**Tema n. 1** **10 pt**

Un'azienda produce e rifinisce vari mobili da esterno in legno. Dopo che ogni pezzo è stato prodotto, passa al reparto di finitura, dove varie postazioni di lavoro applicano varie vernici e coloranti per produrre il prodotto finale. Ogni pezzo richiede tempo in varie combinazioni di quattro diverse workstation, con ogni pezzo che visita le workstation in ordini diversi ma specificati dalla tabella seguente (aiuto: l'ordine da rispettare deve essere vincolato). Attualmente è necessario programmare due tipi di mobili: (1) sedie e (2) tavoli. Di seguito la sequenza delle postazioni di lavoro ed i tempi di lavorazione (in minuti) necessari per ogni lavoro. Ciascuna postazione di lavoro può lavorare solo un pezzo alla volta e deve completare ciascuna lavorazione prima di iniziarne una nuova (quindi ad esempio la workstation 1 può lavorare o una sedia prima oppure un tavolo prima). Se l'azienda vuole completare entrambi i lavori il prima possibile, come dovrebbe pianificarli?

| Sedie | | Tavoli | |
|---|---|---|---|
| Workstation | Time | Workstation | Time |
| 1 | 3 | 2 | 8 |
| 2 | 10 | 3 | 6 |
| 3 | 11 | 1 | 8 |
| 4 | 7 | 4 | 5 |

1. Si formuli il problema di minimizzazione del massimo tempo di lavoro, definendo opportune variabili di decisione (**7 punti**);
2. Si risolva il problema di ottimizzazione in excel (**3 punti**).

Soluzione:

Variabili decisionali:

$t_S WS_j$ : tempo di inizio della lavorazione della Sedia sulla Workstation "j" per $j = 1,2,3,4$

$t_T WS_j$ : " " " " " del Tavolo " " " " "

$T_{MAX}$ : tempo di completamento dell'ultimo lavoro (obiettivo da minimizzare) [MAKESPAN]

$y_j$ : $\begin{cases} 0 & \text{se il Tavolo viene lavorato prima della Sedia sulla Workstation } j \\ 1 & \text{se la Sedia viene lavorata prima del Tavolo sulla Workstation } j \end{cases}$

parametri:

$P_S WS_1 = 3$

$P_S WS_2 = 10$

$P_S WS_3 = 11$

$P_S WS_4 = 7$

$P_T WS_2 = 8$

$P_T WS_3 = 6$

$P_T WS_1 = 8$

$P_T WS_4 = 5$

M : numero sufficientemente grande, Ad esempio 100. [Deve essere maggiore di qualsiasi possibile tempo di completamento di una singola operazione • della somma dei tempi di lavorazione su una singola macchina $(3+10+11+7+8+6+8+5=58)$].

funzione obiettivo: $\min T_{MAX}$

vincoli:

$t_S WS_j \geq 0$ per $j=1,2,3,4$

$t_T WS_j \geq 0$ per $j=1,2,3,4$

$T_{MAX} \geq 0$

$y_j \in \{0,1\}$ per $j=1,2,3,4$

SEDIE:

$$\begin{cases} t_S WS_2 \geq t_S WS_1 + P_S WS_1 \\ t_S WS_3 \geq t_S WS_2 + P_S WS_2 \\ t_S WS_4 \geq t_S W_3 + P_S W_3 \end{cases}$$

TAVOLI:

$$\begin{cases} t_T WS_3 \geq t_T WS_2 + P_T WS_2 \\ t_T WS_1 \geq t_T WS_3 + P_T WS_3 \\ t_T WS_4 \geq t_T WS_1 + P_T WS_1 \end{cases}$$

VINCOLI DI PRECEDENZA

WS 1:

$$\begin{cases} t_S WS_1 + P_S WS_1 \leq t_T WS_1 + M(1-y_1) \\ t_T WS_1 + P_T WS_1 \leq t_S WS_1 + M y_1 \end{cases}$$

WS 2:

$$\begin{cases} t_S WS_2 + P_S WS_2 \leq t_T WS_2 + M(1-y_2) \\ t_T WS_2 + P_T WS_2 \leq t_S WS_2 + M y_2 \end{cases}$$

WS 3:

$$\begin{cases} t_S WS_3 + P_S WS_3 \leq t_T WS_3 + M(1-y_3) \\ t_T WS_3 + P_T WS_3 \leq t_S WS_3 + M y_3 \end{cases}$$

