Unito, Dipartimento di Informatica

Esame di Complementi di Analisi e Probabilità

Probabilità, foglio esercizi 1

Ivan Spada (ivan.spada@edu.unito.it),

Sara Placenti (sara.placenti543@edu.unito.it),

Ruben Castelluccio (ruben.castellucci@edu.unito.it)

Novembre 2021

1 Esercizio 1

Si considerino la v.a. X normale con media μ e varianza σ e la v.a. Y normale standard, indipendente da X. Sia inoltre Z = 2X + Y . Determinare:

1. $E[X^2] = ?$

Sapendo che $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $Y \sim N(0, 1)$.

Utilizzando la funzione generatrice $E(X^2) = \phi^{''}(0) = \mu^2 + \sigma^2$

Allo stesso modo $E(X^n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f_X(x)dx$

$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \mu^2 + \sigma^2$

2. $f_Z(z) = ?$

$F_Z(z) = P(Z < z) = P(2X + Y < z)$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{2x+y\leq z} f_X(x)f_Y(y)dxdy$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{z-2x} dy f_X(x) f_Y(y)$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx f_X(x) \int_{-\infty}^{z-2x} dy f_Y(y)$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx f_X(x) F_Y(z-2x)$

Derivo rispetto a z.

$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx f_X(x) f_Y(z-2x)$ ottenendo l'integrale di convoluzione

$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(z-2x)^2}{2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} e^{\frac{-(z-2x)^2}{2}} dx$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} + (z-2x)^2)} dx$

$= \frac{e^{-\frac{z^2-4\mu z+4\mu^2}{8\sigma^2+2}}}{\sqrt{2\pi(4\sigma^2+1)}}$

$= \frac{e^{-\frac{(z-2\mu)^2}{2(4\sigma^2+1)}}}{\sqrt{2\pi(4\sigma^2+1)}}$

La distribuzione di Z è una normale con media 2μ e varianza $4\sigma^2 + 1$.

$Z \sim N(2\mu, 4\sigma^2 + 1)$

3. $f_{X|X+Y}(x|x+y) = ?$

$f_{X|X+Y}(x|x+y)$

$= \frac{f_{X,X+Y}(x,x+y)}{f_{X+Y}(x+y)}$

$= \frac{P(X<x, X+Y<z)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y) dy}$

$= \frac{P(X<x, Y<z-x)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y) dy}$

$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-x)^2}{2}}}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(z-y-\mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy}$

$= \frac{e^{-\frac{1}{2}(\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} + (z-x)^2)}}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(\frac{(z-y-\mu)^2}{\sigma^2} + y^2)} dy}$

$= \frac{e^{-\frac{1}{2}(\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} + (z-x)^2)}}{\frac{\sqrt{2}\sqrt{\pi}\sigma e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2(\sigma^2+1)}}}{\sqrt{\sigma^2+1}}}$

$= \frac{\sqrt{\sigma^2+1} e^{-\frac{1}{2}(\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} + (z-x)^2) + \frac{(z-\mu)^2}{2(\sigma^2+1)}}}{\sqrt{2\pi}\sigma}$

$= \frac{\sqrt{\sigma^2+1}e^{-\frac{1}{2}(\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}+y^2)+\frac{(x+y-\mu)^2}{2(\sigma^2+1)}}}{\sqrt{2\pi}\sigma}$

4. $E[X+Y|X=x] = ?$

$E[X+Y|X=x]$

$= E[X|X=x] + E[Y|X=x]$

Essendo X e Y indipendenti

$= E[X|X=x] + E[Y]$

Sapendo che $E[Y] = 0$ essendo una normale standard otteniamo:

$= x + 0 = x$

5. $E[X|X+Y] = ?$

$E[X|X+Y] =$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|X+Y}(x|x+y)dx$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{\sqrt{\sigma^2+1}e^{-\frac{1}{2}(\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}+y^2)+\frac{(x+y-\mu)^2}{2(\sigma^2+1)}}}{\sqrt{2\pi}\sigma} dx$

Si pone $z = x + y$, quindi $y = z - x$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{\sqrt{\sigma^2+1}\mathrm{e}^{\frac{(z-\mu)^2}{2(\sigma^2+1)} - \frac{\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}+(z-x)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma} dx$

$= \dfrac{\sigma^2 z + \mu}{\sigma^2 + 1}$, otteniamo quindi una funzione di z.

Quindi $E[X|X+Y] = \dfrac{\sigma^2 Z + \mu}{\sigma^2 + 1}$

$= \dfrac{\sigma^2 (X+Y) + \mu}{\sigma^2 + 1}$ che è funzione delle due variabili aleatorie X e Y.

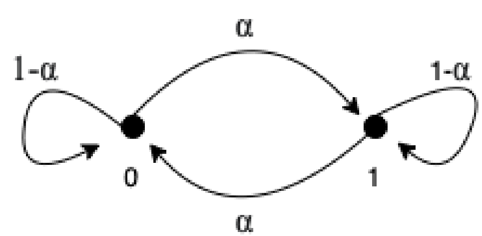
2 Esercizio 2

Si consideri una catena di Markov $\{X_n\}n \geq 1$, con $X_i \in \{0, 1\}$ e probabilità di transizione simmetriche $P(X_i = 1|X_{i-1} = 0) = P(X_i = 0|X_i - 1 = 1) = \alpha$, $\alpha < 0.5$.

