Estimation and Control of Dynamica Systems

Stefano Di Lena

2025

Indice

1 Introduzione

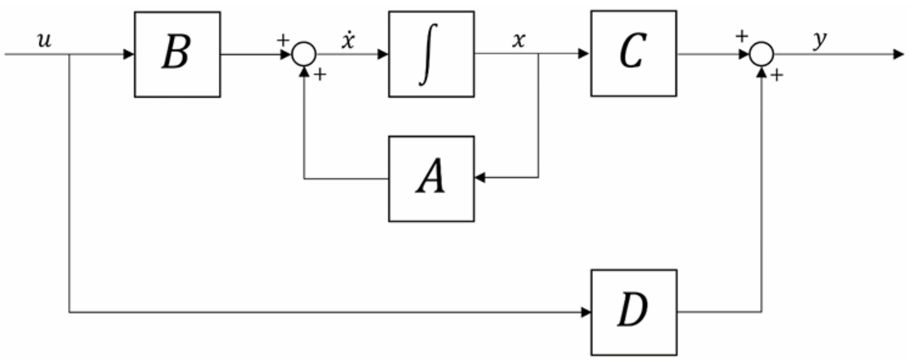
Un sistema dinamico LTI-TC è descritto dalle equazioni:

$$S : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Con $x \in R^n, y \in R^p, u \in R^m$.

Le dimensioni delle matrici sono: $A : n \times n$, $B : n \times m$, $C : p \times n$, $D : p \times m$.

Il sistema può essere rappresentato graficamente dal seguente schema a blocchi:



Se il sistema è strettamente proprio $D = 0$.

Per i sistemi LTI-TD:

$$S : \begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

2 Controllabilità

Un sistema dinamco LTI-TC si dice *controllabile* quando esiste un ingresso u che trasferisce lo stato del sistema da uno stato iniziale $x_0 = x(0)$ ad un qualunque stato $x_f = x(t_f)$ in un tempo $t_f > 0$ finito.

2.1 Gramiano di Controllabilità

É una matrice $n \times n$:

$$\Gamma(t) = \int_0^t e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} d\tau$$

Il sistema è controllabile se e solo se:

$$\rho(\Gamma(t)) = n \qquad \forall t > 0$$

L'ingresso di controllo u, che trasferisce lo stato del sistema da x_0 ad x_f è:

$$u(t) = B^T e^{A^T(t_f - t)} \Gamma^{-1}(t_f)(x_f - e^{At_f} x_0)$$

Per i sistemi LTI-TD non esiste il gramiano per calcolare l'ingresso in grado di trasferire lo stato da x_0 ad x_f, ma esiste una formula in grado di calcolare $u(k)$ che porta il sistema da x_0 ad x_f in massimo n passi (se il sistema è completamente controllabile). Dato un tempo $t \geq n$, si definisce il vettore contenente il valore di $u(k)$ negli istanti di tempo da 0 a $t - 1$:

$$u^{t-1} = \begin{bmatrix} u(t-1 \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix} = C_t^T (C_t C_t^T)^{-1} x_f$$

con C_t matrice di controllabilità in t passi (di dimensione $n \times mt$).

2.2 Matrice di Kalman di Controllabilità

$$M_c = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

Se $\rho(M_c) = n$ allora il sistema è controllabile. Altrimenti è possibile controllare solo n_c componenti [se $\rho(M_c) = n_c < n$].

2.2.1 Forma di Kalman di Controllabilità

Se si effettua una trasformazione per similitudine sullo stato (recordination), si identifica un nuovo vettore di stato tale che: $x = P_c z \iff z = P_c^{-1} x$.

La matrice di controllabilità diventa $\tilde{M}_c = P_c^{-1} M_c = \begin{bmatrix} M_c \\ 0 \end{bmatrix}$.

Per calcolare P_c: *scegliamo le prime n_c colone indipendenti di M_c e le restanti $n - n_c$ colonne sono scelte in modo da essere indipendenti dalle prime e tra loro.*

Possiamo scrivere scomponendo z le equazioni di stato e di uscita come:

$$\begin{cases} \dot{z}_c = A_c z_c + A_1 z_{n_c} + B_c u \\ \dot{z}_{n_c} = A_{n_c} z_{n_c} \\ y = C_1 z_c + C_2 z_{n_c} \end{cases}$$

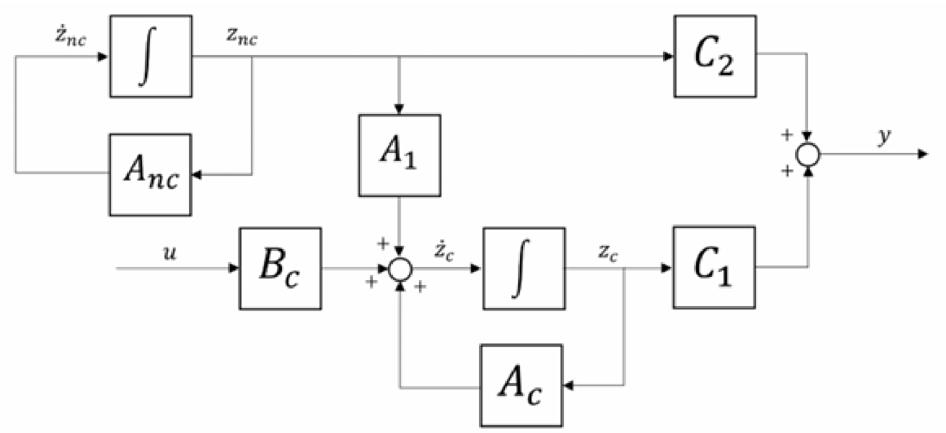
Con:

$$\begin{bmatrix} A_c & A_1 \\ 0 & A_{n_c} \end{bmatrix} = P_c^{-1} A P_c$$

$$\begin{bmatrix} B_c \\ 0 \end{bmatrix} = P_c^{-1} B$$

$$\begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} = C P_c$$

Lo schema a blocchi del sistema è:



L'evoluzione è $z_{n_c} = e^{A_{n_c} t} z_{n_c}(0)$.

3 Retroazione di Stato

Consiste nel sottrarre all'ingresso il vettore di stato, pre-moltiplicato per un opportuna matrice K.

Il nuovo ingresso di controllo è $u = r - Kx$, con $r \in R^m, k \in R^{n \times m}$. L'equazione di stato diventa:

$$\dot{x} = Ax + Bu = Ax + B(r - Kx) = (A - BK)x + Br = A_k x + Br$$

3.1 Forma Compagna

$$\dot{x}_\gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} x_\gamma + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Dove $\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}$ sono i coefficienti del polinomio caratteristico della matrice di stato A_γ.

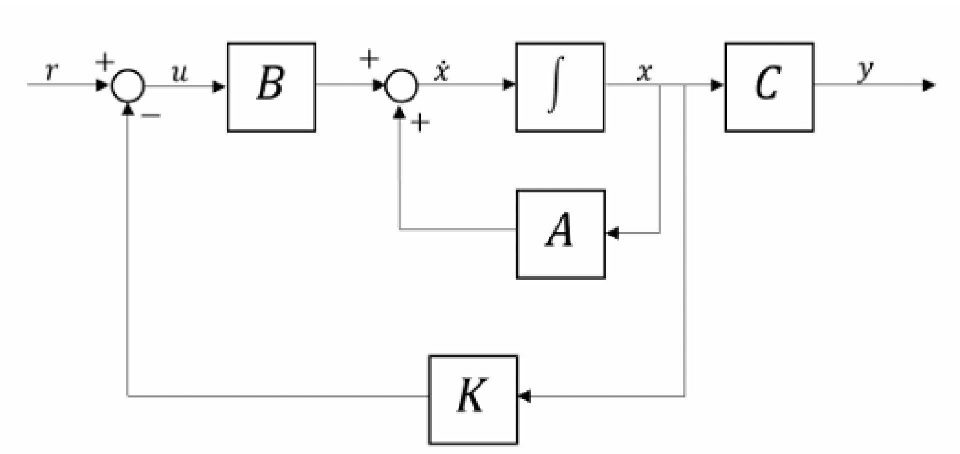
$$p(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$$

Un sistema in questa forma è controllabile; perciò i sistemi controllabili possono essere trasformati $x = P_\gamma x_\gamma$. Data la matrice di retroazione:

$$K_\gamma = \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_0 - \alpha_0 & \bar{\alpha}_1 - \alpha_1 & \cdots & \bar{\alpha}_{n-1} - \alpha_{n-1} \end{bmatrix}$$

Dove $\bar{\alpha}_0, \cdots, \bar{\alpha}_{n-1}$ sono i coefficienti del polinomio caratteristico desiderato. $P = M_c M_c^{-1}$.

$$M_c^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-1} & 1 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 & 0 \\ \alpha_{n-1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



3.1.1 Stabilizzabilità

Nei sistemi *non controllabili* ha senso fare la retroazione di stato sulla parte controllabile solo se il sistema è *stabilizzabile*, ovvero se per ogni polo instabile è verificata la seguente condizione:

$$\rho(\begin{bmatrix} A - \lambda I & B \end{bmatrix}) = n$$

4 Osservabilità

Un sistema dinamico LTI-TC è detto osservabile se e solo se il suo stato iniziale x_0 può essere determinato a partire dall'uscita y per un tempo finito $t_f > 0$.

4.1 Gramiano di Osservabilità

$$O(t) = \int_0^t e^{A^T\tau} C^T C e^{A\tau} d\tau$$

Il sistema è osservabile se e solo se:

$$\rho(O(t)) = n \quad \forall t > 0$$

Dall'uscita si può ricostruire lo stato iniziale:

$$x(0) = O^{-1}(t_f) \int_0^{t_f} e^{A^T\tau} C^T y(\tau) d\tau$$

Nei sistemi LTI-TD, invece, dato il vattore contenente i valori dell'uscita libera:

$$y_\ell^{t-1} = \begin{bmatrix} y(t-1) \\ \vdots \\ y(0) \end{bmatrix}$$

Il valore dello stato iniziale è dato da:

$$x(0) = (O_t^T O_t)^{-1} O_t^T y_\ell^{t-1}$$

Con O_t matrice di osservabilità in t passi (di dimensione $pt \times n$).

4.2 Matrie di Kalman di Osservabilità

$$M_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Il sistema è osservabile se e solo se $\rho(M_o) = n$. Se, invece, $\rho(M_o) = n_0 < n$; allora solo n_o componenti dello stato iniziale potranno essere determinate.

4.2.1 Forma di Kalman di Osservabilità

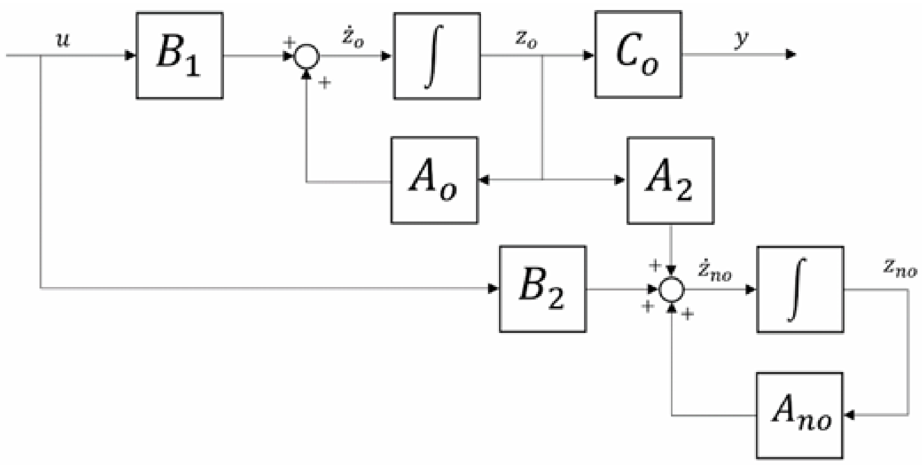
La matrice di trasformazione P_o è scelta in modo tale che *le prime n_o colonne coincidano con le n_o righe indipendenti di M_o trasposte, e le restanti $n - n_o$ colonne sono scelte in modo da essere ortogonali alle prime e linearmente indipendenti tra loro.*

$$x = P_o z$$

Le equazioni di stato e di uscita si trasformano nel seguente modo:

$$\begin{cases} \dot{z}_o = A_o z_o + B_1 u \\ \dot{z}_{n_o} = A_2 z_o + A_{n_o} z_{n_o} + B_2 u \\ y = C_o z_o \end{cases}$$

Lo schema a blocchi che rappresenta il sistema è:



4.2.2 Rivelabilità

Il sistema si dice *rivelabile* se e solo se $\rho(\begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix}) = n$ per ogni polo instabile.

5 Realizzazione

Consiste nel trovare un sistema dinamico a partire da una f.d.t. assegnata.

Considerando un sistema strettamente proprio (D=0) di ordine n, il grado del numeratore è strettamente minore del grado del denominatore:

$$G(s) = \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \beta_1 s + \beta_o}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_o}$$

Le realizzazioni possibili di una f.d.t. sono infinite.

Una realizzazione *minima* è una realizzazione i cui autovalori sono completamente controllabili ed osservabili (il sistema sarà di ordine n). Un esempio di questa realizzazione è ottenibile attraverso la forma compagna:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \cdots & \beta_{n-1} \end{bmatrix}$$

6 Controllo Ottimo

Dato un generico sistema dinamico, descritto dall'equazione di stato $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$, si vuole che esso assumi un certo comportamento in modo tale da minimizzare un certo obiettivo funzionale:

$$J = S(x(t_f), t_f) + \int_{t_o}^{t_f} f_o(x(t), u(t), t)dt$$

Si definisce la funzione *Hamiltoniana*:

$$H(x, u, \lambda, t) = f_o(x, u, t) + \lambda^T f(x, u, t)$$

Dove $\lambda \in R^n$ è detta variabile di co-stato.

Valgono le seguenti equazioni di stato:

$$\begin{cases} \dot{\lambda} = -(\frac{\partial H}{\partial x})^T \\ \dot{x} = (\frac{\partial H}{\partial x})^T \end{cases}$$

Per minimizzare H rispetto ad u si pone la sua derivata uguale a zero, questa equazione viene detta "di controllo".

Se x_f o t_f sono assegnate possiamo ricavare altre condizioni. Si vuole che:

$$[H + \frac{\partial S}{\partial t}]_{t_f} \delta t_f + [(\frac{\partial S}{\partial x})^T - \lambda]_{t_f}^T \delta x_f = 0$$

Se t_f è assegnato $\delta t_f = 0$; se x_f è assegnato $\delta x_f = 0$. Se invece non sono fissi, deve accadere che:

$$H(t_f) = -\frac{\partial S}{\partial t}|_{t_f} \qquad \lambda(t_f) = (\frac{\partial S}{\partial x})^T|_{t_f}$$

7 Osservatore

Descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}\hat{u} \\ \hat{y} = \hat{C}\hat{x} \end{cases}$$

Dove $\hat{x}$ è sia lo stato dell'osservatore, che la stima dello stato del sistema da osservare.

Si definisce l'errore sulla stima: $\epsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t)$.

Parliamo di *stimatore asintotico* quando: $\lim_{t \to +\infty} |\epsilon(t)|$.

7.1 Osservatore di Luenberger

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K_o(y - \hat{y}) = (A - K_o\hat{C})\hat{x} + Bu + K_o y \\ \hat{y} = \hat{C}\hat{x} \end{cases}$$

Definiamo quindi l'ingresso dell'osservatore $\hat{u} = \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix}$. Identifichiamo le matrici:

$$\hat{A} = A - K_o C \qquad \hat{B} = \begin{bmatrix} B & K_o \end{bmatrix}$$

Un osservatore così definito è *asintotico*.

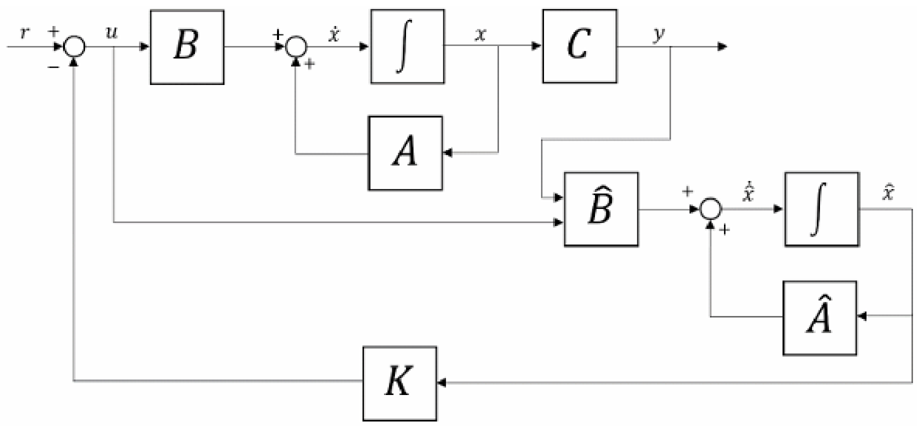
Per determinare K_o dobbiamo effettuare la retroazione di stato sul sistema duale:

$$\begin{cases} \dot{x}_D = A^T x_D + C^T u_D \\ y_D = B^T x_D \end{cases}$$

Quindi $A_D = A^T, B_D = C^T, C_D = B^T$.

La matrice di controllabilità del sistema duale è uguale alla trasposta della matrice di osservabilità del sistema di partenza: $M_{CD} = M_O^T$. Quindi se il sistema originale è completamente osservabile, allora il sistema duale è completamente controllabile e viceversa.

Dopo aver calcolato la retroazione di stato del sistema duale: $K_o = K_D^T$. Lo schema a blocchi:



7.2 Osservatore di Ordine Ridotto

Applicabile se l'uscita è del tipo $y = Cx = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = C_1 x_1$; con $C_1 \in R^{p \times p}$.

Nel caso in cui sia invertibile, si ottenono le preme p componenti dello stato così: $x_1 = C_1^{-1} y$.

Resta da stimare $\hat{x}_2 = z + Ly$; utilizzando un osservatore di ordine $n - p$:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u$$

Lo stimatore avrà uno stato regolato dalla seguente equazione di stato: $\dot{z} = Fz + Gy + Hu$.

Avendo introdotto 4 matrici, abbiamo bisogno di 3 vincoli:

$$\begin{cases} A_{21} + FLC_1 - GC_1 - LC_1 A_{11} = 0 \\ A_{22} - LC_1 A_{12} = 0 \\ B_2 - H - LC_1 B_1 = 0 \end{cases}$$

Possiamo quindi determinare:

$$\begin{cases} F = A_{22} - LC_1 A_{12} \\ G = (A_{21} - LC_1 A_{11})C_1^{-1} + FL \\ H = B_2 - LC_1 B_1 \end{cases}$$

Definiamo il sistema duale al sottosistema 2:

$$\dot{x}_{2D} = A_{22}^T x_{2D} + (C_1 A_{12})^T u$$

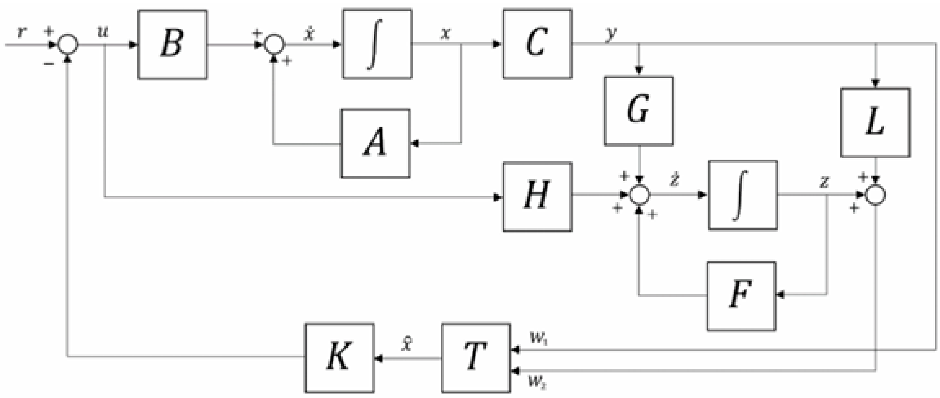
Si effettua la retroazione di stato su questo sistema e si ricava la matrice di retroazione K_D.
Quindi $L = K_D^T$.

Se il sistema non è nella forma descritta possiamo effettuare una trasformazione $T^{-1} = \begin{bmatrix} C \\ R \end{bmatrix}$, dove R è una qualsiasi matrice tale da garantire la non singolarità di T. Effettuando la trasformazione $x = Tw$, si ottiene il sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = w_1$$

Lo schema a blocchi che rappresenta il sistema è:



8 Matlab & Simulink

Esempio 1

Considerando il seguente sistema lineare dinamico:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 2x_1(t) + x_2(t) + 2x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) = 2x_1(t) + 2x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_3(t) = -6x_3(t) + 2u(t) \\ y(t) = 2x_1(t) + x_2(t) + 2x_3(t) \end{cases}$$

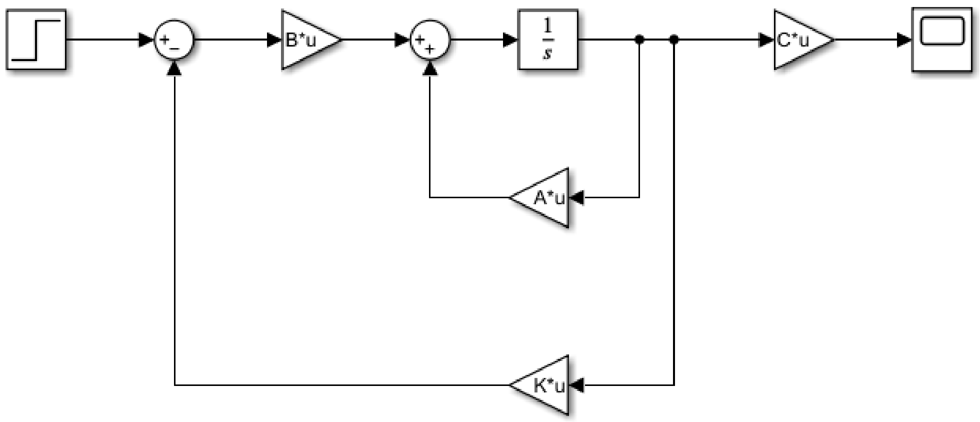
Script Matlab (.m) in cui:

- determinare il sistema in forma di stato;
- analizzare la controllabilità e l'osservabilità (dire se il sistema è completamente controllabile ed osservabile);
- determinare una matrice di retroazione di stato K che imponga gli autovalori [-2, -3, -6];
- determinare il sistema chiuso in retroazione con K in forma di stato e la sua risposta al gradino;
- verificare che il sistema chiuso in retroazione ha gli autovalori richiesti;
- determinare un osservatore di ordine ridotto che imponga gli autovalori [-1±j];
- verificare che il sistema con l'osservatore determinato abbia gli autovalori richiesti.

```
% Sistema lineare dinamico fornito
A = [2, 1, 2; 2, 2, 0; 0, 0, -6];
B = [0; 1; 2];
C = [2, 1, 2];
D = 0;

% Sistema in forma di stato
sys_ol = ss(A,B,C,D);
n = length(A);
% Analizzo la Controllabilita'
Mc = ctrb(A,B);

if (rank(Mc) == n)
    disp("il sistema e' completamente controllabile");
else
    disp("il sistema non e' completamente controllabile");
end
% Analizzo l'Osservabilita'
Mo = obsv(A,C);

if (rank(Mo) == n)
    disp("il sistema e' completamente osservabile");
else
    disp("il sistema non e' completamente osservabile");
end

% Retroazione di stato
p = [-2, -3, -6];
K = place(A,B,p);
% Sistema chiuso in retroazione con K in forma di stato
% e la sua risposta al gradino
A_cl = A-B*K;
sys_cl = ss(A_cl,B,C,D);
step(sys_cl);
% Verifica che il sistema chiuso in retroazione ha gli autovalori
   richiesti
eig_cl =eig(sys_cl);
disp(eig_cl);

% Osservatore di ordine ridotto
po = [-1-1j, -1+1j];

T = [C;0,1,0;0,0,1]; %Trasformazione di stato

A_1 = T*A/T; %con A/T e' equivalente a fare A*inv(T)
B_1 = T*B;
C_1 = C/T;

A_2 = A_1(end-1:end, end-1:end); %Selezione sottomatrice A22
B_2 = (C_1(1)*A_1(1,end-1:end))'; %Calcolo di C1*A12 trasposto
Kd = place(A_2',B_2,po);
L = Kd';

% Verifica che gli autovalori sono quelli richiesti
F = A_2 - L*C_1(1)*A_1(1,2:3);
eig_obs = eig(F);
disp(eig_obs);
```

Simulink:

- schema a blocchi del sistema chiuso in retroazione con K con la possibilità di visualizzare la risposta del sistema ad un gradino di ampiezza 2.



Esempio 2

Considerando il seguente sistema lineare dinamico:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) + 4x_2(t) + 4x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) = 2x_1(t) + 2x_2(t) \\ \dot{x}_3(t) = -6x_3(t) + u(t) \\ y(t) = 4x_1(t) \end{cases}$$

Script Matlab (.m) in cui:

- determinare il sistema in forma di stato;
- determinare la f.d.t. (funzione di trasferimento) del sistema;
- analizzare la controllabilità e l'osservabilità (dire se il sistema è completamente controllabile ed osservabile);
- determinare una matrice di retroazione di stato K che imponga gli autovalori [-1, -2, -3];
- determinare il sistema chiuso in retroazione con K in forma di stato e la sua risposta al gradino;
- verificare che il sistema chiuso in retroazione ha gli autovalori richiesti;
- determinare un osservatore di ordine ridotto che imponga gli autovalori [-5, -30];
- verificare che il sistema con l'osservatore determinato abbia gli autovalori richiesti.

Simulink:

- schema a blocchi del sistema chiuso in retroazione con K, con la possibilità di visualizzare la risposta del sistema ad un riferimento costante di ampiezza 1.

```
% Definizione matrici
A = [1, 4, 4; 2, 2, 0; 0, 0, -6];
B = [0; 0; 1];
C = [4, 0, 0];
D = 0;

% Definizione del sistema nello spazio di stato
sis_ol = ss(A,B,C,D);
[num,den] = ss2tf(A,B,C,D);

% Controllabilita' e Osservabilita'
Mc=ctrb(A,B);
if(rank(Mc)==length(A))
    disp("Il sistema e' completamente controllabile")
else
    disp("Il sistema non e' completamente controllabile")
end

Mo=obsv(A,C);
if(rank(Mo)==length(A))
    disp("Il sistema e' completamente osservabile");
else
    disp("Il sistema non e' completamente osservabile");
end

% Retroazione di stato
p = [-1,-2,-3];
K = place(A,B,p);
sys_cl = ss(A-B*K,B,C,D);
step(sys_cl); %risposta al gradino

eig_cl = eig(A-B*K);
disp(eig_cl);

%Osservatore di ordine ridotto
po = [-5,-30];
kd = place(A(end-1:end,end-1:end)',C(1)*A(1,end-1:end)',po);
L=kd';
eig_L = eig(A(end-1:end,end-1:end)-L*C(1)*A(1,end-1:end));
disp(eig_L);
```