Aufgabe 1

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Außerdem seien Ereignisse $A, B \in \mathcal{A}$ gegeben mit

$$\mathbb{P}(A^c) = \frac{4}{5} \text{ und } \mathbb{P}(B) = \frac{3}{10} \text{ und } \mathbb{P}(A \mid B) = \frac{1}{2}.$$

(a) (**2P**) Entscheiden Sie, ob A und B stochastisch unabhängig sind.

(b) (**6P**) Berechnen Sie $\mathbb{P}(A \cup B)$ und $\mathbb{P}(A^c \mid B^c)$ und $\mathbb{P}(A \setminus B)$.

Aufgabe 2

Die gemeinsame Dichtfunktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ von zwei stetigen Zufallsvariablen X und Y sei gegeben durch

$$f(x, y) = 2(x + y)\mathbf{1}_{\{0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1\}}.$$

(a) (**3P**) Beweisen Sie, dass f tatsächlich eine Dichtefunktion ist.

(b) (**3P**) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von X.

(c) (**2P**) Berechnen Sie $\mathbb{P}(2Y \geqslant X)$.

(d) (**2P**) Berechnen Sie den Erwartungswert von XY.

Aufgabe 3

Dr. R. hat eine Partei gegründet. Er ist sich sicher, dass 20% der Bevölkerung die Absicht haben, bei der nächsten Wahl seine Partei zu wählen. Um dies mit einer Umfrage belegen zu können, befragt er n zufällig ausgewählte Personen unabhängig voneinander, ob sie seine Partei wählen werden oder nicht. Berechnen Sie eine untere Schranke für n, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% der Stimmenanteil in der Umfrage zwischen 15% und 25% liegt. Benutzen Sie zur Berechnung

(a) (**5P**) einerseite die Tschebyscheff-Ungleichung,

(b) (**5P**) andererseits die Binomial-Approximation, aber <u>OHNE</u> Stetigkeitskorrektur ± 0.5.

Aufgabe 4

Dr. R. will die Politik seiner Partei an die Altersstruktur der Wähler:innen ausrichten und erhebt in der Umfrage daher auch das Alter der befragten Personen, die seine Partei wählen würden. Zum 5%-Niveau will Dr. R. nachweisen, dass seine Wähler:innen im Mittel älter als 40 Jahre sind. Er nimmt an, dass die Altersangaben normalverteilt sind und mit einer Standardabweichung von 15 Jahren um das unbekannte Durchschnittsalter μ streuen. Die erhobenen Daten sind:

63	44	25
54	40	65
52	40	31

(a) (**4P**) Geben Sie die Nullhypothese und die Alternativhypothese des Testproblems an und bestimmen Sie einen für die Situation geeigneten Test.

(b) (**2P**) Berechnen Sie anhand der Daten ein geeignetes 95%-Konfidenzintervall für μ.

(c) (**2P**) Leiten Sie die Testentscheidung her, die anhand der Daten zu treffen ist. Formulieren Sie eine Aussage zu Ihrer Entscheidung in Bezug zum Sachkontext.

(d) (**2P**) Das wahre Durchschnittsalter der Wähler:innen von Dr. R. beträgt 45 Jahre. Berechnen Sie die Fehlerwahrscheinlichkeit 2. Art des Tests aus (a).

Aufgabe 5

Für einen unbekannten Parameter $\theta \in \Theta = (2, \infty)$ seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit der Dichtefunktion $f_\theta : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ gegeben durch

$$f_\theta(x) = \frac{\theta}{x^{\theta+1}} \mathbf{1}_{[1,\infty)}(x).$$

(Sie müssen nicht nachweisen, dass f_θ tatsächlich eine Dichtefunktion ist.)

(a) (**4P**) Beweisen Sie, dass der Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\theta}_n$ für θ gegeben ist durch

$$\hat{\theta}_n = \frac{n}{\Sigma_{i=1}^n log(X_i)}.$$

(b) (**2P**) Beweisen Sie, dass $log(X_1) \sim Exp(\theta)$.

(c) (**4P**) Beweisen Sie, dass $\hat{\theta}_n$ konsistent für θ ist.

(d) (**4P**) Beweisen Sie, dass $\hat{\theta}_n$ asymptotisch normal für θ ist. Berechnen Sie die asymptotische Varianz.

Aufgabe 6

Der Wert des Integrals $\mu := \int_0^1 \sqrt{cos(x)} dx$ ist nicht mit elementaren Methoden berechenbar und soll daher geschätzt werden. Dazu sei $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen und identisch $U_{[0,1]}$-verteilten Zufallsvariablen und für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\hat{\mu}_n = \frac{1}{n} \Sigma_{i=1}^n \sqrt{cos(X_i)}.$$

(a) (**4P**) Beweisen Sie, dass $\hat{\mu}_n$ asymptotisch normal für μ ist. Berechnen Sie die asymptotische Varianz $\sigma(\mu)^2$ in Abhängigkeit von μ.

(b) (**3P**) Sie $\alpha \in (0,1)$. Konstruieren Sie ein asymptotisches $(1-\alpha)$-Konfidenzintervall für μ.

(c) (**1P**) Berechnen Sie die mittlere quadratische Abweichung (MSE) von $\hat{\mu}_n$.