

Lista 1 - Processamento de Imagens

Lorran de Araújo Durães Soares*

2024

Questão 1

Vamos considerar o seguinte band-pass filter no domínio de Fourier:

$$\hat{H}(\omega) = \begin{cases} 1, & -b \leq \omega \leq -a, \\ 1, & a \leq \omega \leq b, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (1)$$

Calcule o núcleo do filtro no domínio espacial resolvendo a transformada inversa de Fourier da expressão 1:

$$H(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{H}(\omega) \exp(2\pi j\omega x) d\omega, \quad (2)$$

Resolução:

Vamos então calcular o filtro no espaço do domínio resolvendo a integral da equação 2:

$$\begin{aligned} H(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{H}(\omega) \exp(2\pi j\omega x) d\omega = \int_{-\infty}^{-b} 0 \cdot \exp(2\pi j\omega x) d\omega + \int_{-b}^{-a} 1 \cdot \exp(2\pi j\omega x) d\omega + \\ &\quad \int_{-a}^a 0 \cdot \exp(2\pi j\omega x) d\omega + \int_a^b 1 \cdot \exp(2\pi j\omega x) d\omega + \int_b^{\infty} 0 \cdot \exp(2\pi j\omega x) d\omega = \\ &\quad \int_{-b}^{-a} \exp(2\pi j\omega x) d\omega + \int_a^b \exp(2\pi j\omega x) d\omega = \frac{1}{2\pi jx} \cdot \exp(2\pi j\omega x) \Big|_{-b}^{-a} + \frac{1}{2\pi jx} \cdot \exp(2\pi j\omega x) \Big|_a^b = \\ &\quad \frac{1}{2\pi jx} \cdot \{[\exp(-2\pi jax) - \exp(-2\pi jbx)] + [\exp(2\pi jbx) - \exp(2\pi jax)]\} = \\ &\quad \frac{1}{2\pi jx} \cdot \{[\cos(2\pi ax) - j \sin(2\pi ax) - (\cos(2\pi bx) - j \sin(2\pi bx))] + [\cos(2\pi bx) + j \sin(2\pi bx) - \\ &\quad (\cos(2\pi ax) + j \sin(2\pi ax))]\} = \\ &\quad \frac{1}{2\pi jx} \cdot [\cos(2\pi ax) - j \sin(2\pi ax) - \cos(2\pi bx) + j \sin(2\pi bx) + \cos(2\pi bx) + j \sin(2\pi bx) - \cos(2\pi ax) - \\ &\quad j \sin(2\pi ax)] = \\ &\quad \frac{1}{2\pi jx} \cdot [-2j \sin(2\pi ax) + 2j \sin(2\pi bx)] = \frac{1}{\pi x} \cdot [-\sin(2\pi ax) + \sin(2\pi bx)] \end{aligned}$$

*lorranspbr@gmail.com

$$\therefore H(x) = \frac{1}{\pi x} \cdot [\sin(2\pi bx) - \sin(2\pi ax)]$$

Questão 2

Demonstre a seguinte expressão da aula2.pdf:

$$x(m, n) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega_1, \omega_2) \exp(j(m\omega_1 + n\omega_2)) d\omega_1 d\omega_2 \quad (3)$$

Resolução:

Temos que a transformada de Fourier da sequência $x(m, n)$ é dada por:

$$X(\omega_1, \omega_2) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(m, n) \exp(-j(m\omega_1 + n\omega_2)), \quad -\pi \leq \omega_1, \omega_2 \leq \pi \quad (4)$$

Vamos então mostrar que vale a expressão 3. De fato, da equação 4, teremos que:

$$\begin{aligned} X(\omega_1, \omega_2) \cdot \exp(j(p\omega_1 + q\omega_2)) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(m, n) \exp(-j(m\omega_1 + n\omega_2)) \cdot \exp(j(p\omega_1 + q\omega_2)) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega_1, \omega_2) \cdot \exp(j(p\omega_1 + q\omega_2)) d\omega_1 d\omega_2 = \\ &\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(m, n) \exp(-j((m-p)\omega_1 + (n-q)\omega_2)) \cdot d\omega_1 d\omega_2 \end{aligned} \quad (5)$$

Considerando o segundo termo da equação 5, invertendo a ordem entre integração e somatório, teremos que:

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(m, n) \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(-j((m-p)\omega_1 + (n-q)\omega_2)) \cdot d\omega_1 d\omega_2 \quad (6)$$

Porém, note que:

- Se $m = p$ e $n = q$, então:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(-j((m-p)\omega_1 + (n-q)\omega_2)) \cdot d\omega_1 d\omega_2 &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(0) \cdot d\omega_1 d\omega_2 = \\ \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\omega_1 d\omega_2 &= \int_{-\pi}^{\pi} \omega_1 \Big|_{-\pi}^{\pi} d\omega_2 = 2\pi \cdot \omega_2 \Big|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi \cdot 2\pi = 4\pi^2 \end{aligned}$$

- Se $m = p$ ou $n = q$, supondo, sem perda de generalidade, que $m = p$ e $n \neq q$, teremos então que:

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(-j((m-p)\omega_1 + (n-q)\omega_2)) \cdot d\omega_1 d\omega_2 &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(-j((n-q)\omega_2)) \cdot d\omega_1 d\omega_2 = \\
\int_{-\pi}^{\pi} \exp(-j((n-q)\omega_2)) \cdot \int_{-\pi}^{\pi} d\omega_1 d\omega_2 &= 2\pi \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \exp(-j((n-q)\omega_2)) \cdot d\omega_2 = \\
\frac{2\pi}{-j(n-q)} \cdot \exp(-j((n-q)\omega_2)) \Big|_{-\pi}^{\pi} &= \frac{2\pi}{-j(n-q)} \cdot [\exp(-j((n-q)\pi)) - \exp(j((n-q)\pi))] = \\
\frac{2\pi}{-j(n-q)} \cdot [\cos((n-q)\pi - j \sin((n-q)\pi)) - \cos((n-q)\pi + j \sin((n-q)\pi))] &= \\
\frac{2\pi}{-j(n-q)} \cdot [-2j \sin((n-q)\pi)] &
\end{aligned}$$

Mas, $(n-q) \in \mathbb{Z}$, logo $\sin((n-q)\pi) = 0$. Então:

$$\frac{2\pi}{-j(n-q)} \cdot [-2j \sin((n-q)\pi)] = 0$$

- Se $m \neq p$ e $n \neq q$, teremos então que:

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(-j((m-p)\omega_1 + (n-q)\omega_2)) \cdot d\omega_1 d\omega_2 &= \\
\frac{1}{-j(m-p)} \int_{-\pi}^{\pi} [\exp(-j((m-p)\pi + (n-q)\omega_2)) - \exp(-j(-(m-p)\pi + (n-q)\omega_2))] d\omega_2 &= \\
\frac{1}{-(m-p)(n-q)} [\exp(-j((m-p)\pi + (n-q)\pi)) - \exp(-j((m-p)\pi - (n-q)\pi)) - \\
\exp(-j(-(m-p)\pi + (n-q)\pi)) + \exp(-j(-(m-p)\pi - (n-q)\pi))] &
\end{aligned}$$

Novamente, como $\sin(x\pi) = 0$ para qualquer x inteiro, então sobrarão apenas os cossenos. Assim:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{-(m-p)(n-q)} [\cos((m-p)\pi + (n-q)\pi) - \cos((m-p)\pi - (n-q)\pi) - \\
\cos(-(m-p)\pi + (n-q)\pi) + \cos(-(m-p)\pi - (n-q)\pi)] &
\end{aligned}$$

Chamando $m-p = x$ e $n-q = y$, teremos que:

$$\frac{1}{-xy} [\cos(x\pi + y\pi) - \cos(x\pi - y\pi) - \cos(-x\pi + y\pi) + \cos(-x\pi - y\pi)]$$

Como $\cos(x) = \cos(-x)$, resultará também, que:

$$\frac{1}{-xy} [2 \cos(x\pi + y\pi) - 2 \cos(x\pi - y\pi)] = \frac{1}{-xy} [2 \cos(\pi(x+y)) - 2 \cos(\pi(x-y))]$$

Porém, note que:

- Se $x + y$ é par, então x e y são pares ou x e y são ímpares, o que implicaria que $x - y$ é par.
- Se $x + y$ é ímpar, então ou x ou y é ímpar, o que implicaria que $x - y$ é ímpar.

