Risposte Foglio1

Giulia Coucorde 802321 giulia.coucourde@edu.unito.it,
Andrea Cacioli 914501 andrea.cacioli@edu.unito.it,
Lorenzo Dentis 914833 lorenzo.dentis@edu.unito.it

12 novembre 2022

1 Esercizio 1

Sia X una v.a che assume il valore 1 con probabilità p e $(-N)$ con probabilità $1-p$. Qui N è una v.a. di Poisson di parametro λ

$$X = \begin{cases} 1 & p \\ -N & 1-p \end{cases} \tag{1}$$

$$N \sim Pois(\lambda)$$

1.a

Determinare il valore di λ per cui $\mathbb{E}(X) = 0$.
Per il teorema dell'attesa totale, $\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X|A_i]P(A_i)$ con $A_1, ..., A_n$ eventi a due a due disgiunti che formano una partizione di E, possiamo affermare che

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] =& P(X=1) * E[1|X=1] + P(X=-N) * \mathbb{E}[-N|X=-N] = \\
=& p + (1-p) * \mathbb{E}[-N] = \\
& \textit{essendo } N \sim \textit{Poisson}(\lambda) \textit{ vale } \mathbb{E}[N] = \lambda \\
=& p - \lambda(1-p)
\end{aligned}$$

$$\lambda = \frac{p}{1-p}$$

1.b

Calcolare $Var(X)$. Usando la definizione di varianza, $Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$ ed il valore dell'attesa calcolato in sezione 1.a, scriviamo:

$$Var(X) = E[X^2] - [p - \lambda(1-p)]^2 \tag{2}$$

Analogmantente al punto precedente si può calcolare $\mathbb{E}[X^2]$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^2] &= p * \mathbb{E}[1^2] + (1-p)\mathbb{E}[(-N)^2] = \\
&= p + (1-p)(\lambda + \lambda^2) = p + \lambda + \lambda^2 - p\lambda - p\lambda^2 = \\
&= p(1 - \lambda - \lambda^2) + \lambda(1 + \lambda)
\end{aligned}$$

Sostituendo nella equazione(2)

$$Var(X) = p(1-\lambda-\lambda^2) + \lambda(1+\lambda) - (p-\lambda(1-p))^2$$

1.c

Sia $\{X_i\}i = 1, 2, ...$ una successione di v.a. distribuite come X e sia $Y = \sum_{i=1}^{M}$, con M v.a. di Poisson di parametro β, indipendente dalle X_i. Determinare $\mathbb{E}(Y)$.

$Y = \sum_{i=1}^{M} X_i$
$M \sim Pois(\beta)$.
Chiamiamo $\mathbb{E}(X_i) = p - \lambda + \lambda p = \mu$
$\mathbb{E}(Y) = \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{E}[Y|M = m]P(M = m)$

Data $M \sim Pois(\beta)$ allora $P(M = m) = \frac{\beta^m}{m!}e^{-\beta}$.
Invece

$$\mathbb{E}[Y|M = m] = \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{m}] = \textit{ per linearità}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \mathbb{E}[X_i] = m\mu$$

Quindi

$$\mathbb{E}[y] = \sum_{m=1}^{\infty} m\mu \qquad \frac{\beta^m}{m!}e^{-\beta} =$$

$$= e^{-\beta}\mu \sum_{m=1}^{\infty} m\frac{\beta^m}{m!} =$$

$$= e^{-\beta}\mu \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta^m}{(m-1)!} =$$

$$= \textit{ semplificando con Wolfram Alpha } =$$

$$= \beta\mu$$

Questo esercizio poteva essere alternativamente risolto utilizzando il *teorema della doppia attesa* e quindi ponendo $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{N} X_i] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\sum_{i=1}^{N} X_i|N]]$. Condizionando su N e svolgendo i calcoli analogamente a quanto fatto in classe saremmo giunti alla seguente uguaglianza:

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{N} X_i] = \mathbb{E}[N] * \mathbb{E}[X] = \beta\mu$$

2 Esercizio 2

Alla stazione di partenza di un treno salgono K persone, con K v.a. distribuita secondo Poisson, di parametro $\lambda = 100$. Il treno effettua un'unica fermata prima dell'arrivo a destinazione. Alla fermata ogni persona scende, con uguale probabilità p.

$$K \sim Pois(100) \qquad\qquad X \sim Binom(K, p)$$

$$f_K(k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \qquad\qquad f_X(x) = \binom{k}{x}p^x(1-p)^{k-x}$$

$$\mathbb{E}(k) = \lambda = 100 \qquad\qquad \mathbb{E}(X) = kp$$

Creiamo inoltre una nuova v.a. $Z = K - X$ che conta il numero di persone rimaste sul treno.

