Appunti di Analisi

Lorenzo Dentis, lorenzo.dentis@edu.unito.it

31 ottobre 2022

1 Numeri Complessi

1.1 definizione

Def. *Un numero complesso è una coppia ordinata* (x, y) *con* $x, y \in \mathbb{R}$. *Nell' insieme dei numeri complessi* $\mathbb{C} = \{z = x + iy | x, y \in \mathbb{R}\}$ *(posti* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$*) si definiscono le seguenti operazioni.*

> ***Addizione*** $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
>
> ***Prodotto*** $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2,\ x_1 y_2 + x_2 y_1)$
> *La "formula" del prodotto si deduce facilmente da* $(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$

Un numero complesso può essere anche scritto in forma algebrica $z = x + iy$.

Def. *Dato* $z = (x, y)$ *definisco "coniugato di* z*":* $\overline{z} = (x, -y)$

1.2 proprietà

Essendo un numero complesso una coppia di numeri reali, si può affermare $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$?
Sì,no,sì.
Insiemisticamente sono uguali tanto che spesso si rappresentano i numeri immaginari sul piano di Gauss (piano complesso) , z è un punto in $\mathbb{R}^2$ di coordinate (x, y) Algebricamente non sono uguali, in quanto il prodotto mostrato in $\mathbb{C}$ non è presente in $\mathbb{R}^2$.
La somma corrisponde alla somma di vettori in $\mathbb{R}^2$ ma il prodotto non ha corrispondenza. il prodotto vettoriale è completamente diverso in $\mathbb{R}^2$.
Topologicamente sono uguali, dato un numero complesso z, $||z|| = \sqrt{x^2 + y^2}$ chiamata *norma* o *modulo* di z. cioè la stessa cosa del vettore di coordinate $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Da cui deriva che la "distanza" tra due numeri complessi z, w è, come in $\mathbb{R}^2$, $dist(z, w) = ||z - w|| = \sqrt{(x_z - x_w)^2 + (y_z - y_w)^2}$

Nota: il prodotto fornisce anche una giustificazione alle proprietà dell' *unità immaginaria*

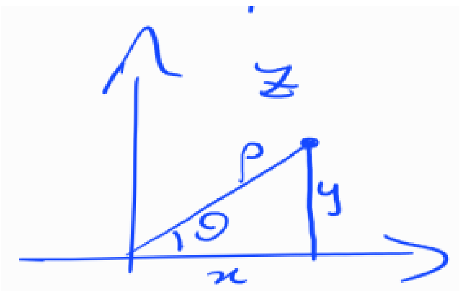
Def. $i = (0, 1)$ *è detta unità immaginaria e verifica formalmente* $i^2 = 1$

Infatti $i^2 = (0, 1)^2 = (0, 1)(0, 1) = (0 * 0 - 1 * 1, 0 * 1, 1 * 0) = (-1, 0) = 1$

1.3 Altre forme di scrittura

1.3.1 Trigonometrica

Rappresentando sul piano complesso un numero complesso z notiamo che si può esprimere la sua "posizione" anche in coordinate polari.



$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = arctan(\frac{y}{x}) \end{cases}$$

Vivecersa

$$\begin{cases} x = \rho cos\theta \\ y = \rho sin\theta \end{cases}$$

$$z = x + iy = \rho\, cos\theta + i\, \rho\, sin\theta = \rho(cos\theta + i\, sin\theta)$$

Chiamiamo questo modo di esprimere un numero complesso "formai algebrica scritta in modo trigonometrico"

1.3.2 Esponenzionale

Def (Formula di De Moivre)**.**

$$e^{i\theta} = cos\theta + i\, sen\theta$$

Dunque

$$z = \rho(cos\theta + sen\theta) = \rho e^{i\theta}$$

Def (Esponenziale complesso)**.** *In generale, sia* $z = (x, y)$

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x(cos\, y + i\, sen\, x)$$

La forma esponenziale permette di svolgere calcoli in maniera più semplice (soprattuto moltiplicazioni e potenze).

1.3.3 note

Equivalenza tra la scrittura in forme algebrica e la scrittura come coppia di numeri reali.
$x = (x, 0)$ $y = (y, 0)$, $i = (0, 1)$
$x + iy = (x, 0) + (0, 1) * (y, 0) = (x, 0) + (0 * y - 1 * 0, 0 * 0 + 1 * y) = (x, 0) + (0, y) = (x, y)$

Analisi a valori complessi: Data un funzione $f : \mathbb{I} \to \mathbb{C}$, $\forall t \in \mathbb{I}$, $f(t) \in \mathbb{C}$ quindi può essere "scomposta": $f(t) = f_1(t) + i\, f_2(t)$. f_1 è la parte reale di f_t ed f_2 la parte immaginaria

Def (Derivata a valori complessi).

$$f'(t) = f_1'(t) + i\, f_2'(t)$$

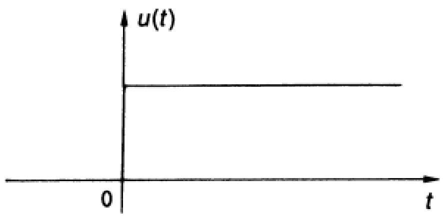
Def (Integrale a valori complessi).

$$\int_I f(t)dt = \int_I f_1(t)dt + i \int_I f_2(t)dt$$

2 Segnali e sistemi

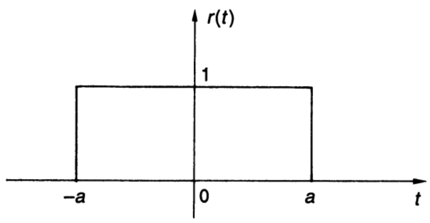
2.1 Segnali

Def (Segnale). *Un Segnale è una grandezza fisica variabile nello spazio o nel tempo, rappresentato dalla funzione $f = \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.*
Distinguiamo i segnali analogici con dominio $\mathbb{R}$ ed i segnali le cui misurazioni sono fatte ad intervalli di tempo (tecnica detta sampling) cioè i segnali analogici con dominio $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{N}$.



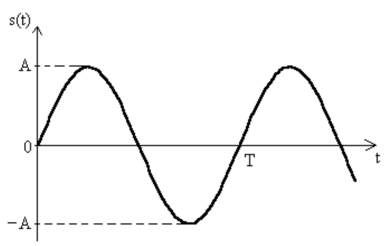
$$\mu(t) = \begin{cases} 0 & se \quad t < 0 \\ 1 & se \quad t > 0 \end{cases}$$

Figura 2: Heavyside function



$$r(t) = \begin{cases} 1 & se \quad |t| < 0 \\ 0 & se \quad |t| > 0 \end{cases}$$

Figura 3: Funzione finestra rettangolare



$$x(t) = \alpha cos(2\pi\omega t + \phi)$$

ove $|\alpha|$ è l'ampiezza, ω la frequenza (quindi $\frac{1}{\omega}$ il periodo). ϕ la fase. Identicamente si può esprimere la generica sinusoidie in funzione del seno.

$$x(t) = \alpha sen(2\pi\omega t + \phi)$$

Figura 4: Sinusoide generica

Le due notazioni possono essere accorpate in un'unica funzione, che, grazie alla formula di De Moivre, può essere riscritta in notazione esponenziale.

$$x(t) = \alpha(cos(\omega t + \phi) + i\ sen(\omega t + \phi)) = \alpha e^{i(\omega t + \phi)}$$

Il 2π può tranquillamente essere omesso in quanto costante

2.2 Sistemi

Def (Transmission system)**.** *Un "apparato" che riceve un segnale in input e trasmette un segnali in output. Indicato come $y = A(x)$ o in breve $y = Ax$.*

esempi di semplici sistemi sono: l'amplificatore $y(t) = kx(t)$ con k costante , delayer $y(t) = x(t - a)$ con a costante o il "derivatore" $y(t) = x'(t)$

2.2.1 proprietà dei sistemi