Logo, para o primeiro caso:

$$\frac{1}{-xy} [2 \cos(\pi(x+y)) - 2 \cos(\pi(x-y))] = \frac{1}{-xy} (2 - 2) = 0.$$

Para o segundo caso:

$$\frac{1}{-xy} [2 \cos(\pi(x+y)) - 2 \cos(\pi(x-y))] = \frac{1}{-xy} (-2 - (-2)) = 0.$$

Ou seja:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(-j((m-p)\omega_1 + (n-q)\omega_2)) \cdot d\omega_1 d\omega_2 = 0$$

Logo, a integral da expressão 6 só tem resultado diferente de 0 se $m = p$ e $n = q$. Logo, a equação 6 resultará em:

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(m, n) \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(-j((m-p)\omega_1 + (n-q)\omega_2)) \cdot d\omega_1 d\omega_2 = 4\pi^2 \cdot x(p, q)$$

Substituindo então na equação 5, teremos então que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega_1, \omega_2) \cdot \exp(j(p\omega_1 + q\omega_2)) d\omega_1 d\omega_2 = 4\pi^2 \cdot x(p, q)$$

$$\therefore x(p, q) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega_1, \omega_2) \exp(j(p\omega_1 + q\omega_2)) d\omega_1 d\omega_2$$

Questão 3

Sejam duas matrizes não singulares $A, B \in R^{N \times N}$. Mostre que o produto de Kronecker satisfaz:

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1} \quad (7)$$

Resolução:

Vamos primeiramente provar que vale a seguinte propriedade, onde $A, B, C, D \in R^{N \times N}$:

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC \otimes BD)$$

De fato, utilizando a multiplicação entre blocos de matrizes, teremos que:

$$[(A \otimes B)(C \otimes D)]_{ij} = [a_{i1}B \cdots a_{iN}B][c_{1j}D \cdots c_{Nj}D]^T = \sum_{k=1}^N (a_{ik}B)(c_{kj}D) =$$

$$\sum_{k=1}^N a_{ik}c_{kj}BD = [AC]_{ij}BD = [(AC) \otimes (BD)]_{ij}$$

para quaisquer $i, j \in \{1, \dots, N\}$. Logo, podemos concluir que vale:

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC \otimes BD)$$

Logo, fazendo o uso da propriedade demonstrada acima, iremos provar então a equação 7.

Por hipótese, A e B são não singulares, então temos que existe as matrizes inversas A^{-1} e B^{-1} . Queremos mostrar então que:

$$(A \otimes B)(A^{-1} \otimes B^{-1}) = I_{N^2}$$

e

$$(A^{-1} \otimes B^{-1})(A \otimes B) = I_{N^2}$$

De fato:

$$(A \otimes B)(A^{-1} \otimes B^{-1}) = (AA^{-1} \otimes BB^{-1}) = I_N \otimes I_N = I_{N^2}$$

e

$$(A^{-1} \otimes B^{-1})(A \otimes B) = (A^{-1}A \otimes B^{-1}B) = I_N \otimes I_N = I_{N^2}$$

Portanto, podemos concluir que:

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$$

Questão 4

Generalize o Sampling Theorem da aula7.pdf para os casos em que $T < \frac{1}{2\omega_c}$ e $T > \frac{1}{2\omega_c}$.

Resolução:

O Teorema de Amostragem estabelece as condições necessárias para que um sinal contínuo $f(x)$ possa ser perfeitamente reconstruído a partir de suas amostras discretas $f_n = f(nT)$, onde $T = \frac{1}{\omega_s}$ é o período de amostragem, e ω_s é a frequência de amostragem. A transformada de Fourier do sinal, $F(\omega)$, deve ser igual a zero para todas as frequências fora do intervalo $-\omega_c \leq \omega \leq \omega_c$, onde ω_c é denominada frequência de corte.

Inicialmente, vamos considerar a função de amostragem ideal dado pelo Dirac delta, com espaçamento T :

$$\text{comb}(x, T) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x - mT)$$

A imagem amostrada pode ser representada pela seguinte equação, onde o delta de Dirac seleciona os valores do sinal contínuo $f(x)$ em múltiplos do período de amostragem T :

$$f_s(x) = f(x) \cdot \text{comb}(x, T) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(mT) \delta(x - mT)$$

A transformada de Fourier da função comb com espaçamento T é outra função comb , dada por:

$$F\{\text{comb}(x, t)\} = \text{COMB}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x - mT) \right] \cdot \exp(-2\pi j x \omega) dx =$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - mT) \cdot \exp(-2\pi j x \omega) dx = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-2\pi j \omega mT) = \omega_s \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s)$$

pois $\sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-2\pi j \omega mT)$ é uma série geométrica que tem como resultado a série de Fourier comb no domínio da frequência.