2.a

Se nessun nuovo passeggero sale alla fermata intermedia, determinare la probabilità che il treno arrivi alla stazione di destinazione finale con almeno 90 passeggeri.

Si sta cercando $P(Z \geq 90)$.

$$\begin{aligned}
f_Z(z) =& \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{P(k - X = z|K = k)}_{\binom{k}{k-z}p^{k-z}(1-p)^z} \underbrace{P(K = k)}_{\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}} = \\
=& \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(k-z)!z!}p^{k-z}(1-p)^z \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \\
=& \textit{portando fuori dalla sommatoria i termini non correlati a } k = \\
=& \frac{e^{-\lambda}(1-p)^z}{z!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(k-z)!}p^{k-z}\frac{\lambda^k}{k!} = \frac{e^{-\lambda}(1-p)^z}{z!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^{k-z}\lambda^k}{(k-z)!} = \\
=& \textit{moltiplicando e dividendo } \lambda^{k-z} = \\
=& \frac{e^{-\lambda}(1-p)^z}{z!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^{k-z}\lambda^k}{(k-z)!} * \lambda^{k-z}\lambda^{z-k} = \\
=& \frac{e^{-\lambda}(1-p)^z\lambda^z}{z!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^{k-z}\lambda^k\lambda^{k-z}}{(k-z)!\lambda^k} = \\
=& \frac{e^{-\lambda}(1-p)^z\lambda^z}{z!} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(p\lambda)^{k-z}}{(k-z)!}}_{e^{p\lambda}} = \\
=& \frac{e^{p\lambda}e^{-\lambda}(1-p)^z\lambda^z}{z!} = e^{p\lambda-\lambda}\frac{(\lambda-\lambda p)^z}{z!} = Pois(\lambda - \lambda p)
\end{aligned}$$

Quindi $F_Z(z) = \sum_{i=0}^{z} f_Z(i) = P(Z < z)$.

$$P(Z \geq 90) = 1 - P(Z < 90) = 1 - f_Z(89)$$

2.b

Se nessun nuovo passeggero sale alla fermata intermedia, determinare il numero medio di passeggeri presenti all'arrivo alla destinazione finale.

Ricordiamo $\mathbb{E}[k] = k = 100$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z] &= [def]\mathbb{E}[K - X] = \mathbb{E}[K] - \mathbb{E}[X] \ \textit{per linearità dell'attesa} \\
&= 100 - \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[X|K = k] f_K(k) = \ \textit{data } X \sim Binom(k, p) = \\
&= 100 - \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[kp] f_K(k) = \ \textit{essendo } k \textit{ e } p \textit{ due costanti} = \\
&= 100 - \sum_{k=1}^{\infty} kp f_K(k) = 100 - p \sum_{k=1}^{\infty} k f_K(k) =
\end{aligned}$$

Per definizione di attesa $\sum_{k=1}^{\infty} k f_K(k) = \mathbb{E}[k] = \lambda = 100$

$$\mathbb{E}[Z] = 100 - 100p$$

2.c

Si supponga che alla fermata intermedia salga un numero M di passeggeri, con M v.a. indipendente da K, v.a. di Poisson di parametro $\beta = 50$. Si determini il numero medio di passeggeri che arriva alla destinazione finale.

$M \sim Pois(\beta)$ con $\beta = 50$ quindi $\mathbb{E}(M) = 50$.
Supponendo che ogni passeggero salito alla fermata intermedia non scenda immediatamente $\mathbb{E}[Z + M] = \mathbb{E}[Z] + E[M]$. Dalla sezione 2.b conosciamo $\mathbb{E}[Z] = 100 - 100p$, quindi:

$$\mathbb{E}[Z + M] = 100 - 100p + 50 = 150 - 100p$$

3 Esercizio 3

3.a

Dimostriamo che

$$\mathbb{E}[X|X] + \mathbb{E}[Y|Y] = X + Y$$

Si noti che per ogni v.a. Z si ha per definizione:

$$\mathbb{E}[Z|Z] = \begin{cases} \mathbb{E}[Z|Z = z_1] & P(Z = z_1) \\ \mathbb{E}[Z|Z = z_2] & P(Z = z_2) \\ \vdots & \\ \mathbb{E}[Z|Z = z_n] & P(Z = z_n) \end{cases}$$

Ma siccome:

$$\mathbb{E}[Z|Z = z_1] = \mathbb{E}[z_1] = z_1$$

Il sistema precedente si puó riscrivere come:

$$\mathbb{E}[Z|Z] = \begin{cases} z_1 & P(Z = z_1) \\ z_2 & P(Z = z_2) \\ \vdots & \\ z_n & P(Z = z_n) \end{cases}$$

Questa é la definizione di Z, pertanto siccome questo vale per tutte le v.a., vale anche per X e Y.
Quindi vero.

