Risposte Foglio1

Giulia Coucorde, Andrea Cacioli, Lorenzo Dentis 914833

8 novembre 2022

1 Esercizio 1

Sia X una v.a che assume il valore 1 con probabilità p e $(-N)$ con probabilità $1-p$. Qui N è una v.a. di Poisson di parametro λ

$$X = \begin{cases} 1 & p \\ -N & 1-p \end{cases} \tag{1}$$

$$N \sim Pois(\lambda)$$

1.a

Determinare il valore di λ per cui $\mathbb{E}(X) = 0$.
Per il teorema dell'attesa totale, $\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X|A_i]P(A_i)$ con $A_1, ..., A_n$ eventi a due a due disgiunti che formano una partizione di E, possiamo affermare che

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] =& P(X=1) * E[1|X=1] + P(X=-N) * \mathbb{E}[-N|X=-N] = \\
=& p + (1-p) * \mathbb{E}[-N] = \\
& \textit{essendo } N \sim \textit{Poisson}(\lambda) \textit{ vale } \mathbb{E}[N] = \lambda \\
=& p - \lambda(1-p)
\end{aligned}$$

$$\lambda = \frac{p}{1-p}$$

1.b

Calcolare $Var(X)$. Usando la definizione di varianza, $Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$ ed il valore dell'attesa calcolato in sezione 1.a, scriviamo:

$$Var(X) = E[X^2] - [p - \lambda(1-p)]^2 \tag{2}$$

Analogmantente al punto precedente si può calcolare $\mathbb{E}[X^2]$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^2] &= p * \mathbb{E}[1^2] + (1-p)\mathbb{E}[(-N)^2] = \\
&= p + (1-p)(\lambda + \lambda^2) = p + \lambda + \lambda^2 - p\lambda - p\lambda^2 = \\
&= p(1 - \lambda - \lambda^2) + \lambda(1+\lambda)
\end{aligned}$$

Sostituendo nella equazione(2)

$$Var(X) = p(1 - \lambda - \lambda^2) + \lambda(1+\lambda) - (p - \lambda(1-p))^2$$

1.c

Sia $\{X_i\} i = 1, 2, ...$ una successione di v.a. distribuite come X e sia $Y = \sum_{i=1}^{M}$, con M v.a. di Poisson di parametro β, indipendente dalle X_i. Determinare $\mathbb{E}(Y)$.

$Y = \sum_{i=1}^{M} X_i$
$M \sim Pois(\beta)$.
Chiamiamo $\mathbb{E}(X_i) = p - \lambda + \lambda p = \mu$
$\mathbb{E}(Y) = \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{E}[Y|M = m] P(M = m)$

Data $M \sim Pois(\beta)$ allora $P(M = m) = \frac{\beta^m}{m!} e^{-\beta}$.
Invece

$$\mathbb{E}[Y|M = m] = \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{m}] = \textit{ per linearità}$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \mathbb{E}[X_i] = m\mu$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[y] &= \sum_{m=1}^{\infty} m\mu \qquad \frac{\beta^m}{m!} e^{-\beta} = \\
&= e^{-\beta} \mu \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{\beta^m}{m!} = \\
&= e^{-\beta} \mu \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta^m}{(m-1)!} = \\
&= \textit{ semplificando con Wolfram Alpha } = \\
&= \beta\mu
\end{aligned}$$

Questo esercizio poteva essere alternativamente risolto utilizzando il *teorema della doppia attesa* e quindi ponendo $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{N} X_i] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\sum_{i=1}^{N} X_i|N]]$. Condizionando su N e svolgendo i calcoli analogamente a quanto fatto in classe saremmo giunti alla seguente uguaglianza:

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{N} X_i] = \mathbb{E}[N] * \mathbb{E}[X] = \beta\mu$$

2 Esercizio 2

Alla stazione di partenza di un treno salgono K persone, con K v.a. distribuita secondo Poisson, di parametro $\lambda = 100$. Il treno effettua un'unica fermata prima dell'arrivo a destinazione. Alla fermata ogni persona scende, con uguale probabilità p.

$$K \sim Pois(100) \qquad\qquad X \sim Binom(K, p)$$

$$f_K(k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \qquad\qquad f_X(x) = \binom{k}{x}p^x(1-p)^{k-x}$$

$$\mathbb{E}(k) = \lambda = 100 \qquad\qquad \mathbb{E}(X) = kp$$

Creiamo inoltre una nuova v.a. $Z = K - X$ che conta il numero di persone rimaste sul treno.

2.a

Se nessun nuovo passeggero sale alla fermata intermedia, determinare la probabilità che il treno arrivi alla stazione di destinazione finale con almeno 90 passeggeri.

Si sta cercando $P(Z \geq 90)$.

$$\begin{aligned}
f_Z(z) =& \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{P(k - X = z|K = k)}_{\binom{k}{k-z}p^{k-z}(1-p)^z} \underbrace{P(K = k)}_{\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}} = \\
=& \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(k-z)!z!}p^{k-z}(1-p)^z \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \\
=& \textit{portando fuori dalla sommatoria i termini non correlati a } k = \\
=& \frac{e^{-\lambda}(1-p)^z}{z!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(k-z)!}p^{k-z}\frac{\lambda^k}{k!} = \frac{e^{-\lambda}(1-p)^z}{z!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^{k-z}\lambda^k}{(k-z)!} = \\
=& \textit{moltiplicando e dividendo } \lambda^{k-z} = \\
=& \frac{e^{-\lambda}(1-p)^z}{z!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^{k-z}\lambda^k}{(k-z)!} * \lambda^{k-z}\lambda^{z-k} = \\
=& \frac{e^{-\lambda}(1-p)^z\lambda^z}{z!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^{k-z}\lambda^k\lambda^{k-z}}{(k-z)!\lambda^k} = \\
=& \frac{e^{-\lambda}(1-p)^z\lambda^z}{z!} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(p\lambda)^{k-z}}{(k-z)!}}_{e^{p\lambda}} = \\
=& \frac{e^{p\lambda}e^{-\lambda}(1-p)^z\lambda^z}{z!} = e^{p\lambda-\lambda}\frac{(\lambda-\lambda p)^z}{z!} = Pois(\lambda - \lambda p)
\end{aligned}$$

Quindi $F_Z(z) = \sum_{i=0}^{z} f_Z(i) = P(Z < z)$.

$$P(Z \geq 90) = 1 - P(Z < 90) = 1 - f_Z(89)$$

2.b

Se nessun nuovo passeggero sale alla fermata intermedia, determinare il numero medio di passeggeri presenti all'arrivo alla destinazione finale.

Ricordiamo $\mathbb{E}[k] = k = 100$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z] &= [def]\mathbb{E}[K - X] = \mathbb{E}[K] - \mathbb{E}[X] \textit{ per linearità dell'attesa} \\
&= 100 - \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[X|K = k] f_K(k) = \textit{ data } X \sim Binom(k, p) = \\
&= 100 - \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[kp] f_K(k) = \textit{ essendo } k \textit{ e } p \textit{ due costanti} = \\
&= 100 - \sum_{k=1}^{\infty} kp f_K(k) = 100 - p \sum_{k=1}^{\infty} k f_K(k)
\end{aligned}$$

2.c

Si supponga che alla fermata intermedia salga un numero M di passeggeri, con M v.a. indipendente da K, v.a. di Poisson di parametro $\beta = 50$. Si determini il numero medio di passeggeri che arriva alla destinazione finale.

$M \sim Pois(\beta)$ con $\beta = 50$ quindi $\mathbb{E}(M) = 50$.
Supponendo che ogni passeggero salito alla fermata intermedia non scenda immediatamente $\mathbb{E}[Z + M] = \mathbb{E}[Z] + E[M]$. Dalla sezione 2.b conosciamo $\mathbb{E}[Z] = 100 - 100p$, quindi:

$$\mathbb{E}[Z + M] = 100 - 100p + 50 = 150 - 100p$$

3 Esercizio 3

4 Esercizio 4