Appunti di Analisi

Lorenzo Dentis, lorenzo.dentis@edu.unito.it

1 maggio 2023

Indice

1 Numeri Complessi

1.1 definizione

Def. *Un numero complesso è una coppia ordinata* (x, y) *con* $x, y \in \mathbb{R}$. *Nell' insieme dei numeri complessi* $\mathbb{C} = \{z = x + iy | x, y \in \mathbb{R}\}$ *(posti* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$*) si definiscono le seguenti operazioni.*

Addizione $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

Prodotto $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2,\ x_1 y_2 + x_2 y_1)$
La "formula" del prodotto si deduce facilmente da $(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$

Un numero complesso può essere anche scritto in forma algebrica $z = x + iy$.

Def. *Dato* $z = (x, y)$ *definisco "coniugato di* z*":* $\overline{z} = (x, -y)$

1.2 proprietà

Essendo un numero complesso una coppia di numeri reali, si può affermare $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$?
Sì,no,sì.

- Insiemisticamente sono uguali tanto che spesso si rappresentano i numeri immaginari sul piano di Gauss (piano complesso) , z è un punto in $\mathbb{R}^2$ di coordinate (x, y)
- Algebricamente non sono uguali, in quanto il prodotto mostrato in $\mathbb{C}$ non è presente in $\mathbb{R}^2$. La somma corrisponde alla somma di vettori in $\mathbb{R}^2$ ma il prodotto non ha corrispondenza. il prodotto vettoriale è completamente diverso in $\mathbb{R}^2$.
- Topologicamente sono uguali, dato un numero complesso z, $||z|| = \sqrt{x^2 + y^2}$ chiamata *norma* o *modulo* di z. cioè la stessa cosa della norma del vettore di coordinate $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Da cui deriva che la "distanza" tra due numeri complessi z, w è, come in $\mathbb{R}^2$, $dist(z, w) = ||z - w|| = \sqrt{(x_z - x_w)^2 + (y_z - y_w)^2}$

Nota: il prodotto fornisce anche una giustificazione alle proprietà dell' *unità immaginaria*

Def. $i = (0, 1)$ *è detta unità immaginaria e verifica formalmente* $i^2 = 1$

Infatti $i^2 = (0, 1)^2 = (0, 1)(0, 1) = (0 * 0 - 1 * 1, 0 * 1, 1 * 0) = (-1, 0) = 1$

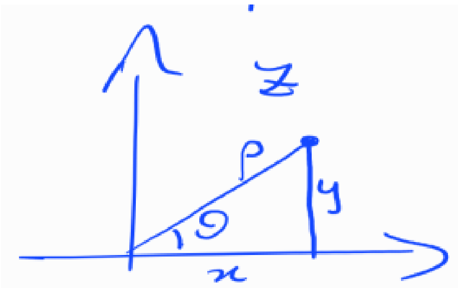
1.3 Altre forme di scrittura

$$Z = (x, y) = x + iy = \rho(cos\theta + isen\theta) = \rho e^{i\theta}$$

[algebrica] [alg. in modo trig] [esponenziale]

1.3.1 Trigonometrica

Rappresentando sul piano complesso un numero complesso z notiamo che si può esprimere la sua "posizione" anche in coordinate polari.



Vivecersa

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = arctan(\frac{y}{x}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \rho cos\theta \\ y = \rho sin\theta \end{cases}$$

$$z = x + iy = \rho\, cos\theta + i\, \rho\, sin\theta = \rho(cos\theta + i\, sin\theta)$$

Chiamiamo questo modo di esprimere un numero complesso "forma algebrica scritta in modo trigonometrico"

1.3.2 Esponenzionale

Def (Formula di De Moivre).

$$e^{i\theta} = cos\theta + i\, sen\theta$$

Dunque

$$z = \rho(cos\theta + sen\theta) = \rho e^{i\theta}$$

Def (Esponenziale complesso). *poco importante*

$$\textit{In generale, sia } z = (x, y)$$
$$e^z = e^x e^{iy} = e^x(cos\, y + i\, sen\, x)$$

La forma esponenziale permette di svolgere calcoli in maniera più semplice (soprattuto moltiplicazioni e potenze).