3.b

Dimostriamo
$$\mathbb{E}[X+Y||X|=x] \neq x+Y$$
Siccome l'attesa della somma é la somma delle attese (Linearitá dell'attesa condizionata):
$$\mathbb{E}[X+Y||X|=x] = \mathbb{E}[X||X|=x] + \mathbb{E}[Y||X|=x]$$
La prima attesa puó essere riscritta nel seguente modo separando i due casi possibili del valore assoluto:
$$\mathbb{E}[X||X|=x] = x\frac{P(X=x)}{P(X=x)+P(X=-x)} - x\frac{P(X=-x)}{P(X=x)+P(X=-x)} =$$
$$= x\frac{f_X(x)-f_X(-x)}{f_X(x)+f_X(-x)}$$
Siccome é quindi ovvio che tale risultato é diverso da x, vorremmo capire sotto quali ipotesi vale che
$$x = x\frac{f_X(x)-f_X(-x)}{f_X(x)+f_X(-x)}$$
Svolgendo gli opportuni calcoli, si arriva trova che
$$\forall x<0 \quad f_X(x)=0$$
Sotto queste ipotesi, occorre solamente supporre che
$$\mathbb{E}[Y||X|=x] = Y$$
Questo é vero se X e Y sono indipendenti e $Y=\mathbb{E}[Y]$
Inoltre $Y=\mathbb{E}[Y]$ avviene sempre se per qualche k
$$Y = \begin{cases} k & p=1 \end{cases}$$
Quindi falso in generale.
Ma
$$\mathbb{E}[X+Y||X|=x] = x+Y \iff \begin{cases} \text{X e Y sono Indipendenti} \\ \forall x<0 \quad f_X(x)=0 \\ Y \text{ degenere} \end{cases}$$

3.c

Dimostriamo che

$$\mathbb{E}[X||X|] \neq \mathbb{E}[X|X]$$

Come visto al punto 3.a, $\mathbb{E}[X|X] = X$, inoltre:

$$\mathbb{E}[X||X|] = \begin{cases} \mathbb{E}[X||X| = x_1] & P(|X| = x_1) \\ \mathbb{E}[X||X| = x_2] & P(|X| = x_2) \\ \vdots & \\ \mathbb{E}[X||X| = x_n] & P(|X| = x_n) \end{cases}$$

Tuttavia, come visto al punto 3.b,

$$\mathbb{E}[X||X| = x] = x\frac{f_X(x) - f_X(-x)}{f_X(x) + f_X(-x)}$$

Inoltre

$$P(|X| = x) \neq P(X = x)$$

Quindi falso.
Per fare in modo che questa relazione diventi vera, dovremmo trovarci sotto le stesse ipotesi dell'esercizio precedente:

$$\mathbb{E}[X||X|] = \mathbb{E}[X|X] \iff \forall x < 0 \quad f_X(x) = 0$$

3.d

Vogliamo mostrare che

$$\mathbb{E}[g(X)h(Y)|X] = g(X)\mathbb{E}[h(Y)|X]$$

Per fare ció dobbiamo avvalerci di una proprietà dell'attesa applicabile quando X e Y sono indipendenti.
Date due v.a. X e Y indipendenti $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$
In particolare abbiamo che:

$$\mathbb{E}[g(X)h(Y)|X] = \mathbb{E}[g(X)|X]\mathbb{E}[h(Y)|X]$$

Ma come visto al punto 3.a (principio di stabilitá attesa condizionata):

$$\mathbb{E}[g(X)|X] = g(X)$$

Quindi abbiamo trovato ció che volevamo mostrare ma sotto le condizioni che X e Y siano indipendenti.
Quindi:

$$\mathbb{E}[g(X)h(Y)|X] = g(X)\mathbb{E}[h(Y)|X] \iff X \text{ e } Y \text{ indipendenti}$$

3.e

Vogliamo mostrare che:

$$\mathbb{E}[g(X)h(Y)|X = x\ Y = y] = g(x)h(y)$$

Siccome abbiamo giá una informazione sui valori assunti dalla X e dalla Y, possiamo sostituire e trovare che:

$$\mathbb{E}[g(x)h(y)] = g(x)h(y)$$

Questo perché $g(x)h(y)$ é una costante e per ogni costante k abbiamo:

$$\mathbb{E}[k] = k$$

Quindi ció che volevamo mostrare é vero.