WS 4:

$$\begin{cases} t_S WS_4 + P_S WS_4 \leq t_T WS_4 + M(1-y_4) \\ t_T WS_4 + P_T WS_4 \leq t_S WS_4 + M y_4 \end{cases}$$

MAKESPAN:

$$\begin{cases} T_{MAX} \geq t_S WS_4 + P_S WS_4 \\ T_{MAX} \geq t_T WS_4 + P_T WS_4 \end{cases}$$

VINCOLI DISGIUNTIVI (DI NON SOVRAPPOSIZIONE)

**Tema n. 2**__________________________________________________________________________________________________________**6 pt**

Dato il seguente problema di programmazione lineare intera, calcolare i primi tre step del branch and bound (**2pt per ogni step**). Partire dalla variabile $x$.

$$z(x,y) = \max \underline{8x + 7y} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{7}{8} \end{cases}$$

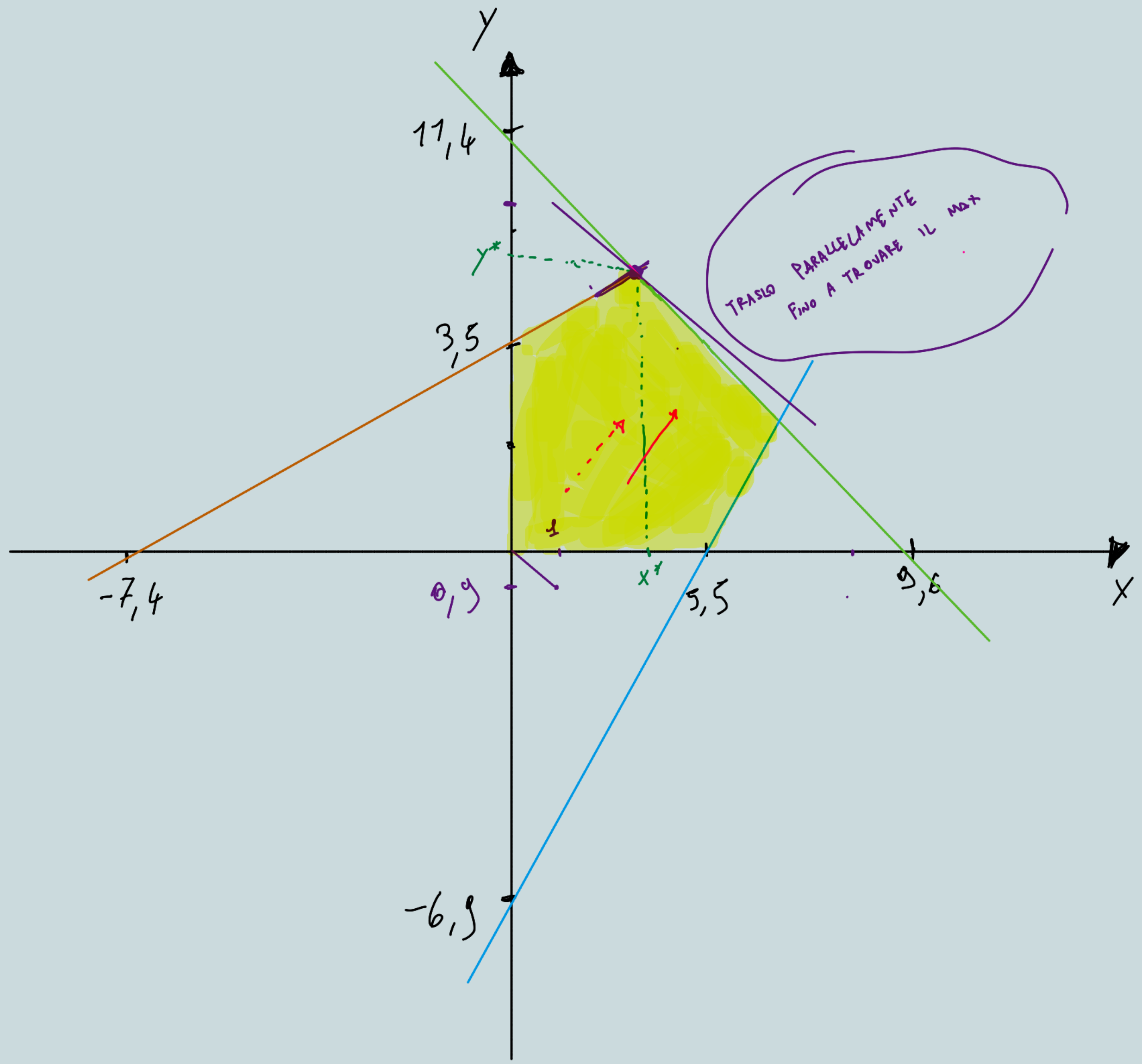
$$s.t.$$

$$-18x + 38y \leq 133$$

$$13x + 11y \leq 125$$

$$10x - 8y \leq 55$$

$$x, y \geq 0, integer$$

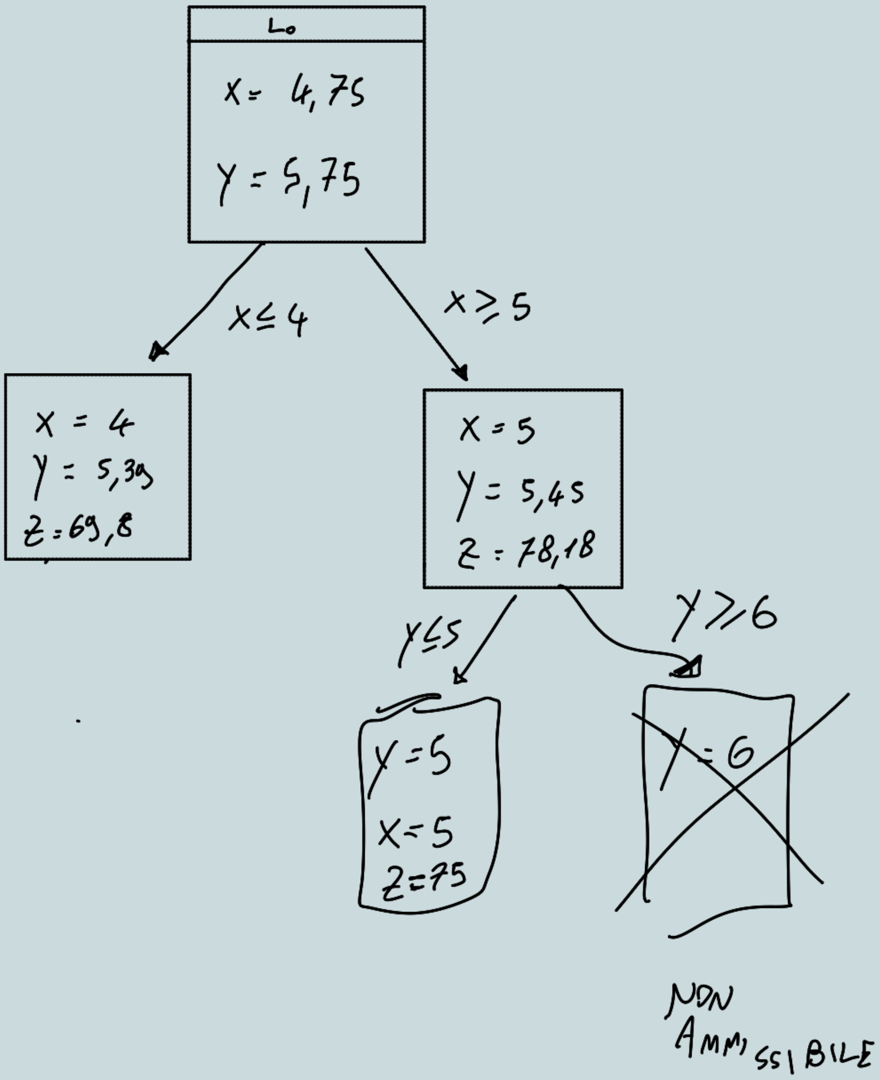


$$\left\{\begin{array}{l} -18x + 38y = 133 \\ 13x + 11y = 125 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x^* = 4,75 \\ y^* = 5,75 \end{array}\right]$$

NON INTERO

$z = 78,25$ (sostituendo)

Devo ramificare su $x$, creo due sottoproblemi:



**Tema n. 3** **12 pt**

Dato il seguente problema (P) di PL:

$$z(x) = \min x_1 + 2x_2 + 2x_3$$

$$s.t.$$

$$x_1 - 2x_2 + 2x_3 \leq 1$$

$$-2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

1. Dire se le SBA B1={2,4} e B2={2,3} sono ammissibili e/o ottime (**5 punti**).
2. Considerata la base ottima, essa rimarrà tale se il coefficiente c3=5 (**3 punti**).
3. Determinare l'intervallo dei termini noti affinchè la base ottima rimanga tale (**3 punti**). Se si va oltre tali intervalli perché la SBA non sarà più ottima? (**1 punto**)

Porto il sistema in forma standard, il primo vincolo quindi diventa:

$$x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 1$$

Con $x_4$ variabile slack. $(\geq 0)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A_{B1} = \{x_2, x_4\} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{B2} = \{x_2, x_3\} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A_{B1}^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A_{B2}^{-1} = \frac{1}{-6} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$x_{B1} = A_{B1}^{-1} b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$B_1$ é una SBA perché $x_2$ e $x_4$ sono NON NEGATIVI

$$C_{B1} = [2 \quad 0] = [c_2 \quad c_4]$$

$$y_1^T = c_{B1}^T A_{B_1}^{-1} = [2 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = [0 \quad 2]$$

Vettore dei costi e dei coefficienti delle variabili fuori base

$$C_{N_1}^T = [1 \quad 2]$$

$$A_{N1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo i costi ridotti:

$$\overline{C}_{N_1}^T = c_{N_1}^T - y_1^T A_{N1} = [1 \quad 2] - [0 \quad 2] \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = [1 \quad 2] - [-4 \quad 4]$$

$$= [5 \quad -2]$$

$\leq 0$

Soluzione NON ottima.

---

$$x_{B2} = A_{B2}^{-1} b = \begin{bmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 5/6 \end{bmatrix}$$

$\geq 0$

é ammissibile

$$C_{B2}^T = \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$y_2^T = C_{B2}^T A_{B2}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 & 4/3 \end{bmatrix}$$

$$C_{N2}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_{N_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C}_{N2}^T = C_{N2}^T - y_2^T A_{N_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1/3 & 4/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1/3 - 8/3 & -1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1/3 \end{bmatrix} \geq 0$$

$\Downarrow$

$B_2$ é OTTIMA!

Se $c_3 = 5 \rightarrow$

$$\tilde{C}_{B_2}^T = \begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{y}_2 = \tilde{C}_{B_2}^T A_{B2}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/6 & 7/3 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\bar{C}}_{N_2}^T = C_{N2}^T - \tilde{y}_2 A_{N2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/6 & 7/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/6 - 14/3 & 1/6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11/2 & -1/6 \end{bmatrix}$$

NON OTTIMA

$$A_{B_2}^{-1}\Delta b + A_{B_2}^{-1} b \geq 0$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{3}\Delta b_1 + \frac{1}{3}\Delta b_2 + 1/3 \geq 0 \\ \frac{1}{6}\Delta b_1 + \frac{1}{3}\Delta b_2 + 5/6 \geq 0 \end{cases}$$

Se $\Delta b = \begin{bmatrix} \Delta b_1 \\ 0 \end{bmatrix}$:

$$\begin{cases} -\frac{1}{3}\Delta b_1 \geq \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6}\Delta b_1 \geq \frac{5}{6} \end{cases} \begin{cases} \Delta b_1 \leq 1 \\ \Delta b_1 \geq -5 \end{cases} \rightarrow \quad -5 \leq \Delta b_1 \leq 1$$

INTERVALLO DI STABILITÁ

$$b_1 = [1-5;\ 1+1] = [-4;\ 2]$$

Se $\Delta b = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta b_2 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} \frac{1}{3}\Delta b_2 + \frac{1}{3} \geq 0 \\ \frac{1}{3}\Delta b_2 + \frac{5}{6} \geq 0 \end{cases} \begin{cases} \Delta b_2 \geq -1 \\ \Delta b_2 \geq -\frac{5}{2} \end{cases} \rightarrow \quad \Delta b_2 \geq -1$$

INTERVALLO STABILITÁ

$$b_2 = [2-1;\ +\infty] = [1;\ +\infty]$$

La SBA NON sará più ottima se si va oltre tali intervalli perché almeno una delle variabili di base diventerebbe negativa e la soluzione non sarebbe ammissibile.