1.3.3 Note

poco importanti
Equivalenza tra la scrittura in forme algebrica e la scrittura come coppia di numeri reali.
$x = (x, 0)$ $y = (y, 0),\ i = (0, 1)$
$x+iy = (x,0)+(0,1)*(y,0) = (x,0)+(0*y-1*0, 0*0+1*y) = (x,0)+(0,y) = (x,y)$

Analisi a valori complessi: Data un funzione $f : \mathbb{I} \to \mathbb{C}$, $\forall t \in \mathbb{I}$, $f(t) \in \mathbb{C}$ quindi può essere "scomposta": $f(t) = f_1(t) + i\, f_2(t)$. f_1 è la parte reale di f_t ed f_2 la parte immaginaria

Def (Derivata a valori complessi).

$$f'(t) = f_1'(t) + i\, f_2'(t)$$

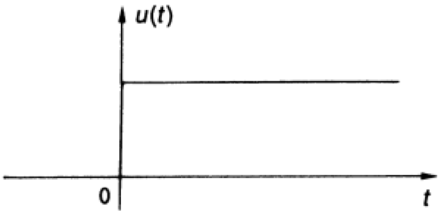
Def (Integrale a valori complessi).

$$\int_I f(t)dt = \int_I f_1(t)dt + i \int_I f_2(t)dt$$

2 Segnali e sistemi

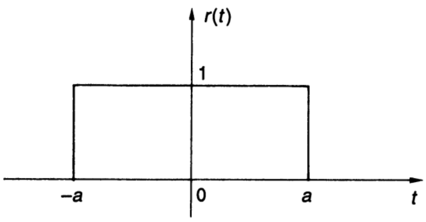
2.1 Segnali

Def (Segnale). *Un Segnale è una grandezza fisica variabile nello spazio o nel tempo, rappresentato dalla funzione* $f = \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$.
Distinguiamo i segnali analogici con dominio $\mathbb{R}$ *ed i segnali le cui misurazioni sono fatte ad intervalli di tempo (tecnica detta sampling) cioè i segnali analogici con dominio* $\mathbb{Z}$ *o* $\mathbb{N}$.



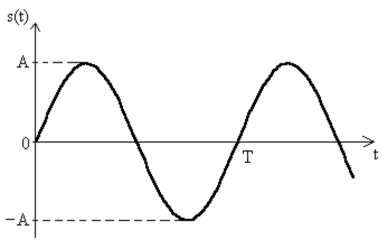
$$\mu(t) = \begin{cases} 0 & se \quad t < 0 \\ 1 & se \quad t > 0 \end{cases}$$

Figura 2: Heavyside function



$$r(t) = \begin{cases} 1 & se \quad |t| < 0 \\ 0 & se \quad |t| > 0 \end{cases}$$

Figura 3: Funzione finestra rettangolare



$$x(t) = \alpha cos(2\pi\omega t + \phi)$$

ove $|\alpha|$ è l'ampiezza, ω la frequenza (quindi $\frac{1}{\omega}$ il periodo). ϕ la fase. Identicamente si può esprimere la generica sinusoidie in funzione del seno.

$$x(t) = \alpha sen(2\pi\omega t + \phi)$$

Figura 4: Sinusoide generica

Le due notazioni possono essere accorpate in un'unica funzione, che, grazie alla formula di De Moivre, può essere riscritta in notazione esponenziale.

$$x(t) = \alpha(cos(\omega t + \phi) + i\ sen(\omega t + \phi)) = \alpha e^{i(\omega t + \phi)}$$

Il 2π può tranquillamente essere omesso in quanto costante

2.2 Sistemi

Def (Transmission system)**.** *Un "apparato" che riceve un segnale in input e trasmette un segnali in output.*
Indicato come $y = A(x)$ *o in breve* $y = Ax$*.*