Aplicando a propriedade da multiplicação na imagem amostrada f_s , temos:

$$f_s(x) = f(x) \cdot \text{comb}(x, T) \Leftrightarrow F_s(\omega) = F(\omega) \otimes \text{COMB}(\omega)$$

$$F_s(\omega) = F(\omega) \otimes \omega_s \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s) \Leftrightarrow F_s(\omega) = \omega_s \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega') \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s - \omega') d\omega' \Leftrightarrow$$

$$F_s(\omega) = \omega_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega') \delta(\omega - k\omega_s - \omega') d\omega' \Leftrightarrow F_s(\omega) = \omega_s \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(\omega - k\omega_s)$$

Logo, a transformada de Fourier da imagem amostrada é, escalada por um fator, a replicação periódica do espectro $F(\omega)$.

Se $\omega_s > 2\omega_c$ (ou $T < \frac{1}{2\omega_c}$), então $F(\omega)$ pode ser recuperada através de um filtro passa-baixa dado por:

$$H(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{\omega_s}, & -\omega_c \leq \omega \leq \omega_c, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (8)$$

Esse filtro delimita a banda do sinal original, permitindo a reconstrução perfeita. Assim, poderemos interpolar o sinal contínuo a partir das amostras discretas. Logo, como demonstrado na aula7.pdf, para $T = \frac{1}{2\omega_c}$, o sinal $f(x)$ pode ser recuperado através da interpolação:

$$f(x) = \frac{1}{2\omega_c} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT) \cdot \frac{\sin([\omega_c(x - nT)])}{[\omega_c(x - nT)]}$$

Porém, se $\omega_s < 2\omega_c$ (ou $T > \frac{1}{2\omega_c}$), ocorre o fenômeno de aliasing, presente na figura 1 (under sampling), caracterizado pela sobreposição de réplicas espectrais, tornando impossível a recuperação exata do sinal original $f(x)$. Note como a sobreposição entre as frequências impossibilita o isolamento e, conseqüentemente, não torna possível a perfeita recuperação do sinal.

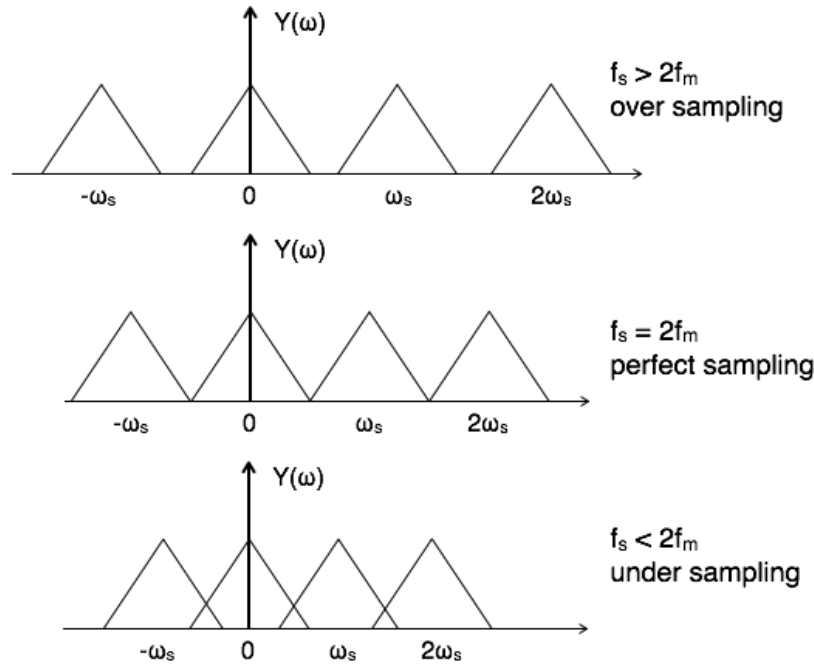


Figura 1 – Casos do Sampling Theorem

Este fenômeno pode ser evitado aplicando, previamente à amostragem, um filtro passa-baixa no sinal original, de forma que a banda do sinal seja reduzida, garantindo que $\omega_s \geq 2\omega_c$, permitindo então a reconstrução do sinal.

