I 1 1 1 | II 1 1 1 | III 0.9 1 0.8

Esercizi Foglio 2

[redacted], Lorenzo Brescia

December 4, 2020

Esercizio 1

Nell'orario di apertura di un negozio i clienti arrivano secondo un processo di Poisson con = 6 clienti all'ora.

(a) Determinare la distribuzione del tempo T, arrivo del secondo cliente dall'apertura;

(b) Determinare la distribuzione del numero di arrivi tra le 10:00 e le 12:00;

(c) Determinare il tempo dell'arrivo del I cliente, sapendo che tra le 9:00 e le 9:30 e entrato un solo

cliente.

Risposte

a)Ogni tempo è distribuito come una v.a esponenziale, noi vogliamo sapere la distribuzione della somma

di queste è una v.a Gamma quindi:

$f_{sn}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$ $t \geqslant 0$ dato acquisito che il I arrivi

$f_{s2}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \lambda^{t}$ $t > 0$

b) Il valore di $N(2) \sim Poisson(12)$ ossia è una distribuzione di poisson di parametro lambda uguale a

dodici.

$P(N(2) = y) = \frac{e^{-12}(12)^y}{y!}$

c)Sappiamo che $N(\frac{1}{2}) \sim Uni(0, \frac{1}{2})$ quindi:

$P(T_1 \leq s | N(\frac{1}{2}) = 1) = 2s$ per $0 \leq s \leq 0.5$ OK s/t $t \in (0, 1/2)$

il tempo atteso per il primo cliente dovrebbere essere quello di una v.a Uniforme

$\frac{0+0.5}{2} = 0.25$ quindi dovrebbe arrivare mediamente alle 9:15.

Esercizio 2

Si consideri una coda con due servitori in cui il cliente viene servito prima dal servitore 1, poi dal 2 e inne lascia il sistema. I tempi di servizio dei due servitori sono v.a. esponenziali di parametri i; i = 1; 2. Quando arrivi trovi il servitore

1 libero mentre dal servitore 2 ci sono 2 clienti, il cliente A in servizio e il B in attesa.

(a) Determinare PA, probabilita che il cliente A sia ancora in servizio quando termini la parte di servizio

espletata dal servitore 1;

(b) Determinare PB, probabilita che il cliente B sia ancora nel sistema quando termini la parte di servizio

espletata dal servitore 1;

(c) Determinare E(T), dove T e il tempo che trascorri nel sistema.

Risposte

a) Essendo A esponenziale non dovrebbe avere memoria, quindi il calcolo è semplicemente il calcolo della

probabilità che noi ossia $C \sim Exp(u1)$sia minore di $\sim Exp(u2)$ ossia:

di chi?

$P_A = \frac{u_1}{u_1+u_2}$

Interpreto: di me alle postaz. 1

b) $Pb = P(Bnelsistema|Ahafinitoprima) = \frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2}$

$+P(Bnelsistema|Afiniscedopo) = \frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}$

P (B nel sistema | A ha finito prima) = 1

P (B nel sistema | A finisce dopo) = $\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}$

Pb = $\frac{\mu_1\mu_2}{(\mu_1+\mu_2)^2} + \frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}$

c) Indico con T1 il tempo fino al verificarsi del

primo evento e con T2 il resto del tempo fino

all'uscita del sistema

Quindi $T_{tot} = T1 + T2$

$E[T1] = \frac{1}{\mu_1+\mu_2}$

$E[T2] = E[T2|finiscoperprimodalservitore1]\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}$

$+E[T2|Afinisceperprimodalservitore2]\frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2}$

$E[T2|finiscoperprimodalservitore1] = \frac{3}{\mu_2}$

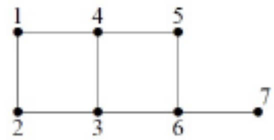
per calcolare la seconda attesa condiziono in modo simile a prima sul primo evento che accade, quindi

$E[T2|Afinisceperprimodalservitore2] = \frac{1}{\mu_1+\mu2} + \frac{2}{\mu_2}\frac{\mu1}{\mu1+\mu2} + (\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2})\frac{\mu2}{\mu1+\mu2}$

