Si consideri il seguente sistema in forma di stato:

$$\begin{cases} x_1(t+1) = x_1(t) + x_2(t) + u_1(t) \\ x_2(t+1) = x_2(t) + u_2(t) \\ y(t) = x_1(t) - x_2(t) \end{cases}$$

a) Si classifichi il sistema e si individui la quaterna di matrici (**F**, **G**, **H**, **L**) che lo caratterizza.

b) Si determinino i seguenti insiemi: $\bar{\boldsymbol{U}}$ insieme degli ingressi di equilibrio, $\bar{\boldsymbol{X}}$ insieme degli stati di equilibrio, $\bar{\boldsymbol{X}}_{\bar{\boldsymbol{u}}}$ insieme degli stati di equilibrio corrispondenti a un dato ingresso $\bar{\boldsymbol{u}}$.

a) Sistema LTI, tempo discreto a dimensioni finite

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \quad L = 0$$

b)

$$\left.\begin{aligned} |F - I| &= \begin{vmatrix} 1-1 & 1 \\ 0 & 1-1 \end{vmatrix} = 0 \\ |G| &= 1 \neq 0 \end{aligned}\right\} 2^\circ \text{ caso}$$

Tutti gli stati sono di equilibrio : $\bar{X} = X = \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^2$

$$\bar{U} = \mathcal{R}\left(G^{-1}(F - I)\right) = \mathcal{R}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \mathcal{R}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = sp\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} = \{x : x_2 = 0\}$$

L'equazione all'equilibrio é:

$$(F-I)x = -G\bar{u} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow \quad x_2 = -u_1 \rightarrow$ una soluzione particolare

é: $\quad x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -u_1 \end{bmatrix}$

$$N(F-I) = \{v : (F-I)v = 0\} = \left\{v : \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0\right\}$$

$$= sp\left\{\begin{bmatrix} K \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$$

$$\bar{X}_{\bar{u}} = \begin{cases} \emptyset & \text{se } u_2 \neq 0 \\ \begin{bmatrix} K \\ -u_1 \end{bmatrix} & \text{se } u_2 = 0, \ K \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Si consideri il sistema a dimensioni finite, regolare, lineare e tempoinvariante descritto dalle seguenti equazioni di stato:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -3x_1(t) - 2x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) + u(t) \end{cases}.$$

a) Si determini l'espressione del movimento forzato ed il suo valore per $t = 10$, in corrispondenza di un ingresso a rampa. Cosa si può dire della stabilità di tale movimento?

b) Si determinino: l'insieme di tutti gli stati di equilibrio; l'insieme di tutti gli ingressi di equilibrio; l'insieme degli stati di equilibrio in corrsipondenza di un assegnato (generico) valore del vettore di ingresso.

c) Si calcolino gli stati di equilibrio in corrispondenza dell'ingresso $u_0 = 2$.

$$F = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$U(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$X_f(s) = (sI - F)^{-1} G\, U(s) = \frac{\mathrm{Adj} \begin{bmatrix} s+3 & 2 \\ -1 & s \end{bmatrix}^T}{s^2 + 3s + 2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{s^2} =$$

$$= \frac{1}{s^2(s+2)(s+1)} \begin{bmatrix} s & -2 \\ 1 & s+3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{u} \begin{bmatrix} -2 \\ s+3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

$$-\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{8}{4}} = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$$

Movimento asintoticamente stabile

$$Re(\lambda) > 0$$

Antitrasformo

$$\frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s+1} + \frac{D}{s+2} =$$

$$= \frac{A(s^2+3s+2) + B(s^3+3s^2+2s) + C(s^3+2s^2) + D(s^3+s^2)}{s^2(s+2)(s+1)}$$

1

$$\begin{cases} B + C + D = 0 \\ A + 3B + 2C + D = 0 \\ 2B + 3A = 0 \\ 2A = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} 3/2 + C + D = 0 \\ -1 + 9/2 + 2C + D = 0 \\ B = 3/2 \\ A = -1 \end{cases}$$

$$\to \ldots \begin{cases} D = 1/2 \\ C = -2 \\ B = 3/2 \\ A = -1 \end{cases}$$

2

$$\begin{cases} B+C+D=0 \\ A+3B+2C+D=0 \\ 2B+3A=1 \\ 2A=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} D=-1/4 \\ C=2 \\ B=-7/4 \\ A=3/2 \end{cases}$$

$$X_f(t)=\begin{bmatrix} -t+\frac{3}{2}-2e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t} \\ \frac{3}{2}t-\frac{7}{4}+2e^{-t}-\frac{1}{4}e^{-2t} \end{bmatrix}1(t)$$

Per $t=10$

$$X_f(10)=\begin{bmatrix} -10+\frac{3}{2}-2e^{-10}+\frac{1}{2}e^{-20} \\ \frac{30}{2}-\frac{7}{4}+2e^{-10}-\frac{1}{4}e^{-20} \end{bmatrix}=$$

b)

$$F = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$|F| = 2 \neq 0 \rightarrow 1^\circ$ caso:

$\bar{U} = U = R^m = R \rightarrow$ tutti gli ingressi sono di equilibrio

$$\bar{X} = R(F^{-1}G) = R\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= sp\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -3/2 \end{bmatrix}\right\}$$

Esiste un solo stato di equilibrio univocamente determinato:

$$\bar{X}_{\bar{u}} = \left\{-F^{-1}G\bar{u}\right\} = \left\{\begin{bmatrix} -\bar{u} \\ +\frac{3\bar{u}}{2} \end{bmatrix}, \bar{u} \in R\right\}$$

c) Se $n_0 = 2$

$$\bar{X}_{n_0} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Si consideri il seguente sistema in forma di stato:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -{x_1}^3(t) + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) - {x_2}^3(t) \end{cases}.$$

a) Dopo aver verificato che l'origine è uno stato di equilibrio per il sistema, si traggano tutte le possibili conclusioni sulla sua stabilità (in piccolo e in grande) utilizzando la funzione $V(\boldsymbol{x})$ pari alla forma quadratica associata alla matrice identità.

b) Si scrivano i comandi MATLAB per definire il sistema e tracciarne lo stato nei primi 50 secondi a partire dallo stato iniziale $\boldsymbol{x_0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

a)

$$\begin{cases} 0 = -x_1^3 + x_2 \\ 0 = -x_1 - x_2^3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = x_1^3 \\ x_1 = -x_2^3 \end{cases}$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V(x) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1^2 + x_2^2$$

V continua con derivate continue

V definita positiva in $\bar{x}$

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} f_2 = 2x_1\left(-x_3^2 + x_2\right) +$$

$$+ 2x_2\left(-x_1 - x_2^3\right) = -2x_1^4 - 2x_2^3$$

$\dot{V}$ definita negativa in $\bar{x}$

L'origine è un punto di equilibrio (in piccolo) asintoticamente stabile per Lyapunov.

Studiamo la stabilità in grande:

(dobbiamo verificare se è radialmente illimitata)

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \end{bmatrix}\Bigg|_{\bar{x}} = 0 \quad \text{solo nell'origine}$$

Per Lyapunov(?) il punto è globalmente stabile

b) Definisco le matrici:

F = ...

G = ...

H = ...

L = ...

X0 = [1; 0];

t = 0 : 50;

sys = ss(F, G, H, L);

initial(sys, X0, t)

Si consideri il sistema in forma di stato:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -2x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = 2x_1(t) + 2x_2{}^4(t) + 6x_2{}^3(t) + 4x_2{}^2(t) \end{cases}$$

a) Si determinino gli stati di equilibrio del sistema.

b) Per ciascuno stato di equilibrio, se ne analizzi la stabilità mediante linearizzazione, ove possibile.

a)

$$\begin{cases} 0 = -2x_1 \\ 0 = 2x_1 + 2x_2^4 + 6x_2^3 + 4x_2^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ 2x_2^2\left(x_2^2 + 3x_2 + 2\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ 2x_2^2(x_2+2)(x_2+1) = 0 \end{cases}$$

$$\bar{x}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \bar{x}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \bar{x}_C = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

b)

$$F = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\bar{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 4x_2(x_2^2+3x_2+2)+2x_2^2(2x_2+3) \end{bmatrix}$$

$$= \left.\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 8x_2^3+18x_2^2+8x_2 \end{bmatrix}\right|_{\bar{x}} =$$

$$\rightarrow F_A\Big|_{\bar{x}_A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{semplicemente stabile}$$

$$\rightarrow F_B\Big|_{\bar{x}_B} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -64+72-16 \end{bmatrix} \rightarrow \text{asintot. stabile}$$

$$\rightarrow F_C\Big|_{\bar{x}_C} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -8+18-8 \end{bmatrix} \rightarrow \text{instabile}$$

Si consideri il sistema:

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t) = x_1(t)x_2{}^2(t) + u_1(t)\\ \dot{x}_2(t) = -2x_1{}^2(t)x_2(t) - x_2(t) + u_2(t)\end{cases}$$

a) Posti $u_1(t)=u_2(t)=0$, si determinino i punti di equilibrio del sistema e si dica se è possibile analizzarne la stabilità utilizzando il criterio ridotto di Lyapunov (metodo della linearizzazione).

b) Posti $u_1(t)= -x_1(t)$ e $u_2(t)= -x_2(t)$, si verifichi che l'origine è un punto di equilibrio e se ne analizzi la stabilità utilizzando il criterio di Lyapunov con la funzione $V(\boldsymbol{x}) = 2x_1{}^2 + x_2{}^2$.

c) Si rappresenti graficamente uno schema Simulink per analizzare il movimento del sistema dato.

a)

$$\begin{cases}0 = x_1 x_2^2\\ 0 = -2x_1^2 x_2 - x_2\end{cases} \qquad \begin{cases} \\ -x_2(1+2x_1^2) = 0\end{cases}$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \qquad \bar{x} = sp\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right\}$$

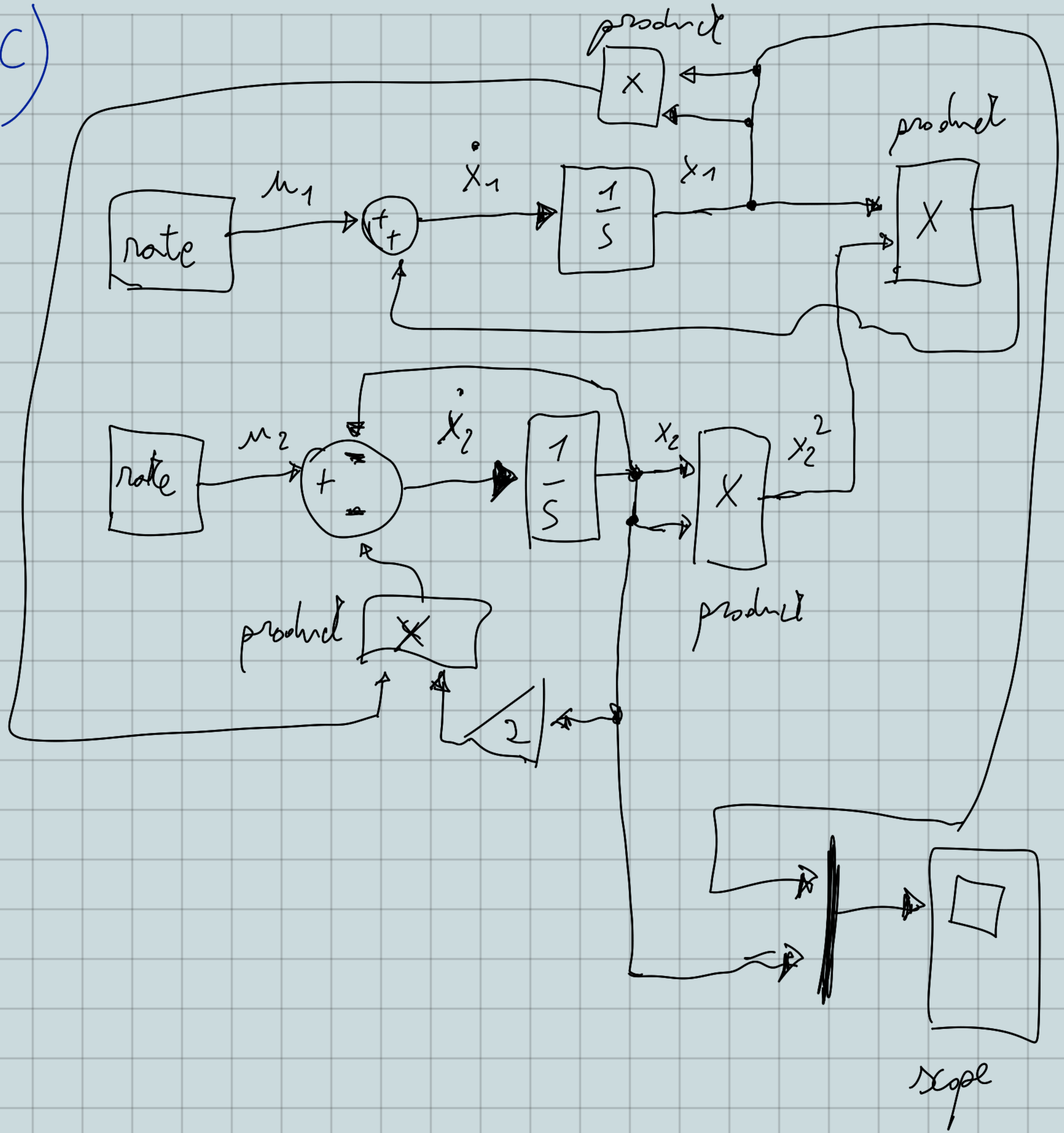
$$F = \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{\bar{x}} = \begin{bmatrix}x_2^2 & 2x_1x_2\\ -4x_1x_2 & -1-2x_1^2\end{bmatrix}\bigg|_{\bar{x}} =$$

$$= \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix} \rightarrow \text{semplicemente stabile}$$

b) $\begin{cases} 0 = x_1 x_2^2 - x_1 \\ 0 = -2x_1^2 x_2 - x_2 - x_2 \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1 (x_2^2 - 1) = 0 \\ -2x_2 (x_1^2 + 1) = 0 \end{cases}$$

$\tilde{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ é di equilibrio c)



product
×
product
X
u_1
$\dot{x}_1$
x_1
rate
+
+
$\frac{1}{s}$
u_2
$\dot{x}_2$
x_2
x_2^2
rate
+
−
−
$\frac{1}{s}$
X
product
X
2
scope

Per il sistema tempo-discreto, lineare e tempoinvariante descritto dalle seguenti equazioni di stato

$$\begin{cases} x_1(t+1) = 2x_1(t) + u_1(t) \\ x_2(t+1) = x_1(t) + x_2(t) + u_2(t) \end{cases}$$

a) si determini l'insieme di tutti gli stati di equilibrio;
b) si determini l'insieme di tutti gli ingressi di equilibrio;
c) si determini l'insieme degli stati di equilibrio per un generico valore assegnato del vettore di ingresso.

$$F = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|F - I| = \begin{vmatrix} 2-1 & 0 \\ 1 & 1-1 \end{vmatrix} = 0$$

$$|G| \neq 0$$

Siamo nel 2° caso:

a) $\bar{X} = X =$ Tutti gli stati sono di equilibrio

b) $$\bar{U} = R\left(G^{-1}(F-I)\right) = R\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= R\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = sp.\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} =$$

$$= \{ u : u_1 = u_2 \}$$

c) Calcoliamo una soluzione particolare

$$(F - I)\, x = -G \bar{u}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{cases} x_1 = -u_1 \\ x_1 = -u_2 \end{cases} \rightarrow x_0 = \begin{bmatrix} -u_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$N(F - I) \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad V_1 = 0 = sp\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$$\bar{X}_n = \begin{cases} \emptyset & \text{se } \mu_1 \neq \mu_2 \\ \begin{bmatrix} -\mu_1 \\ k + h \end{bmatrix} & \text{se } \mu_1 = \mu_2, \ k, h \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Si consideri il sistema in forma di stato:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = -x_1(k) + 2x_2(k) + u_1(k) + u_2(k) \\ x_2(k+1) = x_1(k) + u_2(k) \end{cases}.$$

Si considerino inoltre i seguenti stati:

$\boldsymbol{x_A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\boldsymbol{x_B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$; $\boldsymbol{x_C} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$;

e i seguenti ingressi costanti:

$\boldsymbol{u_D} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$; $\boldsymbol{u_E} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix}$; $\boldsymbol{u_F} = \begin{bmatrix} 9 \\ -3 \end{bmatrix}$.

a) Si dica se tra gli stati elencati vi sono stati di equilibrio del sistema.
b) Si dica se tra gli ingressi costanti elencati vi sono ingressi di equilibrio per il sistema.
c) Si individui se vi sono tra gli stati e ingressi costanti elencati delle coppie stato-ingresso di equilibrio.

$$F = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} |F - I| = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = +2 - 2 = 0 \\ \\ |G| = 1 \neq 0 \end{array}\right\} 2^\circ \text{ caso}$$

a) Tutti gli stati sono di equilibrio

$$\bar{X} = X = R^n = R^2$$

b)

$$\bar{U} = R\left(G^{-1}(F - I)\right) = R\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= R\left(\begin{bmatrix} -2-1 & 2+1 \\ 0+1 & 0-1 \end{bmatrix}\right) = R\left(\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= sp\left\{\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}\right\} = \left\{u : \quad u_1 = -3u_2\right\}$$

Solo $\bar{u}_E$ ed $\bar{u}_F$ sono di equilibrio

c)

Soluzione particolare:

$$(F - I)\,x = -G\,\bar{u}$$

u_E

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 = -6 + 2 \\ x_1 - x_2 = +2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad x_1 - x_2 = 2 \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = 0 \end{array}$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$N(F-I) = \left\{ v : \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0 \right\}$$

$$\left\{ v : \quad v_1 - v_2 = 0 \right\} = sp \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\bar{X}_{\bar{u}_E} = \begin{cases} \emptyset & u \neq \bar{u}_E \\ \begin{bmatrix} 2+k \\ k \end{bmatrix}, \quad k \in R & \text{se } u = \bar{u}_E \end{cases}$$

Punto $\bar{x}_B$

$\overline{\mathcal{M}_F}$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$x_1 - x_2 = 3 \longrightarrow \begin{matrix} x_1 = 3 \\ x_2 = 0 \end{matrix}$$

$$\bar{x}_{\bar{\mathcal{M}}_F} = \begin{cases} \emptyset \\ \begin{bmatrix} 3+K \\ K \end{bmatrix} \end{cases}$$

Nessun $\bar{x}$ tra quelli elencati

Si considerino i seguenti due sistemi autonomi:

a $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t)(x_2(t) - 1) \\ \dot{x}_2(t) = (x_1(t) - 1)^3 \end{cases}$ b $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1{}^2(t) + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = (x_1(t) - 1)^3 \end{cases}$

a) Si determinino gli stati di equilibrio di ciascuno dei sistemi dati e, ove possibile, se ne analizzi la stabilità mediante linearizzazione.

b) Si rappresenti graficamente uno schema Simulink per analizzare il movimento del primo sistema dato.

a)

a $\begin{cases} 0 = x_1(x_2 - 1) \\ 0 = (x_1 - 1)^3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 1 \\ x_1 = 1 \end{cases}$

$x_1^3 - 3x_1^2 + 3x_1 - 1$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\bar{x}} = \left.\begin{bmatrix} x_2 - 1 & x_1 \\ 3x_1^3 - 6x_1 + 3 & 0 \end{bmatrix}\right|_{\bar{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\lambda_{1,2} = 0$ quindi il sistema instabile

$m_{1,2} \neq g_{1,2}$

Sistema instabile

(b)
$$\begin{cases} 0 = -x_1^2 + x_2 \\ 0 = (x_1 - 1)^3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 1 \\ x_1 = 1 \end{cases}$$

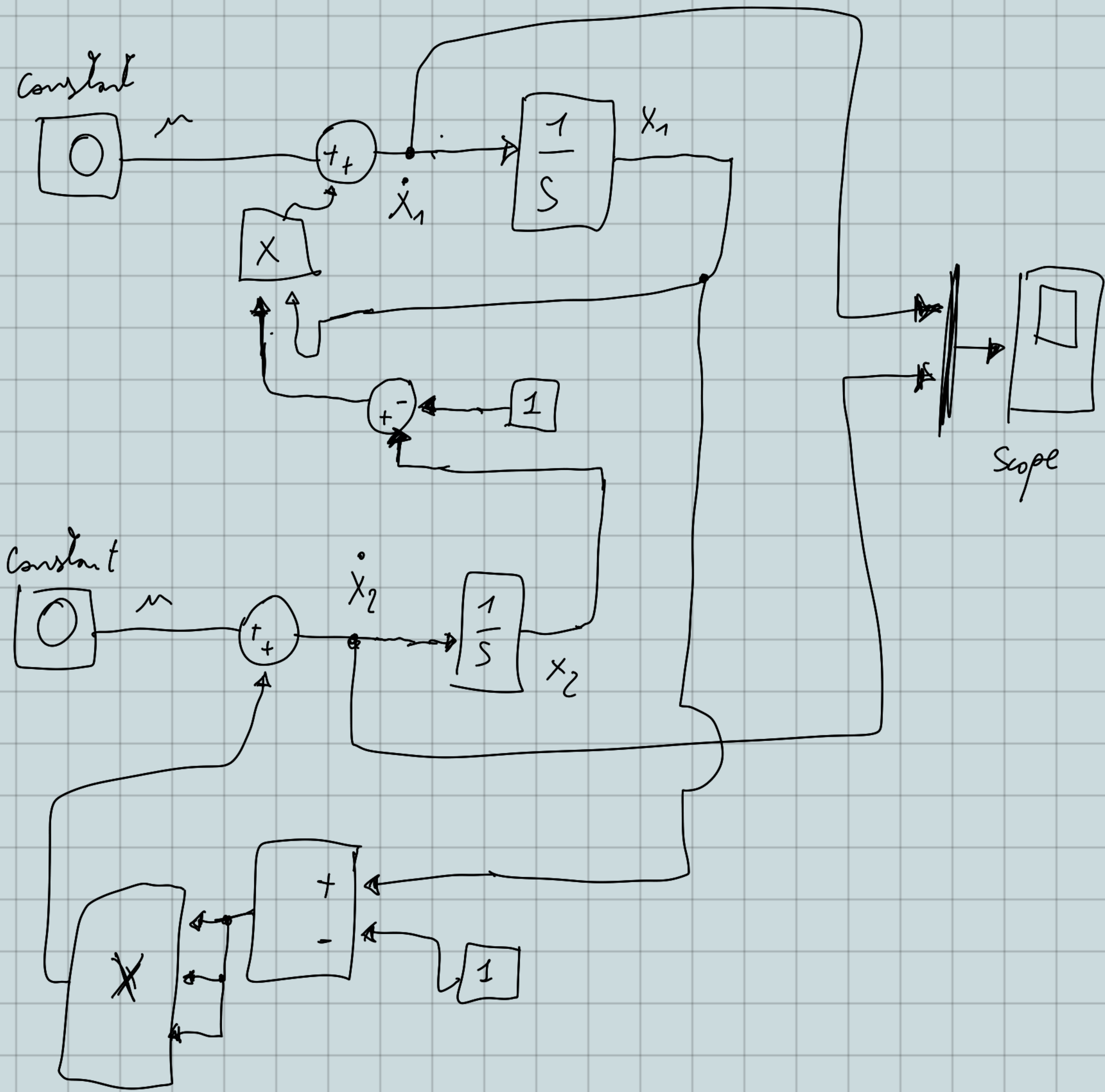
$$A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\bar{x}} = \left.\begin{bmatrix} -2x_1 & 1 \\ 3x_1^2 - 6x_1 + 3 & 0 \end{bmatrix}\right|_{\bar{x}} =$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Re(\lambda_1) = -2 < 0$$

$$Re(\lambda_2) = 0$$ Sistema semplicemente stabile

b)



Constant
0
μ
+ +
$\dot{x}_1$
$\frac{1}{s}$
x_1
X
- +
1
Scope
Constant
0
μ
+ +
$\dot{x}_2$
$\frac{1}{s}$
x_2
+
-
1
X

Si consideri il sistema a dimensioni finite, regolare, lineare e tempoinvariante descritto dalle seguenti equazioni di stato:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -3x_1(t) - 2x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) + u(t) \end{cases}.$$

a) Si determini l'espressione del movimento forzato ed il suo valore per $t = 10$, in corrispondenza di un ingresso a rampa. Cosa si può dire della stabilità di tale movimento?

b) Si determinino: l'insieme di tutti gli stati di equilibrio; l'insieme di tutti gli ingressi di equilibrio; l'insieme degli stati di equilibrio in corrsipondenza di un assegnato (generico) valore del vettore di ingresso.

c) Si calcolino gli stati di equilibrio in corrispondenza dell'ingresso $u_0 = 2$.

a)

$$F = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad U(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$X_f(s) = (sI - F)^{-1} G\, U(s) =$$

$$= \frac{\mathrm{Adj}(sI - F)^T}{\det(sI - F)} G\, U(s) =$$

$$= \frac{\mathrm{Adj}\begin{bmatrix} s+3 & 2 \\ -1 & s \end{bmatrix}^T}{s^2+3s+2} \, G \, U(s) =$$

$$\rightarrow s_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2}$$

$$= -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$\frac{\mathrm{Adj}\begin{bmatrix} s+3 & -1 \\ 2 & s \end{bmatrix}}{(s+2)(s+1)} \, G \cdot \frac{1}{s^2} =$$

$$= \frac{1}{s^2(s+2)(s+1)} \begin{bmatrix} s & -2 \\ 1 & s+3 \end{bmatrix}$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{-2}{s^2(s+2)(s+1)} \\ \dfrac{s+3}{s^2(s+2)(s+1)} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

Antitrasformiamo :

$$\frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s+2} + \frac{D}{s+1} \rightarrow$$

$$\rightarrow A(s+2)(s+1) + B(s^2+2s)(s+1) +$$

$$+ C(s^3+s^2) + D(s^3+2s^2) =$$

$$= As^2 + 3As + 2A + Bs^3 + 3Bs^2 +$$

$$+ 2Bs + Cs^3 + Cs^2 + Ds^3 + 2Ds^2$$

1

$$\begin{cases} B+C+D=0 \\ A+3B+C+2D=0 \\ 3A+2B=0 \\ 2A=-2 \end{cases} \qquad \begin{cases} D=-2 \\ C=1/2 \\ B=3/2 \\ A=-1 \end{cases}$$

2

$$\begin{cases} B + C + D = 0 \\ A + 3B + C + 2D = 0 \\ 3A + 2B = 1 \\ 2A = 3 . \end{cases} \qquad \begin{cases} D = 2 \\ C = -1/4 \\ B = -7/4 \\ A = 3/2 \end{cases}$$

$$x_f(t) = \begin{bmatrix} -t + \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2} e^{-2t} - 2e^{-t} \\[2ex] \dfrac{3}{2} t - \dfrac{7}{4} - \dfrac{1}{4} e^{-2t} + 2e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$x_f(10) = \begin{bmatrix} -10 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}e^{-20} - 2e^{-10} \\ \frac{30}{2} - \frac{7}{4} - \frac{1}{4}e^{-20} + 2e^{-10} \end{bmatrix}$$

$$\simeq \begin{bmatrix} -10 + 3/2 \\ \frac{30}{2} - 7/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{17}{2} \\ \frac{53}{4} \end{bmatrix}$$

Per la stabilità calcoliamo gli autovalori

$$|\lambda I - F| = \begin{vmatrix} \lambda + 3 & 2 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \lambda_1 = -1 \; ; \; \lambda_2 = -2$$

$Re(\lambda_i) < 0$

Sistema asintot. stabile

b)

$|F| = 2 \neq 0 \rightarrow$ La matrice F é invertibile

$\bar{U} = U = R^m \rightarrow$ tutti gli ingressi sono di equilibrio

$$\bar{X} = Im(F^{-1}G) = Im\left[\left(\frac{Adj\begin{bmatrix}-3 & 1\\ -2 & 0\end{bmatrix}}{2}\right)G\right]$$

$$Im\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & 2\\ -1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\right) = Im\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2\\ -3\end{bmatrix}\right) =$$

$$= span\left(\begin{bmatrix}1\\ -3/2\end{bmatrix}\right) = \left\{x \in X : x_2 = -\frac{3}{2}x_1\right\}$$

Stati di equilibrio

$$\bar{X}_{\bar{u}} = \left\{ -F^{-1} G \bar{u} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 3/2 \end{bmatrix} \bar{u} , \bar{u} \in R \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} -\bar{u} \\ \frac{3\bar{u}}{2} \end{bmatrix} , \bar{u} \in R \right\}$$

c)

Se $\bar{u} = u_0 = 2$

otteniamo la soluzione particolare:

$$X_0 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Si consideri il sistema in forma di stato: $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + x_1(t)(4{x_1}^2(t) + {x_2}^2(t)) \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t) + x_2(t)(4{x_1}^2(t) + {x_2}^2(t)) \\ y(t) = x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$

a) Si determinino tutti gli stati di equilibrio del sistema.

b) Dopo aver verificato (punto a) che l'origine $\boldsymbol{x_A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ è un punto di equilibrio, si determini il modello linearizzato del sistema nell'intorno di $\boldsymbol{x_A}$ e con tale modello si analizzi, se possibile, la stabilità di tale punto di equilibrio.

c) Si effettui l'analisi di stabilità dell'origine con il metodo di Lyapunov e la funzione $V(x) = {x_1}^2 + {x_2}^2$.

d) Dopo aver verificato (punto a) che il punto $\boldsymbol{x_B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ è un punto di equilibrio, si determini il modello linearizzato del sistema nell'intorno di $\boldsymbol{x_B}$ e con tale modello si analizzi, se possibile, la stabilità di tale punto di equilibrio.

a)

$$\begin{cases} 0 = -x_1 + x_1(4x_1^2 + x_2^2) \\ 0 = -x_2 + x_2(4x_1^2 + x_2^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = x_1(4x_1^2 + x_2^2 - 1) \\ 0 = x_2(4x_1^2 + x_2^2 - 1) \end{cases}$$

$$\bar{X}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \bar{X}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \bar{X}_C = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{X}_D = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \bar{X}_E = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b)

$$F^{(A)} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\bar{x}_A} = \begin{bmatrix} 4x_1^2 + x_2^2 - 1 + 8x_1^2 & 2x_2 \\ 8x_1^2 & 4x_1^2 + x_2^2 - 1 + 2x_2^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{asintoticamente stabile}$$

$$G = \frac{\partial f}{\partial u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$L = \frac{\partial g}{\partial u} = 0$$

$$H = \frac{\partial g}{\partial x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

d)

$$F^{(B)} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\bar{x}_B} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

instabile

c)

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2 \qquad \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- V continua con derivate continue
- V definita positiva

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} f_2 =$$

$$= 2x_1^2(4x_1^2 + x_2^2 - 1) + 2x_2^2(4x_1^2 + x_2^2 - 1) =$$

$$= 8x_1^4 + 2x_1^2x_2^2 - 2x_1^2 + 8x_2^2x_1^2 +$$

$$+ 2x_2^4 - 2x_2^2$$

Se consideriamo un intorno piccolo ($\text{tra } 0{,}1 \leq x \leq 0{,}9$) i termini di ordine maggiore sono irrilevanti

- $\dot{V}$ definita negativa

allora l'origine è un punto di equilibrio asintoticamente stabile.

(NON è però globalmente stabile).

Si consideri il seguente sistema in forma di stato:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1{}^3(t) + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) - x_2{}^3(t) \end{cases}.$$

a) Dopo aver verificato che l'origine è uno stato di equilibrio per il sistema, si traggano tutte le possibili conclusioni sulla sua stabilità (in piccolo e in grande) utilizzando la funzione *V(**x**)* pari alla forma quadratica associata alla matrice identità.

a)

$$\begin{cases} 0 = -x_1^3 + x_2 \\ 0 = -x_1 - x_2^3 \end{cases} \rightarrow \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2$$

$$\dot{V}(x) = -2x_1^4 + \cancel{2x_1x_2} - \cancel{2x_1x_2} - 2x_2^4$$

- V continua con derivate continua
- V definita positiva
- $\dot{V}$ definita negativa

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \text{solo per } x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

• V é radialmente illimitata

Quindi per Lyapunov é asintoticamente stabile (in piccolo) e per La Salle é globalmente stabile