Unito, Dipartimento di Informatica

Esame di Complementi di Analisi e Probabilità

Probabilità, foglio esercizi 2

Ivan Spada (ivan.spada@edu.unito.it),

Sara Placenti (sara.placenti543@edu.unito.it),

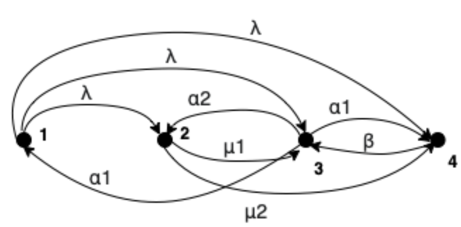
Ruben Castelluccio (ruben.castellucci@edu.unito.it)

Dicembre 2021

1 Esercizio 1

Si consideri una catena di Markov a tempo continuo, costituita da 4 stati, numerati da 1 a 4. Quando il processo sia nello stato 1,o può avere transizioni verso gli altri stati, sempre con tasso $\lambda = 1$. Dallo stato 2 il processo passa allo stato 3 con tasso $\mu_1 = 2$ e a 4 con tasso $\mu_2 = 1$. Da 3 passa nello stato 1 o nello stato 4 con tasso $\alpha_1 = 1$ e allo stato 2 con tasso $\alpha_2 = 2$. Dallo stato 4 può solo passare allo stato 3 e questo avviene con tasso $\beta = 1$.

(a) Disegnare il grafo della catena



(b) Scrivere la matrice di transizione della catena di Markov a tempo discreto associata

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\lambda}{3\lambda} & \frac{\lambda}{3\lambda} & \frac{\lambda}{3\lambda} \\ 0 & 0 & \frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2} & \frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2} \\ \frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_1} & \frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_1} & 0 & \frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_1} \\ 0 & 0 & \beta & 0 \end{pmatrix}$$

Sostituendo i valori otteniamo la seguente matrice di transizione:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Stabilire se esista la distribuzione limite

In una catena di Markov irriducibile ed ergodica (positivo ricorrente e aperiodica), come in questo caso, esiste la distribuzione limite per il primo teorema ergodico.

(d) Si supponga che la catena inizialmente sia in 1. Determinare il tempo medio trascorso in 1, prima di lasciarlo.

Calcolando $v_1 = \sum_{j=1}^{4} q_{1j} = 0 + \lambda + \lambda + \lambda = 3$, si ha che T $\sim$ exp(3). Sapendo che è una catena di Markov a tempo continuo, per definizione gli intertempi sono esponenziali.

Il tempo medio trascorso in 1 è quindi pari a $\frac{1}{v_1} = \frac{1}{3}$

2 Esercizio 2

Sia N(t) e M(t) due processi di Poisson indipendenti di parametro $\lambda = 3$ e $\beta = 2$, rispettivamente:

(a) Si calcoli $P(N(3) = 4)$

Sappiamo che $N(0) = 0$ per una proprietà dei processi di Poisson

$P(N(3) - N(0) = 4) = \frac{[3(3-0)]^4}{4!} e^{-3(3-0)} = \frac{9^4}{4!} e^{-9} = 0.034$

(b) Si calcolino $P(N(5) = 4|N(2) = 1)$ e $P(N(2) = 4|N(4) = 6)$;

- $P(N(5) = 4|N(2) = 1)$ sapendo che si hanno incrementi stazionari allora equivale a scrivere $P(N(5) - N(2) = 3) = \frac{[3(5-2)]^3}{3!} e^{-3(5-2)} = \frac{9^3}{6} e^{-9} = 0.015$
- $P(N(2) = 4|N(4) = 6)$ utilizzando il teorema di Bayes per scambiare premesse e conseguenza si ha che: $\frac{P(N(4)=6|N(2)=4)P(N(2)=4)}{P(N(4)=6)} = \frac{P(N(6)-N(4)=2)P(N(2)=4)}{P(N(4)=6)} = \frac{\frac{[3\cdot 2]^2}{2!} e^{-3\cdot 2} \frac{[3\cdot 2]^4}{4!} e^{-3\cdot 2}}{\frac{[3\cdot 4]^6}{6!} e^{-3\cdot 4}} = \frac{15}{64} = 0.234$

(c) Si determini la distribuzione del tempo T in cui si verifica il primo evento del processo N(t) + M(t).

Sapendo che N e M sono processi indipendenti si ha che:

P(N(t) + M(t) = 1) = $\frac{(\lambda+\beta)t)^k}{k!} e^{-(\lambda+\beta)t} = 5te^{-5t}$

Il tempo segue una distribuzione esponenziale di parametro $\lambda + \beta$ per la ricerca del minimo, pertanto si ottiene che $T \sim exp(5)$.

3 Esercizio 3

Un medico fissa i suoi appuntamenti a distanza di mezz'ora, a partire dalle 9:00. Il tempo che dedica a ciascun paziente sia una una v.a. esponenziale con media 20 minuti, indipendentemente per un paziente dall'altro.

