Übung 1 - 2025 Okt. 22

Aufgabe 1

Formulieren Sie die Negation der folgenden Aussagen:

(a) Alle Schwäne sind weiß.

(b) Es gibt mindestens eine gerade Primzahl.

(c) Wenn es regnet, bleibe ich zu Hause.

Aufgabe 2

Seien $A = 1, 2$, $B = 2, 3, 4$ und $X = 1, 2, 3, 4, 5$. Bilden Sie die folgenden Mengen:

(a) $A \cup B$

(b) $A \cap B$

(c) $X \setminus (A \cup B)$

(d) $X \setminus (A \cap B)$

(e) $A \times B$ (kartesisches Produkt von A und B)

(f) $\mathfrak{P}(A)$ (Potenzmenge von A)

(g) $\mathfrak{P}(B)$ (Potenzmenge von B)

Aufgabe 3

Seien A, B, C, X Mengen mit $A \subset X$, $B \subset X$ und $C \subset X$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$

(b) $(X \setminus A) \cup (X \setminus B) = X$

(c) $(X \setminus A) \cup (X \setminus B) = \emptyset$

(d) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

Übung 2 - 2025 Okt. 29

Aufgabe 1

Seien X, Y, Z Mengen und $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Ist $g \circ f : X \to Z$ injektiv, so ist f injektiv.

(b) Ist $g \circ f : X \to Z$ injektiv, so ist g injektiv.

(c) Ist $g \circ f : X \to Z$ surjektiv, so ist f surjektiv.

(d) Ist $g \circ f : X \to Z$ surjektiv, so ist g surjektiv.

Aufgabe 2

Seien X, Y Mengen und sei $f : X \to Y$ Abbildung. Außerdem seien $U \subset X$ und $V \to Y$ Teilmengen. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) $f^{-1}(f(U)) = U$.

(b) $f(f^{-1}(V)) = V$.

Aufgabe 3

Seien X, Y nicht-leere Mengen und sei $f : X \to Y$ Abbildung. Beweisen Sie:

(a) Die Abbildung f ist genau dann injektiv, wenn es eine weitere Abbildung $g : Y \to X$ gibt mit $g \circ f = id_X$.

(b) Die Abbildung f ist genau dann surjektiv, wenn es eine weitere Abbildung $g : Y \to X$ gibt mit $f \circ g = id_Y$.

Aufgabe 4

Wir betrachten die folgenden Relation $\sim$ auf $\mathbb{R}^2$: Für Elemente $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$ gilt $(a, b) \sim (c, d)$ genau dann, wenn $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ gilt. Zeigen Sie: Die Relation $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation. Veranschaulichen Sie sich grafisch die Äquivalenzklassen dieser Relation.

Übung 3 - 2025 Nov. 5

Aufgabe 1

Welche der folgenden Relationen auf $\mathbb{Z}$ sind reflexiv? Welche symmetrisch? Welche transitiv?

(a) $x \sim y :\Leftrightarrow x = y$

(b) $x \sim y :\Leftrightarrow x \leqslant y$

(c) $x \sim y :\Leftrightarrow x < y$

(d) $x \sim y :\Leftrightarrow |x| = |y|$ (hier ist $|x|$ bzw. $|y|$ der Absolutbetrag von x bzw. y)

(e) $x \sim y :\Leftrightarrow x - y$ ist eine gerade ganze Zahl

(f) $x \sim y :\Leftrightarrow x - y$ ist eine ungerade ganze Zahl

(g) $x \sim y :\Leftrightarrow xy$ ist eine gerade ganze Zahl

Aufgabe 2

Sei X eine nicht-leere Menge. Eine Abbildung $f : X \to X$ genau dann bijektiv ist, wenn sie ein Isomorphismus von Mengen ist. Zeigen Sie:

(a) Die Identitätsabbildung $id_X : X \to X$ ist bijektiv.

(b) Ist $f : X \to X$ eine bijektive Abbildung, so ist auch ihre Umkehrabbildung $f^{-1} : X \to X$ bijektiv.

(c) Sind $f : X \to X$ und $g : X \to X$ bijektive Abbildungen, so ist auch die Komposition $g \circ f : X \to X$ bijektiv.

(d) Bei $Bij(X)$ die Menge aller bijektiven Abbildungen von X nach X. Zeigen Sie, dass $(Bij(X), \circ)$, d.h. die Menge $Bij(X)$ zusammen mit der Komposition $\circ$ von Abbildungen als Verknüpfung, eine Gruppe ist.

Übung 4 - 2025 Nov. 12

Aufgabe 1

Welche der folgenden Mengen mit Verknüpfungen sind Gruppen? Welche Elemente bei den Gruppen sind jeweils die neutralen Elemente bzw. die Inversen?