3.f

Vogliamo mostrare che:

$$X \text{ e } Y \text{ sono v.a. Gaussiane Indipendenti} \implies \mathbb{E}[XY|X] = XY$$

Iniziamo a scomporre l'attesa del prodotto nel prodotto delle attese. Si puó fare perché X e Y sono indipendenti:

$$\mathbb{E}[XY|X] = \mathbb{E}[X|X]\mathbb{E}[Y|X]$$

Ma come visto prima:

$$\mathbb{E}[X|X] = X$$

Non resta che capire cos'é $\mathbb{E}[Y|X]$, seguendo la definizione abbiamo che:

$$\mathbb{E}[Y|X] = \begin{cases} \mathbb{E}[Y|X = x_1] & P(X = x_1) \\ \mathbb{E}[Y|X = x_2] & P(X = x_2) \\ \vdots \\ \mathbb{E}[Y|X = x_n] & P(X = x_n) \end{cases}$$

Ma $\mathbb{E}[Y|X = x_1] = \mathbb{E}[Y]$ perché X e Y sono indipendenti.
Quindi:

$$\mathbb{E}[Y|X] = \begin{cases} \mathbb{E}[Y] & P(X = x_1) \\ \mathbb{E}[Y] & P(X = x_2) \\ \vdots \\ \mathbb{E}[Y] & P(X = x_n) \end{cases}$$

Questo é evidentemente diverso da Y anche sotto le ipotesi fornite dal problema.
Occorre aggiungere nuovamente l'ipotesi in cui Y é una v.a. degenere che assume il valore k con probabilitá 1.
Tuttavia questo non é possibile in quanto Y é una gaussiana per ipotesi.

4 Esercizio 4

Siano X e Y v.a congiuntamente gaussiane con media μ_X e μ_Y e varianza σ_X^2 e σ_Y^2, rispettivamente e covarianza C_{XY}

4.a

$$X, Y \sim \mathcal{N}(\mu, \delta^2)$$

Vogliamo determinare la densità di probabilità condizionale $X + Y$ dato $Y = y$

$$f_{X+Y|Y=y}(z) \stackrel{def}{=} P(X + Y = z|Y = y)$$

Supponendo che (X,Y) sia gaussiana bivariata:
assumo $Cov_{XY} = 0$

$$Cov_{XY} = 0 \iff X, Y \text{indipendenti}$$

Quindi

Sia $Z = X + Y$

$$F_Z(z) = P(X + Y \leq z)$$

$$\int_{\mathbb{R}} P(X + Y \leq z|Y = y) f_Y(y) dy$$

Ma per l'indipendenza di X e Y

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} P(X + Y \leq z|Y = y) f_Y(y) dy \\
=&\int_{\mathbb{R}} P(X + Y \leq z) f_Y(y) dy \\
=&\int_{\mathbb{R}} P(X < z - y) f_Y(y) dy \\
=&\int_{\mathbb{R}} F_X(z - y) f_Y(y) dy
\end{aligned}$$

Per la formula della derivazione di una funzione integrale

$$f_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} f_X(z - y) f_Y(y) dy$$

Siccome X e Y sono v.a. normali

$$f_X(x) = \frac{-|x - \mu_X|}{2\sigma_X} \text{ e } f_Y(y) = \frac{-|y - \mu_Y|}{2\sigma_Y}$$

Quindi

$$f_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} -\frac{|z-y-\mu_X|}{2\sigma_X} \cdot -\frac{|y-\mu_Y|}{2\sigma_Y} dy$$

Per quanto riguarda v.a. indipendenti con distribuzione normale, si può dimostrare che anche la loro somma è una normale:

$$\mathcal{N}(\mu_X + \mu_Y, \sigma_X + \sigma_Y)$$

(Wikipedia: Sum of normally distributed random variables)

4.b

Determinare

$$\mathbb{E}[X^2 + Y^2 | X = x \quad Y = y]$$

Se X e Y sono indipendenti

$$\mathbb{E}[X^2 | X = x] + E[Y^2 | Y = y] = \mathbb{E}[X^2] + E[Y^2]$$

Dato che $X = x$ e $Y = y$

$$X^2 + Y^2 = x^2 + y^2$$

4.c

Determinare $\mathbb{E}[X|Y = y]$
Descrizione del problema:

$$\mathbb{E}[X|Y = y] \stackrel{def}{=} \int_{\mathbb{R}} f_{X|Y}(x, y) dx$$

Ma

$$f_{X|Y}(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \frac{f_{XY}(v, y)}{f_X(y)} dv$$

Cercando materiale aggiuntivo abbiamo trovato la seguente formula per la possibile risoluzione del problema:

$$\mathbb{E}[X|X_2 = x_2] = \mu_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(x_2 - \mu_2)$$