Appunti di Analisi

Lorenzo Dentis, lorenzo.dentis@edu.unito.it

28 aprile 2023

Indice

1 Numeri Complessi

1.1 definizione

Def. *Un numero complesso è una coppia ordinata* (x, y) *con* $x, y \in \mathbb{R}$. *Nell' insieme dei numeri complessi* $\mathbb{C} = \{z = x + iy | x, y \in \mathbb{R}\}$ *(posti* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$*) si definiscono le seguenti operazioni.*

> ***Addizione*** $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
>
> ***Prodotto*** $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2,\ x_1 y_2 + x_2 y_1)$
> *La "formula" del prodotto si deduce facilmente da* $(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$

Un numero complesso può essere anche scritto in forma algebrica $z = x + iy$.

Def. *Dato* $z = (x, y)$ *definisco "coniugato di* z*":* $\overline{z} = (x, -y)$

1.2 proprietà

Essendo un numero complesso una coppia di numeri reali, si può affermare $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$?
Sì,no,sì.

- Insiemisticamente sono uguali tanto che spesso si rappresentano i numeri immaginari sul piano di Gauss (piano complesso) , z è un punto in $\mathbb{R}^2$ di coordinate (x, y)
- Algebricamente non sono uguali, in quanto il prodotto mostrato in $\mathbb{C}$ non è presente in $\mathbb{R}^2$. La somma corrisponde alla somma di vettori in $\mathbb{R}^2$ ma il prodotto non ha corrispondenza. il prodotto vettoriale è completamente diverso in $\mathbb{R}^2$.
- Topologicamente sono uguali, dato un numero complesso z, $||z|| = \sqrt{x^2 + y^2}$ chiamata *norma* o *modulo* di z. cioè la stessa cosa della norma del vettore di coordinate $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Da cui deriva che la "distanza" tra due numeri complessi z, w è, come in $\mathbb{R}^2$, $dist(z, w) = ||z - w|| = \sqrt{(x_z - x_w)^2 + (y_z - y_w)^2}$

Nota: il prodotto fornisce anche una giustificazione alle proprietà dell' *unità immaginaria*

Def. $i = (0, 1)$ *è detta unità immaginaria e verifica formalmente* $i^2 = 1$

Infatti $i^2 = (0, 1)^2 = (0, 1)(0, 1) = (0 * 0 - 1 * 1, 0 * 1, 1 * 0) = (-1, 0) = 1$

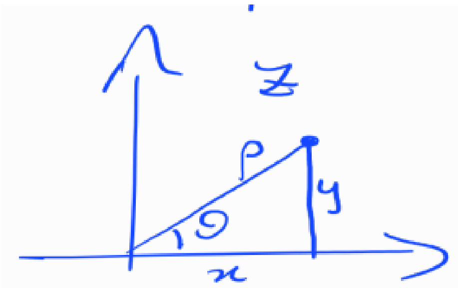
1.3 Altre forme di scrittura

$$Z = (x, y) = x + iy = \rho(cos\theta + isen\theta) = \rho e^{i\theta}$$

[algebrica] [alg. in modo trig] [esponenziale]

1.3.1 Trigonometrica

Rappresentando sul piano complesso un numero complesso z notiamo che si può esprimere la sua "posizione" anche in coordinate polari.



Vivecersa

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = arctan(\frac{y}{x}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \rho cos\theta \\ y = \rho sin\theta \end{cases}$$

$$z = x + iy = \rho\, cos\theta + i\,\rho\, sin\theta = \rho(cos\theta + i\, sin\theta)$$

Chiamiamo questo modo di esprimere un numero complesso "forma algebrica scritta in modo trigonometrico"

1.3.2 Esponenzionale

Def (Formula di De Moivre).

$$e^{i\theta} = cos\theta + i\, sen\theta$$

Dunque

$$z = \rho(cos\theta + sen\theta) = \rho e^{i\theta}$$

Def (Esponenziale complesso). *poco importante*

$$\textit{In generale, sia } z = (x, y)$$
$$e^z = e^x e^{iy} = e^x(cos\, y + i\, sen\, x)$$

La forma esponenziale permette di svolgere calcoli in maniera più semplice (soprattuto moltiplicazioni e potenze).

