ROBOTICS, MOD. 1: INDUSTRIAL HANDLING
LAUREA MAGISTRALE IN **AUTOMATION ENGINEERING**

ESAME DEL 24/02/2022

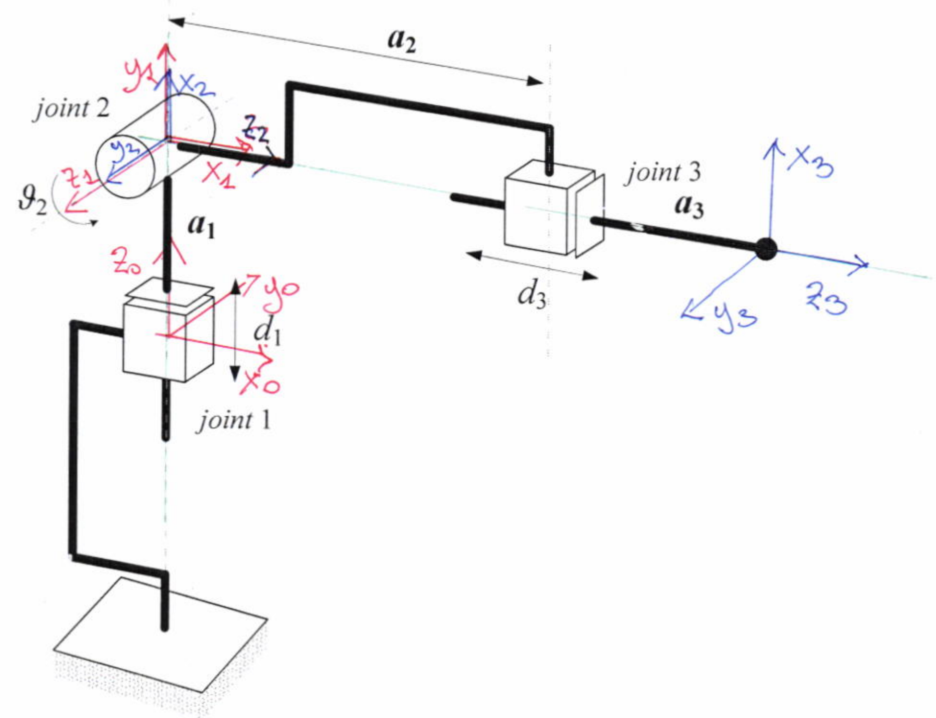
Quesito A

Sia assegnato il manipolatore in figura, con lunghezze dei bracci $a_1 = a_3 = 2$, $a_2 = 1$.

1. Si fissino le terne solidali con ciascun braccio seguendo la convenzione di Denavit-Hartenberg, giustificando adeguatamente la scelta;
2. Si calcoli la funzione cinematica diretta;
3. Si calcoli lo Jacobiano geometrico;
4. Si calcolino posizione e orientamento delle terne solidali con ciascun braccio, rispetto alla terna base, quando il vettore delle variabili di giunto assume il valore $q = [1 \quad \pi/2 \quad 0.5]^T$.
5. A partire dalla configurazione al punto precedente, si definisca una traiettoria per le variabili di giunto in modo tale che l'origine della terna dell'organo terminale descriva nello spazio un arco di circonferenza di ampiezza $\pi/2$ in un intervallo di tempo di 2 secondi. Nello specifico, si assuma che velocità e accelerazioni iniziali e finali siano nulle, e si adottino leggi temporali polinomiali per le variabili di giunto.
6. Con riferimento al punto 5., si individuino posizione e orientamento della terna dell'organo terminale nella posizione finale attraverso la funzione cinematica diretta. Si esprima quindi l'orientamento della terna dell'organo terminale in coordinate ZYZ di Eulero.
7. Con riferimento al punto 5. si determini la velocità di ciascuna terna rispetto al riferimento fisso nell'istante t = 1.

