- Lunghezze d'onda permesse  $a = n \frac{\lambda}{2}$
- Frequenze permesse  $\nu = \frac{c}{2a} n$  con  $n$  intero e non nullo
- Free spectral range FSR  $= \nu_n - \nu_{n-1} = \frac{c}{2a}$

## 5 Onde e particelle

### 5.1 Onde

- Frequenza / lunghezza d'onda  $\nu = \frac{c}{\lambda}$
- Energia associata ad un'onda  $E = h\nu = \hbar\omega$
- Vettore d'onda  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$
- Velocità di fase  $v_f = \frac{d\omega}{dk}$
- Velocità di gruppo  $v_g = \frac{\partial\omega}{\partial k} = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E}{\partial k} = \frac{\hbar k}{m}$

#### 5.1.1 Pacchetti d'onda

- Formula generale  $\Psi(x, t) = \int g(k) e^{i(kx - \omega t)} dk$
- Densità di probabilità  $|\Psi(x, t)|^2 = \exp \left\{ -\frac{(x - v_g t)^2}{2\alpha(1 + \beta^2 t^2 / \alpha^2)} \right\} \sqrt{\frac{\pi^2}{\alpha^2 + \beta^2 t^2}}$
- Deviazione standard  $\sigma_x(t) = \sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2 t^2}{\alpha}}$

- Pacchetto gaussiano:
  - Velocità  $v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}$
  - Dispersione  $\beta = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial^2 k}$
  - Oscillazione  $\omega = \omega_0 + v_g \cdot (k - k_0) + \beta \cdot (k - k_0)^2$
  - Il picco si sposta con  $v = v_g$

## 5.2 Particelle

- Energia  $E = E_k + U$ 
  - Energia cinetica  $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{h^2}{2m\lambda}$
  - Principio di equipartizione dell'energia, particella con  $l$  gradi di libertà:  $E_k = \frac{l}{2}kT$
  - Energia potenziale di una particella in un potenziale  $V$ :  $U = qV$
- Relazione di De Broglie  $\lambda = \frac{h}{p}$ ,  $p = \hbar k$
- Relazione di dispersione  $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$
- Vettore d'onda  $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$
- Lunghezza d'onda  $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE}}$

## 6 Meccanica quantistica

- Principio di indeterminazione di Heisenberg  $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$
- Equazione di Schrödinger  $i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}(x, t) = \hat{H} \Psi(x, t)$
- Flusso quantistico  $J = \frac{\hbar k}{m} |\Psi|^2$

### 6.1 Teorema di Bloch

**Ipotesi:**

- Struttura reticolare con passo  $a$
- Il potenziale è periodico  $V(x + a) = V(x)$
- La funzione d'onda si ripete a meno di un fattore di fase  $\psi(x + a) = \psi(x)e^{ika}$
- La densità di probabilità è periodica  $|\psi(x + a)|^2 = |\psi(x)|^2$

**Allora:**  $|\psi(x)| = u_k(x)e^{-ikx}$  con  $u_k(x)$  funzione di Bloch (*periodica*), quindi  $u_k(x+a) = u_k(x)$ . e  $e^{-ikx}$  involuppo.

Normalmente è costruita da  $\sin^2$  o  $\cos^2$ , con i massimi in corrispondenza dei centri delle barriere. Inoltre  $\psi(x+a) = u_k(x+a)e^{ikx}e^{ika}$ , con  $e^{ika}$  sfasamento.

## 6.2 Operatori

- Operatore Hamiltoniano  $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2mi} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V$
- Operatore quantità di moto (momento)  $\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$
- Operatore energia cinetica  $\hat{E}_{tot} = -i\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$
- Operatore energia totale  $\hat{E}_k = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$
- Operatore potenziale  $\hat{V} = V$
- Commutatore  $H = [\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = \hat{C}$ 
  - Se  $\hat{C} = 0$ , allora i due operatori *commutano*.