(a) Determinare la probabilità che il secondo paziente debba attendere più di 10 minuti e quella che il terzo paziente debba attendere più di 20 minuti;

$P(X > a + b | X > a) = \frac{P(X>a+b, X>a)}{P(X>a)} = P(X > b) = e^{-\lambda b}$

Sapendo che l'esponenziale gode della proprietà di assenza di memoria:

1)Per determinare la probabilità che il secondo paziente debba attendere più di 10 minuti:

$P(X > 40) = e^{-\frac{1}{20} \cdot 40} = e^{-2} = 0.135$

2)Per determinare la probabilità che il terzo paziente debba attendere più di 20 minuti bisogna distinguere due casi:

- il primo paziente impiega meno di 30 minuti
- il primo paziente impiega più di 30 minuti

Assumendo questa distinzione si deve calcolare la probabilità come segue:

$P(X < 30)P(Y \geq 50) + P(X \geq 30)P(X + Y \geq 80)$

Si calcola separatamente i quattro elementi della formula:

- $P(X \geq 30) = e^{-\frac{1}{20} \cdot 30} = e^{-\frac{3}{2}}$
- $P(X < 30) = 1 - e^{-\frac{3}{2}}$
- $P(Y \geq 50) = e^{-\frac{5}{2}}$
- $P(X + Y \geq 80)$, sapendo che il primo e il secondo paziente seguono una distribuzione di tipo esponenziale di parametro λ pari a 20 minuti si ottene una distribuzione Gamma $\Gamma \sim (2, \frac{1}{20})$

Quindi $P(X+Y \geq 80) = \int_{80}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} dt = \int_{80}^{\infty} \frac{1}{20} e^{-\frac{1}{20}t} \frac{1}{20} t \; dt = \frac{5}{e^4}$

Tirando le somme si arriva a dire che:

$P(X < 30)P(Y \geq 50) + P(X \geq 30)P(X+Y \geq 80) = 0.084$

(b) Si supponga che il medico dia gli appuntamenti a 4 pazienti ogni ora e che chiami per la visita secondo il loro ordine di arrivo. Con quale probabilità il secondo arrivato termina la visita entro le 9:30?

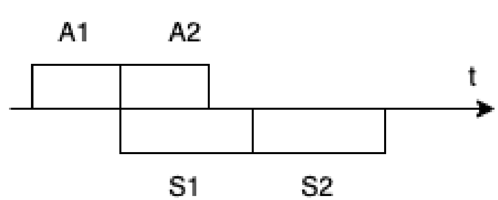
Sapendo che il tempo che il medico decica a ciascun paziente è una v.a. esponenziale con media 20 minuti, si ottiene anche in questo caso una distribuzione Gamma $\Gamma \sim (2, \frac{1}{20})$

Pertanto $P(X+Y \leq 30) = \int_{0}^{30} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} dt = \int_{0}^{30} \frac{1}{20} e^{-\frac{1}{20}t} \frac{1}{20} t \; dt = 1 - \frac{5}{2e^{\frac{3}{2}}} = 0.442$

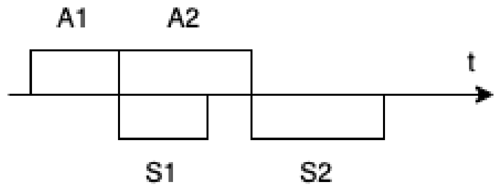
(c) Come cambia la probabilità del punto precedente se i clienti arrivano senza appuntamento secondo un processo di Poisson di parametro $\lambda = 15$ minuti.

Analizzando il problema ci troviamo di fronte a due casi:

- L'arrivo del secondo paziente è prima del termine del servizio del primo paziente, pertanto la probabilità in questo caso dovrebbe essere formulata come: $P(A_1 + S_1 + S_2 < 30)$



- L'arrivo del secondo paziente è dopo il termine del servizio del primo paziente, in questo caso la probabilità deve essere formulata come segue: $P(A_1 + A_2 + S_2 \leq 30)$



Unendo i due casi e moltiplicandoli per la probabilità di trovarsi nel caso in esame, si ha che

$P(A_1 + S_1 + S_2 < 30)P(A_2 < S_1) + P(A_1 + A_2 + S_2 \leq 30)P(S_1 \leq A_2)$
$= P(exp(\frac{1}{15}) + \Gamma(2, \frac{1}{20}) < 30) \cdot \frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{20}+\frac{1}{15}} + P(\Gamma(2, \frac{1}{15}) + exp(\frac{1}{20}) < 30) \cdot \frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{20}+\frac{1}{15}}$

- Ponendo $Z = exp(\frac{1}{15}) + \Gamma(2, \frac{1}{20})$, si calcola la funzione marginale

  $f_Z(t) = \int_0^t f_{exp(\frac{1}{15})}(t-s) f_{\Gamma(2,\frac{1}{20})}(s)\ ds =$
  $\int_0^t \frac{1}{15} e^{-\frac{1}{15}(t-s)} \frac{1}{20} e^{-\frac{1}{20}s} \frac{1}{20} s\ ds =$
  $\frac{(60t-3600)e^{-\frac{t}{20}}+3600e^{-\frac{t}{15}}}{6000}$

