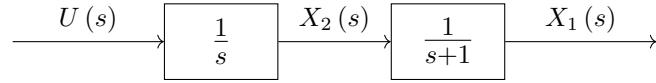


Problema n.1

Dato il seguente sistema:



- trovare la rappresentazione nello spazio di stato.
- trovare il vettore K che allochi i seguenti poli: $-1 \pm 2i$
- trovare il vettore L che setti i poli dell'osservatore in maniera tale che siano 3 volte più veloci dei poli del sistema retroazionato.

Soluzione problema n.1

Trovare la rappresentazione nello spazio di stato

Dallo schema a blocchi è possibile scrivere le equazioni nel dominio di Laplace:

$$\begin{aligned} X_2(s) &= \frac{1}{s}U(s) \\ X_1(s) &= \frac{1}{s+1}X_2(s) \end{aligned}$$

Facciamo la trasformata inversa per portare le equazioni nel dominio nel tempo:

$$\begin{aligned} \dot{x}_2(t) &= u(t) \\ \dot{x}_1(t) &= -x_1(t) + x_2(t) \end{aligned}$$

Scriviamo nella forma di spazio di stato:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

e l'uscita (dal grafico $y = x_1$) è:

$$y(t) = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Trovare il vettore K che allochi i seguenti poli: $-1 \pm 2i$

Verifichiamo la controllabilità

$$\mathcal{C} = [\mathbf{B} \ \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(\mathcal{C}) = 2$$

\mathcal{C} ha rango pieno, quindi il sistema è completamente controllabile, è possibile proseguire con l'assegnazione degli autovalori.

Il polinomio caratteristico desiderato è:

$$\rho_d(\lambda) = (\lambda + 1 - 2i)(\lambda + 1 + 2i) = \lambda^2 + 2\lambda + 5$$

Calcoliamo la matrice di stato in anello chiuso $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} - \mathbf{BK} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Il cui polinomio caratteristico è:

$$\lambda^2 + (1 + k_2)\lambda + (k_1 + k_2)$$

Imponiamo i coefficienti del polinomio caratteristico desiderato, risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 1 + k_2 = 2 \\ k_1 + k_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_2 = 1 \\ k_1 = 4 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{K} = [4 \ 1]$$

La matrice di stato del sistema retro-azionato risulta essere:

$$\mathbf{A} - \mathbf{BK} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$$

i cui autovalori sono $-1 \pm 2i$ come da specifica imposta.

Trovare il vettore L che setti i poli dell'osservatore in maniera tale che siano 3 volte più veloci dei poli del sistema retroazionario

Vogliamo progettare un osservatore che abbia autovalori tre volte più veloci rispetto a quelli imposti in precedenza nel sistema retroazionario. La parte reale degli autovalori è quella che ne determina la velocità quindi: $\lambda_{1,2} = -3 \pm 2j$.

Per prima cosa verifichiamo l'osservabilità:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \rho(\mathcal{O}) = 2 = n$$

Avendo rango pieno, il sistema risulta completamente osservabile, quindi è progettare un osservatore.

Il polinomio caratteristico desiderato per l'osservatore è:

$$\rho_d(\lambda) = (\lambda + 3 - 2j)(\lambda + 3 + 2j) = \lambda^2 + 6\lambda + 13$$

Costruiamo la matrice $\mathbf{A} - \mathbf{LC}$:

$$\mathbf{A} - \mathbf{LC} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 - 1 & 1 \\ -l_2 & 0 \end{bmatrix}$$

il cui polinomio caratteristico è:

$$\rho(\lambda) = \lambda^2 + (1 + l_1)\lambda + l_2$$

Imponiamo i coefficienti del polinomio caratteristico desiderato, risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 1 + l_1 = 6 \\ l_2 = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l_1 = 5 \\ l_2 = 13 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 5 \\ 13 \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathbf{A} - \mathbf{LC}$ risulta essere:

$$\mathbf{A} - \mathbf{LC} = \begin{bmatrix} -l_1 - 1 & 1 \\ -l_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ -13 & 0 \end{bmatrix}$$

i cui autovalori sono quelli imposti.

Problema n.2

Dato il seguente sistema:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k) \\ x_2(k+1) = x_3(k) \\ x_3(k+1) = u(k) + x_3(k) \\ y(k) = x_1(k) \end{cases}$$

e la seguente funzione di costo:

$$J(k) = \sum_{i=H_w}^{H_P} (r(k+i) - y(k+i))^2 + \sum_{i=0}^{H_c} u^2(k+i)$$

con $H_P = 3, H_C = 2, H_W = 1$

-
- Si calcoli analiticamente $J(k)$.
 - Si calcoli $u(k)$.
 - Si calcoli $u(k+1)$.
 - Dato $u(k)$ si determini la stabilità in anello chiuso.

Svolgimento problema n.2

Calcolo di $J(k)$

Al passo 2:

$$\begin{cases} x_1(k+2) = x_2(k+1) & = x_3(k) \\ x_2(k+2) = x_3(k+1) & = u(k) + x_3(k) \\ x_3(k+2) = u(k+1) + x_3(k+1) & = u(k+1) + u(k) + x_3(k) \end{cases}$$

Al passo 3:

$$\begin{cases} x_1(k+3) = x_2(k+2) & = u(k) + x_3(k) \\ x_2(k+3) = x_3(k+2) & = u(k+1) + u(k) + x_3(k) \\ x_3(k+3) = u(k+2) + x_3(k+2) & = u(k+2) + u(k+1) + u(k) + x_3(k) \end{cases}$$

Dato che $H_u = 2$,abbiamo:

$$\begin{cases} x_1(k+3) = u(k) + x_3(k) \\ x_2(k+3) = u(k+1) + u(k) + x_3(k) \\ x_3(k+3) = 2u(k+1) + u(k) + x_3(k) \end{cases}$$

Espando la sommatoria:

$$\begin{aligned} J(k) &= \sum_{i=H_w}^{H_p} [r(k+i) - y(k+i)]^2 + \sum_{i=0}^{H_c} u^2(k+i) \\ &= \underbrace{[r(k+1) - y(k+1)]^2 + [r(k+2) - y(k+2)]^2 + [r(k+3) - y(k+3)]^2}_{J_1(k)} + \underbrace{u^2(k) + u^2(k+1) + u^2(k+2)}_{J_2(k)} \\ &= J_1(k) + J_2(k) \end{aligned}$$

Sostituisco i valori calcolati in $J_1(k)$ e $J_2(k)$

$$J_1(k) = [r(k+1) - x_2(k)]^2 + [r(k+2) - x_3(k)]^2 + [r(k+3) - u(k) - x_3(k)]^2$$

Sempre dato che abbiamo $H_u = 2$:

$$J_2(k) = u^2(k) + 2u^2(k+1)$$

Quindi $J(k)$ vale:

$$J(k) = [r(k+1) - x_2(k)]^2 + [r(k+2) - x_3(k)]^2 + [r(k+3) - u(k) - x_3(k)]^2 + u^2(k) + 2u^2(k+1)$$

Calcolo $u(k)$

Per calcolare $u(k)$ dobbiamo porre:

$$\frac{\partial J(k)}{\partial u(k)} = 0$$

Calcoliamo $\frac{\partial J(k)}{\partial u(k)}$

$$\frac{\partial J(k)}{\partial u} = -2[r(k+3) - u(k) - x_3(k)] + 2u(k) = -2r(k+3) + 2u(k) + 2x_3(k) + 2u(k)$$

Imponiamo la derivata uguale a zero:

$$-2r(k+3) + 2u(k) + 2x_3(k) + 2u(k) = 0$$

Ottenendo:

$$u(k) = -\frac{x_3(k)}{2} + \frac{r(k+3)}{2}$$

Calcolo $u(k+1)$

Per calcolare $u(k+1)$ dobbiamo porre:

$$\frac{\partial J(k)}{\partial u(k+1)} = 0$$

Calcoliamo $\frac{\partial J(k)}{\partial u(k+1)}$

$$\frac{\partial J(k)}{\partial u(k+1)} = 2u(k+1)$$

Imponiamo la derivata uguale a zero:

$$2u(k+1) = 0$$

ottenendo:

$$u(k+1) = 0$$

Calcolo stabilità in anello chiuso data $u(k)$

Abbiamo visto come $u(k) = -\frac{x_3(k)}{2} + \frac{r(k+3)}{2}$.

La stabilità in anello chiuso si valuta considerando il movimento libero, quindi ponendo a zero l'ingresso $r(k) = 0 \quad \forall k$

Abbiamo quindi:

$$u(k) = -\frac{x_3(k)}{2}$$

Sapendo che la matrice di stato in un sistema ad anello chiuso è $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$ e sapendo che $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}$ possiamo ricavarci \mathbf{K} :

$$-\frac{x_3(k)}{2} = -\begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} = -k_1x_1(k) - k_2x_2(k) - k_3x_3(k) \Rightarrow \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Calcolo $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$:

$$\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

i cui autovalori sono $\lambda_{1,2} = 0$ e $\lambda_3 = \frac{1}{2}$. Dato che sono tutti all'interno del cerchio unitario, il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.