Questão 5

Demostre a seguinte expressão da aula 4:

$$v = \psi u$$

onde

$$\psi = F \otimes F$$

Resolução:

Seja $u(m, n) \in R^{N \times N}$ uma imagem e $v(k, l) \in R^{N \times N}$ sua respectiva DFT, onde a transformada de Fourier é definida como:

$$F = \left\{ \frac{1}{\sqrt{N}} \exp(-2\pi j \frac{kn}{N}), 0 \leq k, n \leq N-1 \right\}$$

Logo, o cálculo da transformada de $u(m, n)$ em duas dimensões é dada por:

$$v(k, l) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} \exp(-2\pi j \frac{km}{N}) u(m, n) \exp(-2\pi j \frac{ln}{N}).$$

Para simplificar a escrita, vamos adotar a seguinte notação:

$$F(p, q) = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp(-2\pi j \frac{pq}{N})$$

Logo:

$$v(k, l) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} F(k, m) u(m, n) F(l, n).$$

Para representar u e v como vetores, considerando a indexação começando por 0, teremos que:

$$u(m, n) = \vec{u}(m(N-1) + n)$$

onde

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \vec{u}(0 \cdot N + 0) = u(0, 0) \\ \vec{u}(0 \cdot N + 1) = u(0, 1) \\ \vdots \\ \vec{u}(0 \cdot N + (N-1)) = u(0, N-1) \\ \vec{u}(1 \cdot N + 0) = u(1, 0) \\ \vdots \\ \vec{u}(1 \cdot N + (N-1)) = u(1, N-1) \\ \vdots \\ \vec{u}((N-1)N + (N-1)) = u(N-1, N-1) \end{pmatrix}$$

logo, $\vec{u}, \vec{v} \in R^{N^2}$.

Então, vetorizando, a DFT ficaria então definida como:

$$\vec{v}(k \cdot N + l) = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} F(k, m) \cdot \vec{u}(m \cdot N + n) \cdot F(l, n)$$

Além disso, temos que o produto de Kronecker $F \otimes F \in R^{N^2 \times N^2}$ é dado por:

$$F \otimes F = \begin{pmatrix} F(0, 0) \cdot F & \cdots & F(0, N-1) \cdot F \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F(N-1, 0) \cdot F & \cdots & F(N-1, N-1) \cdot F \end{pmatrix}$$

onde:

$$F(p, q) \cdot F = \begin{pmatrix} F(p, q) \cdot F(0, 0) & \cdots & F(p, q) \cdot F(0, N-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F(p, q) \cdot F(N-1, 0) & \cdots & F(p, q) \cdot F(N-1, N-1) \end{pmatrix}$$

Observe que a $(k \cdot N + l)$ -ésima linha de $F \otimes F$ é dada por:

$$F(k, 0) \cdot F(l, 0) \cdots F(k, 0) \cdot F(l, N-1) \cdots F(k, N-1) \cdot F(l, 0) \cdots F(k, N-1) \cdot F(l, N-1)$$

Logo, sabendo que multiplicação entre $F \otimes F$ e \vec{u} está bem definida já que $F \otimes F \in R^{N^2 \times N^2}$ e $\vec{u} \in R^{N^2}$, teremos então que a multiplicação entre a $(k \cdot N + l)$ -ésima linha de $F \otimes F$ e \vec{u} resultará em:

$$F(k, 0) \cdot F(l, 0) \cdot \vec{u}(0 \cdot N + 0) + \cdots + F(k, 0) \cdot F(l, N-1) \vec{u}(0 \cdot N + (N-1)) + \cdots +$$

$$F(k, N-1) \cdot F(l, N-1) \vec{u}((N-1) \cdot N + (N-1)) = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} F(k, m) \cdot F(l, n) \cdot \vec{u}(m \cdot N + n) =$$

$$\sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} F(k, m) \cdot \vec{u}(m \cdot N + n) \cdot F(l, n) = \vec{v}(k \cdot N + l)$$

Portanto, como vale para quaisquer $k, l \in \{0, 1, \dots, N-1\}$, podemos então concluir que:

$$\vec{v} = F \otimes F \cdot \vec{u}$$