Lista 1 - Processamento de Imagens

Lorran de Araújo Durães Soares*

2024

Questão 1

Vamos considerar o seguinte band-pass filter no domínio de Fourier:

$$\widehat{H}(\omega) = \begin{cases} 1, & -b \leq \omega \leq -a, \\ 1, & a \leq \omega \leq b, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{1}$$

Calcule o núcleo do filtro no domínio espacial resolvendo a transformada inversa de Fourier da expressão 1:

$$H(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{H}(\omega) \exp(2\pi j \omega x)\, d\omega, \tag{2}$$

Resolução:

Vamos então calcular o filtro no espaço do domínio resolvendo a integral da equação 2:

$$H(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{H}(\omega) \exp(2\pi j\omega x)\, d\omega = \int_{-\infty}^{-b} 0 \cdot \exp(2\pi j\omega x)\, d\omega + \int_{-b}^{-a} 1 \cdot \exp(2\pi j\omega x)\, d\omega +$$

$$\int_{-a}^{-a} 0 \cdot \exp(2\pi j\omega x)\, d\omega + \int_{a}^{b} 1 \cdot \exp(2\pi j\omega x)\, d\omega + \int_{b}^{\infty} 0 \cdot \exp(2\pi j\omega x)\, d\omega =$$

$$\int_{-b}^{-a} \exp(2\pi j\omega x)\, d\omega + \int_{a}^{b} \exp(2\pi j\omega x)\, d\omega = \frac{1}{2\pi jx} \cdot \exp(2\pi j\omega x)\bigg|_{-b}^{-a} + \frac{1}{2\pi jx} \cdot \exp(2\pi j\omega x)\bigg|_{a}^{b} =$$

$$\frac{1}{2\pi jx} \cdot \{[\exp(-2\pi jax) - \exp(-2\pi jbx)] + [\exp(2\pi jbx) - \exp(2\pi jax)]\} =$$

$$\frac{1}{2\pi jx} \cdot \{[\cos(2\pi ax) - j\sin(2\pi ax) - (\cos(2\pi bx) - j\sin(2\pi bx))] + [\cos(2\pi bx) + j\sin(2\pi bx) -$$
$$(\cos(2\pi ax) + j\sin(2\pi ax))]\} =$$

$$\frac{1}{2\pi jx} \cdot [\cos(2\pi ax) - j\sin(2\pi ax) - \cos(2\pi bx) + j\sin(2\pi bx) + \cos(2\pi bx) + j\sin(2\pi bx) - \cos(2\pi ax) -$$
$$j\sin(2\pi ax)] =$$

$$\frac{1}{2\pi jx} \cdot [-2j\sin(2\pi ax) + 2j\sin(2\pi bx)] = \frac{1}{\pi x} \cdot [-\sin(2\pi ax) + \sin(2\pi bx)]$$

*lorranspbr@gmail.com

$$\boxed{\therefore H(x) = \frac{1}{\pi x} \cdot [\sin(2\pi bx) - \sin(2\pi ax)]}$$

Questão 2

Demonstre a seguinte expressão da aula2.pdf:

$$x(m,n) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega_1, \omega_2) \exp\left(j(m\omega_1 + n\omega_2)\right) d\omega_1 d\omega_2 \tag{3}$$

Resolução:

Temos que a transformada de Fourier da sequência $x(m,n)$ é dada por:

$$X(\omega_1, \omega_2) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(m,n) \exp\left(-j(m\omega_1 + n\omega_2)\right), \quad -\pi \le \omega_1, \omega_2 \le \pi \tag{4}$$

Vamos então mostrar que vale a expresão 3. De fato, da equação 4, teremos que:

$$X(\omega_1, \omega_2) \cdot \exp\left(j(p\omega_1 + q\omega_2)\right) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(m,n) \exp\left(-j(m\omega_1 + n\omega_2)\right) \cdot \exp\left(j(p\omega_1 + q\omega_2)\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega_1, \omega_2) \cdot \exp\left(j(p\omega_1 + q\omega_2)\right) d\omega_1 d\omega_2 =$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(m,n) \exp\left(-j((m-p)\omega_1 + (n-q)\omega_2)\right) \cdot d\omega_1 d\omega_2 \tag{5}$$

Coniderando o segundo termo da equação 5, invertendo a ordem entre integração e somatório, teremos que:

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(m,n) \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(-j((m-p)\omega_1 + (n-q)\omega_2)\right) \cdot d\omega_1 d\omega_2 \tag{6}$$

Porém, note que:

- Se $m = p$ e $n = q$, então:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(-j((m-p)\omega_1 + (n-q)\omega_2)\right) \cdot d\omega_1 d\omega_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(0) \cdot d\omega_1 d\omega_2 =$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\omega_1 d\omega_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \omega_1 \Big|_{-\pi}^{\pi} d\omega_2 = 2\pi \cdot \omega_2 \Big|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi \cdot 2\pi = 4\pi^2$$

- Se $m = p$ ou $n = q$, supondo, sem perca de generalidade, que $m = p$ e $n \neq q$, teremos então que:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(-j((m-p)\omega_1 + (n-q)\omega_2)\right) \cdot d\omega_1 d\omega_2 = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(-j((n-q)\omega_2)\right) \cdot d\omega_1 d\omega_2 =$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(-j((n-q)\omega_2)\right) \cdot \int_{-\pi}^{\pi} d\omega_1 d\omega_2 = 2\pi \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(-j((n-q)\omega_2)\right) \cdot d\omega_2 =$$

$$\frac{2\pi}{-j(n-q)} \cdot \exp\left(-j((n-q)\omega_2)\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi}{-j(n-q)} \cdot \left[\exp\left(-j((n-q)\pi)\right) - \exp\left(j((n-q)\pi)\right)\right] =$$

$$\frac{2\pi}{-j(n-q)} \cdot \left[\cos((n-q)\pi - j\sin((n-q)\pi)) - \cos((n-q)\pi - j\sin((n-q)\pi))\right] =$$

$$\frac{2\pi}{-j(n-q)} \cdot \left[-2j\sin((n-q)\pi)\right]$$

Mas, $(n-q) \in Z$, logo $\sin((n-q)\pi) = 0$. Então:

$$\frac{2\pi}{-j(n-q)} \cdot \left[-2j\sin((n-q)\pi)\right] = 0$$

- Se $m \neq p$ e $n \neq q$, teremos então que:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(-j((m-p)\omega_1 + (n-q)\omega_2)\right) \cdot d\omega_1 d\omega_2 =$$

$$\frac{1}{-j(m-p)} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\exp\left(-j((m-p)\pi + (n-q)\omega_2)\right) - \exp\left(-j(-(m-p)\pi + (n-q)\omega_2)\right)\right] d\omega_2 =$$

$$\frac{1}{-(m-p)(n-q)} \left[\exp\left(-j((m-p)\pi + (n-q)\pi)\right) - \exp\left(-j((m-p)\pi - (n-q)\pi)\right) -\right.$$

$$\left.\exp\left(-j(-(m-p)\pi + (n-q)\pi)\right) + \exp\left(-j(-(m-p)\pi - (n-q)\pi)\right)\right]$$

Novamente, como $\sin(x\pi) = 0$ para qualquer x inteiro, então sobrarão apenas os cossenos. Assim:

$$\frac{1}{-(m-p)(n-q)} \left[\cos\left((m-p)\pi + (n-q)\pi\right) - \cos\left((m-p)\pi - (n-q)\pi\right) -\right.$$

$$\left.\cos\left(-(m-p)\pi + (n-q)\pi\right) + \cos\left(-(m-p)\pi - (n-q)\pi\right)\right]$$

Chamando $m - p = x$ e $n - q = y$, teremos que:

$$\frac{1}{-xy}\left[\cos\left(x\pi + y\pi\right) - \cos\left(x\pi - y\pi\right) - \cos\left(-x\pi + y\pi\right) + \cos\left(-x\pi - y\pi\right)\right]$$

Como $\cos(x) = \cos(-x)$, resultará também, que:

$$\frac{1}{-xy}\left[2\cos\left(x\pi + y\pi\right) - 2\cos\left(x\pi - y\pi\right)\right] = \frac{1}{-xy}\left[2\cos\left(\pi(x+y)\right) - 2\cos\left(\pi(x-y)\right)\right]$$

Porém, note que:

– Se $x+y$ é par, então x e y são pares ou x e y são ímpares, o que implicaria que $x-y$ é par.

– Se $x+y$ é impar, então ou x ou y é impar, o que implicaria que $x-y$ é ímpar.