## 6.3 Tunneling

- Probabilità di tunneling  $|T|^2 \approx 16 \left( \frac{\alpha k}{\alpha^2 + k^2} \right)^2 \exp \{-2\alpha a\} \approx \exp \{-2\alpha a\}$
- Tempo medio di tunneling  $\langle t \rangle = \frac{t_{a/r}}{p_t} = \frac{2a}{vp_{\text{tun}}}$
- Approssimazione WKB
  - Probabilità  $|T|^2 = P_T = \exp \{-2\alpha a\}$
  - Penetrazione media  $x_p = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(V_0 - E)}} = \frac{1}{\alpha}$
  - **L'approssimazione è valida se e solo se  $\alpha a \gg 1$**
- Approssimazione di Fowler–Nordheim
  - **Caso particolare: barriera triangolare**  $P_T = \exp \left\{ -\frac{4}{3} \frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \frac{\Phi^{3/2}}{qF} \right\}$

## 6.4 Incidenza

- Coefficiente di riflessione  $R = \left( \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2$
- Coefficiente di trasmissione  $T = \left( \frac{2k_1}{k_1 + k_2} \right)^2 = 1 - R^2$

## 6.5 Buca di potenziale

### 6.5.1 A pareti infinite

- Autovalori  $E_n = \frac{\hbar^2}{8ma^2}n^2$ , spaziatura  $\propto n^2$

### 6.5.2 A pareti finite

- Funzioni pari  $\tan\left(\frac{a}{2\hbar}\sqrt{2mE}\right) = \sqrt{\frac{V_0 - E}{E}}$
- Funzioni dispari  $\tan\left(\frac{a}{2\hbar}\sqrt{2mE}\right) = -\sqrt{\frac{E}{V_0 - E}}$
- La soluzione delle equazioni avviene per via grafica

### 6.5.3 Parabolica

- Profilo di potenziale  $U = \frac{1}{2}\alpha x^2$
- Pulsazione caratteristica  $\omega = \sqrt{\frac{\alpha}{m}}$ , con *alpha* coefficiente del quadrato di  $x$
- Autovalori  $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega$ , spaziatura  $\propto n$

### 6.5.4 Coppie di buche

- Funzione degli autovalori  $\tan\left(k\frac{a}{2}\right) = -\frac{\hbar^2 k}{mU_0}$
- Proporzionalità della ddp  $|\psi|^2 \propto \cos\left(\frac{E_2 - E_1}{\hbar}t\right) = \cos\left(2\pi\frac{E_2 - E_1}{h}t\right)$ 
  - Oscillazione degli autovalori  $\omega = \frac{E_2 - E_1}{\hbar}$
  - Frequenza degli autovalori  $\nu = \frac{E_2 - E_1}{h}$

## 7 Teoria semiclassica del trasporto

- Formula fondamentale  $\frac{dk}{dt} = \frac{F}{\hbar}$
- Soluzione della formula fondamentale  $k = \frac{F}{\hbar}t + k_0$
- Velocità termica  $v_{th} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$
- Livello di Fermi  $E_f = \frac{(3\pi^2 n)^{2/3}}{2m_n^*} \hbar^2$



## 7.1 Tight Binding

- Massa efficace dell'elettrone  $m^* = \frac{\mathfrak{F}}{a} = \frac{\hbar^2}{\frac{\partial^2 E}{\partial k^2}}$
- Relazione di dispersione  $E(k) = E_{0-} + 2\gamma \cos(ka)$
- Oscillazioni di Bloch  $\omega = \frac{aqF}{\hbar}$ ,  $\nu = \frac{aqF}{h}$
- Libero cammino medio  $\lambda = v_{th} \cdot \tau_m$
- Modello di Drude:
  - Formula  $\frac{dk}{dt} + \frac{k}{\tau_m} = \frac{F}{\hbar}$  **vale solo per gli elettroni**
  - Soluzione generale  $k = \frac{q\tau_m F}{\hbar} (1 - e^{t/\tau_m})$
  - Soluzione stazionaria  $\frac{\partial k}{\partial t} = 0 \rightarrow \bar{k} = \frac{qF}{\hbar} \tau_m$

## 7.2 Weak binding

- Valore di aspettazione dell'energia al margine della funzione di Brillouin  $\langle E \rangle = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 = E_n^+ - |u_n|$

## 7.3 Formule valide sia per lacune che per elettroni

- Mobilità  $\mu = \frac{q\tau_m}{m^*}$
- Conducibilità  $\sigma = qn\mu$
- Resistività  $\rho = \frac{1}{\sigma}$
- Densità di corrente  $j = qn\mu F = \sigma F$