Risposte Foglio1

Giulia Coucorde 802321 giulia.coucourde@edu.unito.it,
Andrea Cacioli 914501 andrea.cacioli@edu.unito.it,
Lorenzo Dentis 914833 lorenzo.dentis@edu.unito.it

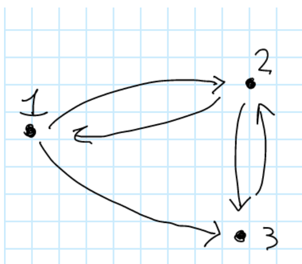
1 dicembre 2022

1 Esercizio 1

Si consideri una catena di Markov con matrice di transizione.

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Stabilire se sia una catena irreducibile.
  Una catena si dice irreducibile quando presenta una sola classe di equivalenza rispetto alla relazione *comunicazione*. Si dimostra facilmente che P è irreducibile disegnando il suo grafo pesato:

  Dal disegno si nota facilmente che $1, 2, 3$ è l'unica classe di equivalenza della catena, $(1, 2)$ e $(2, 3)$ comunicano direttamente, la coppia $(1, 3)$ comunica grazie alla transitività della relazione *comunicazione*.
  $1 \to 3$ è una relazione di comunicazione diretta e $3 \to 2 \wedge 2 \to 1 \Rightarrow 3 \to 1$

- Supponendo che il processo sia originato nello stato 1, determinare la probabilitá che si trovi nello stato 3 dopo due passi
  Per trovare la probabilità che un sistema si trovi in un dato stato basta utilizzare la matrice di transizione, come dimostrato a lezione se si vuole considerare l'evoluzione dopo n passi basta considerare la matrice di transizione P^n. In questo caso ci interessa P^2.

$$P^2 = P * P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

- Determinare $lim_{n \to \infty} P^n$ Per ottenere la distribuzione limite possiamo utilizzare il teorema presentato in classe. La catena P è irreducibile (dimostrato al punto 1) ed Ergodica, questo perchè tutti gli stati sono aperiodici e la catena è irreducibile, quindi sappiamo:

  1. esiste $lim_{n \to \infty} P_{ij}^n = \Pi_j$
  2. Π_j è l'unica soluzione del seguente sistema:

$$\begin{cases} \Pi_j = \sum_i \Pi_j P_{ij} \\ \sum \Pi_j = 1 \end{cases}$$

  Aplicandolo al nostro caso ottieniamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\Pi_1 * \frac{3}{4}\Pi_2 * 0\Pi_3 = \Pi \\ \frac{1}{3}\Pi_1 * 0\Pi_2 * 1\Pi_3 = \Pi \\ \frac{1}{6}\Pi_1 * \frac{1}{4}\Pi_2 * 0\Pi_3 = \Pi \\ \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 = 1 \end{cases} = \textit{risolvendo} = \begin{cases} \Pi_1 = \frac{1}{2} \\ \Pi_2 = \frac{1}{3} \\ \Pi_3 = \frac{1}{6} \end{cases}$$

2 Esercizio 4