

Esercizio 1

Lorenzo Dentis, lorenzo.dentis@edu.unito.it

14 dicembre 2022

1 logica proposizionale

1.1 Esercizio 1

Which of the following propositional formulas represents the sentence, 'He will come on the 8:15 or the 9:15 train; if the former, he will have time to visit us', where

- p means 'He will come on the 8:15'
- q means 'He will come on the 9:15'
- r means 'He will have time to visit us'

Risposta 5: $(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r)$

1.2 Esercizio 2

Which of the following sentences has the logical form $(p \wedge q) \rightarrow r$?

Risposta 3: If inflation is up and an election is approaching, then public borrowing goes up.

1.3 Esercizio 3

Which of the following propositional formulas is satisfied by the valuation which assigns T to P, and F to q and r.

Risposta 2: $\neg(\neg r \rightarrow (p \wedge q))$

1.4 Esercizio 4

Which of the following propositional formulas is a tautology?

Risposta 5: $(p \leftrightarrow q) \wedge (p \leftrightarrow \neg q)$

1.5 Esercizio 5

Which of the following entailments is valid?

Risposta 2: $p, \neg p \leftrightarrow q \models \neg q$

1.6 Esercizio 6

Risposta 3:

p	q	r	$(p \rightarrow q) \vee \neg(r \wedge \neg q)$
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	F
T	F	F	T
F	T	T	T
F	T	F	T
F	F	T	T
F	F	F	T

1.7 Esercizio 7

Which of the following formulas represents the sentence 'If Smith has installed central heating, then he has sold his car or he has not paid his mortgage', where:

- p means 'Smith has installed central heating'
- q means 'Smith has sold his car'
- r means 'Smith has paid his mortgage'.

Risposta 4: $p \rightarrow q \vee \neg r$

1.8 Esercizio 8

Which of the following formulas represents the sentence, 'Share prices will go up, and if interest rates go up too, there will be a recession', where:

- p means 'share prices will go up'
- q means 'interest rates will go up'
- r means 'there will be a recession'.

Risposta 2: $p \wedge (q \rightarrow r)$

1.9 Esercizio 9

Which of the following sentences could be written as $p \vee (q \wedge r)$, for suitable p , q , and r ?

Risposta 2: You can go swimming, or use the sauna and the shower.

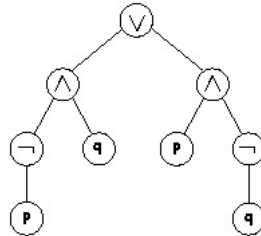
1.10 Esercizio 10

According to the standard convention about binding priorities, the formula, $\neg p \rightarrow \neg q \wedge r$, is implicitly one of the following. Which?

Risposta 4: $(\neg p) \rightarrow ((\neg q) \wedge r)$

1.11 Esercizio 11

Which of the following formulas has the parse tree:



Risposta 1: $(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$

2 notazioni e definizioni

2.0.1 Insiemi

notazione per Naturali \mathbb{N} , Interi \mathbb{Z} , Reali \mathbb{R} ,
elemento contenuto in un insieme \in

Definizione (Intersezione). *L'intersezione (\cap) tra due insiemi A e B è l'insieme degli elementi che appartengono contemporaneamente sia ad A che a B*

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ and } x \in B\}$$

Definizione (Unione). *L'unione \cup tra due insiemi A e B è l'insieme degli elementi che appartengono ad A , a B o ad entrambi.*

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ or } x \in B\}$$

Definizione (Differenza). *La differenza \setminus tra due insiemi A e B , indicata con $A \setminus B$ è l'insieme degli elementi di A esclusi gli elementi che appartengono anche a B*

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ and } x \notin B\}$$

Definizione (Power Set). *L'insieme potenza (power set) $\mathcal{P}(A)$ è l'insieme di tutti i sottoinsiemi di A , compreso l'insieme vuoto \emptyset e l'insieme A stesso.*

$$\mathcal{P}(A) = \{X : X \subseteq A\}$$

Definizione (Complemento). *L'insieme complemento di un insieme A , scritto A^C , è l'insieme ottenuto dalla differenza tra l'insieme Universo ed A .*

$$A^C = U \setminus A$$

Definizione (Sottoinsieme). *Un sottoinsieme \subseteq di A è un insieme che contiene solamente gli elementi contenuti in A , eventualmente tutti.*

$$X \subseteq A \Leftrightarrow X = \{x | x \in A\}$$

Definizione (Sottoinsieme stretto). *Un sottoinsieme stretto \subset di A è un insieme che contiene solamente elementi contenuti in A , ma non tutti.*

$$X \subset A \Leftrightarrow X = \{x|x \in A\} \wedge X \neq A$$

2.0.2 relazioni

Definizione (Prodotto Cartesiano). *Il prodotto cartesiano di due insiemi A e B è l'insieme delle coppie ordinate (a, b) con $a \in A$ e $b \in B$. Formalmente:*

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A \text{ e } b \in B\}$$

Definizione (Relazione binaria). *Si definisce relazione binaria R tra due insiemi non vuoti A e B un sottoinsieme di $A \times B$. Due elementi x e y sono messi in relazione da R se: $(x, y) \in R$ ed in tal caso si scrive xRy .*

Definizione (Relazione riflessiva). *Una relazione binaria R in un insieme X è detta riflessiva se ogni elemento di X è in tale relazione con sé stesso.*

$$R \text{ è riflessiva se: } \forall a \in X, aRa.$$

Definizione (Relazione simmetrica). *Una relazione binaria R in un insieme X è simmetrica se e solo se, presi due elementi qualsiasi a e b , vale che se a è in relazione con b allora anche b è in relazione con a .*

$$\forall a, b \in X, aRb \Rightarrow bRa$$

Definizione (Relazione transitiva). *Una relazione transitiva R in un insieme X è transitiva se e solo se prendendo tre elementi qualsiasi a , b e $c \in X$, tali che aRb e bRc allora aRc*

$$\forall a, b, c \in X, aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$$

Definizione (Relazione di equivalenza). *Una relazione di equivalenza R su A è una relazione riflessiva, simmetrica e transitiva.*

Definizione (Chiusura transitiva di una relazione). *Data una relazione R su $A \times A$ chiamiamo chiusura transitiva di R , e la indichiamo con R^+ la seguente relazione:*

$$R^+ = \{x, y | \exists z_1, \dots, z_n \in A, n \geq 2, z_1 = x, z_n = y \text{ t.c. } y_i R y_{i+1} \text{ con } i = 1, \dots, n-1\}$$

Definizione (Funzione). *Una funzione è una relazione tra due insiemi che associa ad ogni elemento di A uno ed un solo elemento di B*

$$\forall a \in A \quad \exists! b \in B \text{ tale che } f : a \rightarrow b$$

Definizione (Funzione di arietà n). *L'arietà di una funzione è il numero di argomenti che la funzione richiede. posta una funzione $f : A^n \rightarrow A$ la sua arietà è n*

Definizione (Funzione iniettiva). *Una funzione $f : A \rightarrow B$ è iniettiva se ad ogni elemento a del dominio A corrisponde attraverso f al più un elemento b del codominio B .*

$$\forall a \in A \quad \exists! b \in B \text{ t.c. } f(a) = b$$

Definizione (Funzione suriettiva). Una funzione $f : A \rightarrow B$ è suriettiva se ogni elemento b del codominio B è immagine di almeno un elemento a del dominio A .

$$\forall b \in B \quad \exists a \in A \text{ t.c. } f(a) = b$$

Definizione (Funzione biiettiva). Una funzione f che è contemporaneamente iniettiva e suriettiva.

2.0.3 Stringhe e linguaggi

Definizione (Alfabeto). Alfabeto Σ : insieme non vuoto e finito di simboli.

Definizione (Lettera e stringa). Posto un alfabeto Σ , una lettera è un elemento $\in \Sigma$, una stringa è una sequenza ordinata e finita di lettere.

Definizione (String vuota). Stringa di lunghezza 0, si indica con ϵ , la si può anche definire come l'elemento neutro rispetto all'operazione concatenazione.

Definizione (Concatenazione). Il concatenamento di due stringe L_1, L_2 , indicato con $."$ o semplicemente senza alcun carattere, da origine alla stringa $L_1 L_2$ di lunghezza $|L_1| + |L_2|$ che presenta ordinatamente i caratteri di L_1 seguiti da quelli di L_2 .

Definizione (Prefisso e Suffisso). Data una stringa $S = t_1, \dots, t_n$ definiamo prefisso la stringa $S^1 = t_1, \dots, t_m$ con $0 < m < n$. Invece definiamo suffisso la stringa $S^2 = t_m, \dots, t_n$ con $0 < m < n$.

2.0.4 Grafi

Per tutte le seguenti definizioni poniamo un grafo $G = (V, E)$, ove V è l'insieme dei nodi (Vertex) ed E l'insieme degli archi (Edges). In particolare $E \subseteq V \times V$.

Definizione (Direzionale). Identifichiamo con R la relazione che indica due nodi $a, b \in V$ connessi tra loro da un arco, diciamo che il grafo è non-orientato se R è simmetrica, orientato altrimenti.

Definizione (Grafo bipartito). Un grafo si dice bipartito quando l'insieme V può essere bipartito in due sottoinsiemi disgiunti $V = V_1 \cup V_2$ tali che ogni arco $\{v_1, v_2\} \in E$ rispetta la seguente forma: $v_1 \in V_1 \wedge v_2 \in V_2$.

Definizione (nodo sorgente/destinazione). Un nodo $v \in V$ è detto nodo sorgente se non ha archi entranti, nodo destinazione se non ha archi uscenti.

In simboli: posta la relazione R per cui $v_1 R v_2$ indica un arco diretto da v_1 a v_2 un nodo sorgente è $\forall v, u \in V \quad \neg (v R u)$

Un nodo destinazione è $\forall v, u \in V \quad \neg (u R v)$

Definizione (in-degree, out-degree). Il grado (Degree) di un nodo $v \in V$ è il numero di archi $e = \{v, v_x\} \in E$, cioè il numero di archi connessi al nodo.

Usando la relazione R della precedente definizione: out-degree di v è il numero di archi v, u t.c. $v R u$, in-degree di v è il numero di archi u, v t.c. $u R v$.

Definizione (Funzione di etichettatura). *Una funzione che attribuisce un valore numerico ad ogni nodo.*

Più formalmente un'etichettatura di vertice è una funzione $f : V \rightarrow \mathbb{N}$

Definizione (Cammino). *Una n -upla di nodi (v_0, \dots, v_m) è un cammino quando: $(\forall i = 1, \dots, m)(v_{i-1}, v_i) \in E$ con $v_0 \neq v_m$*

Definizione (Ciclo). *Una n -upla di nodi (v_0, \dots, v_m) è un cammino quando: $(\forall i = 1, \dots, m)(v_{i-1}, v_i) \in E$ con $v_0 = v_m$*

Definizione (Lunghezza di un cammino). *Sia un cammino n -upla di nodi $c = (v_0, \dots, v_m)$, la lunghezza del cammino $|c|$ è il numero di nodi in c*

Definizione (Grafo fortemente connesso). *Un grafo orientato si dice fortemente connesso se esiste un cammino da v a u per ogni coppia $v, u \in V$*

Definizione (Componente fortemente connessa terminale). *Una componente fortemente connessa di un grafo diretto G è un sottografo di G in cui esiste un cammino orientato tra ogni coppia di nodi ad esso appartenenti. La componente fortemente connessa terminale è la componente fortemente connessa massimale, quella che contiene più nodi possibili*

Definizione (Albero). *Un albero è un grafo connesso ed aciclico, più precisamente un grafo non orientato nel quale due vertici qualsiasi sono connessi da un solo cammino.*

2.0.5 Matrici

Definizione (Matrici n -dimensionali). *una matrice è una funzione $A: X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \rightarrow K$ ove n è il numero di dimensioni della matrice.*

Definizione (Somma di matrici). *Date due matrici A e B , entrambe di tipo $m \times n$, $A+B$ è una matrice $m \times n$ i cui elementi sono $[A+B]_{i,j} := [A]_{i,j} + [B]_{i,j}$*

Definizione (Prodotto di matrici). *Date due matrici A e B rispettivamente di tipo $m \times p$ e $p \times n$, il prodotto è una matrice di tipo $m \times n$ i cui elementi sono: $[C]_{i,j} = \text{Row}_i(A) \times \text{Col}_j(B) = [A]_{i,1}[B]_{1,j} + [A]_{i,2}[B]_{2,j} + \dots + [A]_{i,p}[B]_{p,j}$*

Definizione (Vettore per matrice). *Il prodotto di un vettore V , con $|V| = m$, per una matrice M di tipo $m \times n$ è un vettore $V \times M$ di lunghezza n i cui elementi sono: $[C]_i = [V]_1 B[i, 1] + [V]_2 B[i, 2] + \dots + [V]_m B[m, i]$*