Tema n. 1 **11 pt**

Uno studio associato di ingegneria che opera nel settore edile, in grado di affrontare la progettazione completa e la direzione dei lavori di edilizia pubblica e privata. Lo studio è formato da 10 ingegneri con competenze diversificate. I progetti che possono essere realizzati nel trimestre successivo sono evidenziati in tabella, nella quale viene riportato il ricavo di progettazione e il gruppo di lavoro in grado di realizzarlo. L'obiettivo che si vuole raggiungere è scegliere l'insieme dei progetti da realizzare, in modo da massimizzare il ricavo totale di progettazione, garantendo che ciascun ingegnere sia coinvolto nella realizzazione di al massimo un progetto, tra quelli selezionati.

1) Formulare il modello di ottimizzazione che permette di determinare la soluzione ottima (**7 punti**).
2) Risolvere tramite risolutore Excel il suddetto problema (**4 punti**).

Progetto	Gruppo di lavoro	Ricavo [Keuro]
1	2,3,5,7	120
2	4,7,9,10	20
3	1,4,7,9	150
4	3,5,7,8	45
5	1,2,9,10	75
6	6,5,9	80
7	3,7,9,10	130

$[i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]$ N° di ingegneri

$j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$

Variabili decisionali:

$$X_j = \begin{cases} 1 & \text{se il progetto viene realizzato} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

parametri:

$$r_j = \begin{bmatrix} 120 \\ 20 \\ 150 \\ 45 \\ 75 \\ 80 \\ 130 \end{bmatrix}$$

F.O.

$$\max \sum_{j=1}^{7} r_j X_j$$

Vincoli:

$x_3 + x_5 \leq 1$ ingegnere 1 può lavorare un solo progetto

$x_1 + x_5 \leq 1$ // 2

$x_1 + x_4 + x_7 \leq 1$ // 3

$x_2 + x_3 \leq 1$ // 4

$x_1 + x_4 + x_6 \leq 1$ // 5

$x_6 \leq 1$ // 6

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 \leq 1$ // 7

$x_4 \leq 1$ // 8

$x_2 + x_3 + x_5 + x_6 + x_7 \leq 1$ // 9

$x_2 + x_5 + x_7 \leq 1$ // 10

Tema n. 2 **10 pt**

Dato il seguente problema (P) di PL:

$$\max z(x) = x_1 + 2x_2 - x_4$$

$$s.v.$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

$$2x_2 + x_3 + x_4 = 6$$

$$3x_1 - x_2 - 2x_4 = 0$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0,$$

1) verificare se gli insiemi di indici {1, 2, 3} e {1, 2, 4}possono essere insiemi di indici ammissibili di base per il problema (P) (**5 punti**);
2) in caso affermativo, determinare le corrispondenti SBA e verificare le condizioni di ottimalità. (**5 punti**).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A_{B1} = \{x_1, x_2, x_3\} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{B2} = \{x_1, x_2, x_4\} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_{B_1}^{-1} = \begin{bmatrix} -0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ -1{,}5 & 1{,}5 & 0{,}5 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

AMMISSIBILE

$$\bar{X}_{B1} = A_{B1}^{-1}\, b = \begin{bmatrix} -0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ -1{,}5 & 1{,}5 & 0{,}5 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \geq 0^T$$

$$|A_{B_2}| = 0 \rightarrow$$ Soluzione NON AMMISSIBILE

$$C_{B1}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C}^T = C^T - C_{B_1}^T A_{B1}^{-1} A =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ -1{,}5 & 1{,}5 & 0{,}5 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3,5 & 3,5 & 1,5 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} -$$

$$- \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1,5 \end{bmatrix}$$

≤ 0

MASSIMIZZAZIONE

(LA SOLUZIONE È OTTIMA)

Per trovare la soluzione ottima con $x_4 = 0$ troviamo x_1, x_2, x_3:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \\ x_3 \ 0 \end{cases}$$

Tema n. 3____**7 pt**

Dato il seguente problema di ottimizzazione (P) non lineare:

$$\min \max(5x_1 + 3x_2, x_1 + 4x_2)$$

$$s.v.$$

$$3x_1 - 6x_2 \leq 7$$

oppure

$$4x_1 - 5x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0,$$

formalizzare un problema di programmazione lineare misto equivalente a (P).
In altri termini linearizzare il min max (**3 pt**) e i vincoli alternativi (**4 pt**).

$$\min \quad K$$

$$K \geq 5x_1 + 3x_2$$

$$K \geq x_1 + 4x_2$$

$$3x_1 - 6x_2 - My \leq 7$$

$$4x_1 - 5x_2 - M(1 - y) \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$