Risposte Foglio1

Giulia Coucorde, Andrea Cacioli, Lorenzo Dentis 914833

3 novembre 2022

1 Esercizio 1

Sia X una v.a che assume il valore 1 con probabilità p e $(-N)$ con probabilità $1-p$. Qui N è una v.a. di Poisson di parametro λ

$$X = \begin{cases} 1 & p \\ -N & 1-p \end{cases} \tag{1}$$

$$N \sim Pois(\lambda)$$

1.a

Determinare il valore di λ per cui $\mathbb{E}(X) = 0$.
Per il teorema dell'attesa totale, $\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X|A_i]P(A_i)$ con $A_1, ..., A_n$ eventi a due a due disgiunti che formano una partizione di E, possiamo affermare che

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] =& P(X=1) * E[1|X=1] + P(X=-N) * \mathbb{E}[-N|X=-N] = \\ =& p + (1-p) * \mathbb{E}[-N] = \\ & \textit{essendo } N \sim \textit{Poisson}(\lambda) \textit{ vale } \mathbb{E}[N] = \lambda \\ =& p - \lambda(1-p)\end{aligned}$$

$$\lambda = \frac{p}{1-p}$$

1.b

Calcolare $Var(X)$. Usando la definizione di varianza, $Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$ ed il valore dell'attesa calcolato in sezione 1.a, scriviamo:

$$Var(X) = E[X^2] - [p - \lambda(1-p)]^2 \tag{2}$$

Analogmantente al punto precedente si può calcolare $\mathbb{E}[X^2]$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^2] &= p * \mathbb{E}[1^2] + (1-p)\mathbb{E}[(-N)^2] = \\ &= p + (1-p)(\lambda + \lambda^2) = p + \lambda + \lambda^2 - p\lambda - p\lambda^2 = \\ &= p(1 - \lambda - \lambda^2) + \lambda(1+\lambda)\end{aligned}$$

Sostituendo nella equazione(2)

$$Var(X) = p(1 - \lambda - \lambda^2) + \lambda(1+\lambda) - (p - \lambda(1-p))^2$$

1.c

Sia $\{X_i\} i = 1, 2, ...$ una successione di v.a. distribuite come X e sia $Y = \sum_{i=1}^{M}$, con M v.a. di Poisson di parametro β, indipendente dalle X_i. Determinare $\mathbb{E}(Y)$.

$Y = \sum_{i=1}^{M} X_i$
$M \sim Pois(\beta)$.
Chiamiamo $\mathbb{E}(X_i) = p - \lambda + \lambda p = \mu$
$\mathbb{E}(Y) = \sum_{m=1}^{\inf} \mathbb{E}[Y|M = m]P(M = m)$

Data $M \sim Pois(\beta)$ allora $P(M = m) = \frac{\beta^m}{m!} e^{-\beta}$.
Invece

$$\mathbb{E}[Y|M = m] = \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{m}] = \textit{ per linearità}$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \mathbb{E}[X_i] = m\mu$$

Quindi

$$\mathbb{E}[y] = \sum_{m=1}^{\inf} m\mu \qquad \frac{\beta^m}{m!} e^{-\beta} =$$
$$= e^{-\beta}\mu \sum_{m=1}^{\inf} m \frac{\beta^m}{m!} =$$
$$= e^{-\beta}\mu \sum_{m=1}^{\inf} \frac{\beta^m}{(m-1)!} =$$
$$= \textit{ semplificando con Wolfram Alpha } =$$
$$= \beta\mu$$

Questo esercizio poteva essere alternativamente risolto utilizzando il *teorema della doppia attesa* e quindi ponendo $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{N} X_i] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\sum_{i=1}^{N} X_i|N]]$. Condizionando su N e svolgendo i calcoli analogamente a quanto fatto in classe saremmo giunti alla seguente uguaglianza:

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{N} X_i] = \mathbb{E}[N] * \mathbb{E}[X] = \beta\mu$$

2 Esercizio 2

3 Esercizio 3

4 Esercizio 4