  Avendo calcolato la funzione marginale, ci si può ricavare la funzione cumulativa

  $F_Z(30) = \int_0^{30} f_Z(t)dt = \int_0^{30} \frac{(60t-3600)e^{-\frac{t}{20}}+3600e^{-\frac{t}{15}}}{6000} dt =$
  $e^{-2}(e^2 + 2\sqrt{e} - 9) = 0.228$

  Quindi $P(A_1 + S_1 + S_2 < 30) = P(exp(\frac{1}{15}) + \Gamma(2, \frac{1}{20}) < 30) =$
  $P(Z < 30) = F_Z(30) = 0.228$

- Ponendo $Y = \Gamma(2, \frac{1}{15}) + exp(\frac{1}{20})$, si calcola la funzione marginale

  $f_Y(t) = \int_0^t f_{\Gamma(2,\frac{1}{15})}(s) f_{exp(\frac{1}{20})}(t-s)\ ds =$
  $\int_0^t \frac{1}{15} e^{-\frac{1}{15}s} \frac{1}{15} s \frac{1}{20} e^{-\frac{1}{20}(t-s)}\ ds =$
  $\frac{3600e^{-\frac{t}{20}}-(60t+3600)e^{-\frac{t}{15}}}{4500}$

  Avendo calcolato la funzione marginale, ci si può ricavare la funzione cumulativa

$F_Y(30) = \int_0^{30} f_Y(t)dt = \int_0^{30} \frac{3600e^{-\frac{t}{20}} - (60t+3600)e^{-\frac{t}{15}}}{4500} dt =$

$-16e^{-\frac{3}{2}} + 21e^{-2} + 1 = 0.272$

Quindi $P(A_1 + A_2 + S_2 \leq 30) = P(\Gamma(2, \frac{1}{15}) + exp(\frac{1}{20})) \leq 30) =$

$P(Y \leq 30) = F_Y(30) = 0.228$

Dato quanto sopra è possibile calcolare

$P(A_1 + S_1 + S_2 < 30)P(A_2 < S_1) + P(A_1 + A_2 + S_2 \leq 30)P(S_1 \leq A_2)$

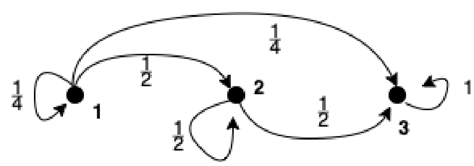
$=e^{-2}(e^2 + 2\sqrt{e} - 9) \cdot \frac{4}{7} + (-16e^{-\frac{3}{2}} + 21e^{-2} + 1) \cdot \frac{3}{7} = 0.247$

4 Esercizio 4

Una catena di Markov a tempo discreto ha spazio degli stati $\{1,2,3\}$ e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Stabilire la natura degli stati di questa catena e se ci siano stati periodici;



Dal grafo ottenuto si evidenzia che la catena è composta da 3 classi di equivalenza differenti: {1},{2},{3} pertanto trattasi di catena riducibile. Tutti gli stati sono aperiodici pertanto la catena è aperiodica.

Inoltre gli stati $\{1,2\}$ sono transienti mentre lo stato $\{3\}$ è ricorrente.

(b) Determinare la probabilità che la catena sia nello stato 2 al tempo $n = 2$, se inizialmente la catena era nello stato 1 con probabilità $\frac{1}{4}$ e nello stato 2 con probabilità $\frac{3}{4}$;

$P(X_1 = 2) = P(X_1 = 2|X_0 = 1) + P(X_1 = 2|X_0 = 2) = P(X_0 = 1)P_{12} + P(X_0 = 2)P_{22} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

(c) Determinare il tempo medio per l'assorbimento in 3.

Assumendo che la partenza dai tre possibili stati sia equiprobabile, possiamo dire che il tempo medio di transitare dallo stato i allo stato 3 è

$$m_{i3} = \begin{cases} 0 & \text{se } i = 3 \\ 1+\sum_{j\neq 3} p_{ij} m_{j3} & \text{se } i \neq 3 \end{cases}$$

Da cui segue che

- $m_{33} = 0$
- $m_{13} = 1 + \frac{1}{4}m_{13} + \frac{1}{2}m_{23} + \frac{1}{4}m_{33}$
- $m_{23} = 1 + \frac{1}{2}m_{23} + \frac{1}{2}m_{33}$

Mettendo a sistema:

$$\begin{cases} \mathrm{m}_{13} = 1 + \frac{1}{4}m_{13} + \frac{1}{2}m_{23} \\ \mathrm{m}_{23} = 1 + \frac{1}{2}m_{23} \end{cases}$$

Risolvendo si arriva a dire che:

- $m_{33} = 0$
- $m_{13} = \frac{8}{3}$
- $m_{23} = 2$

Avendo la medesima probabilità di partire da ogni stato i, il tempo medio per l'assorobimento in 3 è il seguente:

$\frac{1}{3}\frac{8}{3} + \frac{1}{3}2 = \frac{14}{9} = 1.556$