Logo, para o primeiro caso:

$$\frac{1}{-xy}\left[2\cos\left(\pi(x+y)\right)-2\cos\left(\pi(x-y)\right)\right]=\frac{1}{-xy}(2-2)=0.$$

Para o segundo caso:

$$\frac{1}{-xy}\left[2\cos\left(\pi(x+y)\right)-2\cos\left(\pi(x-y)\right)\right]=\frac{1}{-xy}(-2-(-2))=0.$$

Ou seja:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp\left(-j((m-p)\omega_1+(n-q)\omega_2)\right)\cdot d\omega_1 d\omega_2=0$$

Logo, a integral da expressão 6 só tem resultado diferente de 0 se $m=p$ e $n=q$. Logo, a equação 6 resultará em:

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(m,n)\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp\left(-j((m-p)\omega_1+(n-q)\omega_2)\right)\cdot d\omega_1 d\omega_2=4\pi^2\cdot x(p,q)$$

Substituindo então na equação 5, teremos então que:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(\omega_1,\omega_2)\cdot\exp\left(j(p\omega_1+q\omega_2)\right)d\omega_1 d\omega_2=4\pi^2\cdot x(p,q)$$

$$\boxed{\therefore x(p,q)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(\omega_1,\omega_2)\exp\left(j(p\omega_1+q\omega_2)\right)d\omega_1 d\omega_2}$$

Questão 3

Sejam duas matrizes não singulares $A, B \in R^{N\times N}$. Mostre que o produto de Kronecker satisfaz:

$$(A\otimes B)^{-1}=A^{-1}\otimes B^{-1} \tag{7}$$

Resolução:

Vamos provar primeiramente que vale a propriedade seguinte, que posteriormente será usada na resolução da questão, onde $A, B, C, D \in R^{N\times N}$:

$$(A\otimes B)(C\otimes D)=(AC\otimes BD)$$

De fato, utilizando a multiplicação entre blocos de matrizes, teremos que:

$$[(A \otimes B)(C \otimes D)]_{ij} = \sum_{k=1}^{N} (a_{ik}B)(c_{kj}D) = \sum_{k=1}^{N} a_{ik}c_{kj}BD = [AC]_{ij}BD = [(AC) \otimes (BD)]_{ij}$$

para quaisquer $i, j \in \{1, .., N\}$. Logo, podemos concluir que vale:

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC \otimes BD)$$

Partiremos então para a resolução da questão. Como A e B são não singulares, então temos que existe as matrizes inversas A^{-1} e B^{-1}. Queremos mostrar então que:

$$(A \otimes B)(A^{-1} \otimes B^{-1}) = I_{N^2}$$

e

$$(A^{-1} \otimes B^{-1})(A \otimes B) = I_{N^2}$$

De fato:

$$(A \otimes B)(A^{-1} \otimes B^{-1}) = (AA^{-1} \otimes BB^{-1}) = I_N \otimes I_N = I_{N^2}$$

e

$$(A^{-1} \otimes B^{-1})(A \otimes B) = (A^{-1}A \otimes B^{-1}B) = I_N \otimes I_N = I_{N^2}$$

Portanto, podemos concluir que:

$$\boxed{(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}}$$

Questão 4

Generalize o Sampling Theorem da aula7.pdf para os casos em que $T < \frac{1}{2\omega_c}$ *e* $T > \frac{1}{2\omega_c}$.

Resolução:

O Teorema de Amostragem estabelece as condições necessárias para que um sinal contínuo $f(x)$ possa ser perfeitamente reconstruído a partir de suas amostras discretas $f_n = f(nT)$, onde $T = \frac{1}{\omega_s}$ é o período de amostragem, e ω_s é a frequência de amostragem. A transformada de Fourier do sinal, $F(\omega)$, deve ser igual a zero para todas as frequências fora do intervalo $-\omega_c \leq \omega \leq \omega_c$, onde ω_c é a frequência de corte.

Inicialmente, vamos considerar a função de amostragem ideal dado pelo Dirac delta, com espaçamento T:

$$comb(x, T) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x - mT)$$

A imagem amostrada pode ser representada pela seguinte equação, onde o delta de Dirac seleciona os valores do sinal contínuo $f(x)$ em múltiplos do período de amostragem T:

$$f_s(x) = f(x) \cdot comb(x,T) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(mT)\delta(x - mT)$$

A transformada de Fourier da função *comb* com espaçamento T é outra função *comb*, dada por:

$$F\{comb(x,t)\} = COMB(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} [\sum_{m=\infty}^{\infty} \delta(x - mT)] \cdot \exp(-2\pi jx\omega)dx =$$

$$\sum_{m=\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - mT) \cdot \exp(-2\pi jx\omega)dx = \sum_{m=\infty}^{\infty} \exp(-2\pi j\omega mT) = \omega_s \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s)$$

pois $\sum_{m=\infty}^{\infty} \exp(-2\pi j\omega mT)$ é uma série geométrica que tem como resultado a série de Fourier *comb* no domínio da frequência.