(a) $(\mathbb{Z}, +)$

(b) $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$

(c) $(\mathbb{Q}, +)$

(d) $(\mathbb{Q}, \cdot)$

(e) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$

(f) $(\mathbb{N}_0, +)$

(g) $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \cdot)$

(h) $(\{0, 1\}, \cdot)$

Aufgabe 2

Sei $n \geqslant 1$ ganze Zahl.

(a) Beweisen Sie: Die Teilmenge $n\mathbb{Z} := \{nm \mid m \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Z}$ ist eine normale Untergruppe von $\mathbb{Z}$. Quotientengruppe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.

(b) Beweisen Sie: Jedes Element $x \in \mathbb{Z}$ hat genau einen Repräsentanten aus der Menge $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, d.h. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{[0], [1], \ldots, [n-1]\}$. Hinweis: Zu jeder Zahl $x \in \mathbb{Z}$, sodass $x = mn + r$, wobei $r \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ (Division mit Rest).

(c) Welche der ganzen Zahlen $0, 2, 5, 9, -201, 422, -512, 100025, -168999254$ repräsentieren jeweils die Elemente $[0]$ bzw. $[1]$ in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$?

(d) Welche der ganzen Zahlen $0, 2, 5, 9, -201, 422, -512, 100025, -168999254$ repräsentieren jeweils die Elemente $[0]$, $[1]$, $[2]$, $[3]$ oder $[4]$ in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$?

Aufgabe 3

Sei $f : (G, \cdot) \to (K, *)$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie, dass der Kern $ker(f) := \{g \in G \mid f(g) = 1_K\} \subset G$ von f eine Untergruppe von $(G, \cdot)$ ist und dass das Bild $im(f) := \{f(g) \in K \mid g \in G\} \subset K$ von f eine Untergruppe von $(K, *)$ ist.

Übung 5 - 2025 Nov. 19

Aufgabe 1

(a) Zerlegen Sie die folgenden Permutationen in Zyklen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 6 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 5 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in S_6$$

(b) Schreiben Sie die folgenden Zyklen als Produkt von Transpositionen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \in S_5, \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in S_5, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in S_6, \begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 & 2 & 7 & 3 & 8 & 4 \end{pmatrix} \in S_8$$

(c) Geben Sie die Inversen der Permutationen bzw. Zyklen aus a) und b) an.

Aufgabe 2

(a) Berechenen Sie die folgenden Produkte komplexer Zahlen:

$$(2+4i)\cdot(1+2i), (-2+5i)\cdot(4-3i), (-1+3i)\cdot(3-5i)$$

(b) Berechnen Sie die Inversen folgender komplexer Zahlen:

$$(2+4i), (1+2i), (4-3i), (-1+3i), (3-5i)$$

Aufgabe 3

Sei $(G, *)$ Gruppe und $n \in \mathbb{N}$ natürliche Zahl. Man sagt, ein Element $g \in G$ hat Ordnung n, falls $g^n = 1_G$ gilt und n die kleinste natürliche Zahl mit dieser Eigenschaft ist (hier ist $g^n = g * \cdots * g$ die n-fache Verknüpfung von g mit sich selbst in G).

(a) Zeigen Sie: Jedes Element $\neq 0$ von $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ hat Ordnung 2.

(b) Zeigen Sie: Jedes Element $\neq 0$ von $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ hat Ordnung 2.

(c) Zeigen Sie: Jedes Element $\neq 0$ von $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$ hat Ordnung 2 (hier ist $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$ der Polynomring über $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$).

(d) Zeigen Sie: Es kann keinen Gruppenisomorphismus zwischen $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$ geben.

Übung 6 - 2025 Nov. 26

Aufgabe 1

(a) Bilden Sie die folgenden Produkte:

$$(2X^2 + 4X + 1) \cdot (4X^2 + X) \in \mathbb{Z}[X]$$

$$([1]X^2 + [1]X + [1]) \cdot ([1]X^2 + [1]X) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$$

$$([1]X^2 + [5]X + [4]) \cdot ([4]X^2 + [3]X + [2]) \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$$

(b) Zeigen Sie: Die Polynome

$$P = [1]X^3 + [1]X^2 + [2]X + [1] \text{ und } Q = [1]X^2 + [1]$$

sind verschiedene Elemente von $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$, aber definieren die gleiche Funktion $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ (d.h. $ev(P) = ev(Q)$).

(c) Finden Sie für die Polynome $A, B \in \mathbb{Z}[X]$ jeweils Polynome $Q, S \in \mathbb{Z}[X]$ mit $deg(S) < deg(B)$, sodass gilt $A = Q \cdot B + S$:

$$A = X^3 - 3X^2 + 2X, B = X - 1$$

$$A = 5X^2 + 3X - 12, B = X - 4$$

Aufgabe 2

Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 4x$ ist $\mathbb{R}$-linear.

(b) Die Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ ist nicht $\mathbb{R}$-linear.

(c) Die Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x$ ist $\mathbb{R}$-linear.

(d) Die Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, x \mapsto (5x, 0)$ ist $\mathbb{R}$-linear.

(e) Die Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto 2x^3 + 4y^3$ ist nicht $\mathbb{R}$-linear.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen $\mathbb{R}$-Untervektorräume von $\mathbb{R}^5$ definieren:

(a) $U = \{(x, 0, 0, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^5$

(b) $U = \{(x, y, z, 0, 0) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^5$

(c) $U = \{(x + y, 2x + y, z, 0, 0) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^5$

(d) $U = \{(y + z, x + z, x + y, x, y) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^5$

Übung 7 - 2025 Dez. 3

Aufgabe 1

(a) Seien $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ Vektoren in $\mathbb{R}^2$. Zeigen oder widerlegen Sie, dass (v_1, v_2) eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^2$ ist.

(b) Seien $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ Vektoren in $\mathbb{R}^2$. Zeigen oder widerlegen Sie, dass (v_1, v_2) eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^2$ ist.

(c) Seien $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ Vektoren in $\mathbb{R}^2$. Zeigen oder widerlegen Sie, dass (v_1, v_2) eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^2$ ist.

Aufgabe 2

Sei $K = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen K-Untervektorräume von K^5 definieren:

(a) $U = \{([2] \cdot x, [0], [0], [0], [0]) \mid x \in K\} \subset K^5$

(b) $U = \{(x + [2] \cdot y, [2] \cdot x + [1] \cdot y, z, [0], [0]) \mid x, y, z \in K\} \subset K^5$

(c) $U = \{(v, w, x, y, z) \mid v, w, x, y, z \in K, v + w + x + y + z = [0]\} \subset K^5$

(d) $U = \{(v, w, x, y, z) \mid v, w, x, y, z \in K, [2] \cdot x + [1] \cdot y = [0]\} \subset K^5$

Aufgabe 3

Sei K ein Körper, sei V ein K-Vektorraum und seien U_1, U_2, U_3 K-Untervektorräume von V.

(a) Zeigen Sie: Die Formel $U_1 + (U_2 \cap U_3) = (U_1 + U_2) \cap (U_1 + U_3)$ ist **falsch**. Betrachten Sie dazu $V = \mathbb{R}^2$, die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sowie die $\mathbb{R}$-Untervektorräume $U_1 = \langle\{v_1\}\rangle$, $U_2 = \langle\{v_2\}\rangle$ und $U_3 = \langle\{v_3\}\rangle$.

(b) Zeigen Sie: Falls $U_1 \subset U_3$ gilt, so gilt $U_1 + (U_2 \cap U_3) = (U_1 + U_2) \cap (U_1 + U_3)$

Übung 8 - 2025 Dez. 10

Aufgabe 1

Betrachten Sie die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ x - y \end{pmatrix}$.

(a) Zeigen Sie, dass f $\mathbb{R}$-linear ist.

(b) Bestimmen Sie eine Basis des Kerns von f.

(c) Bestimmen Sie eine Basis des Bildes von f.

Aufgabe 2

(a) Zeigen Sie, dass
$$U_1 = \{(w, x, y, z) \mid w, x, y, z \in \mathbb{R}, y - z = 0\} \subset \mathbb{R}^4$$
einen $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $\mathbb{R}^4$ definiert und bestimmen Sie eine Basis von U_1.

(b) Zeigen Sie, dass
$$U_2 = \{(w, x, y, z) \mid w, x, y, z \in \mathbb{R}, w = 0\} \subset \mathbb{R}^4$$
einen $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $\mathbb{R}^4$ definiert und bestimmen Sie eine Basis von U_2.

(c) Bestimmen Sie eine Basis von $U_1 \cap U_2$.

(d) Was ist die Dimension von $U_1 + U_2$?

Aufgabe 3

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $f : V \to V$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung mit $f \circ f = id_V$.

(a) Zeigen Sie, dass $V_+ := \{v \in V \mid f(x) = v\}$ und $V_- := \{v \in V \mid f(x) = -v\}$ $\mathbb{R}$-Untervektorräume von V sind.

(b) Zeigen Sie, dass $V = V_+ + V_-$ und $V_+ \cap V_- = \{0\}$ gilt.