Quesito B

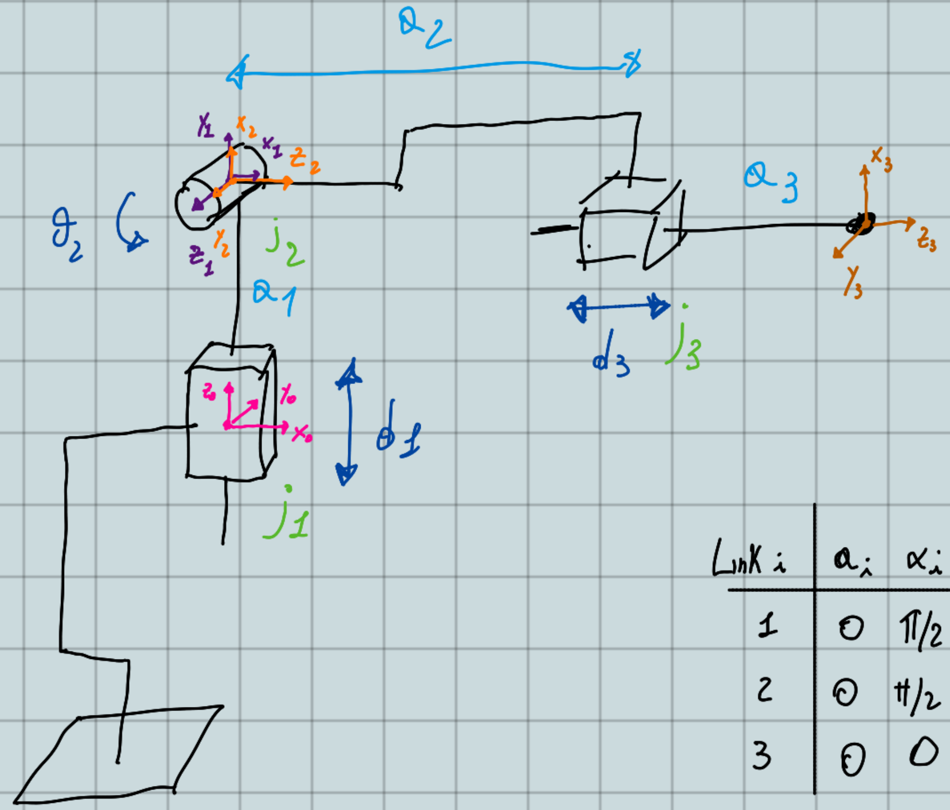
Si discuta del controllo PD con compensazione di gravità nello spazio dei giunti di un manipolatore a n giunti. In particolare, si definiscano chiaramente obiettivi e specifiche, si illustri nel dettaglio la metodologia di progetto, e si disegni lo schema di controllo.



A)

$a_1 = a_3 = 2 \qquad a_2 = 1$

1



$d_{1\,MAX} = a_1$
$d_{3\,MAX} = a_3$

Link i	a_i	α_i	ϑ_i	d_i
1	0	$\pi/2$	0	d_1
2	0	$\pi/2$	ϑ_2	0
3	0	0	0	a_2+d_3

2

$$A_i^{i-1} = \begin{bmatrix} C\vartheta_i & -S\vartheta_i C\alpha_i & S\vartheta_i S\alpha_i & a_i C\vartheta_i \\ S\vartheta_i & C\vartheta_i C\alpha_i & -C\vartheta_i S\alpha_i & a_i S\vartheta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_1^0 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} R_1^0 & & z_1 & p_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$z_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

poiché la terna base ha il proprio asse z allineato con l'asse del 1° giunto

$$A_2^1 = \begin{bmatrix} c_{\vartheta_2} & 0 & s_{\vartheta_2} & 0 \\ s_{\vartheta_2} & 0 & -c_{\vartheta_2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_2+d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3+1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2^0 = A_1^0 A_2^1 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} R_2^0 & & z_2 & p_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} c_{\vartheta_2} & 0 & s_{\vartheta_2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ s_{\vartheta_2} & 0 & -c_{\vartheta_2} & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$T(q) = A_3^0 = A_2^0 A_3^2 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} R_3^0 & & z_3 & p_3 = p \end{array} \\ \begin{bmatrix} c_{\vartheta_2} & 0 & s_{\vartheta_2} & s_{\vartheta_2}(d_3+1) \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ s_{\vartheta_2} & 0 & -c_{\vartheta_2} & -c_{\vartheta_2}(d_3+1)+d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$\boxed{3}$

