Esercizio 1

Lorenzo Dentis, lorenzo.dentis@edu.unito.it

3 settembre 2022

1 logica proposizionale

1.1 Esercizio 1

Which of the following propositional formulas represents the sentence, 'He will come on the 8:15 or the 9:15 train; if the former, he will have time to visit us', where

- p means 'He will come on the 8:15'
- q means 'He will come on the 9:15'
- r means 'He will have time to visit us'

Risposta 5: $(p \lor q) \land (p \to r)$

1.2 Esercizio 2

Which of the following sentences has the logical form $(p \land q) \to r$?
Risposta 3: If inflation is up and an election is approaching, then public borrowing goes up.

1.3 Esercizio 3

Which of the following propositional formulas is satisfied by the valuation which assigns T to P, and F to q and r.
Risposta 2: $\neg(\neg r \to (p \land q))$

1.4 Esercizio 4

Which of the following propositional formulas is a tautology?
Risposta 5: $(p \leftrightarrow q) \land (p \leftrightarrow \neg q)$

1.5 Esercizio 5

Which of the following entailments is valid?
Risposta 2: $p, \neg p \leftrightarrow q \models \neg q$

1.6 Esercizio 6

Risposta 3:

p	q	r	$(p \to q) \lor \neg(r \land \neg q)$
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	F
T	F	F	T
F	T	T	T
F	T	F	T
F	F	T	T
F	F	F	T

1.7 Esercizio 7

Which of the following formulas represents the sentence 'If Smith has installed central heating, then he has sold his car or he has not paid his mortage', where:

- p means 'Smith has installed central heating'
- q means 'Smith has sold his car'
- r means 'Smith has paid his mortage'.

Risposta 4: $p \to q \lor \not r$

1.8 Esercizio 8

Which of the following formulas represents the sentence, 'Share prices will go up, and if interest rates go up too, there will be a recession', where:

- p means 'share prices will go up'
- q means 'interest rates will go up'
- r means 'there will be a recession'.

Risposta 2: $p \land (q \to r)$

1.9 Esercizio 9

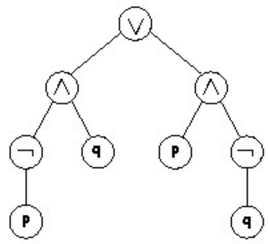
Which of the following sentences could be written as $p \lor (q \land r)$, for suitable p, q, and r ?
Risposta 2 : You can go swimming, or use the sauna and the shower.

1.10 Esercizio 10

According to the standard convention about binding priorites, the formula, $\neg p \to \neg q \land r$, is implicity one of the following. Which?
Risposta 4: $(\neg p) \to ((\neg q) \land r)$

1.11 Esercizio 11

Which of the following formulas has the parse tree:



Risposta 1: $(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$

2 notazioni e definizioni

2.0.1 Insiemi

notazione per Naturali $\mathbb{N}$, Interi $\mathbb{Z}$, Reali $\mathbb{R}$,
elemento contenuto in un insieme $\in$

Definizione (Intersezione). *L'intersezione ($\cap$) tra due insiemi A e B è l'insieme degli elementi che appartengono contemporaneamente sia ad A che a B*

$$A \cap B = \{x : x \in A \, and \, x \in B\}$$

Definizione (Unione). *L'unione $\cup$ tra due insiemi A e B è l'insieme degli elementi che appartengono ad A, a B o ad entrambi.*

$$A \cup B = \{x : x \in A \, or \, x \in B\}$$

Definizione (Differenza). *La differenza $\setminus$ tra due insiemi A e B, indicata con $A \setminus B$ è l'isieme degli elementi di A esclusi gli elementi che appartengono anche a B*

$$A \setminus B = \{x : x \in A \, and \, x \in B\}$$

Definizione (Power Set). *L' insieme potenza (power set) $\mathcal{P}(A)$ è l'insieme di tutti i sottoinsiemi di A, compreso l'insieme vuoto $\emptyset$ e l'insieme A stesso.*

$$\mathcal{P}(A) = \{X : X \subseteq A\}$$

Definizione (Complemento). *L'insieme complemento di un inseme A, scritto A^C, è l'insieme ottenuto dalla differenza tra l'insieme Universo ed A.*

$$A^C = U \setminus A$$

Definizione (Sottoinsieme). *Un sottinsieme $\subseteq$ di A è un insieme che contiene solamente gli elementi contenuti in A, eventualmente tutti.*

$$X \subseteq A \Leftrightarrow X = \{x | x \in A\}$$

Definizione (Sottoinsieme stretto). *Un sottinsieme stretto* $\subset$ *di* A *è un insieme che contiene solamente elementi contenuti in* A*, ma non tutti.*

$$X \subset A \Leftrightarrow X = \{x|x \in A\} \wedge X \neq A$$

2.0.2 relazioni

Definizione (Prodotto Cartesiano). *Il prodotto cartesiano di due insiemi* A *e* B *è l'insieme delle coppie ordinate* (a, b) *con* $a \in A$ *e* $b \in B$ *Formalmente:*

