I Foglio Esercizi

Sheet 1 Solutions — CompAP

Gruppo Torrielli Federico - Sciandra Lorenzo

1. Prima risposta:

   - $E(X)$
   - $Var(X)$

   Solution:
   Se scelgo A $\longrightarrow Poisson(2.6)$
   Se scelgo B $\longrightarrow Poisson(3)$
   Se scelgo C $\longrightarrow Poisson(3.4)$
   X='Numero di errori nel dattiloscritto'

   $$Y=\begin{cases} 1 \text{ - se scelgo dattilografo A} \\ 2 \text{ - se scelgo dattilografo B} \\ 3 \text{ - se scelgo dattilografo C} \end{cases} \quad \text{Tutti i casi hanno } P = 1/3$$

   Uso il teorema della doppia attesa:

   $$EX = E[E[X|Y] = E[X|Y=1] \cdot 1/3 + E[X|Y=2] \cdot 1/3 + E[X|Y=3] \cdot 1/3 \tag{1}$$

   $$E[X|Y=1] = 2.6$$
   $$E[X|Y=2] = 3$$
   $$E[X|Y=3] = 3.4$$

   Riprendendo l'equazione (1) e sostuendo:

   $$EX = 1/3 \cdot 2.6 + 1/3 \cdot 3 + 1/3 \cdot 3.4 = \frac{2.6+3+3.4}{3} = 9/3 = \mathbf{3}$$

   Varianza: per calcolare la varianza di X $\longrightarrow VarX = EX^2 - E^2X$
   $E^2X = (EX)^2 = (3)^2 = 9$ già calcolato
   A questo punto calcoliamo $E[X^2]$
   $EX^2 = E[E[X^2|Y]] = E[X^2|Y=1] \cdot 1/3 + E[X^2|Y=2] \cdot 1/3 + E[X^2|Y=3] \cdot 1/3$
   Sapendo che il momento quadro di una Poisson è $\lambda^2 + \lambda$ ottengo:

   $$E[X^2|Y=1] = (2.6^2 + 2.6)$$
   $$E[X^2|Y=2] = (3^2 + 3)$$
   $$E[X^2|Y=3] = (3.4^2 + 3.4)$$

Sostituendo alla formula di prima otteniamo:
$E[X^2] = (2.6^2 + 2.6) \cdot 1/3 + (3^2 + 3) \cdot 1/3 + (3.4^2 + 3.4) \cdot 1/3 = \frac{36.32}{3} \simeq 12.11$
Quindi, riprendendo la formula della varianza di X: $12.11 - 9 = 3.11$

2. Seconda risposta: $(\forall y > 0)$

   - $f_{X|Y}(x|y)$
   - $P(X > 2|Y = y)$
   - $E(X|Y)$
   - $E(X + Y^2|Y)$

   Solution: Conoscendo la probabilità congiunta di (X,Y) $f(x, y)$ definita solo per $x, y > 0$ tutti gli integrali nelle formule che seguiranno saranno calcolati da 0 a ∞:

   - La densità di probabilità di $X|Y$: $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{x,y}(x,y)}{f_y(y)} = \frac{f_{x,y}(x,y)}{\int_0^\infty f_{x,y}(x,y)dx} =$
     $= \frac{ye^{-y(x+1)}}{\int_0^\infty ye^{-y(x+1)}dx} = \frac{ye^{-yx}e^{-y}}{e^{-y}} = ye^{-yx}$
   - $P(X > 2|Y = y) = \int_2^\infty f_{x|y}(x|y)dx = \int_2^\infty ye^{-yx} = e^{-2y}$
   - Calcolo prima $E(X|Y = y)$, funzione di y, da cui otterrò direttamente la funzione della v.a. Y:
     $E(X|Y = y) = \int_0^\infty x \cdot f_{X|Y}dx = \int_0^\infty x \cdot ye^{-yx}dx = \frac{1}{y}$
     Quindi: $E(X|Y) = \frac{1}{Y}$
   - $E(X+Y^2|Y) =$ per linearità $= E[X|Y]+E[Y^2|Y] = E[X|Y]+Y^2 = \frac{1}{Y}+Y^2 = \frac{Y^3+1}{Y}$

3. Terza risposta:

   - $P(S_N = 0)$
   - $P(S_N = 1)$
   - $E(S_N|N = 5)$
   - $E(S_N|N)$

   Solution:
   $S_N = X_1 + X_2 + ... + X_N$ si configura come una distribuzione binomiale di N v.a. di Bernoulli. La difficoltà risiede quindi nella v.a. N di Poisson con parametro λ, dato che dovremmo agire considerando la binomiale per tutti gli n che N può assumere.

- $P(S_N = 0) = \sum_n P(S_N = 0, N = n) = \sum_n P(S_n = 0|N = n) \cdot P(N = n) = \sum_n P(S_n = 0) \cdot P(N = n) = \sum_n \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} \cdot \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = \sum_n (1-p)^n \cdot \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$
- $P(S_N = 1) =$ riprendendo i calcoli dal passo precedente $= \sum_n \binom{n}{1} p(1-p)^{n-1} \cdot \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = \sum_n np(1-p)^{n-1} \cdot \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$
- $E(S_N|N = 5) = E(S_5|N = 5) =$ per indipendenza $= E(S_5) =$ che è Binomiale(5,p) il cui valore atteso è $= 5p$
- Partiamo col calcolare $E(S_N|N = n)$ possiamo riscriverlo come:
  $E(\sum_{i=1}^N X_i|N = n) = E(\sum_{i=1}^n X_i|N = n) =$ per linearità dell'attesa $=$
  $= \sum_{i=1}^n E[X_i|N = n] = n \cdot (1P(X_i = 1|N = n) + 0P(X_i = 0|N = n)) = nP(X_i = 1|N = n) =$ per indipendenza $= np$
  Da cui otteniamo $E(S_N|N) = Np$

4. Quarta risposta:
   - $E(N)$

Solution: Risolveremo il problema calcolando l'attesa della v.a. opportunamente condizionata. Procediamo come segue:
Sia:

- N= numero di lanci necesssari per ottenere due 6 consecutivi con 1 dado.
- X= $\begin{cases} 1 \text{ se al primo lancio abbiamo un 6} \\ 2 \text{ altrimenti} \end{cases}$

Per il teorema della doppia attesa $E[N] = E[E[N|X]] = E[N|X = 1]P(X = 1) + E[N|X = 2]P(X = 2) = E[N|X = 1]1/6 + E[N|X = 2]5/6$
Analizziamo separatamente i due casi:

1. Primo caso: $E[N|X = 2] = 1 + E[N]$ (Semplicemente si spreca un lancio)
2. Secondo caso: $E[N|X = 1] = 1+(1\cdot 1/6+(1+E[N])\cdot 5/6) = \frac{12+5E[N]}{6} = 2+\frac{5}{6}E[N]$

Riguardo al secondo caso, il termine tra parentesi indica che oltre al primo lancio di cui sappiamo l'esito 6 si terminerà in un solo altro passo con probabilità 1/6, mentre con probabilità 5/6 avremo solamente sprecato un altro lancio.
Sostituiamo dunque questi nella formula originaria, trovando:
$E[N] = \frac{1}{6} \cdot (2 + \frac{5}{6}E[N]) + \frac{5}{6} \cdot (1 + E[N]) \longrightarrow \frac{E[N]}{36} = \frac{7}{6} \longrightarrow E[N] = 42$