I sistemi manipolano segnali, quindi prendono in input una funzione e restituiscono in output una differente funzione. Esempi di semplici sistemi sono: l'amplificatore $y(t) = kx(t)$ con k costante , delayer $y(t) = x(t - a)$ con a costante o il "derivatore" $y(t) = x'(t)$

2.2.1 Proprietà dei sistemi

I sistemi possono avere diverse proprietà, quelle che interessano a noi (poichè vanno a definire un *filtro*) sono:

1. Linearità: Dato $A : X \to Y$ A è lineare se:

   $$A(x + y) = A(x) + A(y)$$

   $$A(\lambda x) = \lambda A(x)$$

   nota che la seconda condizione deriva in realtà dalla prima

2. Causalità: Non può "anticipare i tempi", l'output non può variare prima che vari l'input. Formalmente:

   $$x_1(t) = x_2(t)\ for\ t < t_0 \Rightarrow Ax_1(t) = Ax_2(t)\ for\ t < t_0$$

   un filtro non deve per forza essere causale, ma per essere realizzabile deve esserlo

3. Invarianza alle traslazioni: detta anche "stazionarietà", se traslo temporalmente l'input di α l'output uscirà temporalmente traslato di α. Formalmente:

   $$A(\tau_a x) = \tau_a(Ax)$$

   τ è un sistema, *delay operator*. Si potrebbe anche scrivere:

   $$x(t) \to y(t) \Rightarrow x(t - a) \to y(t - a)$$

4. Continuità: Se se segnali di input sono "vicini" allora i due segnali di output sono "vicini" anch'essi. Quando la sequenza di segnali in input x_n tende ad x la sequenza di segnali in output y_n tende a y. Ma cosa vuol dire che una sequenza di segnali *tende* ad un segnale? Dobbiamo fare riferimento alle norme che approfondiremo nel capitolo dopo 2.2.2, in quanto $x_n \to x \iff ||x_n - x|| \to 0$ cioè x_n tende a x se la distanza tra x_n ed x tende a 0. Una definizione formale di Continuità è data al capitolo 2.2.3

Def. *Un **filtro** è un sistema che rispetta le proprietà 1,3,4. Un sistema che rispetta anche la proprietà 2 è detto **Filtro causale**.*

2.2.2 Norme

Abbiamo già citato due volte il discorso di norma, ma cosa vuol dire la norma in $\mathbb{C}$? Sia $Iin\mathbb{R}$ un intervallo possiamo definire tre norme:

1. **norma uniforme**: Anche detta norma infinito.
$$||x||_\infty = sup|x(t)|$$
Cioè la norma uniforme di x è il suo estremo superiore.

2. **norma 1**: Anche detta norma della media.
$$||x||_1 = \int_I |x(t)|dt$$
Cioè, ci interessa un valore "normato" del segnale, ottenibile attraverso l'integrale. Come in figura 5 si può notare che segnali molto differenti possono avere norma 1 uguale.

