Appunti di Analisi

Lorenzo Dentis, lorenzo.dentis@edu.unito.it

29 aprile 2023

Indice

1 Numeri Complessi

1.1 definizione

Def. *Un numero complesso è una coppia ordinata (x, y) con $x, y \in \mathbb{R}$. Nell' insieme dei numeri complessi $\mathbb{C} = \{z = x + iy | x, y \in \mathbb{R}\}$ (posti $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$) si definiscono le seguenti operazioni.*

Addizione $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

Prodotto $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2,\ x_1 y_2 + x_2 y_1)$
La "formula" del prodotto si deduce facilmente da $(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$

Un numero complesso può essere anche scritto in forma algebrica $z = x + iy$.

Def. *Dato $z = (x, y)$ definisco "coniugato di z": $\overline{z} = (x, -y)$*

1.2 proprietà

Essendo un numero complesso una coppia di numeri reali, si può affermare $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$?
Sì,no,sì.

- Insiemisticamente sono uguali tanto che spesso si rappresentano i numeri immaginari sul piano di Gauss (piano complesso) , z è un punto in $\mathbb{R}^2$ di coordinate (x, y)
- Algebricamente non sono uguali, in quanto il prodotto mostrato in $\mathbb{C}$ non è presente in $\mathbb{R}^2$. La somma corrisponde alla somma di vettori in $\mathbb{R}^2$ ma il prodotto non ha corrispondenza. il prodotto vettoriale è completamente diverso in $\mathbb{R}^2$.
- Topologicamente sono uguali, dato un numero complesso z, $||z|| = \sqrt{x^2 + y^2}$ chiamata *norma* o *modulo* di z. cioè la stessa cosa della norma del vettore di coordinate $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Da cui deriva che la "distanza" tra due numeri complessi z, w è, come in $\mathbb{R}^2$, $dist(z, w) = ||z-w|| = \sqrt{(x_z - x_w)^2 + (y_z - y_w)^2}$

Nota: il prodotto fornisce anche una giustificazione alle proprietà dell' *unità immaginaria*

Def. $i = (0, 1)$ *è detta unità immaginaria e verifica formalmente* $i^2 = 1$

Infatti $i^2 = (0, 1)^2 = (0, 1)(0, 1) = (0 * 0 - 1 * 1, 0 * 1, 1 * 0) = (-1, 0) = 1$

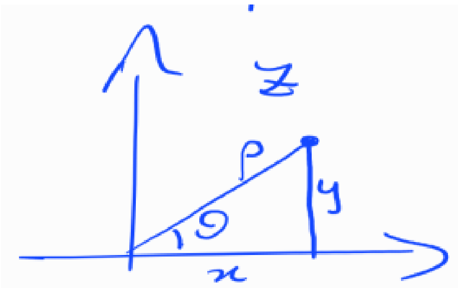
1.3 Altre forme di scrittura

$$Z = (x, y) = x + iy = \rho(cos\theta + isen\theta) = \rho e^{i\theta}$$

[algebrica] [alg. in modo trig] [esponenziale]

1.3.1 Trigonometrica

Rappresentando sul piano complesso un numero complesso z notiamo che si può esprimere la sua "posizione" anche in coordinate polari.



Vivecersa

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = arctan(\frac{y}{x}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \rho cos\theta \\ y = \rho sin\theta \end{cases}$$

$$z = x + iy = \rho\, cos\theta + i\, \rho\, sin\theta = \rho(cos\theta + i\, sin\theta)$$

Chiamiamo questo modo di esprimere un numero complesso "forma algebrica scritta in modo trigonometrico"

1.3.2 Esponenzionale

Def (Formula di De Moivre).

$$e^{i\theta} = cos\theta + i\, sen\theta$$

Dunque

$$z = \rho(cos\theta + sen\theta) = \rho e^{i\theta}$$

Def (Esponenziale complesso). *poco importante*

$$\textit{In generale, sia } z = (x, y)$$
$$e^z = e^x e^{iy} = e^x(cos\, y + i\, sen\, x)$$

La forma esponenziale permette di svolgere calcoli in maniera più semplice (soprattuto moltiplicazioni e potenze).