Si supponga che la distribuzione iniziale di X_1 sia $P(X_1 = 0) = P(X_1 = 1) = 0.5$.

1. Scrivere la matrice di transizione e disegnare il grafo associati a questa catena;

$$P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}$$



2. Gli stati sono ricorrenti? Giustificare la risposta

Dal grafo ottenuto si può notare come la catena sia finita e siano presenti 2 stati comunicanti {0,1}. Pertanto, avendo una sola classe di equivalenza, si tratta di una catena irreducibile con tutti e 2 gli stati ricorrenti : $\sum_{i=0}^{n} P_{ii}^{n} = \infty$

3. Calcolare il tempo medio di ritorno in 0, se $X_0 = 0$;

Avendo una catena irriducibile e positivo ricorrente $\Pi_j = \frac{1}{m_{jj}}$, da cui $m_{jj} = \frac{1}{\Pi_j}$.
Si ricerca m_{00}, quindi è necessaria la probabilità limite Π_0.

La distribuzione limite da cui ricavare Π_0 si ottiene come unica soluzione non negativa del sistema:

$$\begin{cases} \Pi_j = \sum_i (\Pi_i P_{ij}) \\ \sum_j (\Pi_j) = 1 \end{cases}$$

Nel nostro caso il sistema è

$$\begin{cases} \Pi_0 = \Pi_0(1-\alpha) + \Pi_1\alpha \\ \Pi_1 = \Pi_0\alpha + \Pi_1(1-\alpha) \\ \Pi_0 + \Pi_1 = 1 \end{cases}$$

La soluzione del sistema è:

$$\begin{cases} \Pi_0 = \frac{1}{2} \\ \Pi_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Quindi $m_{00} = \frac{1}{\Pi_0} = 2$.

3 Esercizio 3

Siano N e M due v.a. Geometriche di parametro p, indipendenti. Si determinino:

1. $P(N = n|N + M = k) = ?$

$P(N = n|N + M = k) = \frac{P(N=n,N+M=k)}{P(N+M=k)} = \frac{P(N=n)P(M=k-n)}{P(N+M=k)}$

Calcolo separatamente le probabilità del rapporto:

$P(N = n) = (1 - p)^{n-1}p$

$P(M = k - n) = (1 - p)^{k-n-1}p$

Per il Teorema delle Probabilità totali:

$P(N + M = k) = \sum_{n=1}^{k} P(N + M = k|N = n)P(N = n)$

Per definizione di condizionamento e visto che N e M sono indipendenti:

$= \sum_{n=1}^{k} P(M = k - n)P(N = n)$

$= \sum_{n=1}^{k}(1 - p)^{k-n-1}p(1 - p)^{n-1}p$

$= (1 - p)^{k-2}(p)^2 \sum_{n=1}^{k} 1$

$= (1 - p)^{k-2}(p)^2k$

Sostituendo i risultati parziali alla richiesta originale si ottiene:

$P(N = n|N + M = k)$

$= \frac{(1-p)^{n-1}p(1-p)^{k-n-1}p}{(1-p)^{k-2}p^2k}$

$= \frac{(1-p)^{k-2}p^2}{(1-p)^{k-2}p^2k}$

$= \frac{1}{k}$

2. $P(N + M = j|N = i) = ?$

Sapendo che N, M sono indipendenti

$P(N+M=j|N=i) = \frac{P(N+M=j,N=i)}{P(N=i)}$

$= \frac{P(M=j-i)P(N=i)}{P(N=i)}$

$= P(M=j-i)$

$= (1-p)^{j-i-1}p$

Essendo N, M due geometriche:

- $i \geq 1$
- $j-i \geq 1$, $j \geq i+1$

3. $E(NM)$, spiegare i passaggi e dire come cambierebbe il risultato se N e M non fossero indipendenti:

- Nel caso di N ed M indipendenti: $E(NM) = E(N)E(M)$

  Sapendo che:

  $E[N] = \sum_{n=1}^{\infty} np(1-p)^{n-1} = \frac{1}{p}$

  $E[M] = \sum_{m=1}^{\infty} mp(1-p)^{m-1} = \frac{1}{p}$

  Allora $E(NM) = \frac{1}{p}\frac{1}{p} = \frac{1}{p^2}$

- Nel caso di N ed M dipendenti:

  Ponendo $g(N,M) = N * M$

  $E(NM) = E(g(N,M))$

  $= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} g(n,m)P(N=n, M=m)$

  Calcoliamo la probabilità congiunta.

  $= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty}(n*m)P(n,m)$

  $= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty}(n*m)P(n|m)P(m)$

  Essendo nel caso non indipendente, non è possibile sviluppare $P(n|m)$.

4. $E[(N+M)^2] = ?$

$E[(N+M)^2] =$

$= E[N^2 + 2NM + M^2]$

Essendo N,M indipendenti

$= E[N^2] + E[2NM] + E[M^2]$

$= E[N^2] + 2E[N]E[M] + E[M^2]$

Sapendo che $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$, quindi $E(X^2) = Var(X) + [E(X)]^2$

$= \frac{1-p}{p^2} + \frac{1}{p^2} + 2\frac{1}{p^2} + \frac{1-p}{p^2} + \frac{1}{p^2}$

$= \frac{1-p+1+2+1-p+1}{p^2}$

$= \frac{6-2p}{p^2}$

$= 2\frac{3-p}{p^2}$