Si consideri una sospensione meccanica composta da una massa $M = 1$ [kg] sollecitata da una forza esterna $u(t) = f(t)$ [N] a partire dall'istante $t = 0$ e connessa a un elemento fisso con una molla di costante elastica $K = 1$ [N·m^{-1}] e uno smorzatore avente coefficiente di attrito viscoso $B = 2$ [N·s·m^{-1}]. L'uscita del sistema sia la posizione della massa.

a) Si scriva il sistema in forma di stato e si individui la quaterna di matrici (***F***, ***G***, ***H***, ***L***) che lo caratterizza. Si determini quindi la matrice di trasferimento del sistema.

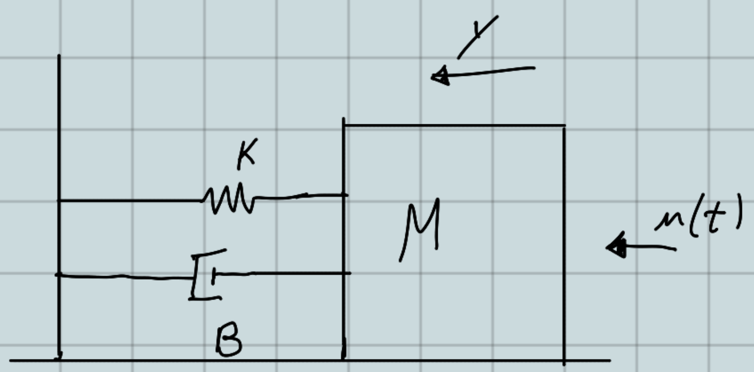
b) Utilizzando la matrice di trasferimento, si calcoli l'andamento nel tempo dell'uscita forzata ottenuta in risposta alla forza in ingresso data da un gradino di 1N $u(t) = 1(t)$.

c) Supponendo un ingresso pari a un gradino costante di 1N, si scriva un elenco di comandi MATLAB che permetta di definire il sistema e tracciarne l'evoluzione dell'uscita forzata nei primi 50 secondi.

a)

$M = 1$ [kg] $\quad K = 1$ [N·m^{-1}] $\quad B = 2$ [N·s·m^{-1}]

$u(t) = f(t)$ [N]



$x_1(t)$: posizione della massa

$x_2(t) = \dot{x}_1(t)$: velocità della massa

All'equilibrio si ha:

$$u(t) = M\dot{x}_2(t) + Bx_2(t) + Kx_1(t) \rightarrow \dot{x}_2(t) = -\frac{K}{M}x_1(t) - \frac{B}{M}x_2(t) + \frac{u(t)}{M}$$

Sostituendo con i dati che abbiamo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) - 2x_2(t) + u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad L = 0$$

$$W(s) = H\,(sI - F)^{-1}\,G + L =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{\mathrm{Adj}\begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s+2 \end{bmatrix}^{T}}{s^2+2s+1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 =$$

$$= \frac{1}{(s+1)^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(s+1)^2} \begin{bmatrix} s+2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+1)^2}$$

b) $u(t) = 1 \rightarrow U(s) = \frac{1}{s}$

$$Y_e(t) = W(s) \cdot U(s) = \frac{1}{s(s+1)^2}$$

Antitrasformiamo :

$$\frac{A}{s} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{s+1} =$$

$$= \frac{As^2 + 2As + A + Bs + Cs^2 + Cs}{s(s+1)^2}$$

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ 2A + B + C = 0 \\ A = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} C = -1 \\ 2 + B - 1 = 0 \\ A = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} C = -1 \\ B = -1 \\ A = 1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{s} - \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{s+1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} 1 - te^{-t} - e^{-t}$$

c)

```
F=[0,1;-1,-2];
G=[0;1]
H=[1,0];
L=[0];
x0=0;
t=0:0,1:50;
u=ones(size(t));
sys=ss(F,G,H,L);
lsim(sys,u,t,x0);
```