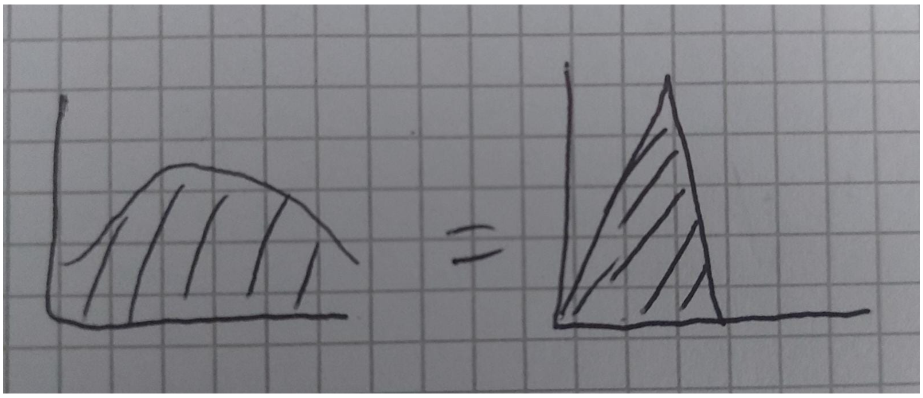


Figura 5: due funzioni il cui integrale ha lo stesso valore

3. **norma 2**: Norma della media quadratica.
$$||x||_2 = \sqrt{\int_I |x(t)|^2 dt}$$
Nota: $||x||_2^2$ rappresenta l'energia del segnale. Nota 2: Questa norma in realtà deriva dal prodotto scalare , infatti presi due vettori u e v $u \quad x \quad v = u_1 * v_1 + \quad ... \quad u_n * v_n$ che riscritto nel continuo è
$$(x, y) = \int_I x(t)\overline{y}(t)dt$$
E $||x||_2$ non è altro che $\sqrt{(x,x)}$. Posso esprimere la norma 2 come prodotto scalare

Notiamo che nel caso in cui le funzioni da considerare siano discrete possiamo ripetere le dimostrazioni in modo analogo, solo che al posto degli integrali avremo le sommatorie.

2.2.3 Continuità in norma

Tornando al discorso di **Continuità**: abbiamo detto *Quando la sequenza di segnali in input x_n tende ad x la sequenza di segnali in output y_n tende a y.*
Adesso che abbiamo la definizione di norma possiamo dire:
Il sistema $A : (X, |...|_i) \to (Y, |...|_j)$ [1] è continuo se
$\lim_{n\to\infty} ||x_n - x||_i = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} ||y_n - y||_j = 0$ dove $y_n = Ax_n$ e $y = Ax$

Nota: un operatore può essere continuo rispetto ad una scelta di norme e non continuo rispetto ad un'altra scelta

2.3 Funzione di trasferimeto di un filtro

Un filtro è un *sitema continuo, lineare ed invariante per traslazioni.* Data la sua linearità vale che $A(\sum_{n=0}^{k} a_n x_n) = \sum_{n=0}^{k} a_n A x_n$. Ma dato che un filtro è anche continuo possiamo analizzarne il comportamento al limite, quindi:

$$A(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n A(x_n)$$

Inoltre possiamo vedere un segnale come la somma pesate delle frequenze pure che lo compongono, quindi: $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2i\pi\lambda nt}$ Dato che $2i\pi$ è una costante e possiamo riscrivere $e^{2i\pi\lambda t}$ come $e_\lambda(t)$

Unendo queste due considerazioni possiamo scrivere un filtro come:

$$y = Ax = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n A(e_\lambda^n)$$

Cioè descriverlo secondo la sua funzione di trasferimento: una **funzione delle frequenze** che indica come il filtro attenua o amplifica le varie frequenze. $f_\lambda = Ae_\lambda = H(\lambda)e_\lambda$ Dato un e_λ ammissibile come input del filtro A

$$A(e_\lambda) = H(\lambda)e_\lambda$$

2.3.1 Filtro passa basso ideale

Volendo crere un *filtro passa basso*, cioè una funzione che per basse frequenze mantiene un segnale o lo amplifica, mentre impedisce alle alte frequenze il passaggio potremmo definire la seguente funzione $H(\lambda)$:

$$H(\lambda) = \begin{cases} 3, & \text{se } \lambda < 10.000 \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

2.3.2 Circuito RC

L'equazione differenziale che regola un circuito è la seguente:

$$RCv'(t) + v(t) = x(t) \tag{1}$$

[1] X indica uno spazio di funzioni, $||...||_i$ indica la norma i-esima che viene usata in X e la coppia $(X, |...|_i)$ è detta *spazio normato*

Ponendo $w(t) = v(t)e^{t/RC}$ possiamo riscrivere $v(t) = w(t)e^{-t/RC}$ per poi calcolare $v'(t)$ in modo da ottenere un valore di $w(t)$ dipendente solo da R, C ed $x(s)$

Dopo tanti calcoli che non sto a scrivere (che si possono trovare sugli appunti di Alfano) otteniamo:

$$v(t) = Ax(t) = \frac{1}{RC}\int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{t-s}{RC}} x(s)ds \tag{2}$$

Ove x è il segnale in ingresso ($x(s)$ è la tensione in ingresso al tempo s).

