Un sistema lineare tempoinvariante ha matrice di stato $\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Si determinino il polinomio caratteristico, gli autovalori del sistema e la matrice di Jordan del sistema.

b) Ipotizzando che il sistema sia tempocontinuo, si scrivano e rappresentino graficamente i modi del sistema, quindi si valuti la stabilità dello stesso.

c) Ipotizzando che il sistema sia tempodiscreto, si scrivano e rappresentino graficamente i modi del sistema, quindi si valuti la stabilità dello stesso.

d) Supponendo che lo stato iniziale sia $\boldsymbol{x_0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e che l'ingresso sia assente, si scriva un elenco di comandi MATLAB che permetta di definire il sistema e tracciarne l'evoluzione dello stato libero nei primi 50 secondi nei due casi di sistema tempocontinuo e tempodiscreto.

a)

$$|\lambda I - F| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = p(\lambda) =$$

$$= \lambda(\lambda - 2) + 1$$

Troviamo gli autovalori ponendo $p(\lambda) = 0$

$$\rightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - 1} = 1$$

con molteplicità doppia

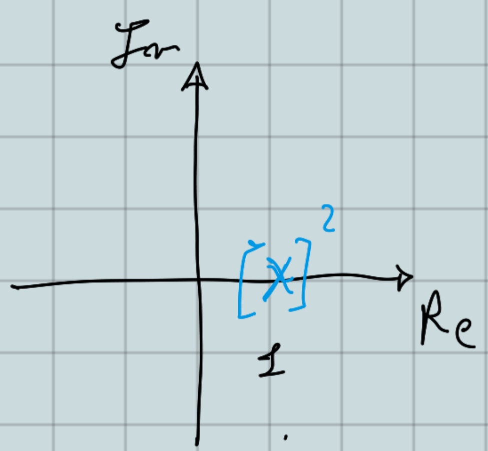
$$q_{1/2} = N(\lambda_{1/2} I - F) = n - \text{rank}(\lambda_{1/2} I - F)$$

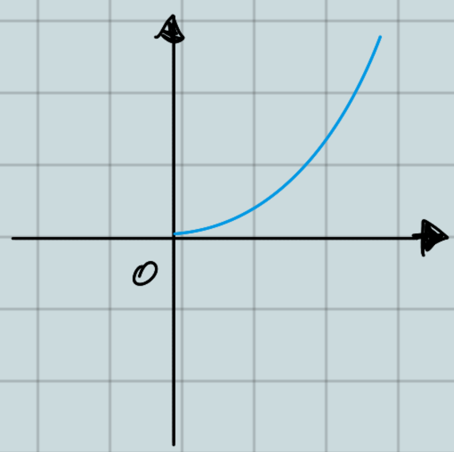
$$= 2 - \text{rank}\begin{bmatrix} 1-2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 2 - 1 = 1$$

Quindi

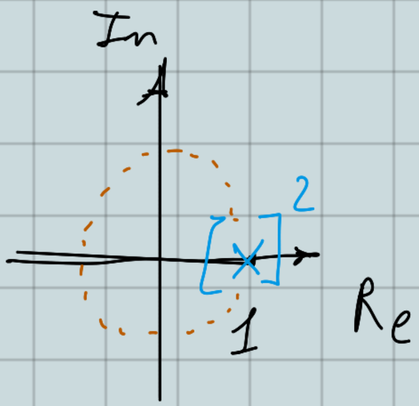
$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

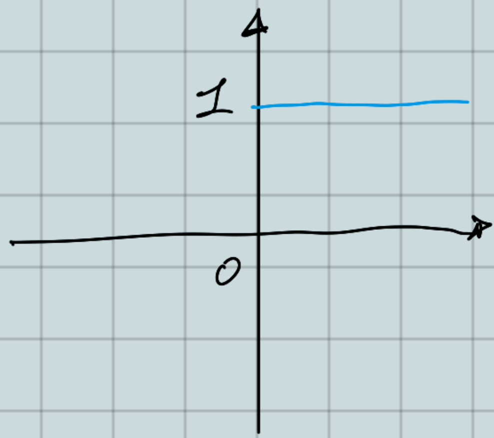
b) Se il sistema é TC allora é instabile perché $Re(\lambda_{1,2}) > 0$





c) Il sistema TD é semplicemente stabile perché $|\lambda_{1,2}| = 1$ ma $m_{1,2} = g_{1,2}$





d) Definisco le matrici: F, G, H, L

```
x0 = [1; 1];
u = 0;
sys1 = ss(F, G, H, L)      % TC
sys2 = ss(F, G, H, L, 1)   % TD
t = 0 : 50;
initial(sys1, x0, t)
initial(sys2, x0, t)
```

Un sistema a dimensioni finite, lineare e tempoinvariante in forma di stato dell'ottavo ordine presenta i seguenti autovalori, con molteplicità algebriche m e geometriche q seguenti: $\lambda_{1/2} = e^{\pm j\frac{3\pi}{4}}$, $m_{1/2} = 2$, $q_{1/2} = 1$, $\lambda_{3/4} = \frac{1}{2}e^{\pm j\frac{\pi}{2}}$, $m_{3/4} = 2$, $q_{3/4} = 2$.

a) Si determini il polinomio caratteristico del sistema.

b) Si determini la forma di Jordan della matrice di stato.

c) Si discutano le caratteristiche di stabilità del sistema in caso di sistema tempocontinuo.

d) Si discutano le caratteristiche di stabilità del sistema in caso di sistema tempodiscreto.

$$\lambda_{1,2} = e^{\pm j\frac{3}{4}\pi} = \cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) \pm j \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \pm j\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\lambda_{3,4} = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \pm j \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = \pm j\,0,5$$

a)

$$p(\lambda) = \left(\lambda + \frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \left(\lambda + \frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot$$

$$\cdot \left(\lambda - j\frac{1}{2}\right)^2 \left(\lambda + j\frac{1}{2}\right)^2$$

b)

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix}$$

c) Sistema TC semplicemente stabile perché $\mathcal{R}(\lambda_{3,4}) = 0$ ma $m_{3,4} = q_{3,4}$

d) Sistema TD é instabile perché $|\lambda_{1,2}| = 1$ ma $m_{1,2} \neq q_{1,2}$

Un sistema lineare tempoinvariante ha matrice di stato $\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Si determinino il polinomio caratteristico, gli autovalori del sistema e la matrice di Jordan del sistema.
b) Ipotizzando che il sistema sia tempocontinuo, si scrivano e rappresentino graficamente tutti i modi del sistema, quindi si valuti la stabilità dello stesso.
c) Ipotizzando che il sistema sia tempodiscreto, si scrivano e rappresentino graficamente tutti i modi del sistema, quindi si valuti la stabilità dello stesso.

a)

$$p(\lambda) = |\lambda I - F| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda(\lambda-2)(\lambda-1) - [-(\lambda-1)] =$$

$$= \lambda(\lambda^2-3\lambda+2) + \lambda - 1 =$$

$$= \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda + \lambda - 1 = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1$$

$$\rightarrow \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0 \rightarrow \lambda_{1,2,3} = 1$$

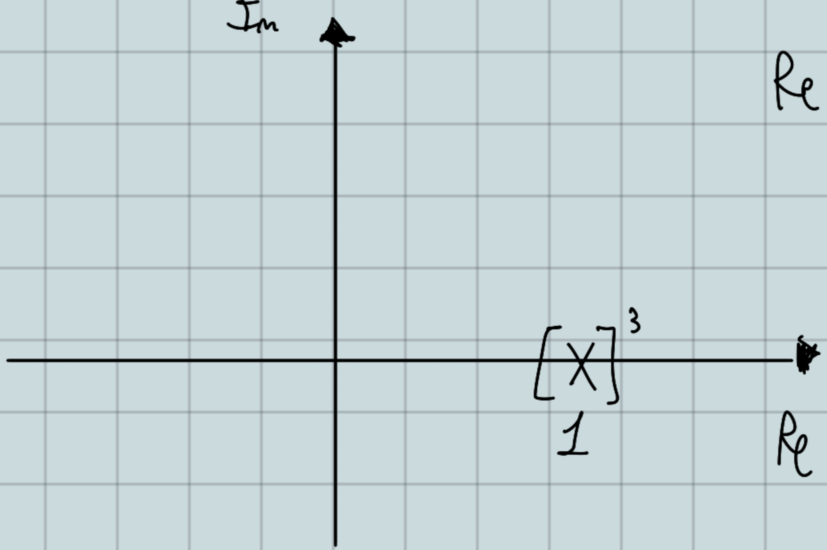
$$m_{1,2,3} = 3$$

$$q_{1,2,3} = \text{Kernel}\left(\left|\lambda_{1,2,3} I - F\right|\right) = n - \text{rango}\left|\lambda_{1,2,3} I - F\right| =$$

$$= 3 - \text{rank}\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3 - 1 = 2$$

$$J = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

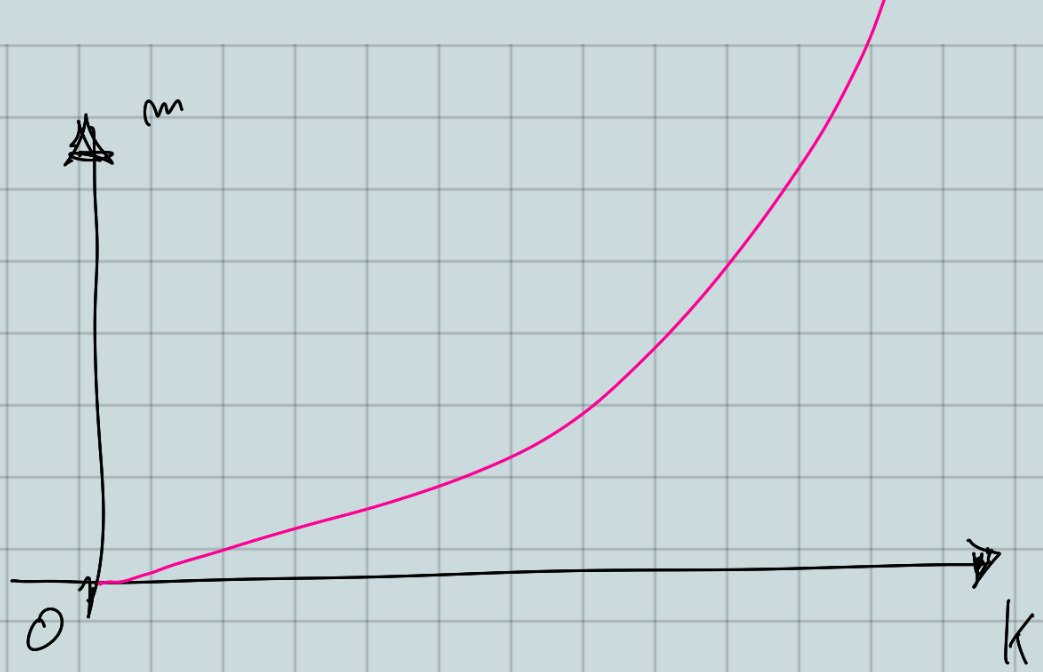
b)



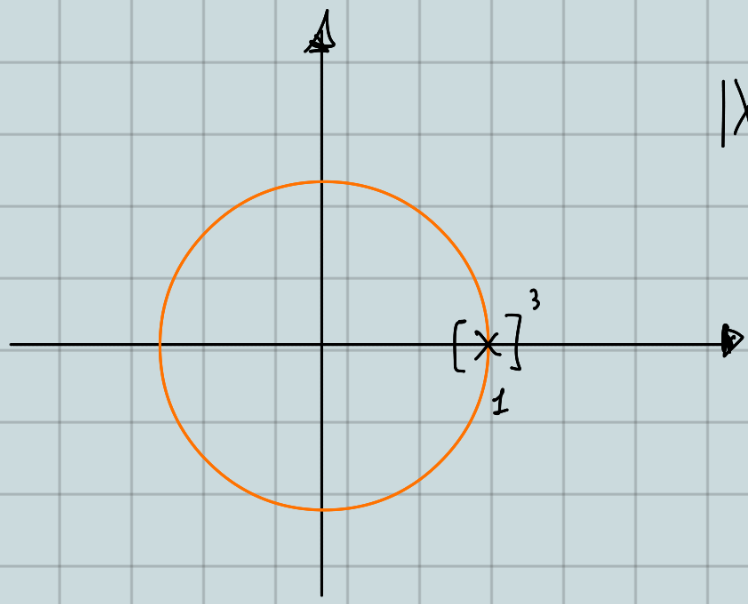
$Re(\lambda_{1,2,3}) > 0$

<u>instabile</u>

modi



c)



$|\lambda_{1,2,3}| = 1$ ma

$m_{1,2,3} \neq g_{1,2,3}$

$\downarrow$

INSTABILE

modi: