

NOTE SU TRASFORMATA DI FOURIER E FILTRI DI SEGNALI

Paolo Boggiatto

Il testo di riferimento, indicato con (*) nel seguito, è:

Gasquet-Witomski, Fourier Analysis and Applications, Springer

(Novembre 2022)

SPAZI $L^1(I), L^2(I), L^\infty(I)$

Sia I un intervallo aperto $\subseteq \mathbb{R}$, ovvero: 1
 $I = \mathbb{R}$, oppure $I = (-\infty, a)$, oppure $I = (a, +\infty)$, oppure $I = (a, b)$, con $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Consideriamo l'insieme $F(I)$ delle funzioni $f: I \rightarrow \mathbb{C}$.

Nell'insieme $F(I)$ definiamo due operazioni:

(1) Somma puntuale: $(f+g)(t) = f(t) + g(t)$

(2) Prodotto per una costante $\lambda \in \mathbb{C}$: $(\lambda f)(t) = \lambda f(t)$.

PROP. Data di queste operazioni, $F(I)$ è uno "spazio vettoriale".

Definiamo ora, per $f \in F(I)$, quando abbia senso:

$$(1) \|f\|_{L^1(I)} = \int_I |f(t)| dt,$$

$$(2) \|f\|_{L^2(I)} = \left(\int_I |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$(3) \|f\|_{L^\infty(I)} = \inf \{ C \geq 0 : |f(t)| \leq C \text{ quasi ovunque su } I \} = \text{ess sup } |f|$$

(estremo inferiore)

("estremo superiore
essenziale")

NOTA Gli integrali che compaiono in (1) e (2) sono intesi come integrali di Lebesgue. Il "quasi ovunque" in (3) è chiarito a p. 2.

La definizione $\|f\|_{L^\infty(I)}$ generalizza $\sup_{t \in I} |f(t)|$ e coincide con esso se f è continua.

Per questi dettagli si veda (*).

OSS. $\|f\|_{L^1(I)}, \|f\|_{L^2(I)}, \|f\|_{L^\infty(I)}$ non sono "norme"

(vedi definizione su (*)) infatti per esempio se $I = \mathbb{R}$ ed $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } t=0 \\ 0 & \text{per } t \neq 0 \end{cases}$

si ha $\|f\|_{L^1(I)} = 0, \|f\|_{L^2(I)} = 0, \|f\|_{L^\infty(I)} = 0$, ma $f \neq 0$.

Naturalmente le (1), (2) e (3) non sono definite per $\forall f \in F(I)$, ma il "difetto" precedente rimane anche se ci limitiamo a considerare solo le funzioni f per cui siano ben definite.

2

Per ovviare a questo inconveniente si identificano funzioni coincidenti "quasi ovunque" in I , ovvero considero $f = g$ se $f(t) = g(t)$ "quasi ogni" $t \in I$ (abbreviato: "q.o. $t \in I$ "); dove "q.o. $t \in I$ " significa "ogni $t \in I$ eccetto al più un insieme di misura di Lebesgue nulla".

Per la definizione di misura di Lebesgue si veda (*), qui è sufficiente ricordare che sono di misura nulla tutti gli insiemi finiti o numerabili.

Ad esempio $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ e $g(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & \text{per } t \neq 0 \\ 1 & \text{per } t = 0 \end{cases}$

sono considerate uguali poiché differiscono solo sull'insieme finito $\{0\}$.

Inoltre la misura di Lebesgue di ogni intervallo $[a,b]$, con $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, coincide con l'usuale misura $b - a$.

DEF. Si pone:

$$L^1(I) = \{ f: I \rightarrow \mathbb{C} \mid \|f\|_{L^1(I)} < +\infty \},$$

$$L^2(I) = \{ f: I \rightarrow \mathbb{C} \mid \|f\|_{L^2(I)} < +\infty \},$$

$$L^\infty(I) = \{ f: I \rightarrow \mathbb{C} \mid \|f\|_{L^\infty(I)} < +\infty \},$$

sottointendendo l'identificazione tra funzioni q.o. coincidenti.

NOTA Ad esempio se $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } t \neq 0 \\ 0 & \text{per } t = 0 \end{cases}$ abbiamo $f = 0$ grazie all'identificazione sopra descritta.

PROP. $(L^1(I), \|\cdot\|_{L^1(I)})$, $(L^2(I), \|\cdot\|_{L^2(I)})$, $(L^\infty(I), \|\cdot\|_{L^\infty(I)})$

Sono spazi di Banach, ovvero spazi vettoriali normati completi, ed dunque su $L^1(I)$, $L^2(I)$, $L^\infty(I)$ rispettivamente si ha che $\|\cdot\|_{L^1(I)}$, $\|\cdot\|_{L^2(I)}$, $\|\cdot\|_{L^\infty(I)}$ sono norme, e rispetto ad esse una successione è convergente se e solo se è di Cauchy. (per dettagli si veda (*))

Più in particolare per $L^2(I)$ vale la seguente:

PROP $(L^2(I), \|\cdot\|_{L^2(I)})$ è uno "spazio di Hilbert": ovvero la norma $\|\cdot\|_{L^2(I)}$ proviene da un "prodotto interno", precisamente:

$$\|f\|_{L^2(I)} = \sqrt{(f, f)_{L^2(I)}} \quad \text{dove:}$$

$$(f, g)_{L^2(I)} = \int_I f(t) \overline{g(t)} dt, \quad \forall f, g \in L^2(I).$$

NOTA Ciò permette di definire il concetto di "ortogonalità" ponendo $f \perp g$ se $(f, g)_{L^2(I)} = 0$.

NOTA Fisicamente $\|f\|_{L^2(I)}^2$ rappresenta l'energia del segnale $f \in L^2(I)$.

NOTA Una interpretazione di questo fatto per segnali rappresentati da circuiti elettrici è la seguente.

Sia R = resistenza del circuito (costante)

I = corrente " " " funzione del tempo)

V = differenza di potenziale (" " ")

Allora $RI = V$ (1^a legge di Ohm)

ed $IV = P$ = "potenza"

Se W è il lavoro compiuto, ovvero l'energia trasferita, la sua variazione nel tempo ci dà la potenza:

$$P = \frac{dW}{dt}$$

L'energia totale sarà allora:

$$E = W(+\infty) - W(-\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dW}{dt} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t) dt = \frac{1}{R} \int_{-\infty}^{+\infty} V(t)^2 dt$$
$$= \frac{1}{R} \|V\|_{L^2(R)}^2.$$

PROP Per $f, g \in L^2(I)$ vale la diseguaglianza di Schwartz:

$$\int_I |f(t)| |g(t)| dt \leq \|f\|_{L^2(I)} \|g\|_{L^2(I)}.$$

(Da cui segue che $f, g \in L^2(I) \Rightarrow fg \in L^2(I)$)

4

DEF Siano $\phi_n \in L^2(I)$ con $n \in \mathbb{Z}$.

L'insieme di funzioni $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ si dice "base ortonormale" di $L^2(I)$ se :

$$(1) (\phi_n, \phi_m)_{L^2} = \begin{cases} 0 & \text{per } n \neq m \\ 1 & \text{per } n = m \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{(cioè } \phi_n \text{ è ortogonale a } \phi_m \text{ se } n \neq m) \\ \text{(cioè le } \phi_n \text{ sono normalizzate, ovvero } \|\phi_n\| = 1) \end{array}$$

(2) $\forall f \in L^2(I)$ si ha :

$$f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \phi_n$$

"serie di Fourier"

$$\text{dove } c_n = (f, \phi_n)_{L^2}$$

"coefficienti di Fourier"

con convergenza della serie in norma $\|\cdot\|_{L^2(I)}$.

NOTA Analoga definizione vale nel caso $n \in \mathbb{N}$ invece che $n \in \mathbb{Z}$.

NOTA La (1) significa che le funzioni ϕ_n sono ortogonali a due a due ed hanno $\|\phi_n\|_{L^2(I)} = 1$.

PROP Sia $\{\phi_n\}$, con $n \in \mathbb{Z}$ (oppure $n \in \mathbb{N}$), una base ortonormale di $L^2(I)$. Allora $\forall f \in L^2(I)$ si ha :

$$\|f\|_{L^2(I)}^2 = \sum_n |c_n|^2 \quad \text{"uguaglianza di Parseval"}$$

NOTA Nel caso particolare $I = \{1, 2, 3\}$ le funzioni $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ coincidono con i vettori dello spazio \mathbb{R}^3 e l'uguaglianza di Parseval coincide con il teorema di Pitagora!

NOTA Dall'espressione di f tramite la sua serie di Fourier $f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \phi_n$ si comprende intuitivamente che ogni coefficiente di Fourier c_n indica "quanto" della funzione ϕ_n è presente nel segnale f . Nei casi particolari seguenti identificheremo ϕ_n con le frequenze pure.

5

Es. (base "esponenziale" di $L^2(0,a)$)

Sia $I = (0, a)$ con $a > 0$ fissato.

Considero $L^2(I) = L^2((0,a))$, che si scriverà $L^2(0,a)$ per brevità.

Pongo $\lambda = \frac{1}{a}$, ed $e_1^n(t) = \sqrt{\lambda} e^{2\pi i n \lambda t}$ per $n \in \mathbb{Z}$.

Allora $\forall n \in \mathbb{Z}$: $e_1^n \in L^2(0,a)$.

L'insieme di funzioni $\{e_1^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ è una "base ortonormale" di $L^2(0,a)$.

Dim: dobbiamo provare le condizioni (1) e (2) di pag. 4.

Venifichiamo la (1):

$$\text{Se } n=m: (e_1^n, e_1^n)_{L^2} = \lambda \int_0^{\lambda} e^{2\pi i n \lambda t} \cdot e^{-2\pi i n \lambda t} dt = \lambda \int_0^{\lambda} dt = \lambda = 1.$$

$$\begin{aligned} \text{Se } n \neq m: (e_1^n, e_1^m)_{L^2} &= \lambda \int_0^{\lambda} e^{2\pi i n \lambda t} \cdot e^{2\pi i m \lambda t} dt \\ &= \lambda \left[\frac{e^{2\pi i (n-m) \lambda t}}{2\pi i (n-m) \lambda} \right]_0^{\lambda} = \lambda \left(\frac{1 - 1}{2\pi i (n-m) \lambda} \right) = 0 \end{aligned}$$

Per la condiz. (2) si veda Appendice(f).

Dunque $\forall f \in L^2(0,a)$:

$$f(t) = \lambda \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{2\pi i n \lambda t}, \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{"serie di Fourier di } f \\ \text{rispetto alla base esponenz."} \end{array}$$

$$\text{con } a_n = \int_0^{\lambda} f(t) e^{-2\pi i n \lambda t} dt, \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{"coeff. di Fourier di } f \\ \text{rispetto alla base esponenz."} \end{array}$$

dove la serie converge in norma $\| \cdot \|_{L^2(0,a)}$.

(La convergenza puntuale della serie, cioè $\forall t \in (0,a)$, non è garantita).

NOTA i coefficienti di Fourier a_n indicano intuitivamente "quanto" delle frequenze pure $e^{2\pi i n \lambda t}$ è presente nel segnale f .

[6]

E.S. (base "trigonometrica" di $L^2(0,a)$)

Posto, come prima, $\gamma = \frac{1}{a}$, si ha che

$$\{\sqrt{\gamma}\} \cup \{\sqrt{2\gamma} \cos(2\pi n \gamma t)\}_{n=1}^{+\infty} \cup \{\sqrt{2\gamma} \sin(2\pi n \gamma t)\}_{n=1}^{+\infty}$$

è una base ortonormale di $L^2(0,a)$.

Per la corrispondente serie di Fourier di $f \in L^2(0,a)$ si ha l'espressione con convergenza in $L^2(0,a)$:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2\pi n \gamma t) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(2\pi n \gamma t)$$

con

$$\begin{cases} a_n = 2\gamma \int_0^{1/a} f(t) \cos(2\pi n \gamma t) dt \\ b_n = 2\gamma \int_0^{1/a} f(t) \sin(2\pi n \gamma t) dt \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

NOTA Ora le frequenze pure sono rappresentate sia da $\cos(2\pi n \gamma t)$ che da $\sin(2\pi n \gamma t)$, dunque la loro presenza nel segnale f è ora "quantizzata" dalla coppia di coefficienti a_n e b_n .

NOTA La connessione tra la base trigonometrica e quella esponenziale è data dalle formule di Eulero:

$$e^{2\pi i n \gamma t} = \cos(2\pi n \gamma t) + i \sin(2\pi n \gamma t).$$

NOTA

Tutto quanto si è visto per $L^2(0,a)$ si adatta facilmente ad $L^2(\alpha, \beta)$, per ogni intervallo $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$, tramite il cambio di variabile lineare $s = \frac{a}{\beta - \alpha}(t - \alpha)$.

CONVOLUZIONE

DEF. date due funzioni f, g da \mathbb{R} in \mathbb{C} , chiamiamo "convoluzione" di f e g la funzione definita da

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s) g(s) ds, \quad \begin{array}{l} \text{perché l'integrale esiste finito} \\ (\text{come integrale nel senso di Lebesgue}) \end{array}$$

PROP. $(f * g)(t) = (g * f)(t)$ (Prop. commutativa)
(si veda Appendice (c))

PROP. Se $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, allora $f * g$ esiste ed appartiene ad $L^1(\mathbb{R})$,
inoltre $\|f * g\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \|g\|_{L^1(\mathbb{R})}$ (vedi Appendice (d))

PROP. Se $f \in L^2(\mathbb{R}), g \in L^1(\mathbb{R})$, allora $f * g$ esiste ed appartiene ad $L^2(\mathbb{R})$,
inoltre $\|f * g\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} \|g\|_{L^1(\mathbb{R})}$

PROP. Se $f \in L^\infty(\mathbb{R}), g \in L^1(\mathbb{R})$, allora $f * g$ esiste ed appartiene ad $L^\infty(\mathbb{R})$,
inoltre $\|f * g\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|g\|_{L^1(\mathbb{R})}$ (vedi Appendice (e))

NOTA:

Più in generale, per $p \in [1, +\infty)$, si definiscono gli spazi

$$L^p(I) = \left\{ f: I \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_I |f(t)|^p dt < +\infty \right\}$$

in cui, come al solito, si intendono identificate funzioni che differiscono su inservi di misura nulla.

Su $L^p(I)$ si definisce la norma $\|f\|_{L^p(I)} = \left(\int_I |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$
ottenendo spazi di Banach.

Vale la seguente proprietà (di cui le 3 proprietà precedenti sono casi particolari) :

Se $f \in L^p(\mathbb{R}), g \in L^q(\mathbb{R})$ con $p, q \in [1, \infty]$

Allora $f * g$ è ben definita ed appartiene ad $L^r(\mathbb{R})$, con
 $r \in [1, \infty]$ tale che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$ (intendendo $\frac{1}{\infty} = 0$) .

Vale inoltre

$$\|f * g\|_{L^r(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R})} \|g\|_{L^q(\mathbb{R})}$$

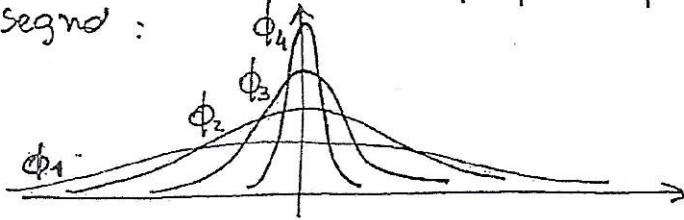
LO SPAZIO DELLE DISTRIBUZIONI $S'(\mathbb{R})$

Per rappresentare fenomeni di tipo "impulsivo" (per es. una massa o una carica elettrica concentrate in un punto, un urto, un'esplosione, ecc.) le funzioni non sono sufficienti.

Per rendersi conto di ciò, supponiamo che $\phi(t) \geq 0$ rappresenti la densità di carica lungo i punti t di un filo illimitato coincidente con l'asse delle ascisse \mathbb{R}_t .

Se la carica totale è 1 avremo allora $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) dt$.

Immaginiamo ora che la carica si distribuisca secondo densità $\phi_n(t)$, con $n=1, 2, 3, \dots$, che si accumulano sempre più nel punto $t=0$, come dal disegno:



Il fatto che la carica resti invariata si esprime con:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_n(t) dt = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Al limite avremo una distribuzione di carica in cui tutta la carica è concentrata in $t=0$. Chiamiamo $\delta(t)$ questa distribuzione (ideale) di carica. Per la distribuzione $\delta(t)$ dovrà dunque valere:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t \neq 0 \\ +\infty & \text{per } t=0 \end{cases} \quad \text{ma anche, in senso opportuno}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1, \quad \text{e quindi } \delta(t) \text{ non rappresenta la distribuzione nulla di carica } \phi(t) \equiv 0.$$

Tuttavia $\delta(t)$ differisce dalla funzione nulla solo in $t=0$, insieme di misura nulla, e quindi se fosse una funzione di $L^1(\mathbb{R})$ o $L^2(\mathbb{R})$ dovrebbe essere identificata con $\phi(t) \equiv 0$.

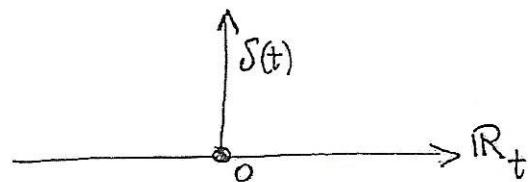
$\circ L^q(\mathbb{R})$

L9

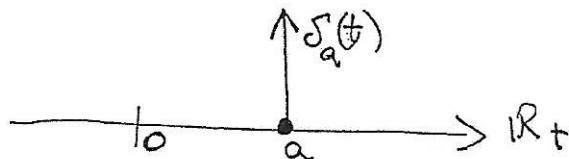
Ciò mostra, intuitivamente, che lo strumento matematico usato per rappresentare una distribuzione di carica $\delta(t)$ concentrata in $t=0$ non può essere una funzione.

Anche in teoria dei segnali è utile considerare segnali (ideali) del tipo $\delta(t)$.

Rappresentiamo graficamente la distribuzione $\delta(t)$ con una "freccia" centrale in $t=0$:



Sempre in modo molto intuitivo definiamo inoltre le sue traslate $\delta_a(t)$, di parametro $a \in \mathbb{R}$, come distribuzioni concentrate nei punti $a \in \mathbb{R}$, e rappresentate da " frecce" centrate in $a \in \mathbb{R}$:



Scriveremo anche $\delta_a(t) = (\tilde{\epsilon}_a \delta)(t)$ usando lo stesso simbolo $\tilde{\epsilon}_a$ dell'operatore di traslazione già usato per funzioni.

Si tratta ora di trovare uno spazio che contenga sia i segnali rappresentati da funzioni di $L^1(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R})$ o $L^\infty(\mathbb{R})$, sia quelli rappresentati da distribuzioni δ_a .

Lo spazio che soddisfa a queste esigenze è lo spazio $S'(\mathbb{R})$ ("esse primo") delle "distribuzioni temperate".