1.3.3 note

poco importanti
Equivalenza tra la scrittura in forme algebrica e la scrittura come coppia di numeri reali.
$x = (x, 0)$ $y = (y, 0)$, $i = (0, 1)$
$x+iy = (x, 0)+(0, 1)*(y, 0) = (x, 0)+(0*y-1*0, 0*0+1*y) = (x, 0)+(0, y) = (x, y)$

Analisi a valori complessi: Data un funzione $f : \mathbb{I} \to \mathbb{C}$, $\forall t \in \mathbb{I}$, $f(t) \in \mathbb{C}$ quindi può essere "scomposta": $f(t) = f_1(t) + i\, f_2(t)$. f_1 è la parte reale di f_t ed f_2 la parte immaginaria

Def (Derivata a valori complessi).

$$f'(t) = f_1'(t) + i\, f_2'(t)$$

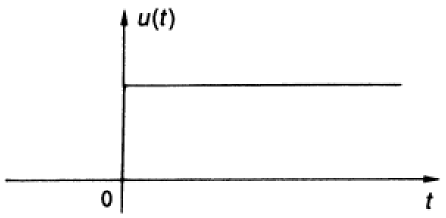
Def (Integrale a valori complessi).

$$\int_I f(t)dt = \int_I f_1(t)dt + i\int_I f_2(t)dt$$

2 Segnali e sistemi

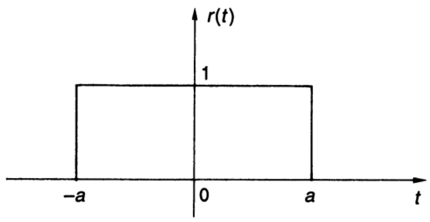
2.1 Segnali

Def (Segnale). *Un Segnale è una grandezza fisica variabile nello spazio o nel tempo, rappresentato dalla funzione* $f = \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$.
Distinguiamo i segnali analogici con dominio $\mathbb{R}$ *ed i segnali le cui misurazioni sono fatte ad intervalli di tempo (tecnica detta sampling) cioè i segnali analogici con dominio* $\mathbb{Z}$ *o* $\mathbb{N}$.



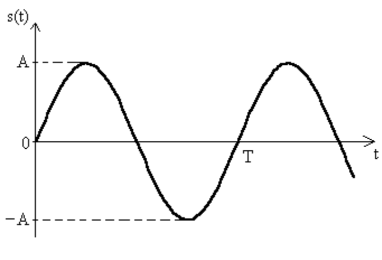
$$\mu(t) = \begin{cases} 0 & se \quad t < 0 \\ 1 & se \quad t > 0 \end{cases}$$

Figura 2: Heavyside function



$$r(t) = \begin{cases} 1 & se \quad |t| < 0 \\ 0 & se \quad |t| > 0 \end{cases}$$

Figura 3: Funzione finestra rettangolare



$$x(t) = \alpha cos(2\pi\omega t + \phi)$$

ove $|\alpha|$ è l'ampiezza, ω la frequenza (quindi $\frac{1}{\omega}$ il periodo). ϕ la fase. Identicamente si può esprimere la generica sinusoidie in funzione del seno.

$$x(t) = \alpha sen(2\pi\omega t + \phi)$$

Figura 4: Sinusoide generica

Le due notazioni possono essere accorpate in un'unica funzione, che, grazie alla formula di De Moivre, può essere riscritta in notazione esponenziale.

$$x(t) = \alpha(cos(\omega t + \phi) + i\ sen(\omega t + \phi)) = \alpha e^{i(\omega t+\phi)}$$

Il 2π può tranquillamente essere omesso in quanto costante

2.2 Sistemi

Def (Transmission system)**.** *Un "apparato" che riceve un segnale in input e trasmette un segnali in output.*
Indicato come $y = A(x)$ o in breve $y = Ax$.

