

METODY NUMERYCZNE – LABORATORIUM

Zadanie 2 – Metody rozwiązywania układu N równań liniowych z N niewiadomymi

Opis rozwiązania

W zadaniu została wykorzystana metoda iteracyjna Gaussa-Seidla. Metoda Gaussa-Seidla jest metodą relaksacyjną, w której poszukiwanie rozwiązania rozpoczyna się od dowolnie wybranego rozwiązania próbnego x_0 , po czym w kolejnych krokach, zwanych iteracjami, za pomocą prostego algorytmu zmienia się kolejno jego składowe, tak by coraz lepiej odpowiadały rzeczywistemu rozwiązaniu. Metoda Gaussa-Seidla bazuje na metodzie Jacobiego, w której krok iteracyjny zmieniono w ten sposób, by każda modyfikacja rozwiązania próbnego korzystała ze wszystkich aktualnie dostępnych przybliżonych składowych rozwiązania. Pozwala to zaoszczędzić połowę pamięci operacyjnej i w większości zastosowań praktycznych zmniejsza ok. dwukrotnie liczbę obliczeń niezbędnych do osiągnięcia zadanej dokładności rozwiązania.

Algorytm Gaussa-Seidla:

1. Sprawdzanie zbieżności poprzez kryterium silnej dominacji w rzędach.
2. Wyznaczenie macierzy diagonalnej (D), dolnotrójkątnej (L), górnortrójkątnej (U) oraz macierzy odwrotnej do D (D^{-1}).
3. Wymnażanie macierzy odwrotnej (D^{-1}) z wektorem wyrazów wolnych (B), macierzą górnortrójkątną (U) i dolnotrójkątną (L).
4. Obliczaj kolejne przybliżenia wektora wynikowego, aż do uzyskania wymaganej dokładności lub aż do określonej ilości iteracji wg wzoru:

$$x^{n+1} = D^{-1}b - D^{-1}Lx^{n+1} - D^{-1}Ux^n$$

Wyniki

Wyniki dla macierzy spełniających warunki zbieżności:

```
"D:\Studia\4 semestr 2015-16\Metody Numeryczne\Zadanie_2\bin\Debug\Zadanie_2.exe"
Macierz wczytana z pliku:
0.5      -0.0625  0.1875  0.0625  1.5
-0.0625  0.5      0      0      -1.625
0.1875   0      0.375  0.125  1
0.0625   0      0.125  0.25   0.4375

0.5      -0.0625  0.1875  0.0625  1.5
-0.0625  0.5      0      0      -1.625
0.1875   0      0.375  0.125  1
0.0625   0      0.125  0.25   0.4375

Macierz A:
0.5      -0.0625  0.1875  0.0625
-0.0625  0.5      0      0
0.1875   0      0.375  0.125
0.0625   0      0.125  0.25

Macierz wyrazow wolnych B:
1.5
-1.625
1
0.4375

Macierz D:
0.5      0      0      0
0      0.5      0      0
0      0      0.375  0
0      0      0      0.25

Macierz L:
0      0      0      0
-0.0625 0      0      0
0.1875  0      0      0
0.0625  0      0.125  0

Macierz U:
0      -0.0625  0.1875  0.0625
0      0      0      0
0      0      0      0.125
0      0      0      0

Macierz D^(-1):
2      0      0      0
0      2      0      0
0      0      2.66667  0
0      0      0      4

Macierz D^(-1)*B:
3
-3.25
2.66667
1.75

Macierz D^(-1)*U:
0      -0.125  0.375  0.125
0      0      0      0
0      0      0      0.333333
0      0      0      0

Macierz D^(-1)*L:
0      0      0      0
-0.125 0      0      0
0.5    0      0      0
0.25   0      0.5    0

Macierz Rozwiazan ukladu:
2
-3
1.5
0.5

Process returned 0 (0x0)   execution time : 0.172 s
Press any key to continue.
```

```
"D:\Studia\4 semestr 2015-16\Metody Numeryczne\Zadanie_2\bin\Debug\Zadanie_2.exe"

Macierz wczytana z pliku:
0 0 1 3
1 0 0 7
0 1 0 5

Macierz A:
1 0 0
0 1 0
0 0 1

Macierz wyrazow wolnych B:
7
5
3

Macierz D:
1 0 0
0 1 0
0 0 1

Macierz L:
0 0 0
0 0 0
0 0 0

Macierz U:
0 0 0
0 0 0
0 0 0

Macierz D^(-1):
1 0 0
0 1 0
0 0 1

Macierz D^(-1)*B:
7
5
3

Macierz D^(-1)*U:
0 0 0
0 0 0
0 0 0

Macierz D^(-1)*L:
0 0 0
0 0 0
0 0 0

Macierz Rozwiazan ukkladu:
7
5
3

Process returned 0 (0x0) execution time : 0.105 s
Press any key to continue.
```

```
"D:\Studia\4 semestr 2015-16\Metody Numeryczne\Zadanie_2\bin\Debug\Zadanie_2.exe"

Macierz wczytana z pliku:
10      -5      1      3
4       -7      2     -4
5        1      4     19

Macierz A:
10      -5      1
4       -7      2
5        1      4

Macierz wyrazow wolnych B:
3
-4
19

Macierz D:
10      0      0
0       -7      0
0        0      4

Macierz L:
0      0      0
4      0      0
5      1      0

Macierz U:
0      -5      1
0       0      2
0       0      0

Macierz D^(-1):
0.1      0      0
0      -0.142857      0
0       0      0.25

Macierz D^(-1)*B:
0.3
0.571429
4.75

Macierz D^(-1)*U:
0      -0.5      0.1
0       0      -0.285714
0       0      0

Macierz D^(-1)*L:
0      0      0
-0.571429      0      0
1.25      0.25      0

Macierz Rozwiazan ukladu:
1
2
2.99999

Process returned 0 (0x0)   execution time : 0.096 s
Press any key to continue.
```

```
"D:\Studia\4 semestr 2015-16\Metody Numeryczne\Zadanie_2\bin\Debug\Zadanie_2.exe"

Macierz wczytana z pliku:
1      0.2      0.3      1.5
0.1     1      -0.3     0.8
-0.1    -0.2     1      0.7

Macierz A:
1      0.2      0.3
0.1     1      -0.3
-0.1    -0.2     1

Macierz wyrazow wolnych B:
1.5
0.8
0.7

Macierz D:
1      0      0
0      1      0
0      0      1

Macierz L:
0      0      0
0.1     0      0
-0.1    -0.2     0

Macierz U:
0      0.2      0.3
0      0      -0.3
0      0      0

Macierz D^(-1):
1      0      0
0      1      0
0      0      1

Macierz D^(-1)*B:
1.5
0.8
0.7

Macierz D^(-1)*U:
0      0.2      0.3
0      0      -0.3
0      0      0

Macierz D^(-1)*L:
0      0      0
0.1     0      0
-0.1    -0.2     0

Macierz Rozwiazan ukkladu:
1
1
1

Process returned 0 (0x0)   execution time : 0.128 s
Press any key to continue.
```

Wyniki dla macierzy niespełniających warunki zbieżności:

```
"D:\Studia\4 semestr 2015-16\Metody Numeryczne\Zadanie_2\bin\Debug\Zadanie_2.exe"
Macierz wczytana z pliku:
3      3      1      12
2      5      7      33
1      2      1      8
Suma wartosci z 3 kolumny jest wieksza badz rowna wartosci na przekatnej <0>1>
Macierz nie jest zbiezna
Process returned 0 (0x0)   execution time : 0.049 s
Press any key to continue.
-
```

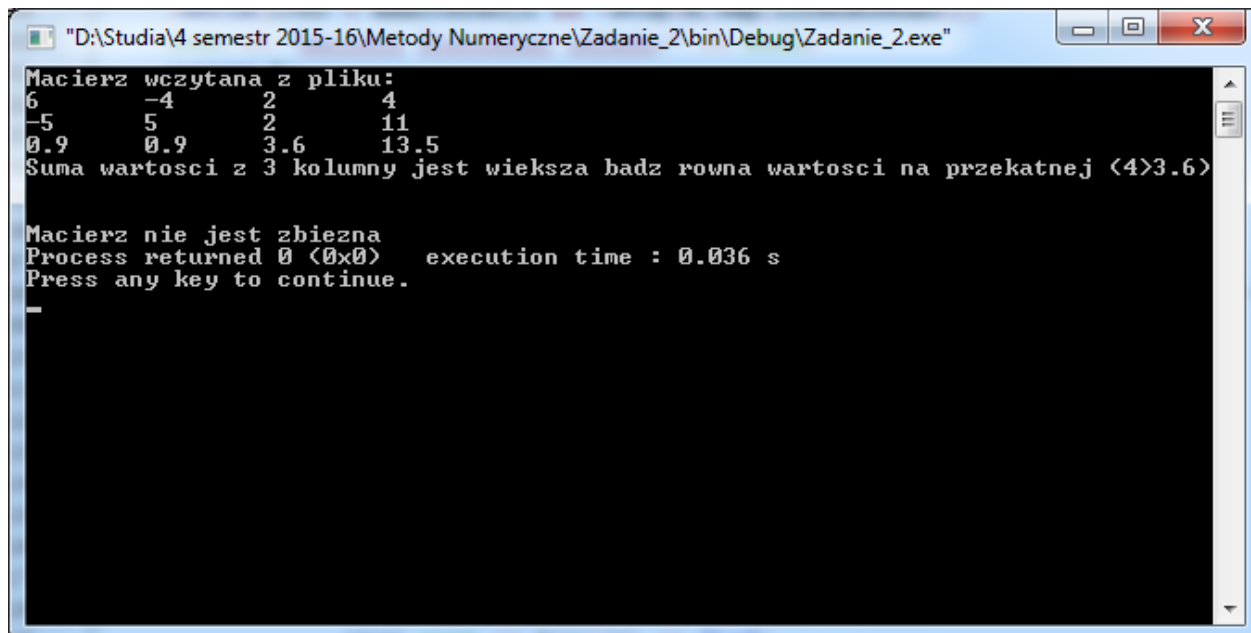
```
"D:\Studia\4 semestr 2015-16\Metody Numeryczne\Zadanie_2\bin\Debug\Zadanie_2.exe"
Macierz wczytana z pliku:
3      -1      2      -1      -13
3      -1      1      1      1
1      2      -1      2      21
-1      1      -2      -3      -5
Suma wartosci z 1 kolumny jest wieksza badz rowna wartosci na przekatnej <5>3>
Macierz nie jest zbiezna
Process returned 0 (0x0)   execution time : 0.044 s
Press any key to continue.
-
```

Wyniki dla macierzy sprzecznych i nieoznaczonych

```
"D:\Studia\4 semestr 2015-16\Metody Numeryczne\Zadanie_2\bin\Debug\Zadanie_2.exe"
Macierz wczytana z pliku:
3      3      1      1
2      5      7      20
-4     -10     -14    -40
Suma wartosci z 1 kolumny jest wieksza badz rowna wartosci na przekatnej <5>4>
Macierz nie jest zbiezna
Process returned 0 (0x0)   execution time : 0.022 s
Press any key to continue.
```

```
"D:\Studia\4 semestr 2015-16\Metody Numeryczne\Zadanie_2\bin\Debug\Zadanie_2.exe"
Macierz wczytana z pliku:
3      3      1      1
2      5      7      20
-4     -10     -14    -20
Suma wartosci z 1 kolumny jest wieksza badz rowna wartosci na przekatnej <5>4>
Macierz nie jest zbiezna
Process returned 0 (0x0)   execution time : 0.036 s
Press any key to continue.
```

```
"D:\Studia\4 semestr 2015-16\Metody Numeryczne\Zadanie_2\bin\Debug\Zadanie_2.exe"
Macierz wczytana z pliku:
3      2      1      -1      0
5     -1      1      2     -4
1     -1      1      2      4
7      8      1     -7      6
Suma wartosci z 1 kolumny jest wieksza badz rowna wartosci na przekatnej <9>7>
Macierz nie jest zbiezna
Process returned 0 (0x0)   execution time : 0.046 s
Press any key to continue.
```



```
"D:\Studia\4 semestr 2015-16\Metody Numeryczne\Zadanie_2\bin\Debug\Zadanie_2.exe"
Macierz wczytana z pliku:
6      -4      2      4
-5      5      2      11
0.9     0.9     3.6    13.5
Suma wartosci z 3 kolumny jest wieksza badz rowna wartosci na przekatnej <4>3.6>

Macierz nie jest zbiezna
Process returned 0 (0x0)   execution time : 0.036 s
Press any key to continue.
_
```

Wnioski

1. W przypadku układów sprzecznych i nieoznaczonych nie otrzymujemy wyników, gdyż nie spełniają one jednocześnie warunków zbieżności, a co za tym idzie ich wartości nie są w ogóle obliczane.
2. Metoda Gaussa-Seidla jest szybsza od Metody Jacobiego, gdyż z każdą iteracją korzysta już ze wszystkich obliczonych wcześniej przybliżeń.
3. Metoda ta nie jest uniwersalna przy zastosowanych warunkach zbieżności nie da się obliczyć niektórych macierzy pomimo iż ich wartości są możliwe do wyliczenia.