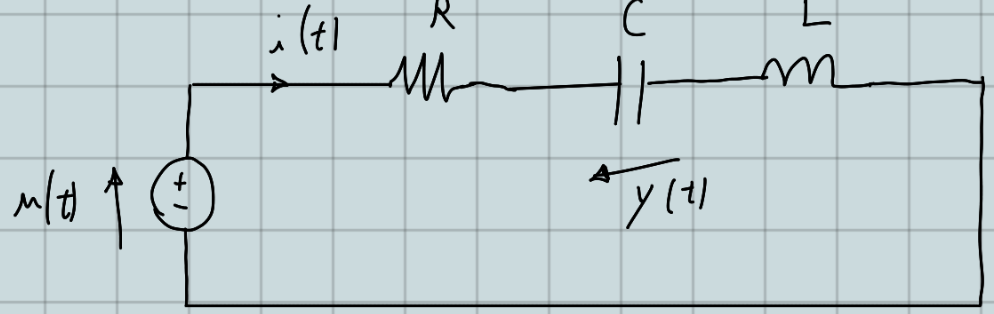
Si consideri la serie di un resistore di resistenza $R = 1$ [Ω], un condensatore di capacità $C = 2$ [F] e un induttore di induttanza $L = 1$ [H]. La serie sia alimentata da un generatore di tensione $u(t) = v_S(t)$ [V] a partire dall'istante $t = 0$. L'uscita del sistema (cioè, del circuito RLC serie) sia la tensione ai capi del condensatore.

a) Si scriva il sistema in forma di stato e si individui la quaterna di matrici ($\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{L}$) che lo caratterizza.

b) Si determini la matrice di transizione di stato utilizzando il metodo detto di Sylvester o del polinomio resto.

c) Si indichino e si rappresentino i modi naturali del sistema, commentando opportunamente i risultati ottenuti.

a)



$R = 1\ \Omega$

$C = 2\ F$

$L = 1\ H$

$$x_1(t) = q(t)$$

$$x_2(t) = \dot{x}_1(t) = i(t)$$

$$y(t) = \frac{1}{C}\, q(t)$$

Per la legge di Kirchoff:

$$R\, i(t) + \frac{1}{C} q(t) + L \frac{d\, i(t)}{dt} = u(t) \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{d\, i(t)}{dt} = \frac{u(t)}{L} - \frac{R}{L} i(t) - \frac{q(t)}{LC}$$

Sostituiamo i dati del problema e

Quindi:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{1}{2}x_1(t) - x_2(t) + u(t) \\ y(t) = \frac{1}{2}x_1(t) \end{cases}$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/2 & -1 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \end{bmatrix} \quad L = 0$$

b)

$$r(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda$$

$$S(\lambda) = e^{\lambda t}$$

$$|\lambda I - F| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1/2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda^2 + \lambda + \frac{1}{2} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \lambda_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{-1}{4}} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} S(\lambda_1) = r(\lambda_1) \\ S(\lambda_2) = r(\lambda_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^{\left(-\frac{1}{2}+j\frac{1}{2}\right)t} = \alpha_0 + \alpha_1\left(-\frac{1}{2}+j\frac{1}{2}\right) \\ e^{\left(-\frac{1}{2}-j\frac{1}{2}\right)t} = \alpha_0 + \alpha_1\left(-\frac{1}{2}-j\frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

Sottraendo:

$$e^{\left(-\frac{1}{2}+j\frac{1}{2}\right)t} - e^{\left(-\frac{1}{2}-j\frac{1}{2}\right)t} = \alpha_0 - \alpha_0 - \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_1}{2} + j\frac{\alpha_1}{2} + j\frac{\alpha_1}{2}$$

$$e^{\left(-\frac{1}{2}+j\frac{1}{2}\right)t} - e^{\left(-\frac{1}{2}-j\frac{1}{2}\right)t} = j\alpha_1 \rightarrow 2e^{-0,5t}\frac{\left[e^{j0,5t} - e^{-j0,5t}\right]}{2j} = \alpha_1$$

$$\rightarrow \alpha_1 = 2e^{-0,5t}\sin(0,5t)$$

addizionando:

$$e^{\left(-\frac{1}{2}+j\frac{1}{2}\right)t} + e^{\left(-\frac{1}{2}-j\frac{1}{2}\right)t} = \alpha_0 + \alpha_0 - \frac{\alpha_1}{2} - \frac{\alpha_1}{2} + j\frac{\alpha_1}{2} - j\frac{\alpha_1}{2}$$

$$— \; e^{-\frac{1}{2}t}\left(e^{j\frac{1}{2}t} + e^{-j\frac{1}{2}t}\right) = 2\alpha_0 - \alpha_1 \; —$$

