Risposte Foglio1

Giulia Coucorde, Andrea Cacioli, Lorenzo Dentis 914833

3 novembre 2022

1 Esercizio 1

Sia X una v.a che assume il valore 1 con probabilità p e $(-N)$ con probabilità $1-p$. Qui N è una v.a. di Poisson di parametro λ

$$X = \begin{cases} 1 & p \\ -N & 1-p \end{cases} \tag{1}$$

$$N \sim Pois(\lambda)$$

1.a

Determinare il valore di λ per cui $\mathbb{E}(X) = 0$.
Per il teorema dell'attesa totale, $\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X|A_i]P(A_i)$ con $A_1, ..., A_n$ eventi a due a due disgiunti che formano una partizione di E, possiamo affermare che

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] =& P(X=1) * E[1|X=1] + P(X=-N) * \mathbb{E}[-N|X=-N] = \\ =& p + (1-p) * \mathbb{E}[-N] = \\ & \textit{essendo } N \sim \textit{Poisson}(\lambda) \textit{ vale } \mathbb{E}[N] = \lambda \\ =& p - \lambda(1-p) \end{aligned}$$

$$\lambda = \frac{p}{1-p}$$

1.b

Calcolare $Var(X)$. Usando la definizione di varianza, $Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$ ed il valore dell'attesa calcolato in sezione 1.a, scriviamo:

$$Var(X) = E[X^2] - [p - \lambda(1-p)]^2 \tag{2}$$

Analogmantente al punto precedente si può calcolare $\mathbb{E}[X^2]$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^2] &= p * \mathbb{E}[1^2] + (1-p)\mathbb{E}[(-N)^2] = \\ &= p + (1-p)(\lambda + \lambda^2) = p + \lambda + \lambda^2 - p\lambda - p\lambda^2 = \\ &= p(1 - \lambda - \lambda^2) + \lambda(1+\lambda) \end{aligned}$$

Sostituendo nella equazione(2)

$$Var(X) = p(1 - \lambda - \lambda^2) + \lambda(1+\lambda) - (p - \lambda(1-p))^2$$

1.c

2 Esercizio 2

3 Esercizio 3

4 Esercizio 4