$$J(q) = \begin{bmatrix} z_0 & z_1 \wedge (p - p_1) & z_2 \\ 0 & z_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$z_1 \wedge (p - p_1) = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & -1 & 0 \\ S_{\vartheta_2}(d_3+1) & 0 & -C_{\vartheta_2}(d_3+1) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} C_{\vartheta_2}(d_3+1) \\ 0 \\ S_{\vartheta_2}(d_3+1) \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & C_{\vartheta_2}(d_3+1) & S_{\vartheta_2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & S_{\vartheta_2}(d_3+1) & -C_{\vartheta_2} \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

NO TRANSLATION allowed in the y_0 axis

NO ROTATION allowed in the x_0 and z_0 axis

4

$$q = \begin{bmatrix} 1 & \pi/2 & 0.5 \end{bmatrix}'$$

$d_1 = 1$

$\vartheta_2 = \pi/2$

$d_3 = 0.5$

$$R_1^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$R_2^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$R_3^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad P_3 = \begin{bmatrix} 1,5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

5 Per ottenere la rotazione richiesta basterá muovere il giunto 2. Avremmo quindi $\vartheta_2^i = \frac{\pi}{2}$ e $\vartheta_2^f = \pi$. Le accelerazioni e velocitá iniziali e finali invece devono essere nulle.

Abbiamo quindi 6 vincoli → abbiamo bisogno di un polinomio del 5^{th} ordine (sei parametri).

La durata della traiettoria é richiesto di 2 sec.

La traiettoria del giunto variabile ($q_2 = \vartheta_2$) é definito da:

$$q_2(t) = a_5 t^5 + a_4 t^4 + a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$$

Soggetta ai vincoli:

$$[t_i, t_f, q_2^i, q_2^f, \dot{q}_2^i, \dot{q}_2^f, \ddot{q}_2^i, \ddot{q}_2^f] = [0, 2, \tfrac{\pi}{2}, \pi, 0, 0, 0, 0]$$

Calcoliamo le derivate:

$$\dot{q}_2(t) = 5a_5 t^4 + 4a_4 t^3 + 3a_3 t^2 + 2a_2 t + a_1$$

$$\ddot{q}_2(t) = 20 a_5 t^3 + 12 a_4 t^2 + 6a_3 t + 2a_2$$

Otteniamo il sistema:

$$\begin{array}{l} t=0 \\ t=2 \\ t=0 \\ t=2 \\ t=0 \\ t=2 \end{array}
\begin{cases}
\frac{\pi}{2} = a_0 \\
\pi = 32a_5 + 16a_4 + 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0 \\
0 = a_1 \\
0 = 80a_5 + 32a_4 + 12a_3 + 4a_2 + a_1 \\
0 = 2a_2 \\
0 = 160a_5 + 48a_4 + 12a_3 + 2a_2
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
a_0 = \pi/2 \\
a_1 = 0 \\
a_2 = 0 \\
\pi = 32a_5 + 16a_4 + 8a_3 + \pi/2 \\
0 = 80a_5 + 32a_4 + 12a_3 \\
0 = 160a_5 + 48a_4 + 12a_3
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
\pi/2 = 32a_5 + 16a_4 + 8a_3 & A \\
0 = 20a_5 + 8a_4 + 3a_3 & B \\
0 = 40a_5 + 12a_4 + 3a_3 & C
\end{cases}$$