Übung 9 - 2025 Dez. 17

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Matrizen der folgenden $\mathbb{R}$-linearen Abbildungen:

(a) $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x + y \\ x + y \end{pmatrix}$

(b) $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 2y \\ y \\ 2x \end{pmatrix}$

(c) $f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - y + z \\ y - z \end{pmatrix}$

(d) $f_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2y - z \\ -x + 2z \\ 2x - y \end{pmatrix}$

Aufgabe 2

Welche der durch die folgenden Matrizen definierten $\mathbb{R}$-linearen Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sind injektiv? Welche surjektiv?

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3

Seien $m, n \in \mathbb{N}_0$.

(a) Zeigen Sie: Falls $n > m$, so gibt es keine injektive $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

(b) Zeigen Sie: Falls $m > n$, so gibt es keine surjektive $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Übung 10 - 2026 Jan. 7

Aufgabe 1

Bringen Sie die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

in Zeilenstufenform, in Zeilennormalform und in Normalform.

Aufgabe 2

Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum $Mat_{\mathbb{R}}(2 \times 2)$ aller reellen 2×2-Matrizen sowie die Teilmenge $U = \{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

(a) Zeigen Sie, dass U ein Untervektorruam von $Mat_{\mathbb{R}}(2 \times 2)$ ist.

(b) Finden Sie eine Basis des Untervektorraums U.

(c) Zeigen Sie, dass $AB = BA$ für alle $A, B \in U$ gilt.

(d) Zeigen Sie: Ist $A \in U$ invertierbar, so gilt auch $A^{-1} \in U$.

(e) Sei $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in U$ mit $a \in \mathbb{R}$. Gilt dann $AB = BA$ für alle $B = Mat_{\mathbb{R}}(2 \times 2)$?

(f) Sei $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in U$. Gilt dann $AB = BA$ für alle $B = Mat_{\mathbb{R}}(2 \times 2)$?

Aufgabe 3

Eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ heißt auch reelle Folge. Die Menge $Abb(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ aller reeller Folgen ist bezüglich der punktweisen Addition und Skalarmultiplikation ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(a) Geben Sie eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraums $Abb(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ an.

(b) Eine Folge $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ heißt Fibonacci-Folge, falls $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$ für alle $n \geqslant 3$ gilt. Zeigen Sie, dass die Menge $\mathcal{F}$ aller Fibonacci-Folgen ein Untervektorraum von $Abb(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ ist.

(c) Finden Sie eine Basis des Untervektorraums $\mathcal{F}$.

Übung 11 - 2026 Jan. 14

Aufgabe 1

Bestimmen Sie das Inverse der reellen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie den Rang der reellen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{pmatrix}.$$

Für welche $\underline{b} \in \mathbb{R}^4$ ist das lineare Gleichungssystem $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ lösbar?

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

sowie die Vektoren

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ und } \underline{\text{b'}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

.

(a) Bestimmen Sie die Lösungen des linearen Gleichungssystems $A \cdot \underline{x} = \underline{0}$.

(b) Bestimmen Sie die Lösungen des linearen Gleichungssystems $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$.

(c) Bestimmen Sie die Lösungen des linearen Gleichungssystems $A \cdot \underline{x} = \underline{\text{b'}}$.

Übung 12 - 2026 Jan. 21

Aufgabe 1

Betrachten Sie die beiden Basen

$$B = (\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}) \text{ und } C = (\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix})$$

des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^2$ sowie die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}x+y\\2x+4y\end{pmatrix}$$

.

(a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix ${}_BM_B(f)$ von f.

(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix ${}_CM_C(f)$ von f.

(c) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix ${}_CM_B(f)$ von f.

(d) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix ${}_BM_C(f)$ von f.

Aufgabe 2

Betrachten Sie die beiden Basen

$$B = (\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}) \text{ und } C = (\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix})$$

des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^2$. Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung mit Darstellungsmatrix

$${}_BM_B(g) = \begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}$$

bezüglich der Basis B. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix ${}_CM_C(g)$ von g bezüglich der Basis C.

Aufgabe 3

Berechnen Sie die Determinante der folgenden reellen Matrizen:

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 4\\5 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\1 & 0 & 1\\2 & 0 & 4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\2 & 3 & 1\\0 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

Übung 13 - 2026 Feb. 4

Aufgabe 1

Untersuchen Sie die folgenden reellen Matrizen auf Diagonalisierbarkeit:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

Untersuchen Sie die folgende reelle Matrix auf Diagonalisierbarkeit:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Falls die Matrix diagonalisierbar ist, bestimmen Sie auch eine Basis von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren der Matrix.

Aufgabe 3

Sei K ein Körper und $m, n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Äquivalenz definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge $Mat_K(m \times n)$.

(b) Ähnlichkeit definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge $Mat_K(n \times n)$.

(c) Sind $A, A' \in Mat_K(n \times n)$ ähnlich, so haben sie dieselbe Determinante, d.h. $det(A) = det(A')$.