$E[Tot] = [\frac{3}{\mu_2}\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2} + (\frac{1}{\mu_1+\mu2} + \frac{2}{\mu_2}\frac{\mu1}{\mu1+\mu2} + (\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2})\frac{\mu2}{\mu1+\mu2})\frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2}] + \frac{1}{\mu_1+\mu_2}$

Esercizio 3

Una cavia si muove sul grafo rappresentato in gura. A ogni istante si sposta dal vertice in cui si trovava ad uno dei vertici adiacenti, scegliendo ogni volta a caso.



Determinare:

(a) La matrice di transizione della catena di Markov, spiegando perche il processo goda della proprieta di

Markov;

(b) se la catena sia irreducibile e, se possibile, determinare le distribuzioni stazionarie di questa catena;

come cambierebbe la risposta se il grafo comprendesse un link tra lo stato 7 e lo stato 5?

(c) la probabilita che la cavia raggiunga il cibo prima di imbattersi nel gatto se parte da 2 e si assume che

in 5 ci sia del cibo e in 4 un gatto?

Risposte

a)

0	1/2	0	1/2	0	0	0
1/2	0	1/2	0	0	0	0
0	1/3	0	1/3	0	1/3	0
1/3	0	1/3	0	1/3	0	0
0	0	0	1/2	0	1/2	0
0	0	1/3	0	1/3	0	1/3
0	0	0	0	0	1	0

Il processo come si può vedere dalla matrice di transizione ci permette di sapere lo stato futuro basandosi

solo sullo stato presente, non viene considerato il suo passato, ossia è "memoryless"

$P(X_{n+1} = x | X_n = x_n)$

b)la catena è irriducibile ma non aperidioca, infatti possiamo dimostrare che la catena ha periodo 2 ,

quindi non eisste la distribuzione limite, per calcolare la distribuzione stazionaria utilizziamo il sistema

con 7 variabili.

(1/2)b +(1/3)d = a

(1/2)a +(1/3)c = b

(1/2)b +(1/3)d +(1/3)f = c

(1/2)a +(1/3)c +(1/2)e = d

(1/3)d +(1/3)f = e

(1/3)c +(1/2)e +g= f

(1/3)f= g

a+b+c+d+e+f+g = 1

la quale da soluzione:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{16} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{16} \\ \frac{3}{16} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{16} \end{pmatrix}$$

conti errati

sembra scambi qualche stato (idem sotto)

Ho trovato la proporzione di tempo che la catena passa in ogni stato.

Se aggiungiamo invece un link tra lo stato 5 e 7 la nostra catena diventa aperiodica, perchè

l'MCD(2,3) = 1. dove 2 o 3 sarebbero i periodi possibili e quindi per il toerema ergodico posso trovare la

distribuzione limite e la soluzione sarebbe:

0	1/2	0	1/2	0	0	0
1/2	0	1/2	0	0	0	0
0	1/3	0	1/3	0	1/3	0
1/3	0	1/3	0	1/3	0	0
0	0	0	1/3	0	1/3	1/3
0	0	1/3	0	1/3	0	1/3
0	0	0	0	1/2	1/2	0

(1/2)b +(1/3)d = a
(1/2)a +(1/3)c = b
(1/2)b +(1/3)d +(1/3)f = c
(1/2)a +(1/3)c +(1/3)e = d
(1/3)d +(1/3)f +(1/2)g = e
(1/3)c +(1/3)e +(1/2)g= f
(1/3)f +(1/3)e= g
a+b+c+d+e+f+g = 1
che da soluzione:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

ossia la probabilità che dopo n tempo la catena si trovi nello stato j.

c)

P1= 1/2 P2

P2= 1/2 P1 + 1/2 P3

P3= 1/3 P2 + 1/3 P6

P6= 1/3 P3 + 1/3 P7 +1/3

P7= 1P6

P1=1/11

dove P1 è la probabilità che la cavia raggiunga il cibo senza imbattersi nel gatto. Quindi ?