Sommario

Problema n.1

P1 - Problem n.1

Given the discrete-time system S (A, B, C, D) described in Figure

$$\begin{cases} x_1(k+1) = -x_1(k) + x_2(k) \\ x_2(k+1) = x_1(k) + u(k) \end{cases}$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

With the reference:

$$r(k) = \begin{bmatrix} 1(k) \\ 1(k) \end{bmatrix} \qquad 1(k) = 1 \qquad \forall k \geq 0$$

Cost function:

$$V(k) = \sum_{i=H_W}^{H_P} [r(k+i) - x(k+i)]^T \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} [r(k+i) - x(k+i)]$$

$$H_P = 2 \qquad H_W = 1$$

Domanda 1

1

Compute the cost function V(k)
(5 Points)

Abbiamo:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = -x1(k) + x_2(k) \\ x_2(k+1) = x_1(k) + u(k) \end{cases}$$

Incrementando di un passo le equazioni alle differenze, si ottiene:

$$x_1(k+2) = -x_1(k+1) + x_2(k+1)$$

$$x_2(k+2) = x_1(k+1) + u(k+1)$$

Sostituendo i valori noti dell'istante k+1 si ottiene:

$$x_1(k+2) = 2x_1(k) - x_2(k) + u(k)$$

$$x_2(k+2) = -x_1(k) + x_2(k) + u(k+1)$$

Calcolo V(k)

$$V(k) = 4\big(1 - x_1(k+1)\big)^2 - 3\big(1 - x_2(k+1)\big)^2 + 4\big(1 - x_1(k+2)\big)^2 - 3\big(1 - x_2(k+2)\big)^2 = 4(1 + x1(k) - x_2(k))^2 - 3(1 - x_1(k) - u(k))^2 + 4(1 - 2x_1(k) + x_2(k) - u(k))^2 - 3(1 - x_1(k) - x_2(k) - u(k+1))^2$$

Domanda 2

2

Compute u(k)
(3 Points)

La nostra funzione di costo $V(k)$ è questa:

$$V(k) = 4(1 + x1(k) - x_2(k))^2 - 3(1 - x_1(k) - u(k))^2 + 4(1 - 2x_1(k) + x_2(k) - u(k))^2 - 3(1 - x_1(k) - x_2(k) - u(k+1))^2$$

Facciamo la derivata parziale rispetto a $u(k)$

$$\frac{\partial V(k)}{\partial u(k)} = 6\big(1 - x_1(k) - u(k)\big) - 8\big(1 - 2x_1(k) + x_2(k) - u(k)\big) = 6 - 6x_1(k) - 6u(k) - 8 + 16x_1(k) - 8x_2(k) + 8u(k) = 2u(k) + 10x_1(k) - 8x_2(k) - 2$$

Per trovare $u(k)$ poniamo $\frac{\partial V(k)}{\partial u(k)} = 0$:

$$2u(k) + 10x_1(k) - 8x_2(k) - 2 \ = 0 \Leftrightarrow u(k) = -5x_1(k) + 4x_2(k) + 1$$

Domanda 3

3

Compute u(k+1)
(3 Points)

Lo svolgimento è analogo alla domanda precedente:

$$\frac{\partial V(k)}{\partial u(k+1)} = 6\big(1 + x_1(k) - x_2(k) - u(k+1)\big) = 6 + 6x_1(k) - 6x_2(k) - 6u(k+1)$$

Per trovare $u(k+1)$ poniamo $\frac{\partial V(k)}{\partial u(k+1)} = 0$:

$$6 + 6x_1(k) - 6x_2(k) - 6u(k+1) = 0 \Leftrightarrow u(k+1) = x_1(k) - x_2(k) + 1$$

Domanda 4

4

Consider that an input term is added to the cost function seen above as follows. Compute V(k), u(k) and u(k+1)
(3 Points)

$$V(k) = \sum_{i=H_W}^{H_P} [r(k+i) - x(k+i)]^T \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} [r(k+i) - x(k+i)] + \sum_{i=0}^{H_C-1} 2[u(k+i)]^2$$

With:

$H_C = 1$

Abbiamo il nuovo termine della funzione di costo $+2u^2(k)$

Chiamo $V_1(k)$ questa nuova funzione di costo e mi calcolo i valori richiesti.

$$V_1(k) = V(k) + 2u^2(k)$$

Dove $V(k)$ è la funzione di costo del caso precedente.

Di conseguenza:

$$\frac{\partial V_1(k)}{\partial u(k)} = \frac{\partial V(k)}{\partial u(k)} + 4u(k) \Rightarrow u(k) = \frac{-5x_1(k) + 4x_2(k) + 1}{3}$$

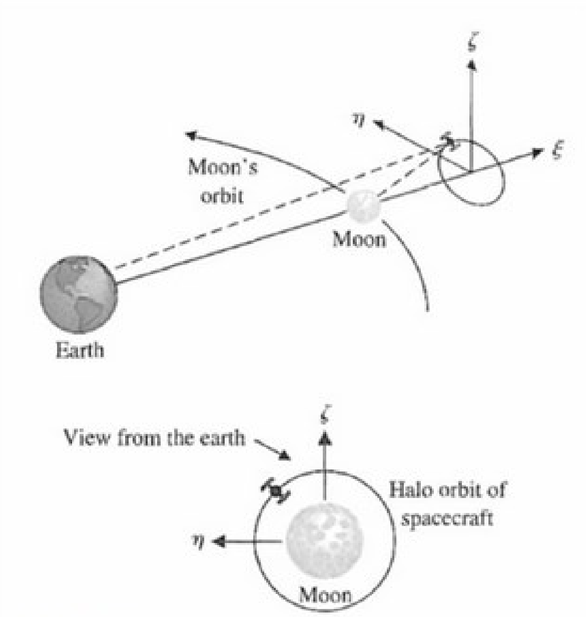
$\frac{\partial V_1(k)}{\partial u(k+1)} = \frac{\partial V(k)}{\partial u(k+1)}$

Problema n.2

P2 - Problem n. 2

Given the continous-time system described in figure:

In an effort to open up the far side of the Moon to exploration, studies have been conducted to determine the feasibility of operating a communication satellite around the translunar equilibrium point in the Earth-Sun-Moon system. The desired satellite orbit, known as a halo orbit, is shown in figure. The objective the controller is to keep the satellite on a halo orbit trajectory that can be seen from the Earth so that the lines of communication are accessible at all times. The communication link is from the Earth to the satellite and then to the far side of the Moon.



The linearized (and normalized) equations of motion of the satellite around the translunar equilibrium point are:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 7.3809 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2.1904 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3.1904 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$$

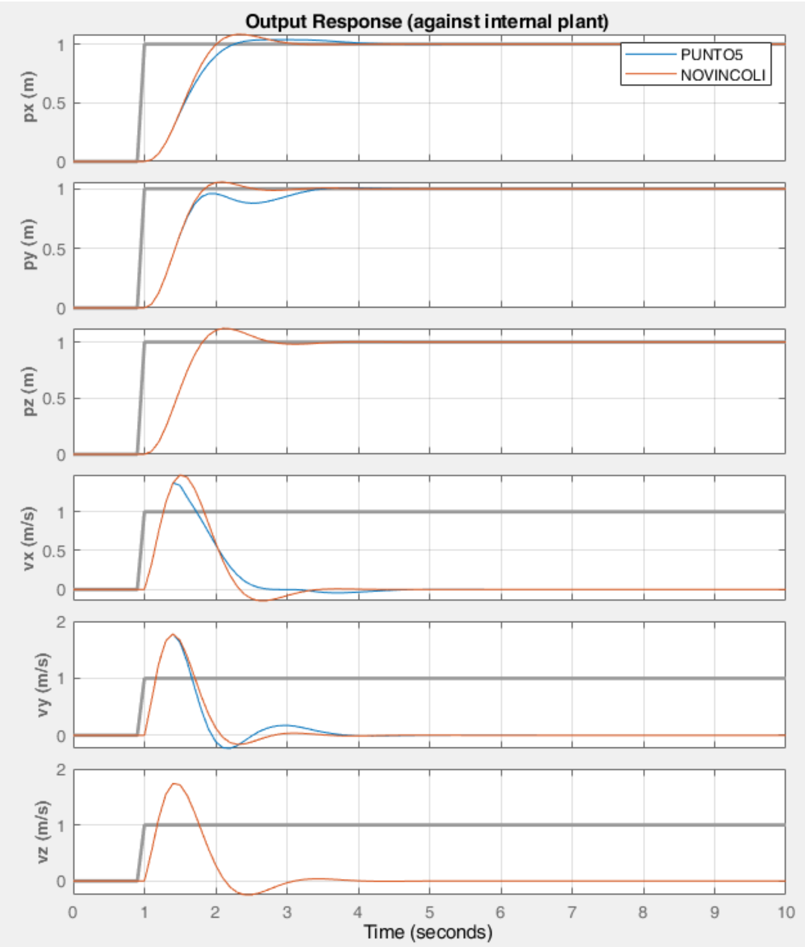
The state vector $\boldsymbol{x}$ is the satellite position and velocity, and the inputs $u_i, i = 1,2,3$, are the engine thrust accelerations in the ξ, η, and ζ directions, respectively. Consider $x_0 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$, $T_s = 0.1s$, $H_P = 10$, $H_C = 2$. Satellite positions are measured in km and their velocities are measured in km/s.

Domanda 5

5

Consider yref = [1 1 1 0 0 0]' at t=1 and consider -8 <= u1 <= 8.
Comparing the result of the simulations with and without constraints, it is easy to see the effect of the constraints on the outputs. On which outputs is there no effect due to the introduction of the constraints?
(2 Points)

Dal grafico di comparazione con e senza vincoli è semplice vedere che le uniche uscite non influenzate dal vincolo sono l'uscita 3 e l'uscita 6.

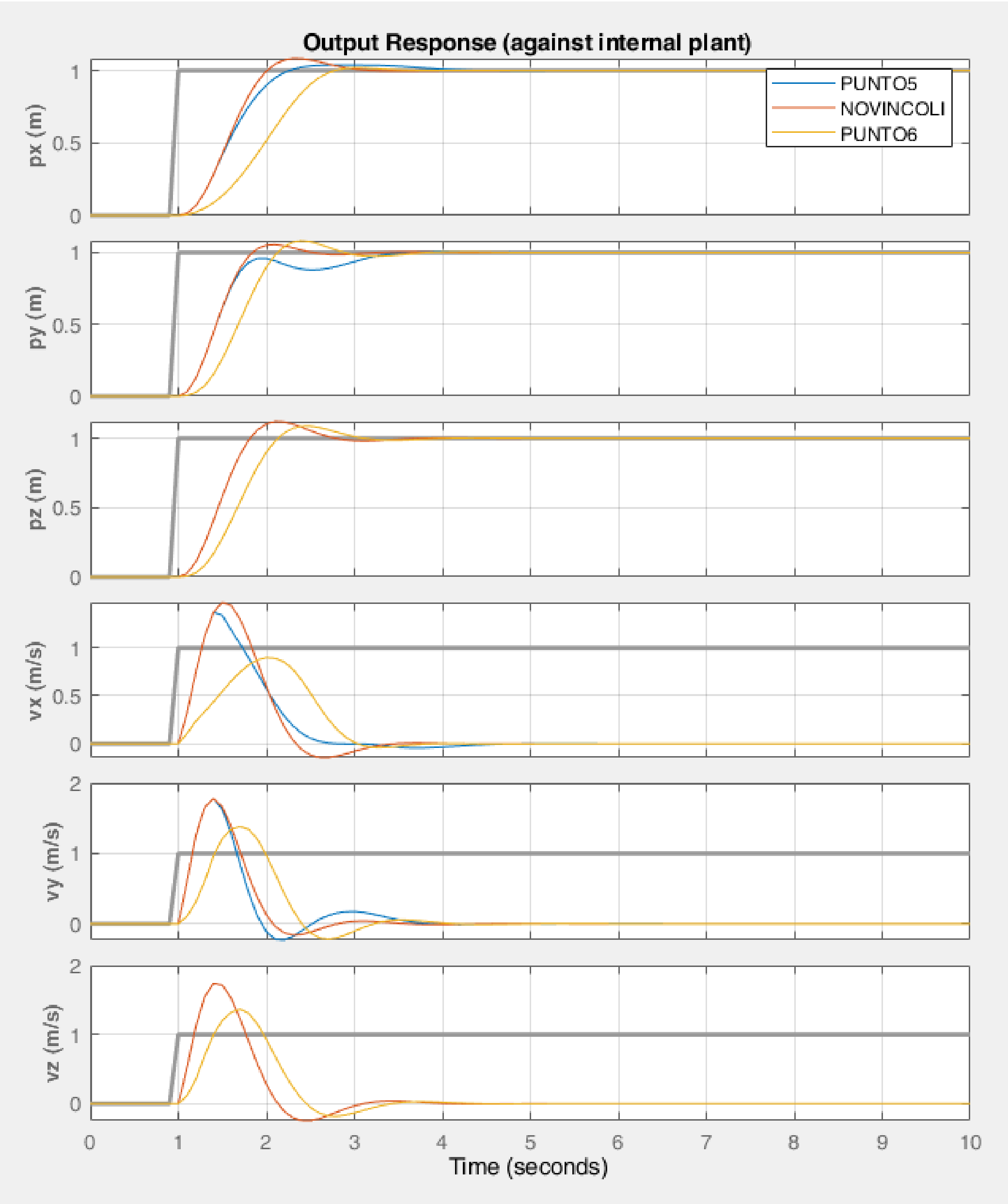


Domanda 6

6

Constrain Δu so that acceleration and deceleration are limited to 12km/s^3. Does this constraint affect the outputs? (**Remark**=*The constraint must be satisfied every prediction step*).
(3 Points)

Applico i vincoli su tutti gli ingressi ed osservo i grafici di comparazione:



Alcune delle risposte considerate corrette:

- Moltiplico il vincolo per il tempo di campionamento 12 km/s^3 * 0.1 = 1.2 km/s Tutti gli output sono influenzati dal vincolo. In particolare, si nota che il vincolo riduce le oscillazioni (sovraelongazioni e sottoelongazioni) ma aumenta leggermente il tempo di assestamento delle risposte, soprattutto di y(1) e y(4). Per y(2) e y(5) il tempo di assestamento si riduce rispetto al sistema vincolato solo su u1.

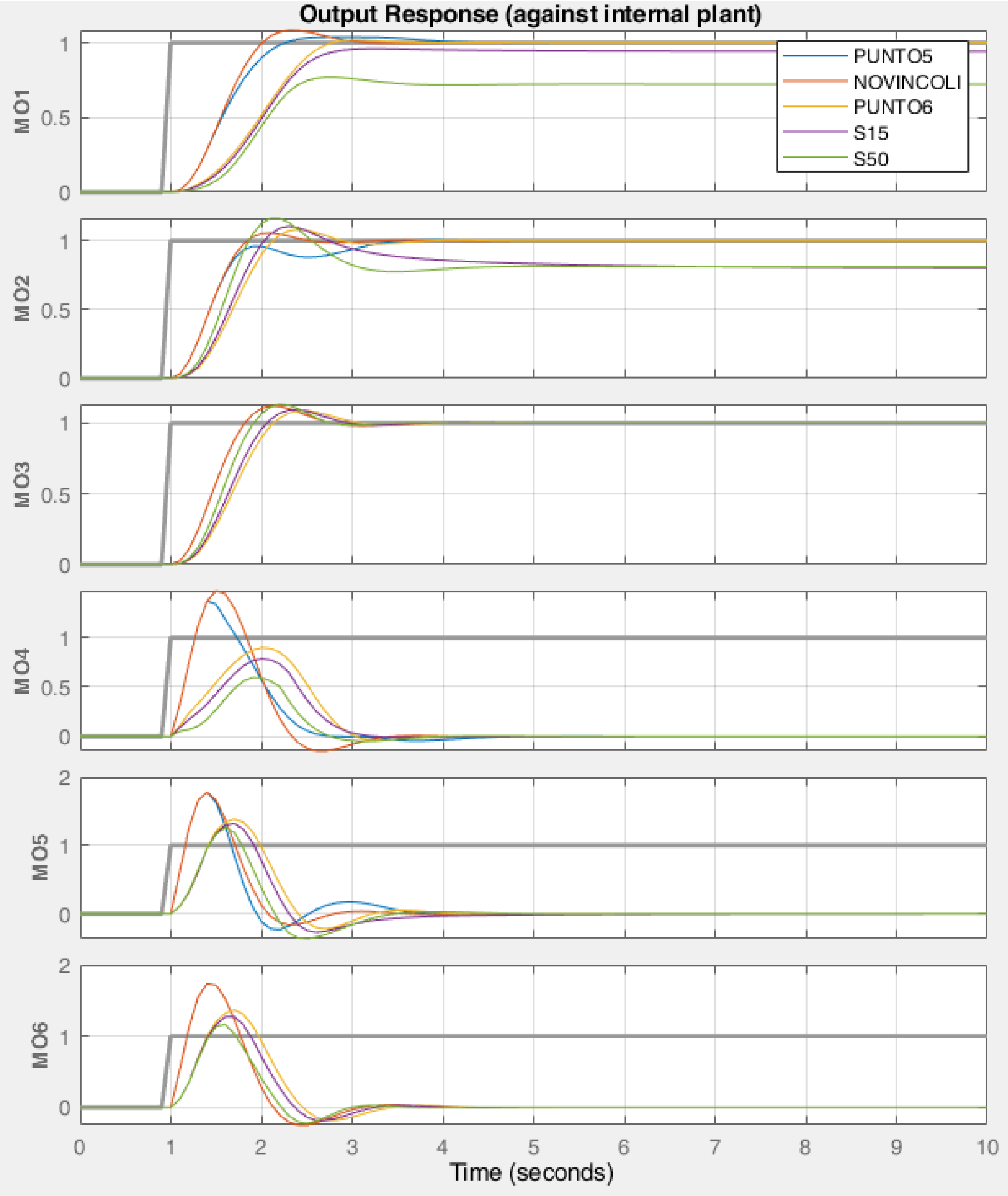
- Le risposte sono tutte peggiorate presentando un tempo di assestamento di circa 0.5 secondi in ritardo rispetto alle risposte solo con il vincolo su u1. Di contro le risposte (in particolare si nota su tutte eccetto y1) presentano un overshoot minore e specialmente le risposte y4 , y5, y6 presentano anche sottoelongazioni minori.
- Sì i vincoli portano delle modifiche sulle uscite, soprattutto su y(4), y(5) e y(6), in cui il picco iniziale risulta essere inferiore rispetto al caso senza vincoli sulla variazione dell'ingresso. Sulle uscite y(1) e y(3) i vincoli portano ad un leggero miglioramento in termini di sovraelongazione. In generale l'utilizzo dei vincoli porta ad un piccolo peggioramento delle prestazioni, con le uscite che raggiungono i riferimenti con un ritardo che risulta essere massimo sulla quarta uscita con quasi 1 secondo.
- Ho aggiunto come vincoli sui 3 input in corrispondenza di RateMin = -1.2 e RateMax = 1.2. Con l'aggiunta di questi vincoli solo la prima, terza e quarta uscita si assestano in un tempo maggiore. Inoltre le ultime tre uscite presentano dei picchi di ampiezza inferiore. La seconda uscita che prima presentava una sottoelengazione, adesso presenta una sovraelongazione.
- I nuovi vincoli rendono l'uscita y1 quasi uguale in quanto essa arriva a regime sempre a 3 secondi ma non ha un picco ed arriva a regime in maniera più soft, per quanto riguarda l'uscita y2 e y3 le peggiora in quanto ha lo stesso andamento ma arriva a regime circa un secondo dopo in entrambi i casi, per quanto riguarda l'uscita y4 la migliora perchè ha un picco più soft e arriva a regime nello stesso tempo, mentre per quanto riguarda l'uscita y5 e y6 le peggiora perchè esse arrivano a regime circa un secondo dopo avendo lo stesso andamento.

Domanda 8

7

Assume that the A matrix of the system was underestimated by 15% during modeling (A_real = 1.15*A). Analyze the behavior of the previously implemented controller applied to the new system. What can be said? How does it behave on real model tracking? Run the simulation again considering an underestimate of 50%. What can be said? How does it behave on tracking?
(5 Points)

Creo delle copie del controllore tarato nel punto precedente imposto come internal plant i sistemi sottostimati al 15% e al 50%.



Alcune delle risposte considerate corrette:

- Con il plant reale (sovrast al 15%) solo la seconda uscita presenta un errore di tracking a regime, non raggiunge il valore 1 nel tempo di simulazione di 10s mentre tutte le altre presentano quasi lo stesso andamento. Si può dire che il sistema è abbastanza robusto. Con il plant reale (sovrastimato al 50) si ha che la prima uscita presenta un errore di tracking costante a regime già da circa 2. 3 secondi mentre la seconda uscita nell'intervallo 2.3 a 4.3 si allontana di molta dall'uscita sovras al 15 mentre poi comunque ritorno a seguire il tracking del sistema al 15. Confrontando i tre plant , la seconda uscita, terza, quarta, quinta presentano delle sovraelongazioni di ampiezza inferiore mentre le ultime tre sottoelongazioni di ampiezza maggiore.

- Tutte le risposte di posizione sono peggiorate, in particolare non viene mantenuto il tracking delle prime due risposte sia per la sottostima al 15% che per quella al 50% e delle due quella al 50% presenta un tracking peggiore mentre la terza presenta un overshoot leggermente maggiore ma riesce a mantenere il tracking. Per quanto riguarda le risposte di velocità con esse viene mantenuto il tracking e si hanno anche degli overshoot minori (in particolare in y4) assestandosi anche leggermente prima.
- Nel primo caso, il controllore implementato per il sistema sottostimato è robusto e riesce a predire bene le uscite nonostante la variazione sul sistema reale tranne per quanto riguarda y(2), per cui a regime c'è un offset sull'errore di tracking.
  Nella sottostima al 50% il controllore rimane abbastanza robusto ma in questo caso anche su y(1) si ha un offset sull'errore di tracking.
  I tempi di assestamento delle risposte sono simili in tutti i casi.
- Con il plant_real(15%) gli output 1 e 2 presentano degli errori a regime se applichiamo il controller con solo i vincoli sul primo ingresso. Appena applico i vincoli sulle accelerazioni l'errore va a zero. con la matrice A sovrastimata al 50% ho un errore a regime per l'output 1 e 2 (per il y1 l'ampiezza arriva a 0.73, invece per y2 a 0.812)