Lineare Algebra — Vorlesungsnotizen

WiSe 2025/2026

Inhaltsverzeichnis

1 Notation

X, Y Aussage
$X \wedge Y$: X und Y
$X \vee Y$: X oder Y
$\neg X$: nicht X (Negation)
$X \Rightarrow Y$: aus X folgt Y
$X \Leftrightarrow Y$: X ist äquivalent zu Y
$\forall x \in M : P(x)$: für alle x in M gilt $P(x)$
$\exists x \in M : P(x)$: es existiert ein x in M mit $P(x)$

2 Mengen

Definition 2.1.

Menge wird durch Angabe ihrer Elemente definiert.

Zwei Mengen sind genau dann gleich, wenn sie dieselben Elemente haben.

Notation 2.2.

$m \in M$: $\Leftrightarrow$ m ist ein Element von M.

$m \notin M$: $\Leftrightarrow$ m ist kein Element von M.

Beispiel: $M = \{1, 2, 3\}$, dann ist $1 \in M$ und $4 \notin M$.

$\emptyset = \{\}$ (leere Menge): Menge ohne Elemente.

$\mathbb{N}$ = natürliche Zahlen = $\{1, 2, 3, \ldots\}$

$\mathbb{N}_0$ = natürliche Zahlen mit Null = $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

$\mathbb{Z}$ = ganze Zahlen = $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

$\mathbb{Q}$ = rationale Zahlen = $\left\{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{Z} \wedge q \neq 0\right\}$

$\mathbb{R}$ = reelle Zahlen

$\mathbb{C}$ = komplexe Zahlen

Definition 2.3.

Eine Teilmenge N einer Menge M ist eine Menge, deren Elemente allesamt auch in M liegen.

Schreibweise: $N \subseteq M$.

$$N \subseteq M \Leftrightarrow \forall n \in N : n \in M.$$

$$N \nsubseteq M \Leftrightarrow \exists n \in N : n \notin M.$$

$$N \subsetneq M \Leftrightarrow N \subseteq M \wedge N \neq M.$$

Beispiel: $\emptyset \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

Notation 2.4.

Zwei Mengen sind genau dann gleich, wenn sie wechselseitig Teilmengen voneinander sind:

$$N = M \Leftrightarrow N \subseteq M \wedge M \subseteq N.$$