Questa espressione definisce un filtro? è lineare ed invariante, è continua? Ad esempio in norma infinito è continua, per affermare ciò bisogna solo verificare che $||Ax||_\infty \leq C||x||_\infty$ Con tanti altri calcoli posso dimostrare che $\frac{1}{RC}\int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{t-s}{RC}} x(s)ds \leq ||x||_\infty$ e di conseguenza $||Ax||_\infty \leq ||x||_\infty$ per cui $||Ax||_\infty \leq C||x||_\infty$

2.3.3 Convoluzione

Se definiamo

$$h(t) = \frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}u(t)$$

ove $u(t)$ è la funzione *Heavyside* 2 Possiamo riformulare l'equazione 2

$$Ax(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-s)x(s)dsi = (h * x)(t)$$

L'operazione definita dall'operatore $*$ è detta *convoluzione* tra due segnali, in questo caso h e x. h contiene al suo interno R e C quindi ci dice come il segnale x viene "trasformato"

2.3.4 Funzione di trasferimento filtro RC

Riprendendo l'eq che definisce il filtro RC 1 possiamo ottenere la sua funzione di trasferimento. Quindi il nostro obbiettivo è trovare $h(\lambda)$ che definisce

$$v(t) = H(\lambda)e_\lambda(t)$$

Cioè la funzione che data una frequenza pura del segnale di input descrive come il filtro la modifica. Sostituendo $v(t)$ nell'eq 1 otteniamo

$$RC(H(\lambda)e_\lambda(t))' + H(\lambda)e_\lambda(t) = e_\lambda(t)$$

Ricordando che $e_\lambda = e^{2i\pi\lambda}$ e derivando la parte dell'equazione che va derivata (quella nelle prime parentesi con l'apice) otteniamo

$$RCH(\lambda)e^{2i\pi\lambda}2i\pi\lambda + H(\lambda)e^{2i\pi\lambda} = e^{2i\pi\lambda}$$

Raccogliendo $H(\lambda)$ e cancellando un po' di operatori che si elidono otteniamo finalmente

$$(2i\pi\lambda RC + 1)H(\lambda) = 1$$
$$H(\lambda) = \frac{1}{2i\pi\lambda RC + 1}$$

A noi di questa equazione interessa soprattutto il modulo, poichè ci mostra chiaramente che il filtro RC è un filtro passa basso. i segnali con una elevata frequenza (quindi con un λ alto) vengono attenuati.

$$|H(\lambda)|^2 = \frac{1}{4i\pi^2\lambda^2R^2C^2+1}$$ [2]

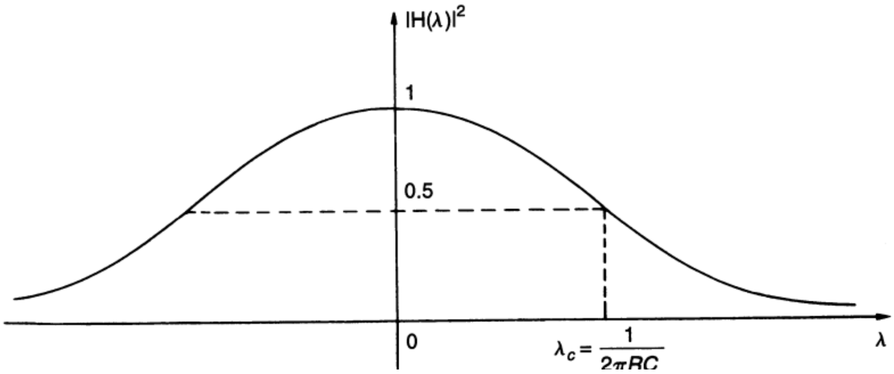


Figura 6: Il filtro RC è passa-basso

[2] se non tornano i conti è perchè non stai considerando che questo è un numero complesso, quindi il suo modulo è $|a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}$