$$\rightarrow \alpha_0 = e^{-0,5t}\cos(0,5t) + \frac{\alpha_1}{2} =$$

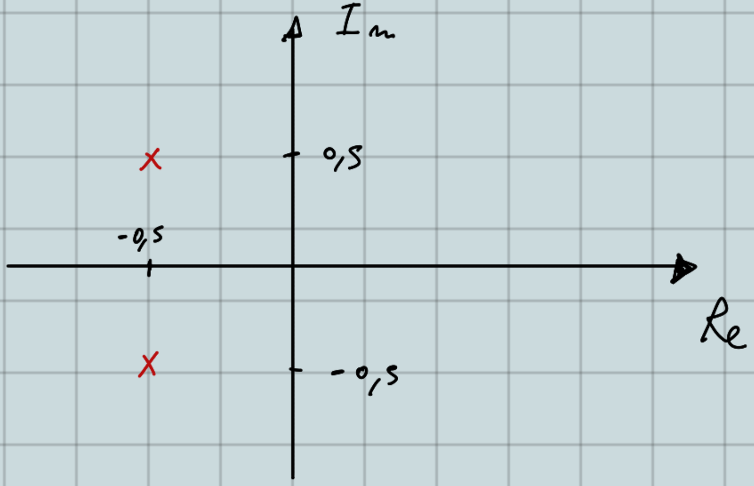
$$= e^{-0,5t}\left[\cos(0,5t) + \sin(0,5t)\right]$$

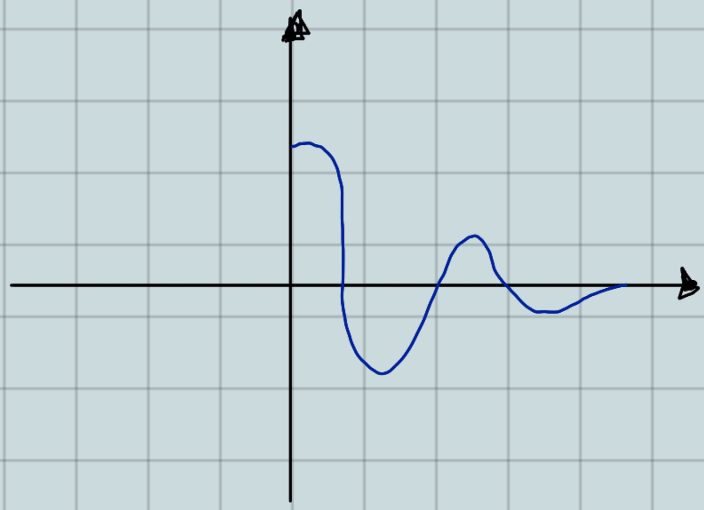
$$e^{Ft} = \alpha_0 I + \alpha_1 F = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \\ -\frac{\alpha_1}{2} & \alpha_0 - \alpha_1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-0,5t}\left[\cos(0,5t) + \sin(0,5t)\right] & 2e^{-0,5t}\sin(0,5t) \\ -e^{-0,5t}\sin(0,5t) & e^{-0,5t}\left[\cos(0,5t) - \sin(0,5t)\right] \end{bmatrix}$$

c) I modi naturali del sistema sono:

$$e^{\left(-\frac{1}{2} \pm j\frac{1}{2}\right)t}$$





MODI NATURALI

$$e^{-0,5t}\left[\cos(0,5t)+j\sin(0,5t)\right]$$

$$e^{-0,5t}\left[\cos(0,5t)-j\sin(0,5t)\right]$$

a) Si scriva il modello in variabili di stato del costo annuale del personale di una azienda. Si indichi con $x(t)$ il numero dei dipendenti nell'anno t, con $u(t)$ il numero di assunzioni o licenziamenti nell'anno, e con r il tasso annuale medio di abbandoni di personale. Si individui la quaterna di matrici ($\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{L}$) che caratterizza il sistema.

b) Fissato un anno τ in cui è dato il numero di dipendenti $x(\tau)$, si applichi la formula di Lagrange per determinare una forma chiusa che esprima il numero medio di dipendenti $x(t)$ noto l'ingresso $u(t)$ del sistema.

c) Si applichi il risultato trovato al punto b), determinando quanti addetti sono presenti al quarto anno di funzionamento dell'azienda. Si ipotizzi che l'azienda abbia inizialmente 10 addetti, che essa assuma ogni anno 5 addetti, e che valga $r = \frac{1}{10}$.

d) Si rappresenti graficamente uno schema Simulink per analizzare l'uscita del sistema dato.

a)

$$\begin{cases} x(t+1) = x(t) + u(t) - r\,x(t) = \\ \qquad = (1-r)\,x(t) + u(t) \\ y(t) = C \cdot x(t) \end{cases}$$

$$F = (1-r) \qquad G = 1 \qquad H = C \qquad L = 0$$

(Ipotizzo il costo di ogni dipendente é $C = 1$)

b)

$$x(t) = F^{t-\tau} x(\tau) + \sum_{i=\tau}^{t-1} F^{t-i-1} \cdot G \, \mu(t) =$$

$$= (1-r)^{t-\tau} x(\tau) + \sum_{i=\tau}^{t-1} (1-r)^{t-i-1} \cdot 1 \cdot \mu(t)$$

c)

