

Risposte Foglio1

Giulia Coucorde 802321 giulia.coucorde@edu.unito.it,
Andrea Cacioli 914501 andrea.cacioli@edu.unito.it,
Lorenzo Dentis 914833 lorenzo.dentis@edu.unito.it

1 dicembre 2022

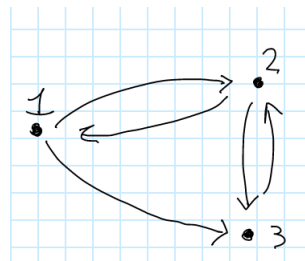
1 Esercizio 1

Si consideri una catena di Markov con matrice di transizione.

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Stabilire se sia una catena irreducibile.

Una catena si dice irreducibile quando presenta una sola classe di equivalenza rispetto alla relazione *comunicazione*. Si dimostra facilmente che P è irreducibile disegnando il suo grafo pesato:



Dal disegno si nota facilmente che 1, 2, 3 è l'unica classe di equivalenza della catena, (1, 2) e (2, 3) comunicano direttamente, la coppia (1, 3) comunica grazie alla transitività della relazione *comunicazione*.

$1 \rightarrow 3$ è una relazione di comunicazione diretta e $3 \rightarrow 2 \wedge 2 \rightarrow 1 \Rightarrow 3 \rightarrow 1$

- Supponendo che il processo sia originato nello stato 1, determinare la probabilità che si trovi nello stato 3 dopo due passi

Per trovare la probabilità che un sistema si trovi in un dato stato basta utilizzare la matrice di transizione, come dimostrato a lezione se si vuole considerare l'evoluzione dopo n passi basta considerare la matrice di transizione P^n . In questo caso ci interessa P^2 .

$$P^2 = P * P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Determinare $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n$ Per ottenere la distribuzione limite possiamo utilizzare il teorema presentato in classe. La catena P è irreducibile (dimostrato al punto 1) ed Ergodica, questo perchè tutti gli stati sono aperiodici e la catena è irreducibile, quindi sappiamo:

1. esiste $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^n = \Pi_j$
2. Π_j è l'unica soluzione del seguente sistema:

$$\begin{cases} \Pi_j = \sum_i \Pi_i P_{ij} \\ \sum \Pi_j = 1 \end{cases}$$

Applicandolo al nostro caso otteniamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\Pi_1 * \frac{3}{4}\Pi_2 * 0\Pi_3 = \Pi \\ \frac{1}{3}\Pi_1 * 0\Pi_2 * 1\Pi_3 = \Pi \\ \frac{1}{6}\Pi_1 * \frac{1}{4}\Pi_2 * 0\Pi_3 = \Pi \\ \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 = 1 \end{cases} = \text{risolvendo} = \begin{cases} \Pi_1 = \frac{1}{2} \\ \Pi_2 = \frac{1}{3} \\ \Pi_3 = \frac{1}{6} \end{cases}$$

2 Esercizio 4

Si considerino due distinte code di tipo M/M/1 (code in cui i clienti arrivino secondo un processo di Poisson e vengano serviti da un unico servitore con tempi di servizio esponenziali). Si supponga che nella prima coda il processo di Poisson abbia parametro λ_1 , mentre nella seconda abbia parametro λ_2 ; inoltre il tempo di servizio sia analogo per le due code, con tempo medio di servizio μ . Si supponga $\lambda_1 < \lambda_2 < \mu$

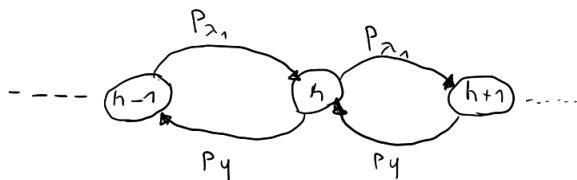
2.a

Si può affermare che in ogni istante ci saranno sicuramente meno clienti in attesa nella prima coda? No, non lo si può affermare, in quanto si possono trovare 3 controesempi:

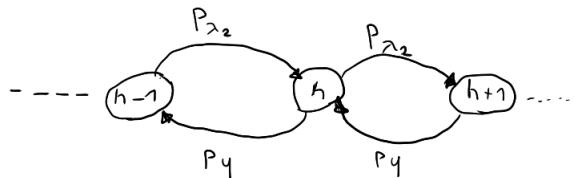
Il primo controesempio è la situazione in cui non c'è alcun cliente in coda ed arriva un cliente prima prima coda che nella seconda, cosa comunque possibile nonostante $\lambda_1 < \lambda_2$.

Più interessante è la situazione in cui entrambe le code hanno n clienti.

Coda 1



Coda 2



In questo caso ci sono due situazioni in cui la prima coda ha più clienti in attesa della seconda, se un cliente arriva nella coda 1 (P_{λ_1}), o se un cliente esce dalla coda 2 (P_{μ}).

2.b

Si può affermare che in media ci saranno meno clienti nella coda 1? Giustificare la risposta. Sì, in media ci saranno meno clienti nella prima coda. Tra le proprietà della coda M|M|1 vi è una proprietà che, sotto la condizione $\lambda < \mu$, permette di calcolare il numero medio di persone in coda.

posto $\lambda < \mu$ e creando un nuovo parametro $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$

Il numero medio di utenti in coda è $L_q = \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)\pi_k = \frac{\rho^2}{1-\rho}$

Nel caso dell'esercizio $\lambda_1 < \lambda_2$ e μ uguale per le due code quindi

$$\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu} < \rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu}$$

$$L_{q1} = \frac{\rho_1^2}{1-\rho_1} < L_{q2} = \frac{\rho_2^2}{1-\rho_2}$$

Si può quindi affermare che in media la coda 2 avrà più clienti della coda 1.