I i 1
ii 1

II i 0.9
ii 1
iii 0.7
iv 0.8

III i 1
ii 1
iii 1
iv 1

IV 1

Esercizi Foglio 1

[redacted] Lorenzo Brescia

November 15, 2020

Esercizio 1

Un manoscritto ´e inviato per la stampa a una copisteria che ha 3 dattilografi A, B e C. Se ´e dattiloscritto da A, il numero di errori ´e distribuito come Poisson di parametro $\lambda = 2.6$, se lo dattiloscrive B il numero di errori ´e di Poisson di parametro $\beta = 3$ mentre se lo fa C ´e di Poisson di parametro $\gamma = 3.4$. Sia X il numero di errori nel dattiloscritto, assumendo che ciascun dattilografo abbia la stessa probabilita di eseguire il lavoro, determinare:

- **a) E(X);**
- **b) Var(X).**

a)

$$E[X] = E[E[X|T]] = E[X|T = A]P[T = A]+E[X|T = B]P[T = B]+E[X|T = C]P[T = C]$$

$$2.6(\frac{1}{3}) + 3(\frac{1}{3}) + 3.4(\frac{1}{3}) = 3$$

b)

$$E[X^2] = E[E[X^2|T]]$$

$$= (2.6 + 2.6^2)\frac{1}{3} + (3 + 3^2)\frac{1}{3} + (3.4 + 3.4^2)\frac{1}{3} = 12.106$$

$$Var[X] = 12.106 - 3^2 = 3.106$$

Esercizio 2

Dato:$f(x, y) = \Big\{ ye^{-y(x+1)} \quad x > 0, y > 0$.

Per ogni y > 0 determinare:
(a) $f_{X|Y}(x|y)$
(b) $P(x > 2|Y = y)$
(c) $E(X|Y)$
(d) $E(X + Y^2)$
Soluzioni:
a)$f_{x|y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_y(y)} = \frac{ye^{-y(x+1)}}{\int_0^\infty ye^{-y(x+1)}dx} = \frac{ye^{-y(x+1)}}{e^{-y}} = ye^{-y(x+1)-(-y)} = ye^{-yx}$ x ∈ ? y ∈ ?
b)$P(x > 2|Y = y)=\int_2^\infty ye^{-yx} = e^{-2y}$ y ∈ ?
c)$E(X|Y) = \int_0^\infty xye^{-yx}dx = \frac{1}{y}$ $\frac{1}{Y}$
d)$E(X + Y^2|Y) = E(X|Y) + Y^2 = \frac{1}{y} + Y^2$ → $\frac{1}{Y}$

o.a!

e(y)

Esercizio 3

Siano N,X1,X2.... variabili aleatorie indipendenti, poniamo SN = X1 +... + XN. Supponiamo che N sia distribuito come una v.a. di Poisson di parametro e che le Xi, i = 1; 2; siano v.a. di Bernoulli di parametro p. Determinare
(a) P(SN = 0)
(b) P(SN = 1)
(c) E(SN|N = 5)
(d) E(SN|N)
Risposte:
a)$P(Sn = 0) = \sum_{i=0}^\infty P(Xi = 0|N = n)P(N = n) =$
$\sum_{i=0}^\infty (1-p)^n \lambda^n \frac{e^{-\lambda}}{n!} = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^\infty [\lambda(1-p)]^n = e^{-\lambda p}$
b)$P(X = 1) = \sum_{i=1}^\infty \binom{n}{1} p(1-p)^{n-1}\lambda^n \frac{e^{-\lambda}}{n!} =$
$= e^{-\lambda} \sum_{i=1}^\infty \frac{n!}{(n-1)!}\lambda p \frac{(\lambda(1-p))^{n-1}}{n!} = e^{-\lambda} \sum_{i=1}^\infty \frac{\lambda p}{(n-1)!}(\lambda(1-p))^{n-1} =$
$=_{n-1=j} e^{-\lambda}\lambda p \sum_{i=1}^\infty \frac{(\lambda(1-p))^j}{j!} = (\lambda p)e^{-\lambda p}$
c)Dato che n=5, sono state fatte 5 prove e quindi cerchiamo la media di successi bernoulliani su n
tentativi, ergo una binomiale di parametri (5,p) e quindi il valore atteso sarà:
$E[Sn|N = n] = np = 5p$
Oppure ci possiamo arrivare tramite calcoli:
$E[\sum_{i=0}^n Xi|N = n] =^{ind} E[\sum_{i=1}^n Xi] =^{lin} nE[Xi] = np$
d)
$E[Sn|N] = Np$

Esercizio 4

$EN = (EN + 1)\frac{5}{6} + (EN + 2)\frac{5}{36} + \frac{2}{36} = \frac{35E}{36} + \frac{1}{18} + \frac{10}{9} = 42$