I sistemi manipolano segnali, quindi prendono in input una funzione e restituiscono in output una differente funzione. Esempi di semplici sistemi sono: l'amplificatore $y(t) = kx(t)$ con k costante , delayer $y(t) = x(t - a)$ con a costante o il "derivatore" $y(t) = x'(t)$

2.2.1 proprietà dei sistemi

I sistemi possono avere diverse proprietà, quelle che interessano a noi (poichè vanno a definire un *filtro*) sono:

1. Linearità: Dato $A : X \to Y$ A è lineare se:
$$A(x + y) = A(x) + A(y)$$
$$A(\lambda x) = \lambda A(x)$$
nota che la seconda condizione deriva in realtà dalla prima

2. Causalità: Non può "anticipare i tempi", l'output non può variare prima che vari l'input. Formalmente:
$$x_1(t) = x_2(t)\ for\ t < t_0 \Rightarrow Ax_1(t) = Ax_2(t)\ for\ t < t_0$$
un filtro non deve per forza essere causale, ma per essere realizzabile deve esserlo

3. Invarianza alle traslazioni: detta anche "stazionarietà", se traslo temporalmente l'input di α l'output uscirà temporalmente traslato di α. Formalmente:
$$A(\tau_a x) = \tau_a(Ax)$$
τ è un sistema, *delay operator*. Si potrebbe anche scrivere:
$$x(t) \to y(t) \Rightarrow x(t - a) \to y(t - a)$$

4. Continuità: Se se segnali di input sono "vicini" allora i due segnali di output sono "vicini" anch'essi. Quando la sequenza di segnali in input x_n tende ad x la sequenza di segnali in output y_n tende a y. Ma cosa vuol dire che una sequenza di segnali *tende* ad un segnale? Dobbiamo fare riferimento alle norme che approfondiremo nel capitolo dopo 2.2.2, in quanto $x_n \to x \iff ||x_n - x|| \to 0$ cioè x_n tende a x se la distanza tra x_n ed x tende a 0.

Def. *Un **filtro** è un sistema che rispetta le proprietà 1,3,4. Un sistema che rispetta anche la proprietà 2 è detto **Filtro causale**.*

2.2.2 Norme

Abbiamo già citato due volte il discorso di norma, ma cosa vuol dire la norma in $\mathbb{C}$? Sia $Iin\mathbb{R}$ un intervallo possiamo definire tre norme:

1. **norma uniforme**: Anche detta norma infinito.

$$||x||_\infty = sup|x(t)|$$

   Cioè la norma uniforme di x è il suo estremo superiore.

2. **norma 1**: Anche detta norma della media.

$$||x||_1 = \int_I |x(t)|dt$$

   Cioè, ci interessa un valore "normato" del segnale, ottenibile attraverso l'integrale. Come in figura 5 si può notare che segnali molto differenti possono avere norma 1 uguale.

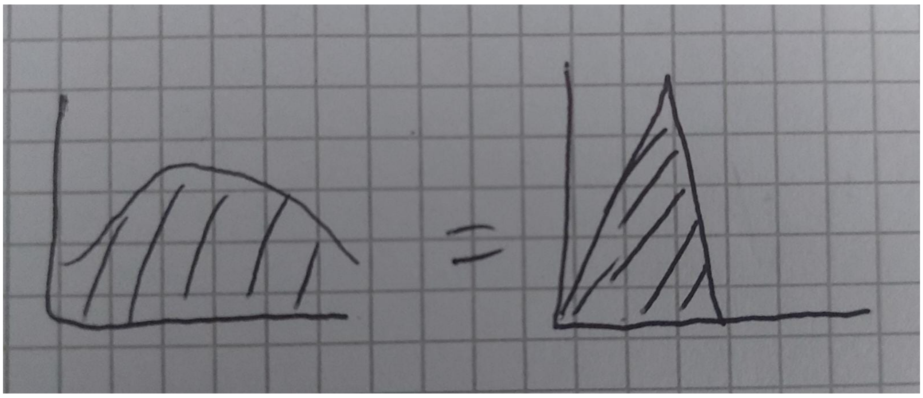


Figura 5: due funzioni il cui integrale ha lo stesso valore

3. **norma 2**: Norma della media quadratica.

$$||x||_2 = \sqrt{\int_I |x(t)|^2 dt}$$

   Nota: $||x||_2^2$ rappresenta l'energia del segnale.

Notiamo che nel caso in cui le funzioni da considerare siano discrete possiamo ripetere le dimostrazioni in modo analogo, solo che al posto degli integrali avremo le sommatorie.