$$C-B \quad \begin{cases}
\pi/16 = 4a_5 + 2a_4 + a_3 \\
0 = 20a_5 + 8a_4 + 3a_3 \\
0 = 20a_5 + 4a_4
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
\quad '' \\
0 = 20a_5 - 40a_5 + 3a_3 \\
a_4 = -\frac{20}{4}a_5 = -5a_5
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
\pi/16 = 4a_5 - 10a_5 + \frac{20}{3}a_5 \\
a_3 = \frac{20}{3}a_5 \\
a_4 = -5a_5
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
\frac{20-12}{3}a_5 = \frac{\pi}{16} \\
a_4 = -5a_5 \\
a_3 = \frac{20}{3}a_5
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
a_5 = 3/32\,\pi \\
a_4 = -15/32\,\pi \\
a_3 = 5/8\,\pi
\end{cases}$$

$$q_2(t) = \frac{3}{32}\pi t^5 - \frac{15}{32}\pi t^4 + \frac{5}{8}\pi t^3 + \frac{\pi}{2}$$

$$\dot{q}(t) = \frac{15}{32}\pi t^4 - \frac{15}{8}\pi t^3 + \frac{15}{8}t^2$$

6

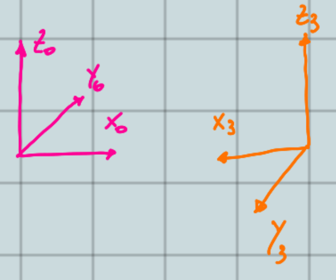
Al punto 5 abbiamo mosso solo θ_2, quindi abbiamo la seguente $q = [1 \quad \pi \quad 0{,}5]^T$

$$A_1^0 = \begin{array}{cccc} \multicolumn{2}{c}{R_1^0} & z_1 & p_1 \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2^0 = A_1^0 A_2^1 = \begin{array}{cccc} \multicolumn{2}{c}{R_2^0} & z_2 & p_2 \\ \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T(q) = A_3^0 = A_2^0 A_3^2 = \begin{array}{cccc} \multicolumn{2}{c}{R_3^0} & z_3 & p_3 \equiv p \\ \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Per ottenere un overlap del frame 0 con il 3 é necessaria semplicemente una rotazione di $\pm\pi$ dell'asse z_0:



Quindi in continuo ZYZ di Euler una possibile soluzione é:

$$\phi = [\varphi, \vartheta, \psi] = [\pm\pi, 0, 0]$$

Invece di risolverlo graficamente si poteva risolvere anche analiticamente (dalla R_3^0):

SI NOTAVA ANCHE PERCHÉ TUTTI GLI ELEMENTI FUORI DALLA DIAGONALE PRINCIPALE di R_3^0 SONO $\emptyset$.

$\vartheta = \text{atan}2\left(\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2},\ r_{33}\right) = 0 \rightarrow$ la soluzione degenera. Possiamo solo sapere che $\varphi + \psi = \pm\pi$ {both rotation are about the same axis}

7

Calcoliamo la variabile di giunto e la velocità per $t = 1$.
Il giunto 1 e 3 non si muovono ($q_1 = d_1$ e $q_3 = d_3$ sono uguali ad 1 e 0.5; $\vartheta_2 = q_2$ può essere calcolata dall'equazione della traiettoria per $t = 1$).

$$q_2(t) = \frac{3}{32}\pi t^5 - \frac{15}{32}\pi t^4 + \frac{5}{8}\pi t^3 + \frac{\pi}{2}$$

$$q_2(1) = \frac{3}{32}\pi - \frac{15}{32}\pi + \frac{5}{8}\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3}{4}\pi \rightarrow q = \begin{bmatrix} 1 \\ 3/4\,\pi \\ 0,5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow d_1 \\ \rightarrow \vartheta_2 \\ \rightarrow d_3 \end{matrix}$$

$$\dot{q}(t) = \frac{15}{32}\pi t^4 - \frac{15}{8}\pi t^3 + \frac{15}{8} t^2$$

$$\dot{q}(1) = \frac{15}{32}\pi - \cancel{\frac{15}{8}\pi} + \cancel{\frac{15}{8}\pi} = \frac{15}{32}\pi \rightarrow \dot{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{15}{32}\pi \\ 0 \end{bmatrix}$$