10

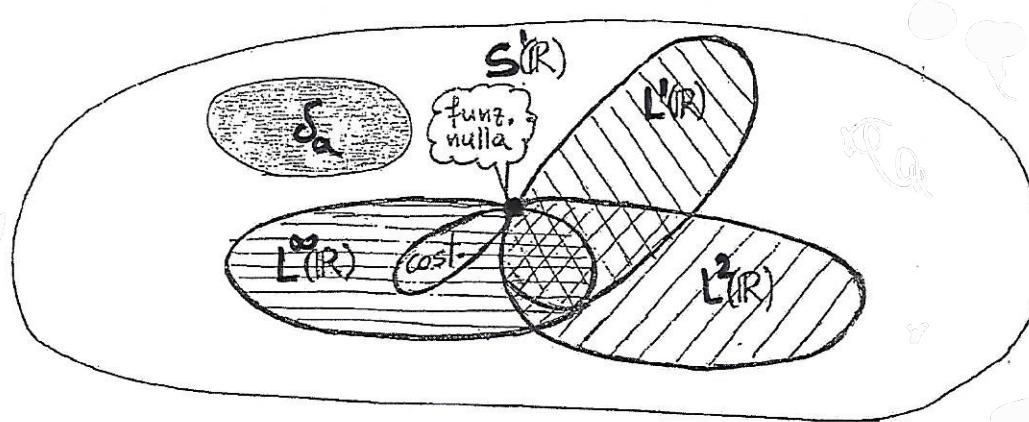
Come oggetti matematici gli elementi di $S'(\mathbb{R})$, cioè le distribuzioni temperate, sono "funzionali lineari continui", per una definizione rigorosa si veda (*).

Qui è sufficiente ricordare i seguenti fatti:

Prop.

- $S'(\mathbb{R})$ contiene $L^1(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R})$, $L^\infty(\mathbb{R})$, (e quindi tutte le funzioni costanti), tutte le distribuzioni δ_a con $a \in \mathbb{R}$.

Più essere comodo visualizzare graficamente le inclusionsi come segue:



Ad esempio:

$$\frac{1}{t} \chi_{[1,+\infty)}(t) \in L^2(\mathbb{R}) \text{ ma } \notin L^1(\mathbb{R})$$

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \chi_{(0,1)}(t) \in L^1(\mathbb{R}) \text{ ma } \notin L^2(\mathbb{R})$$

$$e^{-t^2} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}), \quad \delta_a \notin L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R}) \cup L^\infty(\mathbb{R})$$

- Gli elementi di $S'(\mathbb{R})$ si possono considerare come limiti in senso opportuno di successioni di funzioni. Si pensi ad es. a $\delta(t)$ come limite per $n \rightarrow +\infty$ (in senso opportuno) della successione ϕ_n descritta in precedenza.

- Si possono estendere ad $S(\mathbb{R})$ essenzialmente tutte le operazioni definite su funzioni, in particolare: 11

- somma di funzioni e prodotto di funzione per costante
- convoluzione (sotto opportune ipotesi)
- moltiplicazione puntuale di funzioni (sotto opportune ipotesi)
- traslazione τ_a con $a \in \mathbb{R}$.
- modulazione μ_b (ovvero prodotto per la funzione $e^{2\pi i b t}$) *
- riflessione, ovvero l'operatore che su funzioni agisce come $\tilde{f}(t) = f(-t)$

In particolare vale la formula $\tilde{\delta}_a = \delta_{-a}$
e quindi $\tilde{\delta} = \delta$.

Non entriamo qui nei dettagli relativi alla definizione di queste estensioni, si veda eventualmente (*).

- (*) Si ricorda che per una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ si definiscono:
- traslazione di parametro $a \in \mathbb{R}$: $(\tau_a f)(t) = f(t-a)$
 - modulazione di parametro $a \in \mathbb{R}$: $(\mu_a f)(t) = e^{2\pi i a t} f(t)$

LA TRASFORMATA DI FOURIER

DEF. Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, chiamiamo "trasformata di Fourier" di f la nuova funzione:

$$\hat{f}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i t w} f(t) dt, \quad \text{dipendente dalla variabile } w \in \mathbb{R},$$

ogni volta che l'integrale ha senso (come integrale di Lebesgue).

L'operatore che associa \hat{f} ad f viene indicato con \tilde{F} , scrivendo quindi:

$$\tilde{F}: f \rightarrow \hat{f}, \quad \text{ovvero } \hat{f}(w) = \tilde{F}[f](w).$$

NOTA

La trasformata di Fourier è ben definita per $f \in L^1(\mathbb{R})$, infatti:

$$\begin{aligned} \forall w \in \mathbb{R}: |\hat{f}(w)| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i w t} f(t) dt \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-2\pi i w t}| |f(t)| dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt = \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

quindi

$$\|\hat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \text{ess sup}_{w \in \mathbb{R}} |\hat{f}(w)| \leq \text{ess sup}_{w \in \mathbb{R}} \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Per $f \in L^2(\mathbb{R})$ ed $f \in S(\mathbb{R})$, l'integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i w t} f(t) dt$ non ha in genere senso. Si può tuttavia estendere la definizione di trasformata di Fourier anche a questi casi. Qui supporremo di avere fatto tale estensione, rimandando a (*) chi fosse interessato ai dettagli.

PROP. L'operatore \hat{F} gode delle seguenti proprietà:

- $\hat{F}: f \rightarrow \hat{f}$ è lineare su tutti gli spazi vettoriali su cui è definito.

- $\hat{F}: L^1(\mathbb{R}) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R})$ è continuo, in particolare $\|\hat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$.
(VEDI APPENDICE (g))

- $\hat{F}: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ è un isomorfismo isometrico, in particolare
l'uguaglianza $\|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$ (uguaglianza di Plancherel)
esprime "conservazione dell'energia" di un segnale.

Più specificatamente un segnale è un fenomeno fisico che può essere rappresentato sia in funzione del tempo, da $f(t)$, sia in funzione delle frequenze, da $\hat{f}(w)$.

(NOTA: il fatto che $\hat{f}(w)$ sia la rappresentazione in funzione delle frequenze verrà chiarito nel seguito)

È quindi logico aspettarsi che f ed \hat{f} , che rappresentano lo stesso fenomeno, abbiano associata la stessa energia, come infatti afferma l'uguaglianza di Plancherel.

- $\hat{F}: S'(\mathbb{R}) \rightarrow S'(\mathbb{R})$ è una biiezione bicontinua
(dopo aver definito una opportuna topologia su $S'(\mathbb{R})$).

(cioè entrambe \hat{F} ed \hat{F}^{-1} sono continue)

NOTA: abbiamo lo schema seguente (gli ultimi 2 quadri verranno chiariti) nel seguito

$f(t) =$ rappresentazione del segnale rispetto ai tempi t	$\ \hat{f}\ _{L^2}^2 =$ energia totale del segnale calcolata risp. ai tempi t	$ \hat{f}(t) ^2 =$ distribuzione di energia del segnale rispetto ai tempi t
$\hat{f}(w) =$ rappresentazione del segnale rispetto alle frequenze w	$\ \hat{f}\ _{L^2}^2 =$ energia totale del segnale calcolata risp. alle frequenze	$ \hat{f}(w) ^2 =$ distribuzione di energia del segnale rispetto alle freq. w

L'interpretazione di $\hat{f}(\omega)$ come rappresentazione del segnale rispetto alle frequenze si basa sulle seguenti proprietà. | 14

PROP $\hat{1} = \delta; \quad \hat{\delta} = 1$ (vedi Appendice (a))

NOTA La precedente proprietà ha senso poiché $1, \delta \in S^1(\mathbb{R})$.

PROP $\forall \phi \in S^1(\mathbb{R})$:

$$(a) \hat{F}[\tilde{\tau}_a \phi] = \mu_{-a} \hat{\phi}; \quad (b) \hat{F}[\mu_a \phi] = \tilde{\tau}_a \hat{\phi}.$$

Dim di (a) nel caso particolare $\phi \in L^1(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \hat{F}[\tilde{\tau}_a \phi](\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i \omega t} \tilde{\tau}_a \phi(t-a) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i \omega(s+a)} \phi(s) ds \\ &= e^{-2\pi i \omega a} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i \omega s} \phi(s) ds = (\mu_{-a} \hat{\phi})(\omega). \end{aligned}$$

Il caso (b) con $\phi \in L^1(\mathbb{R})$ è del tutto analogo.

PROP. $\hat{F}[e^{2\pi i \alpha t}] = \delta_\alpha$ (con $\alpha \in \mathbb{R}$).

Dim dalle due proprietà precedenti abbiamo:

$$\hat{F}[e^{2\pi i \alpha t}] = \hat{F}[\mu_\alpha 1] = \tilde{\tau}_\alpha 1 = \tilde{\tau}_\alpha \delta = \delta_\alpha.$$

NOTA La proprietà precedente e la formula di Eulero permettono di calcolare facilmente la trasformata di Fourier delle funzioni

$$\sin(2\pi \alpha t) \quad \text{e} \quad \cos(2\pi \alpha t)$$

si vede Appendice (h)

NOTA

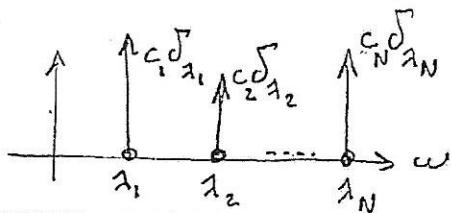
La proprietà precedente è cruciale in teoria dei segnali.

In fatti essa mostra che la trasformata di Fourier "individua" la frequenza pura $a \in \mathbb{R}$ del segnale $e^{2\pi i a t}$ associando a tale segnale una delta di Dirac δ_a centrata nel punto $\omega = a$.

Questo fatto giustifica l'interpretazione di $\hat{f}(\omega)$, o meglio $|\hat{f}(\omega)|^2$, con $f(t)$ generico segnale in $S'(\mathbb{R})$, come distribuzione delle frequenze contenute nel segnale.

CONSEGUENZA Per la linearità di \hat{F} , la trasformata di Fourier di un segnale $f(t) = \sum_{k=1}^N c_k e^{2\pi i \lambda_k t}$, contenente le frequenze $\lambda_1, \dots, \lambda_N$, sarà

$$\hat{f}(\omega) = \sum_{k=1}^N c_k \delta_{\lambda_k}$$



ESEMPIO Calcolare la trasformata di Fourier della funzione $x_{[a,a]}(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [a, a] \\ 0 & \text{se } t \notin [a, a] \end{cases}$ (con $a > 0$)

Soluzione

$$\hat{F}[x_{[a,a]}](\omega) = \int_{-a}^a e^{-2\pi i \omega t} dt = \left[\frac{e^{-2\pi i \omega t}}{-2\pi i \omega} \right]_{-a}^a = \frac{\sin(2a\pi\omega)}{\pi\omega} \stackrel{\text{def}}{=} \text{sinc}_{2a}(\omega)$$

(la funzione sinc si dice "seno cardinale")

Questa trasformata ci servirà nell'analisi del filtro "passa-basso" ideale.

Per un'altra interpretazione del fatto che $\hat{f}(\omega)$ rappresenta le frequenze del segnale $f(t)$ si veda Appendice (i).

PROP.

(i) Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ ed $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ allora

$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i t \omega} \hat{f}(\omega) d\omega$$

q.o. $t \in \mathbb{R}$

(Formula di inversione)

(ii) Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ ed $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ allora

$$\hat{f}^2[f](t) = f(-t)$$

q.o. $t \in \mathbb{R}$

$\leftarrow (\hat{f}^2[f] = \hat{f}$
vale più in generale
per ogni $f \in S^1(\mathbb{R})$)

(iii) Se $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ allora

$$(a) \quad \hat{f} \hat{g} = \hat{f} * \hat{g}$$

$$(b) \quad \hat{f} * \hat{g} = \hat{f} \hat{g}$$

Inoltre (b) vale per $f \in L^2(\mathbb{R})$, $g \in L^1(\mathbb{R})$,
e per $f \in L^1(\mathbb{R})$, $g \in L^1(\mathbb{R})$.

OSSERVAZIONI

$F: S(\mathbb{R}) \rightarrow S(\mathbb{R})$ è un isomorfismo e dunque in particolare una biezione, esiste quindi l'inversa F^{-1} e vale

$$f = F^{-1} F[f] \quad \forall f \in S(\mathbb{R}).$$

La (i) afferma che nel caso $f \in L^1(\mathbb{R})$ ed $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ l'operatore \hat{F}^{-1} si esprime tramite l'integrale specificato sopra.

La (iii) è immediata conseguenza della (i)

Nella (iii) notiamo che nel caso (a) il primo ed il secondo membro appartengono ad $L^\infty(\mathbb{R})$, infatti

$$f, g \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow fg \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{f} \hat{g} \in L^\infty(\mathbb{R}) \quad \text{ed}$$

$$f, g \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{f}, \hat{g} \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{f} * \hat{g} \in L^\infty(\mathbb{R})$$

L'uguaglianza (a) si può quindi intendere in $L^\infty(\mathbb{R})$ (oltre che in $S(\mathbb{R})$).

Nel caso (b) invece abbiamo

$$f, g \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow f \hat{g} \in L^\infty(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{f} \hat{g} \in S(\mathbb{R}) \quad \text{ed}$$

$$f, g \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{f}, \hat{g} \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{f} \hat{g} \in L^\infty(\mathbb{R})$$

quindi l'uguaglianza (b) afferma che, per $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, la distribuzione $\hat{f} \hat{g} \in S(\mathbb{R})$ è, in particolare, una funzione che coincide con la funzione $\hat{f} \hat{g} \in L^\infty(\mathbb{R})$.

FILTRI DI CONVOLUZIONE

DEF Data una funzione $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ diciamo "filtro di convoluzione" l'operatore

$$A: f \longrightarrow f * h = Af$$

PROP. Sia $h \in L^1(\mathbb{R})$, allora l'operatore A è lineare, invariante per traslazioni e continuo da $L^\infty(\mathbb{R})$ in $L^\infty(\mathbb{R})$, da $L^2(\mathbb{R})$ in $L^2(\mathbb{R})$ e anche da $L^1(\mathbb{R})$ in $L^1(\mathbb{R})$.

Dim

Linearità: è ovvia essendo Af definito dall'integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s)h(s)ds$.

Invarianza per traslazioni:

$$(Af)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s)h(s)ds = \int_{-\infty}^{+\infty} f((t-a)-s)h(s)ds = (Af)(t-a)$$

Continuità:

dalle proprietà della convoluzione abbiamo:

$$\|f * h\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|h\|_{L^1(\mathbb{R})} \quad \text{per } f \in L^\infty(\mathbb{R}),$$

$$\|f * h\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} \|h\|_{L^1(\mathbb{R})} \quad \text{per } f \in L^2(\mathbb{R}), \text{ ed}$$

$$\|f * h\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \|h\|_{L^1(\mathbb{R})} \quad \text{per } f \in L^1(\mathbb{R}).$$

NOTA Visto A come operatore $A: L^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R})$ lineare, continuo ed invariante per traslazioni, risulta definita una "funzione di trasferimento" $H(\lambda)$ tale che

$$Ae_\lambda = H(\lambda)e_\lambda \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \text{con } e_\lambda = e_\lambda(t) = e^{2\pi i \lambda t}.$$

(si veda (*), Prop. 2.3.1).

Notare che ha senso applicare A ad e_λ poiché $e_\lambda \in L^\infty(\mathbb{R})$.

Le seguenti proposizioni mostrano il legame tra trasformata di Fourier e filtri di convoluzione.

PROP. Sia $h \in L^2(\mathbb{R})$ ed $A: f \in L^2(\mathbb{R}) \rightarrow f * h \in L^2(\mathbb{R})$ il corrispondente filtro di convoluzione con funzione di trasferimento H .

Allora $H = \hat{h}$.

Dim Poiché $a \in \mathbb{R}$, si ha $e_a(t) = e^{2\pi i a t} \in L^\infty(\mathbb{R})$ e quindi e_a è un input ammissibile.

Dalla definizione di funzione di trasferimento si ha $(e_a * h)(t) = H(a) e_a(t)$.

D'altra parte, poiché $h \in L^1(\mathbb{R})$ si può calcolare direttamente:

$$(e_a * h)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i a(t-s)} h(s) ds = e^{2\pi i a t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i a s} h(s) ds \\ = e_a(t) \cdot \hat{h}(a)$$

Dunque $\hat{h}(a) e_a(t) = H(a) e_a(t) \quad \forall t$.

Posto $t=0$, ho $\hat{h}(a) = H(a)$.

PROP. Fissiamo come prima $h \in L^1(\mathbb{R})$, ma supponiamo ora sia $f \in L^2(\mathbb{R})$; abbiamo $A: f \in L^2(\mathbb{R}) \rightarrow f * h \in L^2(\mathbb{R})$ e vale:

$$f * h = \tilde{f}^{-1} [\hat{f} \hat{h}]$$

Dim Per le proprietà della convoluzione $f \in L^2, h \in L^1 \Rightarrow f * h \in L^2$.

Inoltre $f * h = \tilde{f}^{-1} \tilde{f} [f * h] = \tilde{f}^{-1} [\hat{f} \hat{h}]$ (vedi Prop. pag. 16, (ii'), (b))

NOTA

La proposizione precedente mostra che l'azione di un filtro di convoluzione si può scomporre in 3 fasi:

- (1) Analisi delle frequenze tramite trasformata di Fourier: $f \rightarrow \hat{f}$
- (2) Filtraggio delle frequenze tramite moltiplicazione di \hat{f} per \hat{h} , ovvero H ,
- (3) Ricostruzione del segnale filtrato tramite trasformata di Fourier inversa: $\hat{f} \hat{h} \rightarrow \tilde{f}^{-1} [\hat{f} \hat{h}]$.

Filtri di questo tipo si dicono anche "stazionari" poiché l'azione di filtraggio delle frequenze nella fase (2) avviene in modo indipendente dal tempo.

Ad esempio non è possibile filtrare frequenze in una certa banda fino ad un istante t_0 , ed in una diversa banda dopo l'istante t_0 .

Ciò sarà invece possibile tramite filtri di tipo diverso che utilizzano (ad esempio) la trasformata di Gabor invece che quella di Fourier.

NOTA Le proprietà e le considerazioni precedenti si estendono a parecchi casi in cui $h \notin L^1(\mathbb{R})$. Particolamente significativo sarà ad esempio il caso $h(t) = \text{sinc}_{\frac{\pi}{2}}(t) = \frac{\sin(2\pi t)}{\pi t}$.

In tutti questi casi vale infine la seguente proprietà:

PROP Il filtro di convoluzione $f \rightarrow f * h$ è causale se e solo se $\text{supp } h \subseteq [0, +\infty)$. $\Leftrightarrow (\text{supp } h = \{t \in \mathbb{R} : h(t) \neq 0\})$

Dim (1) sia $\text{supp } h \subseteq [0, +\infty)$, e sia $f(t) = 0 \quad \forall t \leq t_0$.

$$\text{Allora } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s) h(s) ds = \int_{-\infty}^{t_0} f(t-s) h(s) ds.$$

Per $t \leq t_0$ ho $t-s \leq t_0 - s \leq t_0$ (perché sul dominio di integrazione $s \geq 0$), segue $f(t-s) = 0$ e quindi $(f * h)(t) = 0$.

(2) Sia $f \rightarrow f * h$ causale. Per assurdo sia $t_0 < 0$ tale che $h(t_0) \neq 0$; supponiamo $h(t_0) > 0$ (con ovvie generalizzazioni per $h(t_0) \in \mathbb{C}$). Ci limitiamo al caso di h continua in t_0 , allora esistono $a, b > 0$ tali che $-b < t_0 < -a$ ed $h(t) > 0, \forall t \in [-b, -a]$. Allora per $f(t) = \chi_{[0, b-a]}(t)$ ho

$$(f * h)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[0, b-a]}(t-s) h(s) ds = \int_{t-(b-a)}^t h(s) ds = \int_{-b}^{-a} h(s) ds > 0.$$

Dunque non c'è causalità poiché si ha $\chi_{[0, b-a]}(t) = 0, \forall t < 0$, mentre $(\chi_{[0, b-a]} * h)(-a) > 0$.

per $t = -a$

ESEMPIO Il filtro di convoluzione $f \rightarrow f * \text{sinc}_{2a}$
 è un filtro "passa basso ideale", non causale (ovvero non realizzabile).
 Infatti le seguenti uguaglianze, valide con $f \in L^2(\mathbb{R})$, $\text{sinc}_{2a} \in L^2(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} f * \text{sinc}_{2a} &= \hat{f}^{-1} \hat{f} [f * \text{sinc}_{2a}] \\ &= \hat{f} [\hat{f} \cdot \widehat{\text{sinc}_{2a}}] = \hat{f}^{-1} [\hat{f} \cdot \widehat{X}_{[-a,a]}] = \hat{f}^{-1} [\hat{f} \cdot \widehat{X}_{[a,a]}] = \\ &= \hat{f} [\hat{f} \cdot \widehat{X}_{[-a,a]}] \quad (\text{essendo } \widehat{X}_{[a,a]}(t) = \widehat{\text{sinc}_{2a}}(-t) = \widehat{X}_{[-a,a]}(t)) \end{aligned}$$

mostrano che le frequenze ω con $|\omega| > a$ vengono "tagliate" dalla funzione di trasferimento $X_{[-a,a]} = \widehat{\text{sinc}_{2a}}$ (vedi Appendice(b)).

Il filtro tuttavia è non realizzabile poiché $\text{supp } \text{sinc}_{2a} \not\subseteq [0, +\infty)$.

ESEMPIO Il circuito RC è un filtro di convoluzione realizzabile che costituisce un'approssimazione del filtro "passa-basso ideale".

Infatti l'equazione

$$RCV'(t) + v(t) = f(t) \quad \begin{cases} f(t) = \text{input} \\ v(t) = \text{output} \end{cases}$$

porta ad un filtro

$$f(t) \xrightarrow{\boxed{RC}} v(t) = (f * h)(t)$$

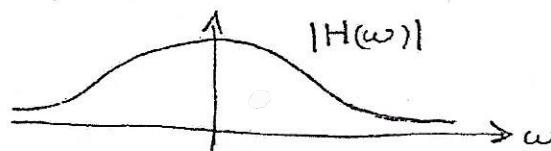
con $h(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} X_{[0,+\infty)}(t)$ e quindi $\text{supp } h \subseteq [0, +\infty)$, cioè il filtro è realizzabile.

NOTA:
 $h \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$

Inoltre la funzione di trasferimento è

$$H(\omega) = \hat{h}(\omega) = \frac{1}{1 + 2\pi i \omega RC}.$$

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\pi^2 \omega^2 R^2 C^2}}$$



il cui grafico può considerarsi come un'approssimazione di una funzione del tipo $X_{[a,a]}$ che, come si è visto sopra, è la funzione di trasferimento del filtro passa-basso ideale.

APPENDICE

(a) Mostriamo, a livello intuitivo, che vale $\hat{1} = \mathcal{J}$.

Abbiamo infatti:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i t \omega_1} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi t \omega_1) dt - i \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2\pi t \omega_1) dt.$$

Per $\omega \neq 0$ le oscillazioni di $\cos(2\pi t \omega_1)$, al variare di $t \in \mathbb{R}$, si "compensano" e ciò giustifica intuitivamente il fatto che il primo integrale sia nullo.

Stessa considerazione vale per il secondo integrale e quindi abbiamo $\hat{1}(\omega) = 0$ per $\omega \neq 0$.

Per $\omega = 0$ invece si ha $\hat{1}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} 1 dt = +\infty$.

Dunque, sempre molto intuitivamente, $\hat{1} = \mathcal{J}$.

(b) Il fatto che $\chi_{[a,a]}$ sia funzione di trasferimento del filtro $f \rightarrow f * \text{sinc}_{2a}$ non è banale. Infatti $\text{sinc}_{2a} \notin L^1(\mathbb{R})$ e quindi la convoluzione $e_1 * \text{sinc}_{2a}$, con $e_1(t) = e^{2\pi i t} \in L^\infty(\mathbb{R})$, non è ben definita negli spazi di Lebesgue.

Si può tuttavia dare un'interpretazione ad $e_1 * \text{sinc}_{2a}$ nello spazio $S'(\mathbb{R})$, scrivendo

$$e_1 * \text{sinc}_{2a} = \hat{f}^{-1} \left[\hat{e}_1 \cdot \widehat{\text{sinc}_{2a}} \right] = \hat{f}^{-1} \left[\delta_1 \cdot \chi_{[a,a]} \right].$$

Se $\lambda \in (-a, a)$ si dimostra che il prodotto $\delta_\lambda \cdot \chi_{[a,a]}$ ha senso e vale δ_λ ; analogamente se $\lambda \notin [-a, a]$ si mostra che $\delta_\lambda \cdot \chi_{[a,a]} = 0$.

Ma $\hat{f}^{-1}[\delta_\lambda] = e_\lambda$, mentre $\hat{f}^{-1}[0] = 0$, dunque possiamo scrivere

$\hat{f}^{-1}[\delta_\lambda \cdot \chi_{[a,a]}] = \chi_{[a,a]}(\lambda) \cdot e_\lambda$ (ad eccezione tuttavia di $\lambda = \pm a$ in cui il prodotto $\delta_\lambda \cdot \chi_{[a,a]}$ non è ben definito, insieme di misura nulla).

Abbiamo quindi: $e_1 * \text{sinc}_{2a} = \chi_{[a,a]}(\lambda) \cdot e_\lambda$ ovvero

$\chi_{[a,a]}$ è funzione di trasferimento del filtro.

22

(c) Dim della proprietà commutativa $f * g = g * f$:

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s) g(s) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) g(t-u) du = (g * f)(t).$$

(d) Dim della proprietà $\|f * g\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \|g\|_{L^1(\mathbb{R})}$:

$$\begin{aligned} \|f * g\|_{L^1(\mathbb{R})} &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s) g(s) ds \right| dt \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t-s)| |g(s)| ds dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t-s)| |g(s)| dt ds = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(s)| \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t-s)| dt \right) ds = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |g(s)| \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(u)| du \right) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(s)| \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} ds = \end{aligned}$$

$$\|g\|_{L^1(\mathbb{R})} \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

(e) Dim della proprietà $\|f * g\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|g\|_{L^1(\mathbb{R})}$:

$$\begin{aligned} \forall t: \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s) g(s) ds \right| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t-s)| |g(s)| ds \leq \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} |g(s)| ds = \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \int_{-\infty}^{+\infty} |g(s)| ds = \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|g\|_{L^1(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

(f) Siano $e_1^n(t)$, $t \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$ definite da
 $e_1^n(t) = \sqrt{n} e^{2\pi i n t}$.

Dimostriamo che $\{e_1^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è base ortonormale di $L^2(0, a)$, con $a = \frac{1}{2}$.

Dobbiamo verificare che valgano la (1) e la (2) di p. 4.

La (1) è verificata a pag. 5.

Per la (2) abbiamo bisogno di alcune premesse.

□ DEF. Sia $(X, \|\cdot\|_X)$ uno spazio normato.

Sia $S \subseteq X$.

S si dice "denso" in X se $\forall x \in X, \forall \epsilon > 0, \exists s \in S | \|x - s\|_X < \epsilon$.

① □ PROP. Sia $(\phi_n)_n$ un insieme ortonormale in $L^2(0, a)$

Allora sono equivalenti:

- $(\phi_n)_n$ è base ortonormale di $L^2(0, a)$ \leftarrow (c'è vale la (2) p. 4)
- L'insieme delle combinazioni lineari finite di elementi di $(\phi_n)_n$ è denso in $L^2(0, a)$.

(NOTA la prop. vale in realtà in spazi di Hilbert qualsiasi)

② □ PROP. (Teor. di Weierstrass)

L'insieme delle combinazioni lineari finite di elementi di $(e_1^n)_n$ è denso in $(C(0, a), \|\cdot\|_\infty)$, spazio delle funzioni continue su $(0, a)$ con norma $\|\cdot\|_\infty$.

③ □ PROP. $C(0, a)$ è denso in $(L^2(0, a), \|\cdot\|_2)$.

Possiamo ora dimostrare la (2) p. 4 :

Sia $f \in L^2(0,a)$, fissiamo $\varepsilon > 0$.

Per la Prop. ③ precedente $\exists g \in C(0,a) \mid \|f-g\|_2 < \varepsilon$

Per la Prop. ② precedente \exists combinaz. lineare finita T di funzioni e_j^n tale che

$$\|g-T\|_\infty < \varepsilon$$

Si ha

$$\|g-T\|_2^2 = \int_0^a |g(t)-T(t)|^2 dt \leq \|g-T\|_\infty^2 \cdot a \leq a \varepsilon^2$$

Dunque

$$\begin{aligned} \|f-T\|_2 &\leq \|f-g\|_2 + \|g-T\|_2 \\ &\leq \varepsilon + \sqrt{a} \varepsilon = (1+\sqrt{a}) \varepsilon \end{aligned}$$

ovvero le combinaz. lineari finite di e_j^n sono dense in $(L^2(0,a), \|\cdot\|_2)$.

Poiché $\{e_j^n\}_n$ è ortonormale, per la Prop. ① precedente, si ha che $\{e_j^n\}_n$ è una base ortonormale di $L^2(0,a)$.

(g) Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ ed $(Y, \|\cdot\|_Y)$ spazi vettoriali normati.

Sia $A: X \rightarrow Y$ un operatore lineare.

Allora sono equivalenti:

- $A: X \rightarrow Y$ è continuo
- $\exists C > 0, \forall x \in X \mid \|Ax\|_Y \leq C \|x\|_X$

Dimostriamo solo che la seconda condizione implica la prima:

Sia $x_n \rightarrow x$ in X , cioè $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - x_n\|_X = 0$

Dall'ipotesi abbiamo che

$$0 \leq \|Ax_n - Ax\|_Y = \|A(x_n - x)\|_Y \leq C \|x_n - x\|_X \quad \text{da cui}$$

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|Ax_n - Ax\|_Y = C \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_X = 0$$

Dunque $Ax_n \rightarrow Ax$ in Y .

(h) Calcoliamo la trasformata di Fourier della funzione $f(t) = \sin(2\pi f_0 t)$ ($f_0 \in \mathbb{R}$).

Usiamo il risultato $\hat{f}[e^{2\pi i f_0 t}](\omega) = \frac{1}{2i} (\delta(\omega) - \delta(-\omega))$.

Dalle formule di Eulero abbiamo

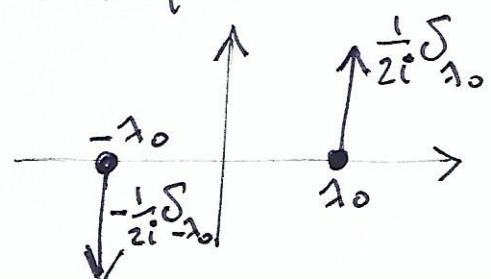
$$\begin{cases} e^{2\pi i f_0 t} = \cos(2\pi f_0 t) + i \sin(2\pi f_0 t) \\ e^{-2\pi i f_0 t} = \cos(2\pi f_0 t) - i \sin(2\pi f_0 t) \end{cases} \quad \text{da cui}$$

$$e^{2\pi i f_0 t} - e^{-2\pi i f_0 t} = 2i \sin(2\pi f_0 t) \quad \text{e otteniamo}$$

$$\sin(2\pi f_0 t) = \frac{e^{2\pi i f_0 t} - e^{-2\pi i f_0 t}}{2i} \quad \text{dunque}$$

$$\hat{f}[\sin(2\pi f_0 t)](\omega) = \frac{1}{2i} (\delta(\omega) - \delta(-\omega))$$

(la trasformata del coseno è analoga)



(i) La formula di inversione

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{2\pi i \omega t} d\omega$$

dove $\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i \omega t} dt$

valida q.o. t ∈ ℝ
per $f \in L^1(\mathbb{R}), \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$

può essere paragonata alla formula che esprime la serie di Fourier di $f \in L^2(0, a)$ rispetto alla base esponenziale:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2\pi i n t}$$

dove $c_n = \int_0^a f(t) e^{-2\pi i n t} dt = (f, e_n)_2$ con $e_n(t) = e^{2\pi i n t}$

valida per $f \in L^2(0, a)$
 $a = \frac{1}{2\pi}$, e convergente
(in $L^2(0, a)$)

Nel secondo caso f è una sommatoria di frequenze pure $e^{2\pi i n t}$, ed i coefficienti di Fourier c_n indicano "quanto" della frequenza $e^{2\pi i n t}$ è presente nel segnale f .

Il primo caso può vedersi come una versione "continua" del secondo: f è espressa da un integrale di frequenze pure $e^{2\pi i \omega t}$ (con $\omega \in \mathbb{R}$) ed ogni frequenza $e^{2\pi i \omega t}$ viene moltiplicata per $\hat{f}(\omega)$, che quindi indica "quanto" della frequenza $e^{2\pi i \omega t}$ è presente nel segnale f .

Anche $c_n = (f, e_n) = \int_0^a f(t) e^{-2\pi i n t} dt$ ed $\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i \omega t} dt$ sono analoghi ma nel caso di $\hat{f}(\omega)$ non si può parlare di prodotto scalare poiché le funzioni $e^{2\pi i \omega t} \notin L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$.