Aplicando a propriedade da multiplicação na imagem amostrada f_s, temos:

$$f_s(x) = f(x) \cdot comb(x,T) \Leftrightarrow F_s(\omega) = F(\omega) \otimes COMB(\omega)$$

$$F_s(\omega) = F(\omega) \otimes \omega_s \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s) \Leftrightarrow F_s(\omega) = \omega_s \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega') \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s - \omega')d\omega' \Leftrightarrow$$

$$F_s(\omega) = \omega_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega')\delta(\omega - k\omega_s - \omega')d\omega' \Leftrightarrow F_s(\omega) = \omega_s \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(\omega - k\omega_s)$$

Logo, a transformada de Fourier da imagem amostrada é, escalada por um fator, a replicação periódica do espectro $F(\omega)$.

Se $\omega_s > 2\omega_c$ (ou $T < \frac{1}{2\omega_c}$), então $F(\omega)$ pode ser recuperada através de um filtro passa-baixa dado por:

$$H(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{\omega_s}, & -\omega_c \leq \omega \leq \omega_c, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{8}$$

Esse filtro delimita a banda do sinal original, permitindo a reconstrução perfeita. Assim, poderemos interpolar o sinal contínuo a partir das amostras discretas. Logo, como demonstrado na aula7.pdf, para $T = \frac{1}{2\omega_c}$, o sinal $f(x)$ pode ser recuperado através da interpolação:

$$f(x) = \frac{1}{2\omega_c} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT) \cdot \frac{\sin\left([\omega_c(x - nT)]\right)}{[\omega_c(x - nT)]}$$

Porém, se $\omega_s < 2\omega_c$ (ou $T > \frac{1}{2\omega_c}$), ocorre o fenômeno de aliasing, presente na figura 1 (under sampling), caracterizado pela sobreposição de réplicas espectrais, tornando impossível a recuperação exata do sinal original $f(x)$. Note como a sobreposição entre as frequências impossibilita o isolamento e, consequentemente, não torna possível a perfeita recuperação do sinal.

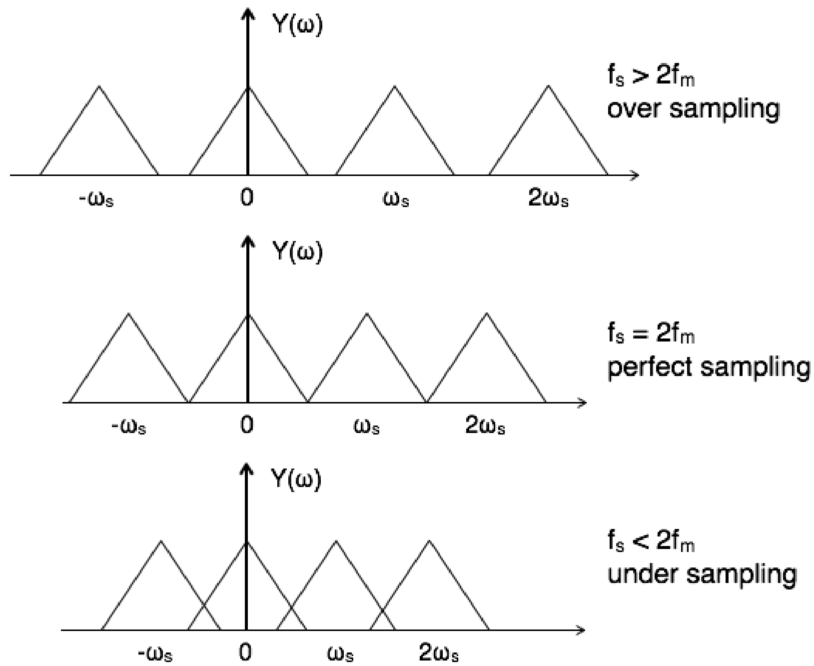

Figura 1 – Casos do Sampling Theorem

Este fenômeno pode ser evitado aplicando, previamente à amostragem, um filtro passa-baixa no sinal original, de forma que a banda do sinal seja reduzida, garantindo que $\omega_s \geq 2\omega_c$, permitindo então a reconstrução do sinal.

Questão 5

Demostre a seguinte expressão da aula 4:

$$v = \psi u$$

onde

$$\psi = F \otimes F$$

Resolução:

Seja $u(m,n) \in R^{N \times N}$ uma imagem e $v(k,l) \in R^{N \times N}$ sua respectiva DFT, onde a transformada de Fourier é definida como:

$$F = \{\frac{1}{\sqrt{N}} \exp(-2\pi j \frac{kn}{N}), 0 \leq k, n \leq N-1\}$$

Logo, o cálculo da transformada de $u(m,n)$ em duas dimensões é dada por:

$$v(k,l) = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1}\exp(-2\pi j\frac{km}{N})u(m,n)\exp(-2\pi j\frac{ln}{N}).$$

Para simplificar a escrita, vamos adotar a seguinte notação:

$$F(p,q) = \frac{1}{\sqrt{N}}\exp(-2\pi j\frac{pq}{N})$$

Logo:

$$v(k,l) = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1}F(k,m)u(m,n)F(l,n).$$

Para representar u e v como vetores, considerando a indexação começando por 0, teremos que:

$$u(m,n) = \vec{u}(m(N-1)+n)$$

onde

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \vec{u}(0\cdot N+0) = u(0,0) \\ \vec{u}(0\cdot N+1) = u(0,1) \\ \vdots \\ \vec{u}(0\cdot N+(N-1)) = u(0,N-1) \\ \vec{u}(1\cdot N+0) = u(1,0) \\ \vdots \\ \vec{u}(1\cdot N+(N-1)) = u(1,N-1) \\ \vdots \\ \vec{u}((N-1)N+(N-1)) = u(N-1,N-1) \end{pmatrix}$$

logo, $\vec{u},\vec{v} \in R^{N^2}$.

Então, vetorizando, a DFT ficaria então definida como:

$$\vec{v}(k\cdot N+l) = \sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1}F(k,m)\cdot\vec{u}(m\cdot N+n)\cdot F(l,n)$$

Além disso, temos que o produto de Kronecker $F\otimes F \in R^{N^2\times N^2}$ é dado por:

$$F\otimes F = \begin{pmatrix} F(0,0)\cdot F & \cdots & F(0,N-1)\cdot F \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F(N-1,0)\cdot F & \cdots & F(N-1,N-1)\cdot F \end{pmatrix}$$

onde:

$$F(p,q)\cdot F = \begin{pmatrix} F(p,q)\cdot F(0,0) & \cdots & F(p,q)\cdot F(0,N-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F(p,q)\cdot F(N-1,0) & \cdots & F(p,q)\cdot F(N-1,N-1) \end{pmatrix}$$

Observe que a $(k \cdot N + l)$-ésima linha de $F \otimes F$ é dada por:

$$F(k,0) \cdot F(l,0) \cdots F(k,0) \cdot F(l,N-1) \cdots F(k,N-1) \cdot F(l,0) \cdots F(k,N-1) \cdot F(l,N-1)$$

Logo, sabendo que múltiplicação entre $F \otimes F$ e $\vec{u}$ está bem definida já que $F \otimes F \in R^{N^2 \times N^2}$ e $\vec{u} \in R^{N^2}$, teremos então que a multiplicação entre a $(k \cdot N + l)$-ésima linha de $F \otimes F$ e $\vec{u}$ resultará em:

$$F(k,0) \cdot F(l,0) \cdot \vec{u}(0 \cdot N + 0) + \cdots + F(k,0) \cdot F(l,N-1)\vec{u}(0 \cdot N + (N-1)) + \cdots +$$

$$F(k,N-1) \cdot F(l,N-1)\vec{u}((N-1) \cdot N + (N-1)) = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} F(k,m) \cdot F(l,n) \cdot \vec{u}(m \cdot N + n) =$$

$$\sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} F(k,m) \cdot \vec{u}(m \cdot N + n) \cdot F(l,n) = \vec{v}(k \cdot N + l)$$

Portanto, como vale para quaisquer $k, l \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$, podemos então concluir que:

$$\boxed{\vec{v} = F \otimes F \cdot \vec{u}}$$