Esercizio 1

Quattro insegnanti "a, b, c, d" devono tenere complessivamente 10 lezioni.

Ogni lezione puó essere tenuta solo da 1 insegnante. Delle lezioni si conosce l'inizio:

- $S_1 = 7$
- $S_2 = 8$
- $S_3 = 9$
- $S_4 = 10$
- $S_5 = 11$
- $S_6 = 12$
- $S_7 = 13$
- $S_8 = 14$
- $S_9 = 15$
- $S_{10} = 16$

La durata di ogni lezione é 2h. Nessun insegnante puó tenere due lezioni sovrapposte o consecutive

Rappresentare il problema come CSP.

Variabili: $X = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8, S_9, S_{10}\}$

Domini: $D_i = \{a, b, c, d\} \quad \forall i \in \{1, \dots, 10\}$

Vincoli:

- NO DUE LEZIONI SOVRAPPOSTE: $S_i \neq S_{i+1} \quad \forall i = \{1, \dots, 9\}$
- NO DUE LEZIONI CONSECUTIVE: $S_i \neq S_{i+2} \quad \forall i = \{1, \dots, 8\}$

Soluzione (Forward Checking):

Assegnando $S_1 = a \rightarrow D_2 = \{b, c, d\}$; $D_3 = \{b, c, d\}$; gli altri domini rimangono invariati

Assegnando $S_2 = b \rightarrow D_3 = \{c, d\}$; $D_4 = \{a, c, d\}$; " " " " "

Assegnamo $S_3 = c \rightarrow D_4 = \{a, d\}$; $D_5 = \{a, b, d\}$; " " " " "

Assegnamo $S_4 = a \rightarrow D_5 = \{b, d\}$; $D_6 = \{b, c, d\}$

Assegnamo $S_5 = b \rightarrow D_6 = \{c, d\}$; $D_7 = \{a, c, d\}$

" $S_6 = c \rightarrow D_7 = \{a, d\}$; $D_8 = \{a, b, d\}$

" $S_7 = a \rightarrow D_8 = \{b, d\}$; $D_9 = \{b, c, d\}$

" $S_8 = b \rightarrow D_9 = \{c, d\}$; $D_{10} = \{a, c, d\}$

" $S_9 = c \rightarrow D_{10} = \{a, d\} \rightarrow S_{10} = a$.

Esercizio 2

Tradurre le seguenti frasi in logica del primo ordine:

- Esiste un insegnante che ha tutti gli studenti di Intelligenza Artificiale
- Per tutti gli studenti di intelligenza artificiale esiste un numero di matricola
- Ogni studente che ha un numero di matricola é iscritto all'uni e viceversa

Tradurre la seguente query in logica dei predicati e verificare se é soddisfatta.

Q: Esiste un insegnante che ha tutti studenti iscritti all'uni?

La KB:

- $\exists x\ \forall y\ \ INSEGNANTE(x) \wedge STUDIA(y, AI) \wedge INSEGNA(x, y) \wedge STUDENTE(y)$
- $\forall y\ \ STUDIA(y, AI) \rightarrow IMMATRICOLATO(y)$
- $\forall y\ \ (STUDENTE(y) \wedge IMMATRICOLATO(y)) \leftrightarrow ISCRITTOUNI(y)$

Query:

- $\exists x\ \forall y\ \ INSEGNANTE(x) \wedge INSEGNA(x, y) \wedge ISCRITTOUNI(y)$

Bisogna dimostrare che $KB \models Q$

Dimostreremo, quindi, che $KB \wedge \neg Q$ é insoddisfacibile; convertendo tutte le formule in CNF ed applicare la regola di risoluzione fino a derivare la clausola vuota.

Effettuiamo la SKOLEMIZZAZIONE (rimuoviamo il quantificatore esistenziale "$\exists x$" ed introduciamo una costante "C").

Possiamo poi eliminare il quantificatore universale "$\forall y$" ottenendo 4 clausole distinte: [per la KB1]

- $INSEGANTE(C)$
- $STUDIA(y, AI)$
- $INSEGNA(C, y)$
- $STUDENTE(y)$

Eliminiamo l'implicazione e poi il quantificatore universale: [per la KB2]

- $\neg(STUDIA(y, AI)) \vee IMMATRICOLATO(y)$

Eliminazione della doppia implicazione: [per KB3]

- $\forall y\ (STUDENTE(y) \wedge IMMATRICOLATO(y)) \rightarrow ISCRITTOUNI(y)$
- $\forall y\ \ ISCRITTOUNI(y) \rightarrow (STUDENTE(y) \wedge IMMATRICOLATO(y))$

Eliminazione implicazione:

- $\forall y\ \ \neg(STUDENTE(y) \wedge IMMATRICOLATO(y)) \vee ISCRITTOUNI(y)$
- $\forall y\ \ \neg ISCRITTOUNI(y) \vee (STUDENTE(y) \wedge IMMATRICOLATO(y))$

Applicazione di De Morgan:

- $\forall y (\neg STUDENTE(y) \lor \neg IMMATRICOLATO(y)) \lor ISCRITTOUNI(y)$
- $\forall y\ \neg ISCRITTOUNI(y) \lor (STUDENTE(y) \land IMMATRICOLATO(y))$

Rimuovendo il quantificatore universale e applicando la proprietà distributiva di $\lor$ su $\land$:

- $\neg STUDENTE(y) \lor \neg IMMATRICOLATO(y) \lor ISCRITTOUNI(y)$
- $(\neg ISCRITTOUNI(y) \lor STUDENTE(y)) \land (\neg ISCRITTOUNI(y) \lor IMMATRICOLATO(y))$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet\ \neg ISCRITTOUNI(y) \lor STUDENTE(y) \\ \bullet\ \neg ISCRITTOUNI(y) \lor IMMATRICOLATO(y) \end{array} \right\}$$

Negazione della Query:

$\neg \exists x\ \forall y\quad INSEGNANTE(x) \land INSEGNA(x, y) \land ISCRITTOUNI(y)$

Spostamento della negazione all'interno:

$\forall x\ \neg(\forall y\quad INSEGNANTE(x) \land INSEGNA(x,y) \land ISCRITTOUNI(y))$

$\forall x\ \exists y\ \neg(INSEGNANTE(x) \land INSEGNA(x,y) \land ISCRITTOUNI(y))$

$\forall x\ \exists y\ \neg INSEGNANTE(x) \lor \neg INSEGNA(x,y) \lor \neg ISCRITTOUNI(y)$

SKOLEMIZZAZIONE ed eliminazione del quantificatore universale:

- $\neg INSEGNANTE(x) \lor \neg INSEGNA(x, F(x)) \lor \neg INSCRITTOUNI(F(x))$

Clausole ottenute:

1. $INSEGNANTE(C)$
2. $STUDIA(y, AI)$
3. $INSEGNA(C, y)$
4. $STUDENTE(y)$
5. $\neg STUDIA(y, AI) \lor IMMATRICOLATO(y)$
6. $\neg STUDENTE(y) \lor \neg IMMATRICOLATO(y) \lor ISCRITTOUNI(y)$
7. $STUDENTE(y) \lor \neg ISCRITTOUNI(y)$
8. $IMMATRICOLATO(y) \lor \neg ISCRITTOUNI(y)$
9. $\neg Q$: $\neg INSEGNANTE(x) \lor \neg INSEGNA(x, F(x)) \lor \neg ISCRITTOUNI(F(x))$

Risolvendo 1 con 9 applicando l'unificazione $\theta = \{x/C\}$:

10. $\neg$ INSEGNA $(C, F(C))$ $\vee$ $\neg$ ISCRITTOUNI $(F(C))$

Risolvendo 3 e 10 con la sostituzione $\theta = \{y/F(C)\}$:

11. $\neg$ ISCRITTOUNI $(F(C))$

Non abbiamo ancora raggiunto la clausola vuota ...

Risolvendo 2 con 5 ; $\theta = \{y/y\}$:

12. IMMATRICOLATO (y)

Risolvendo 12 con 6 ; $\theta = \{y/y\}$:

13. $\neg$ STUDENTE(y) $\vee$ ISRITTOUNI (y)

Risolvendo 4 con 13 ; $\theta = \{y/y\}$:

14. ISCRITTOUNI (y)

Risolvendo la 14 con la 11 ; $\theta = \{y/F(C)\}$:

$\varnothing$ → clausola vuota. → La query é soddisfatta!

Esercizio 3

Trasformare in clausole le seguenti frasi logiche e dimostrare tramite Tableau la query proposta:

- Un animale che mangia un animale è carnivoro.
- Per ogni coniglio, esiste un animale che se lo mangia
- I conigli sono animali
- Esiste almeno un coniglio:

Q: esiste un animale carnivoro?

Scriviamo le frasi in FOL:

1. $\forall x, y \quad ANIMALE(x) \land MANGIA(x, y) \land ANIMALE(y) \Rightarrow CARNIVORO(x)$
2. $\forall x \; \exists y \quad CONIGLIO(x) \land ANIMALE(y) \land MANGIA(y, x)$
3. $\forall x \quad CONIGLIO(x) \Rightarrow ANIMALE(x)$
4. $\exists x \quad CONIGLIO(x)$

Q $\exists x \quad ANIMALE(x) \land CARNIVORO(x)$

¬Q $\forall x \quad (\neg ANIMALE(x) \lor \neg CARNIVORO(x))$

Applicazione della regola "δ" a 4: $CONIGLIO(c_1)$

Applicazione regola "γ" a 3: $\neg CONIGLIO(c_1) \lor ANIMALE(c_1)$

Applicazione della regola "β" all'ultimo risultato:

R1: $\neg CONIGLIO(c_1)$

R2: $ANIMALE(c_1)$

ANALISI R1: Dal passo 1 abbiamo ricavato $CONIGLIO(c_1)$ ed ora $\neg CONIGLIO(c_1)$; questo ramo allora si chiude (clash).

ANALISI R2: QUESTO RAMO RIMANE APERTO.

Applichiamo "γ" a 2: $\neg CONIGLIO(c_1) \lor \exists y \; (ANIMALE(y) \land MANGIA(y, c_1))$

Applicando "β" a questo otteniamo due sub-rami:

R2.1: $\neg CONIGLIO(c_1)$ → clash (questo ramo si chiude).

R2.2: $\exists y \; (ANIMALE(y) \land MANGIA(y, c_1))$

Applichiamo "δ" ad R2.2: $ANIMALE(c_2) \land MANGIA(c_2, c_1)$

Applichiamo "α":

- $ANIMALE(c_2)$
- $MANGIA(c_2, c_1)$

Applicazione di "γ" a (1) : $\neg$ ANIMALE (c_2) $\vee$ $\neg$ ANIMALE (c_1) $\vee$ $\neg$ MANGIA (c_2, c_1) $\vee$ CARNIVORO (c_2)

Applicando "β" a quest'ultimo:

R2.2.1 : $\neg$ ANIMALE (c_2) → clash

R2.2.2 : $\neg$ ANIMALE (c_1) → clash

R2.2.3 : $\neg$ MANGIA (c_2, c_1) → clash

R2.2.4 : CARNIVORO (c_2)

Applicazione di "γ" a ($\neg Q$) : $\neg$ ANIMALE (c_2) $\vee$ $\neg$ CARNIVORO (c_2)

Applicandogli "β":

R 2.2.4.1 $\neg$ ANIMALE (c_2) → clash

R 2.2.4.2 $\neg$ CARNIVORO (c_2) → SI CHIUDE (clash)

Tutti i rami del tableau si sono chiusi → $KB \wedge \neg Q$ é insoddisfacibile → $KB \models Q$!

Esercizio 4:

- Esiste un drago affamato
- Il drago o dorme o caccia, NON può fare entrambe le cose
- Se il drago ha fame NON può dormire
- Se il drago è stanco NON può cacciare

Dimostrare se il drago fa qualcosa.

Traduzione in FOL:

① $\exists x \ DRAGO(x) \land AFFAMATO(x)$

② $\forall x \ (DRAGO(x) \Rightarrow (DORME(x) \land \neg CACCIA(x)) \lor (\neg DORME(x) \land CACCIA(x)))$

③ $\forall x \ ((DRAGO(x) \land AFFAMATO(x)) \Rightarrow \neg DORME(x))$

④ $\forall x \ ((DRAGO(x) \land STANCO(x)) \Rightarrow \neg CACCIA(x))$

Ⓠ $\forall x \ (DRAGO(x) \Rightarrow (DORME(x) \lor CACCIA(x)))$

Trasformazione CNF:

1: • $DRAGO(C)$ $\boxed{1}$

• $AFFAMATO(C)$ $\boxed{2}$

2: • $\neg DRAGO(x) \lor DORME(x) \lor CACCIA(x)$ $\boxed{3}$

• $\neg DRAGO(x) \lor \neg DORME(x) \lor \neg CACCIA(x)$ $\boxed{4}$

3: • $\neg DRAGO(x) \lor \neg AFFAMATO(x) \lor \neg DORME(x)$ $\boxed{5}$

4: • $\neg DRAGO(x) \lor \neg STANCO(x) \lor \neg CACCIA(x)$ $\boxed{6}$

$\neg Q$: $\neg(\forall x \ (DRAGO(x) \Rightarrow (DORME(x) \lor CACCIA(x))))$

$\exists x \ \neg(DRAGO(x) \Rightarrow (DORME(x) \lor CACCIA(x)))$

$\exists x \ \neg(\neg DRAGO(x) \lor DORME(x) \lor CACCIA(x))$

$DRAGO(SK) \land \neg DORME(SK) \lor \neg CACCIA(SK)$

• $DRAGO(SK)$ $\boxed{7}$

• $\neg DORME(SK)$ $\boxed{8}$

• $\neg CACCIA(SK)$ $\boxed{9}$

Risoluzione: per dimostrare che $KB \models Q$, dimostriamo che $KB \land \neg Q$ è insoddisfacibile

7 con 3, sostituzione $\theta\{x/sx\}$:

$Dorme(SK) \lor caccia(SK)$ $\boxed{10}$

10 con 8, $\theta\{SK/SK\}$:

CACCIA(SK) $\boxed{11}$

11 con 9, $\theta\{SK/SK\}$:

$\emptyset$ (empty set) → l'affermazione $KB \models Q$ é vera!

Dimostrazione tramite Analytic Tableaux:

Partiamo dalle formule FOL.

Applichiamo "δ" ad (1):

- DRAGO(C)
- AFFAMATO(C)

Regola "δ" a ($\neg Q$):

- DRAGO(SK)
- $\neg$ DORME(SK)
- $\neg$ CACCIA(SK)

Regola "γ" a (2) con X/SK:

- $\neg$ DRAGO(SK) $\vee$ ((DORME(SK) $\wedge$ $\neg$ CACCIA(SK)) $\vee$ ($\neg$ DORME(SK) $\wedge$ CACCIA(SK)))

Applico la regola "β" a quest'ultima:

R1: $\neg$ DRAGO(SK) → CLASH! (contraddizione, il ramo si chiude).

R2: (DORME(SK) $\wedge$ $\neg$ CACCIA(SK)) $\vee$ ($\neg$ DORME(SK) $\wedge$ CACCIA(SK))

Formula "β" su (R2):

R2.1 DORME(SK) $\wedge$ $\neg$ CACCIA(SK)

R2.2 $\neg$ DORME(SK) $\wedge$ CACCIA(SK)

Applicando le regole "α":

R2.1:
- DORME(SK)
- $\neg$ CACCIA(SK)

R2.2:
- $\neg$ DORME(SK)
- CACCIA(SK)

Entrambi i rami si chiudono, l'insieme delle formule iniziali é insoddisfacibile.

La query "ogni drago o dorme o caccia" é logicamente implicata dalla KB.