ÜB 10 10.3

Freitag, 14. Juli 2023 20:41

Offizielle Version
Viet-Hoang Pham
Marius Maier

a) (4 P) Wählen Sie für die nachfolgenden Funktionen jeweils eine der Komplexitätsklassen $O(1)$, $O(\log n)$, $O(n)$, $O(n \log n)$, $O(n^2)$ und $O(n^3)$, die das Wachstum der jeweiligen Funktion am besten charakterisiert. Begründen Sie Ihre Auswahl.

i) $f_1(n) = 10n^2 + \log n$

dominanter Teilterm

$\hookrightarrow O(n^2)$

ii) $f_2(n) = \frac{\cancel{\frac{1}{2}}n^2 \cancel{\log n}}{\cancel{8}n \cancel{\log n}} \log 3n + 5n$

$\hookrightarrow n \log \cancel{3}n + \cancel{5}n$

egal

$\hookrightarrow n \log \underbrace{n + n}_{n}$

$\hookrightarrow O(n \log n)$

iii) $f_3(n) = (n + \cancel{1})(n - \cancel{2})(n + \cancel{3})$

$n \cdot n \cdot n = n^3$

$\hookrightarrow O(n^3)$

iv) $f_4(n) = 12n^2 \frac{(n + \cancel{2})(n + \cancel{1})}{(n^2 + n)(n^2 + \cancel{2}n)}$

$\hookrightarrow \frac{n^{\cancel{2}}}{(n^2+n)^{\cancel{2}}}$

$\hookrightarrow \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}^2 + n}$

$\hookrightarrow n + n$

$\hookrightarrow O(n)$

b) (6 P) Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

i) $2n^2 + \underbrace{10n + 5}_{\text{egal}} \in O(n^2)$ ✓

dominanter Teilterm
deswegen $\in O(n^2)$

ii) $n^2 \in O(n)$ ✗

$n^2 = n \cdot n > n$ bzw.

$f(n) \in O(g(n))$

$f(n) \leq c \cdot g(n)$

$n^2 \leq c \cdot n$ ↯

iii) Seien $f(n) \in O(g(n))$ und $f'(n) \in O(h(n))$, dann gilt $f(n) + f'(n) \in O(\max(g(n), h(n)))$ ✓

Allgemeine Formel:

$O(f(n) + g(n)) = O(\max(f(n), g(n)))$

eingesetzt

$\hookrightarrow O(f(n) + f'(n)) = O(\max(f(n), f'(n)))$

=

$\hookrightarrow O(\max(c \cdot g(n), c \cdot h(n)))$

$\hookrightarrow \cancel{c} \cdot O(\max(g(n), h(n)))$

"c" ist egal d.h.

$\hookrightarrow O(\max(g(n), h(n)))$ ✓

Notiz:

$f(n) \in O(g(n))$

$\hookrightarrow f(n) \leq c \cdot g(n)$

$f'(n) \in O(h(n))$

$\hookrightarrow f'(n) \leq c \cdot h(n)$

iv) $\log_2 n \in O(\log_k n)$, mit $k \in \mathbb{N}$ und $k > 1$ ✓

$(\log_k n)$

↑ $k \in \mathbb{N}$ d.h. $\{1, 2, 3, 4, \dots k\}$

und

$k > 1$ d.h. $\{2, 3, 4, \dots, k\}$

$\log_2 n \in O(\log_k n)$ gilt

v) $O(2^{2n}) = O(2^n)$ ✓

Man nimmt die 2, 2n mal

2 hier egal

↳ d.h man nimmt die 2, n mal

↳ also 2^n also stimmt

vi) $O(2^n) = O(3^n)$

$$O(\underbrace{n \cdot n}_{2}) = O(\underbrace{n \cdot n \cdot n}_{3})$$

$$2 = 3 \quad ↯$$

3^n steigt immer um n schneller

$$2^{n+1} = 3^{n+1}$$

$$(n+1)(n+1) = (n+1)(n+1)(n+1) \quad | : (n+1)$$

$$(n+1) = (n+1)(n+1) \quad | : (n+1)$$

$$0 = (n+1) \quad ↯$$

Tut mir leid falls alles schwer zu erkennen ist, ich benutze das Grafiktablett erst seit ein paar Tagen :)