Il frame 1 non si muove, il giunto 1 è fermo

$$v_1 = J_{L1}\,\dot{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Per il frame 2 dobbiamo considerare solo la rotazione rispetto all'asse y_0.

$$p_2 - p_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{L2} = \begin{bmatrix} z_0 & z_1 \wedge \underbrace{(p_2 - p_1)} & 0 \\ 0 & z_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V_2 = J_{L_2}\,\dot{q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{15}{32}\pi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{15}{32}\pi \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \text{NO translation} \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \text{rotation } y\text{-axis} \\ \text{angular speed } -\frac{15}{32}\pi \end{matrix} \end{array}$$

Per il frame 3 consideriamo l'intero Jacobiano.

$$J = \begin{bmatrix} 0 & c_{\theta_2}(d_3+1) & s_{\theta_2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & s_{\theta_2}(d_3+1) & -c_{\theta_2} \\ \hdashline 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\substack{\text{sostituisco} \\ \text{i valori} \\ \text{di } q}}{=} \begin{bmatrix} 0 & -1,06 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1,06 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V_3 = J\,\dot{q} = \begin{bmatrix} 0 & -1,06 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1,06 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 15/32\,\pi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{45}{128}\sqrt{2}\pi \\ 0 \\ \frac{45}{128}\sqrt{2}\pi \\ 0 \\ -\frac{15}{32}\pi \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \text{Linear Velocity} \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \text{angular velocity} \end{array}$$

B L'obiettivo principale del controllo PD con compensazione di gravità è il problema della regolazione.

Obiettivo: portare il manipolatore da una configurazione iniziale ad una desiderata costante (set-point) q_d.

Specifiche:
- stabilità asintotica (errore di posizione nullo per $t \to \infty$, $\tilde{q} = q_d - q$)
- assenza di errore a regime (la compensazione del termine gravitazionale serve ad eliminare l'errore statico che un semplice PD non riuscirebbe a vincere a causa del peso dei bracci).
- indipendenza dal modello dinamico completo (NON è necessario conoscere la matrice di inerzia o i termini di Coriolis, basta il vettore di gravità)

Modello dinamico: (manipolatore ad n giunti)

$$\underline{B(q)}\,\ddot{q} + \underline{C(q,\dot{q})}\,\dot{q} + F_v\,\dot{q} + \underline{g(q)} = \underline{\tau}$$

- MATRICE D'INERZIA
- VETTORE FORZE CENTRIFUGHE E DI CORIOLIS
- VETTORE COPPIE GRAVITAZIONALI
- VETTORE COPPIE ATTUATE AI GIUNTI

LEGGE DI CONTROLLO: $\tau = K_P\,\tilde{q} - K_D\,\dot{q} + g(q)$

Analisi Stabilità (Lyapunov)

$$V(\dot{q},\tilde{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^T B(q)\dot{q} + \frac{1}{2}\tilde{q}^T K_P\,\tilde{q}$$

B e K_P sono DEFINITE POSITIVE $\to$ $V > 0$ sempre (tranne per $\underbrace{\dot{q} = \tilde{q} = 0}_{\text{all'equilibrio}}$)

Derivando allora rispetto al tempo:

$$\dot{V} = \dot{q}^T B(q)\ddot{q} + \dot{q}^T K_p \tilde{q}$$

Sostituendo l'equazione del moto e la legge di controllo:

$$\dot{V} = \dot{q}^T \left(K_p \tilde{q} - K_D \dot{q} + g(q) - C\dot{q} - g(q) \right) + \frac{1}{2}\dot{q}^T \dot{B}\dot{q} - \dot{q}^T K_p \tilde{q}$$

Utilizzando la proprietà di ANTISIMMETRIA $\left[x^T(\dot{B} - 2C)x = 0 \right]$:

$$\dot{V} = -\dot{q}^T K_D \dot{q}$$

Dato che $\dot{V} \leq 0$ il sistema é STABILE.

Per il principio di invarianza di LaSalle: l'unico stato in cui $\dot{V} = 0$ stabilmente é $\dot{V} = 0 \rightarrow \tilde{q} = 0$.

Schema di Controllo: