Si consideri il seguente sistema in forma di stato:

$$\begin{cases} x_1(t+1) = -2x_1(t) + x_2(t) + u(t) \\ x_2(t+1) = -3x_1(t) + 2x_2(t) \\ y(t) = x_1(t) - x_2(t) \end{cases}$$

a) Si classifichi il sistema e si individui la quaterna di matrici (**F**, **G**, **H**, **L**) che lo caratterizza.

b) Utilizzando il metodo di Sylvester, si determini la matrice di transizione di stato del sistema.

c) Applicando la formula di Lagrange, si determini l'espressione del movimento forzato dell'uscita prodotto dall'applicazione di un gradino unitario a partire dal tempo $t = 0$.

d) Supponendo uno stato iniziale nullo e il gradino unitario come ingresso, si scrivano opportuni comandi MATLAB per calcolare l'uscita forzata del sistema in risposta ad un gradino unitario al passo $t = 5$ mediante il metodo iterativo.

a) Sistema é LTI, tempo discreto, finito dimensionalmente

$$F = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad L = 0$$

b) $n - 1 = 2 - 1 = 1 \rightarrow$ grado del polinomio resto, quindi:

$$r(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda$$

$$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = -1$$

$$s(\lambda) = \lambda^t$$

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

$$|\lambda I - F| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} \lambda + 2 & -1 \\ 3 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda^2 - 4 + 3 = 0$$

$$\begin{cases} s(\lambda_1) = r(\lambda_1) \\ s(\lambda_2) = r(\lambda_2) \end{cases} \quad \begin{cases} 1^t = \alpha_0 + \alpha_1 \\ (-1)^t = \alpha_0 - \alpha_1 \end{cases}$$

Sottraendo:

$$1^t - (-1)^t = \alpha_1 - (-\alpha_1) \rightarrow \alpha_1 = \frac{1^t}{2} - \frac{(-1)^t}{2}$$

Addizionando

$$1^t + (-1)^t = \alpha_0 + \alpha_0 \rightarrow \alpha_0 = \frac{1^t}{2} + \frac{(-1)^t}{2}$$

Quindi:

$$F^t = \alpha_0 I + \alpha_1 F = \begin{bmatrix} \alpha_0 - 2\alpha_1 & \alpha_1 \\ -3\alpha_1 & \alpha_0 + 2\alpha_1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{(-1)^t}{2} - 1 + (-1)^t & \frac{1}{2} - \frac{(-1)^t}{2} \\ -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}(-1)^t & \frac{1}{2} + \frac{(-1)^t}{2} + 1 - (-1)^t \end{bmatrix}$$

c)

$$x_f(t) = \sum_{i=0}^{t-1} F^{t-i-1} G\, u(i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{t-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{(-1)^{t-i-1}}{2} - 1 + (-1)^{t-i-1} & \frac{1}{2} - \frac{(-1)^{t-i-1}}{2} \\ -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}(-1)^{t-i-1} & \frac{1}{2} + \frac{(-1)^{t-i-1}}{2} + 1 - (-1)^{t-i-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

d)

```
F = [-2, 1; -3, 2];
G = [4; 0];
H = [1, -1];
L = [0];
X0 = 0;
t = 0:5;
u = one(size(t));

sys = ss(F,G,H,L,1)

lsim(sys, u, t, x0, 1);
```

Si consideri il sistema in forma di stato:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + 2x_2(k) \\ x_2(k+1) = x_1(k) + u(k) \end{cases}$$

a) Si determini con il metodo del polinomio resto la matrice di transizione di stato.

b) Sapendo che lo stato iniziale è $\boldsymbol{x_0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e che l'ingresso u(k) è nullo, si determini l'espressione del movimento del sistema.

c) Si determini lo stato raggiunto, con il movimento determinato al punto b), all'istante k=4.

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$r(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda$$

a)

$$|\lambda I - F| = 0 \rightarrow \lambda(\lambda - 1) - 2 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \rightarrow \lambda_1 = +2$$

$$\hookrightarrow \lambda_2 = -1$$

$$\begin{cases} (+2)^t = \alpha_0 + 2\alpha_1 \\ (-1)^t = \alpha_0 - \alpha_1 \end{cases}$$

Sottraendo 1° alla 2°

$$2^t - (-1)^t = 2\alpha_1 + \alpha_1$$

$$\rightarrow \alpha_1 = \frac{2^t}{3} - \frac{(-1)^t}{3}$$

Addizionando

$$2^t + (-1)^t = 2\alpha_0 + \alpha_1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \alpha_0 = \frac{2^t}{2} + \frac{(-1)^t}{2} - \frac{2^t}{6} - \frac{(-1)^t}{6} =$$

$$= 2^t \left(\frac{3-1}{6} \right) + (-1)^t \left(\frac{3-1}{6} \right) =$$

$$= \frac{2^t}{3} + \frac{(-1)^t}{3}$$

$$F^t = \alpha_0 I + \alpha_1 F = \begin{bmatrix} \alpha_0 + \alpha_1 & 2\alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\, 2^t & \frac{2}{3}\, 2^t - \frac{2}{3}(-1)^t \\ \frac{2^t}{3} - \frac{(-1)^t}{3} & \frac{2^t}{3} + \frac{(-1)^t}{3} \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_e(t) = F^{t-\tau} x(\tau) = F^t x(0) =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3}\, 2^t \\ \frac{2^t}{3} - \frac{(-1)^t}{3} \end{bmatrix}$$

c)

$$x_e(4) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\, 2^4 \\ \frac{2^4}{3} - \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Un sistema lineare tempoinvariante e tempocontinuo ha matrici $\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{H} = [1 \quad 0]$, $\boldsymbol{L} = [0]$.

a) Si determini la matrice di transizione di stato utilizzando il metodo detto di Sylvester o del polinomio resto.

b) Si indichino e si rappresentino i modi naturali del sistema, commentando opportunamente i risultati ottenuti.

c) Si rappresenti graficamente uno schema Simulink per analizzare l'uscita del sistema dato quando l'ingresso sia nullo e la condizione iniziale valga $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x_0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

a)

$$|\lambda I - F| = \begin{vmatrix} \lambda & +1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \lambda^2 = -1 \rightarrow \lambda_1 = -j$$
$$\hookrightarrow \lambda_2 = j$$

$$\begin{cases} \alpha_0 - j\alpha_1 = e^{-jt} \\ \alpha_0 + j\alpha_1 = e^{jt} \end{cases}$$

sottraendo:

$$-2j\alpha_1 = e^{-jt} - e^{jt} \rightarrow$$

$$\rightarrow \alpha_1 = \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j} = \sin(t)$$

addizionando

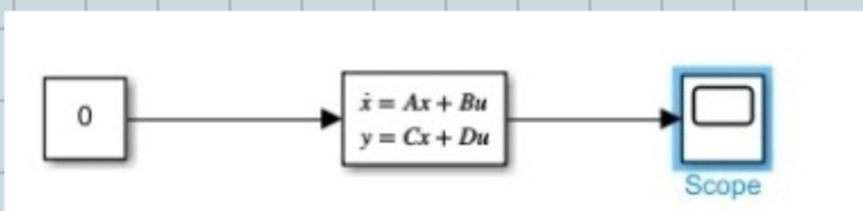
$$2\alpha_0 = e^{-jt} + e^{jt} \rightarrow \alpha_0 = \frac{e^{jt}+e^{-jt}}{2} =$$

$$= \cos(t)$$

$$e^{Ft} = \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}$$

b) Il sistema presenta dei modi naturali oscillatori (dovuti agli autovalori $\pm j$) [quindi si hanno oscillazioni continue senza smorzamento].

c)



Un sistema lineare tempo-invariante e tempo-continuo è descritto dalla terna di matrici: $\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 2\sqrt{2} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\boldsymbol{H} = [1 \quad 1]$.

a) Si determini la matrice di transizione di stato del sistema utilizzando il metodo detto di Sylvester o del polinomio resto.

b) Si scrivano i comandi MATLAB per definire il sistema e tracciarne lo stato libero nei primi 50 secondi a partire dallo stato $\boldsymbol{x_0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

a) Il grado del polinomio resto è pari a $n - 1 = 1$ $\quad 2-1$

$$r(\lambda) = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda$$

Gli autovalori di F sono:

$$|\lambda I - F| = \begin{vmatrix} \lambda & +1 \\ -4 & \lambda - 2\sqrt{2} \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda(\lambda - 2\sqrt{2}) + 4 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \lambda^2 - 2\sqrt{2}\lambda + 4 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \lambda_{1,2} = +\sqrt{2} \pm \sqrt{2-4} =$$

$$= \sqrt{2} \pm \sqrt{-2} = \sqrt{2} \pm j\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1\left(\sqrt{2} - j\sqrt{2}\right) = e^{(\sqrt{2} - j\sqrt{2})t} \\ \alpha_0 + \alpha_1\left(\sqrt{2} + j\sqrt{2}\right) = e^{(\sqrt{2} + j\sqrt{2})t} \end{cases}$$

Sottraendo:

$$-j\alpha_1\sqrt{2} - j\alpha_1\sqrt{2} = e^{(\sqrt{2} - j\sqrt{2})t} - e^{(\sqrt{2} + j\sqrt{2})t}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{e^{\sqrt{2}t} \cdot e^{-j\sqrt{2}t} - e^{\sqrt{2}t} \cdot e^{j\sqrt{2}t}}{2j}\right]$$

$$= \frac{e^{\sqrt{2}t}}{\sqrt{2}} \sin\left(\sqrt{2}\,t\right)$$

Invece addizionando:

$$2\alpha_0 + 2\alpha_1\sqrt{2} = e^{(\sqrt{2}-j\sqrt{2})t} + e^{(\sqrt{2}+j\sqrt{2})t}$$

$$\rightarrow \alpha_0 = e^{\sqrt{2}t}\cos(\sqrt{2}t) - e^{\sqrt{2}t}\sin(\sqrt{2}t)$$

$$e^{Ft} = \alpha_0(t)I + \alpha_1(t)F = \begin{bmatrix} \alpha_0 & -\alpha_1 \\ 4\alpha_1 & \alpha_0 + 2\sqrt{2}\alpha_1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} e^{\sqrt{2}t}\cos(\sqrt{2}t) - e^{\sqrt{2}t}\sin(\sqrt{2}t) & -\frac{e^{\sqrt{2}t}}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}t) \\ 4\frac{e^{\sqrt{2}t}}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}t) & e^{\sqrt{2}t}\cos(\sqrt{2}t) + e^{\sqrt{2}t}\sin(\sqrt{2}t) \end{bmatrix}$$

b)

```matlab
% Definizione delle matrici del sistema
F = [0 -1; 4 2*sqrt(2)];
G = [0; 1];
H = [1 1];
x0 = [1; 1];  % Stato iniziale

% Definizione del sistema in MATLAB
sys = ss(F, G, H, 0);

% Simulazione della risposta libera per 50 secondi
t = 0:0.1:50;  % Intervallo di tempo
[y, t, x] = initial(sys, x0, t);

% Tracciamento della risposta dello stato libero
plot(t, x);
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('Stato');
legend('x_1(t)', 'x_2(t)');
title('Risposta libera del sistema');
grid on;
```

Tema n.1 (per esame da 6 CFU e I esonero)

Si consideri il seguente sistema in forma di stato:

$$\begin{cases} x_1(t+1) = -2x_1(t) + x_2(t) + u(t) \\ x_2(t+1) = -3x_1(t) + 2x_2(t) \\ y(t) = x_1(t) - x_2(t) \end{cases}$$

a) Si classifichi il sistema e si individui la quaterna di matrici ($\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{L}$) che lo caratterizza.
b) Utilizzando il metodo di Sylvester, si determini la matrice di transizione di stato del sistema.
c) Applicando la formula di Lagrange, si determini l'espressione del movimento forzato dell'uscita prodotto dall'applicazione di un gradino unitario a partire dal tempo $t = 0$.
d) Supponendo uno stato iniziale nullo e il gradino unitario come ingresso, si scrivano opportuni comandi MATLAB per calcolare l'uscita forzata del sistema in risposta ad un gradino unitario al passo $t = 5$ mediante il metodo iterativo.

a)

La matrice di stato $(n \times n)$:

$$F = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

La matrice di ingresso $(n \times m)$:

$$G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La matrice di uscita $(p \times n)$:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$$

La matrice ingresso-uscita $(p \times m)$:

$$L = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

b)

$$|\lambda I - F| = \begin{vmatrix} \lambda + 2 & -1 \\ +3 & \lambda - 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda + 2)(\lambda - 2) - (-3) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \lambda^2 - 4 + 3 = 0 \rightarrow \lambda^2 = 1 \rightarrow$$

$$\lambda_1 = -1$$

$$\lambda_2 = 1$$

$$\begin{cases} \alpha_0 + \lambda_1 \alpha_1 = \lambda_1^t \\ \alpha_0 + \lambda_2 \alpha_2 = \lambda_2^t \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_0 - \alpha_1 = (-1)^t \\ \alpha_0 + \alpha_1 = 1^t \end{cases}$$

Sottraendo la seconda dalla prima:

$$-2\alpha_1 = (-1)^t - 1 \rightarrow \alpha_1 = \frac{1}{2} - \frac{(-1)^t}{2}$$

Addizionando invece si ottiene:

$$2\alpha_0 = (-1)^t + 1 \rightarrow \alpha_0 = \frac{1}{2} + \frac{(-1)^t}{2}$$

Quindi:

$$F^t = \alpha_0 I + \alpha_1 F =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{(-1)^t}{2} - 1 + (-1)^t & \frac{1}{2} - \frac{(-1)^t}{2} \\ -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}(-1)^t & \frac{1}{2} + \frac{(-1)^t}{2} + 1 - (-1)^t \end{bmatrix}$$

c) $U(t) = 1(t) \rightarrow U(z) = \dfrac{1}{1-z^{-1}} = \dfrac{z}{z-1}$

Risposta forzata:

$$\sum_{i=t}^{t-1} F^{t-i-1} G\, u(i) =$$

$$= \sum_{i=t}^{t-1} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}(-1)^{t-i-1} & \frac{1}{2} - \frac{(-1)^{t-i-1}}{2} \\ -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}(-1)^{t-i-1} & \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(-1)^{t-i-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} 1(t)$$

$$= \sum_{i=t}^{t-1} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}(-1)^{t-i-1} \\ -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}(-1)^{t-i-1} \end{bmatrix} 1(t)$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \sum_{i=t}^{t-1} (-1)^{t-i-1} \\ -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} \sum_{i=t}^{t-1} (-1)^{t-i-1} \end{bmatrix} 1(t)$$

d)

```
% definiamo le matrici
F = [-2, 1; -3, 2];
G = [1; 0];
H = [1, -1];
L = [0];
% tempo di simulazione ad esempio:
T = 20;
% inizializzazione dello stato e dell'ingresso
x = [0; 0];
y = zeros(1, T);
u = zeros(1, T);
% gradino unitario applicato per t>5
u(6:end) = 1;
% calcolo iterativo della risposta del sistema
for t = 1:T
    y(t) = H*x + L*u(t);
    x = F*x + G*u(t);
end
```