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A \text{ e } b \in B\}$$

Definizione (Relazione binaria). *Si definisce relazione binaria* R *tra due insiemi non vuoti* A *e* B *un sottoinsieme di* $A \times B$*. Due elementi* x *e* y *sono messi in relazione da* R *se:* $(x, y) \in R$ *ed in tal caso si scrive* xRy*.*

Definizione (Relazione riflessiva). *Una relazione binaria* R *in un insieme* X *è detta riflessiva se ogni elemento di* X *è in tale relazione con sé stesso.*

$$R \textit{ è riflessiva se: } \forall a \in X,\ aRa.$$

Definizione (Relazione simmetrica). *Una relazione binaria* R *in un insieme*X *è simmetrica se e solo se, presi due elementi qualsiasi* a *e* b*, vale che se* a *è in relazione con* b *allora anche* b *è in relazione con* a*.*

$$\forall a, b \in X,\ aRb \Rightarrow bRa$$

Definizione (Relazione transitiva). *Una relazione transitiva* R *in un insieme* X *è transitiva se e solo se prendendo tre elementi qualsiasi* a*,* b *e* $c \in X$*, tali che* aRb *e* bRc *allora* aRc

$$\forall a, b, c \in X, aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$$

Definizione (Relazione di equivalenza). *Una relazione di equivalenza* R *su* A *è una relazione riflessiva, simmetrica e transitiva.*

Definizione (Chiusura transitiva di una relazione). *Data una relazione* R *su* $A \times A$ *chiamiamo chiusura transitiva di* R*, e la indichiamo con* R^+ *la seguente relazione:*

$$R^+ = \{x, y|\exists z_1, ..., z_n \in A, n \geq 2, z_1 = x, z_n = y \textit{ t.c } y_i R y_{i+1} \textit{ con } i = 1, ..., n-1\}$$

Definizione (Funzione). *Una funzione è una relazione tra due insiemi che associa ad ogni elemento di* A *uno ed un solo elemento di* B

$$\forall a \in A \ \ \exists!\ b \in B \ \ \textit{tale che} \ \ f : a \rightarrow b$$

Definizione (Funzione di arietà n). *L'arietà di una funzione è il numero di argomenti che la funzione richiede. posta una funzione* $f : A^n \rightarrow A$ *la sua arietà è* n

Definizione (Funzione iniettiva). *Una funzione* $f : A \rightarrow B$*è iniettiva se ad ogni elemento* a *del dominio* A *corrisponde attraverso* f *al più un elemento* b *del codominio* B*.*

$$\forall a \in A \quad \exists ! b \in B \;\; t.c. \;\; f(a) = b$$

Definizione (Funzione suriettiva). *Una funzione $f : A \to B$è suriettiva se ogni elemento b del codominio B è immagine di almeno un elemento a del dominio A.*

$$\forall b \in B \quad \exists a \in A \quad t.c. \;\; f(a) = b$$

Definizione (Funzione biiettiva). *Una funzione f che è contemporaneamente iniettiva e suriettiva.*

2.0.3 Stringhe e linguaggi

Definizione (Alfabeto). *Alfabeto Σ: insieme non vuoto e finito di simboli.*

Definizione (Lettera e stringa). *Posto un alfabeto Σ, una lettera è un elemento $\in \Sigma$, una stringa è una sequenza ordinata e finita di lettere.*

Definizione (String vuota). *Stringa di lunghezza 0, si indica con ϵ, la si può anche definire come l' elemento neutro rispetto all'operazione concatenazione $\cdot$*

Definizione (Concatenazione). *Il concatenamento di due stringe L_1,L_2, indicato con "$\cdot$" o semplicemente senza alcun carattere, da origine alla stringa L_1L_2 di lunghezza $|L_1| + |L_2|$ che presenta ordinatamente i caratteri di L_1 seguiti da quelli di L_2.*

Definizione (Prefisso e Suffisso). *Data una stringa $S = t_1,...,t_n$ definiamo prefisso la stringa $S^1 = t_1,...,t_m$ con $0 < m < n$. Invece definiamo suffisso la stringa $S^2 = t_m,...,t_n$ con $0 < m < n$*

2.0.4 Grafi

Per tutte le seguenti definizioni poniamo un grafo $G = (V, E)$, ove V è l'insieme dei nodi (Vertex)ed E l'insieme degli archi (Edges). In particolare $E \subseteq V \times V$

Definizione (Direzione). *Identifichiamo con R la relazione che indica due nodi a,b$\in V$ connessi tra loro da un arco, diciamo che il grafo è non-orientato se R è simmetrica, orientato altrimenti.*

Definizione (Grafo bipartito). *Un grafo si dice bipartito quando l'insieme V può essere bipartito in due sottoinsiemi disgiunti $V = V_1 \cup V_2$ tali che ogni arco $\{v_1, v_2\} \in E$ rispetta la seguente forma: $v_1 \in V_1 \wedge v_2 \in V_2$*

Definizione (nodo sorgente/destinazione). *Un nodo $v \in V$ è detto nodo sorgente se non ha archi entranti, nodo destinazione se non ha archi uscenti.*
In simboli: posta la relazione R per cui $v_1 R v_2$ indica un arco diretto da $v_1 a v_2$ un nodo sorgente è $v t.c. \forall v, u \in E v R u$
Un nodo destiazione è $v t.c. \forall v, u \in E u R v$

Definizione (in-degree, out-degree). *Il grado (Degree) di un nodo $v \in V$ è il numero di archi e $= \{v, v_x\} \in E$, cioè il numero di archi connessi al nodo.*
Usando la relazione R della precendente definizione: out-degree di v è il numero di archi $v, u t.c. v R u$, in-degree di v è il numero di archi $v, u t.c. u R v$

Definizione (Funzione di etichettatura). *Una funzione che attribuisce un valore numerico ad ogni nodo.*
Più formalmente un'etichettatura di vertice è una funzione $f : V \to \mathbb{N}$

Definizione (Cammino). *Una n-upla di nodi* $(v_0, ..., v_m)$ *è un cammino quando:* $(\forall i = 1, ..., m)(v_{i-1}, v_i) \in E$ *con* $v_0 \neq v_m$

Definizione (Ciclo). *Una n-upla di nodi* $(v_0, ..., v_m)$ *è un cammino quando:* $(\forall i = 1, ..., m)(v_{i-1}, v_i) \in E$ *con* $v_0 = v_m$

Definizione (Lunghezza di un cammino). *Sia un cammino n-upla di nodi* $c = (v_0, ..., v_m)$*, la lunghezza del cammino* $|c|$ *è il numero di nodi* $\in c$

Definizione (Grafo fortemente connesso). *Un grafo orientato si dice fortemente connesso se esiste un cammino da* v *a* u *per ogni coppia* $v, u \in V$

Definizione (Componente fortemente connessa terminale). *Una componente fortemente connessa di un grafo diretto G è un sottografo di G in cui esiste un cammino orientato tra ogni coppia di nodi ad esso appartenenti.La componente fortemente connessa terminale è la componente fortemente connessa massimale, quella che contiene più nodi possibili*

Definizione (Albero). *Un albero è un grafo connesso ed aciclico, più precisamente un grafo non orientato nel quale due vertici qualsiasi sono connessi da un solo cammino.*

2.0.5 Matrici

Definizione (Matrici n-dimensionali). *una matrice è una funzione* $A\colon X_1 \times X_2 \times ... \times X_n \to K$ *ove* n *è il numero di dimensioni della matrice.*

Definizione (Somma di matrici). *Date due matrici* A *e* B*, entrambe di tipo* $m \times n$*,* $A+B$ *è una matrice* $m \times n$ *i cui elementi sono* $[A+B]_{i,j} := [A]_{i,j} + [B]_{i,j}$

Definizione (Prodotto di matrici). *Date due matrici* A *e* B *rispettivamente di tipo* $m \times p$ *e* $p \times n$*, il prodotto è una matrici di tipo* $m \times n$ *i cui elementi sono:* $[C]_{i,j} = Row_i(A) \times Col_j(B) = [A]_{i,1}[B]_{1,j} + [A]_{i,2}[B]_{2,j} + \cdots + [A]_{i,p}[B]_{p,j}$

Definizione (Vettore per matrice). *Il prodotto di un vettore* V*, con* $|V| = m$*, per una matrice* M *di tipo* $m \times n$ *è un vettore* $V \times M$ *di lunghezza* m *i cui elementi sono:* $[C]_i = [V]_i B[i, 2] + [V]_i B[i, 2] + ... + [V]_m B[m, n]$