1.3.3 note

poco importanti
Equivalenza tra la scrittura in forme algebrica e la scrittura come coppia di numeri reali.
$x = (x, 0)$ $y = (y, 0)$, $i = (0, 1)$
$x+iy = (x, 0)+(0, 1)*(y, 0) = (x, 0)+(0*y-1*0, 0*0+1*y) = (x, 0)+(0, y) = (x, y)$

Analisi a valori complessi: Data un funzione $f : \mathbb{I} \to \mathbb{C}$, $\forall t \in \mathbb{I}$, $f(t) \in \mathbb{C}$ quindi può essere "scomposta": $f(t) = f_1(t) + i\, f_2(t)$. f_1 è la parte reale di f_t ed f_2 la parte immaginaria

Def (Derivata a valori complessi).

$$f'(t) = f_1'(t) + i\, f_2'(t)$$

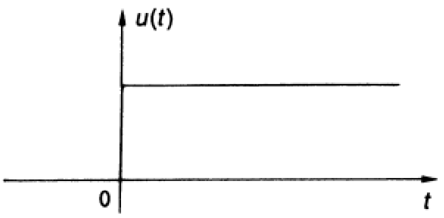
Def (Integrale a valori complessi).

$$\int_I f(t)dt = \int_I f_1(t)dt + i \int_I f_2(t)dt$$

2 Segnali e sistemi

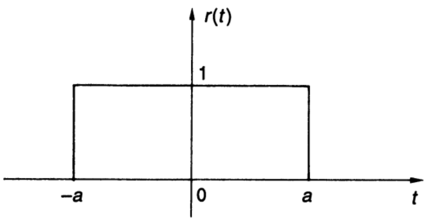
2.1 Segnali

Def (Segnale). *Un Segnale è una grandezza fisica variabile nello spazio o nel tempo, rappresentato dalla funzione* $f = \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$.
Distinguiamo i segnali analogici con dominio $\mathbb{R}$ *ed i segnali le cui misurazioni sono fatte ad intervalli di tempo (tecnica detta sampling) cioè i segnali analogici con dominio* $\mathbb{Z}$ *o* $\mathbb{N}$.



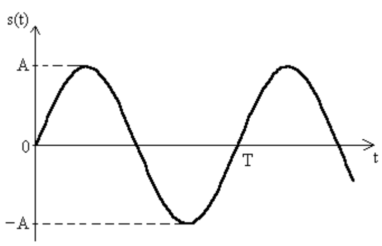
$$\mu(t) = \begin{cases} 0 & se & t < 0 \\ 1 & se & t > 0 \end{cases}$$

Figura 2: Heavyside function



$$r(t) = \begin{cases} 1 & se & |t| < 0 \\ 0 & se & |t| > 0 \end{cases}$$

Figura 3: Funzione finestra rettangolare



$$x(t) = \alpha cos(2\pi\omega t + \phi)$$

ove $|\alpha|$ è l'ampiezza, ω la frequenza (quindi $\frac{1}{\omega}$ il periodo). ϕ la fase. Identicamente si può esprimere la generica sinusoidie in funzione del seno.

$$x(t) = \alpha sen(2\pi\omega t + \phi)$$

Figura 4: Sinusoide generica

Le due notazioni possono essere accorpate in un'unica funzione, che, grazie alla formula di De Moivre, può essere riscritta in notazione esponenziale.

$$x(t) = \alpha(cos(\omega t + \phi) + i\ sen(\omega t + \phi)) = \alpha e^{i(\omega t + \phi)}$$

Il 2π può tranquillamente essere omesso in quanto costante

2.2 Sistemi

Def (Transmission system)**.** *Un "apparato" che riceve un segnale in input e trasmette un segnali in output.*
Indicato come $y = A(x)$ o in breve $y = Ax$.

I sistemi manipolano segnali, quindi prendono in input una funzione e restituiscono in output una differente funzione. Esempi di semplici sistemi sono: l'amplificatore $y(t) = kx(t)$ con k costante , delayer $y(t) = x(t - a)$ con a costante o il "derivatore" $y(t) = x'(t)$

2.2.1 proprietà dei sistemi

I sistemi possono avere diverse proprietà, quelle che interessano a noi (poichè vanno a definire un *filtro*) sono:

1. Linearità: Dato $A : X \to Y$ A è lineare se:

$$A(x + y) = A(x) + A(y)$$

$$A(\lambda x) = \lambda A(x)$$

   nota che la seconda condizione deriva in realtà dalla prima

2. Causalità: Non può "anticipare i tempi", l'output non può variare prima che vari l'input. Formalmente:

$$x_1(t) = x_2(t)\ for\ t < t_0 \Rightarrow Ax_1(t) = Ax_2(t)\ for\ t < t_0$$

   un filtro non deve per forza essere causale, ma per essere realizzabile deve esserlo

3. Invarianza alle traslazioni: detta anche "stazionarietà", se traslo temporalmente l'input di α l'output uscirà temporalmente traslato di α. Formalmente:

$$A(\tau_a x) = \tau_a(Ax)$$

   τ è un sistema, *delay operator*. Si potrebbe anche scrivere:

$$x(t) \to y(t) \Rightarrow x(t - a) \to y(t - a)$$

4. Continuità: Se se segnali di input sono "vicini" allora i due segnali di output sono "vicini" anch'essi. È riferita alle norme che approfondiremo nel capitolo dopo 2.2.2

Def. *Un **filtro** è un sistema che rispetta le proprietà 1,3,4. Un sistema che rispetta anche la proprietà 2 è detto **Filtro causale**.*

2.2.2 Norme