$x(\tau) = 10$ con $\tau = 0$

$\mu(t) = 5$ $\quad$ [fino $t = 4$]

$r = \frac{1}{10} = 0,1$

Sostituendo:

$$x(4) = (0,9)^{4-0} \cdot 10 + \sum_{i=0}^{3} (0,9)^{4-i-1} \cdot 5 =$$

$$= 0,656 \cdot 10 + \left[(0,9)^3 \cdot 5\right] + \left[(0,9)^2 \cdot 5\right] +$$

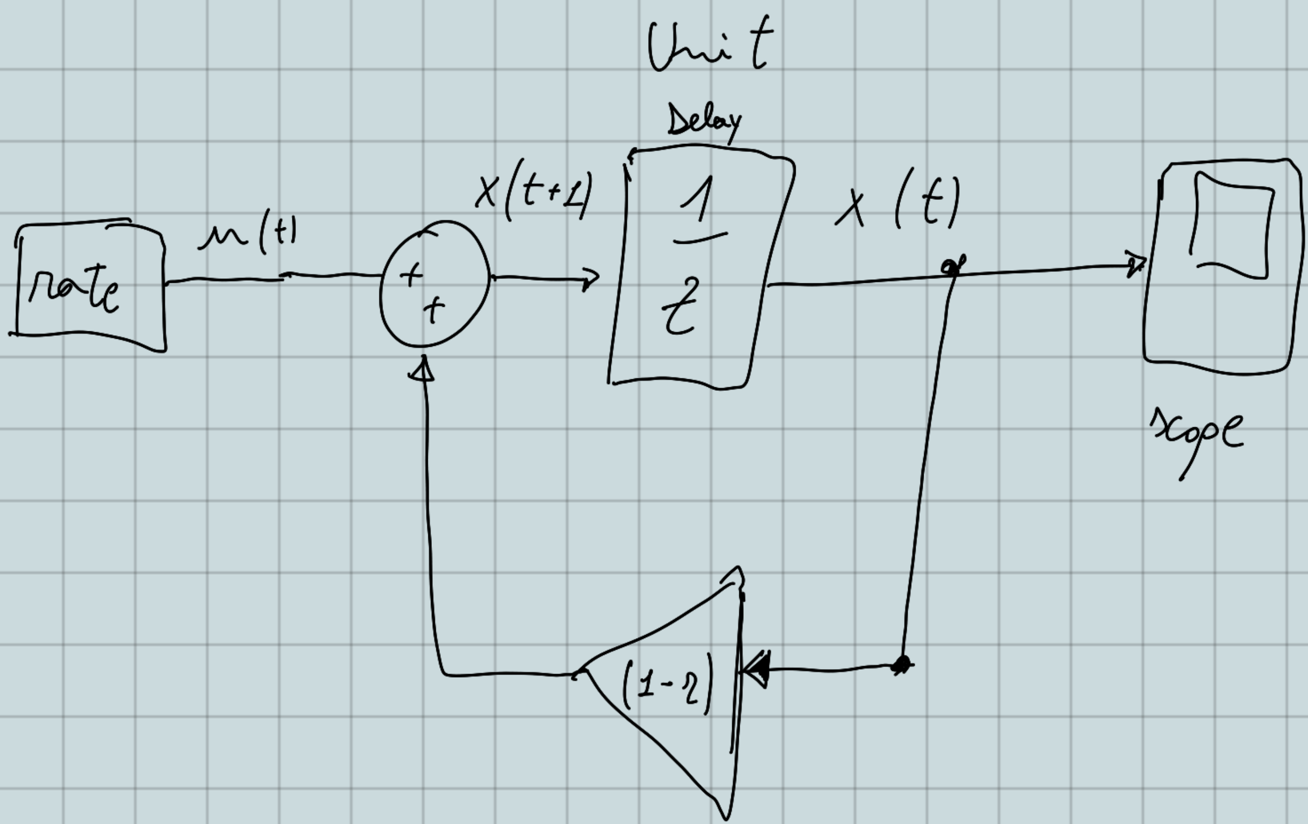
$$+ \left[(0,9)^1 \cdot 5\right] + \left[(0,9)^0 \cdot 5\right] =$$

$$= 6,56 + (0,73 \cdot 5) + (0,81 \cdot 5) +$$

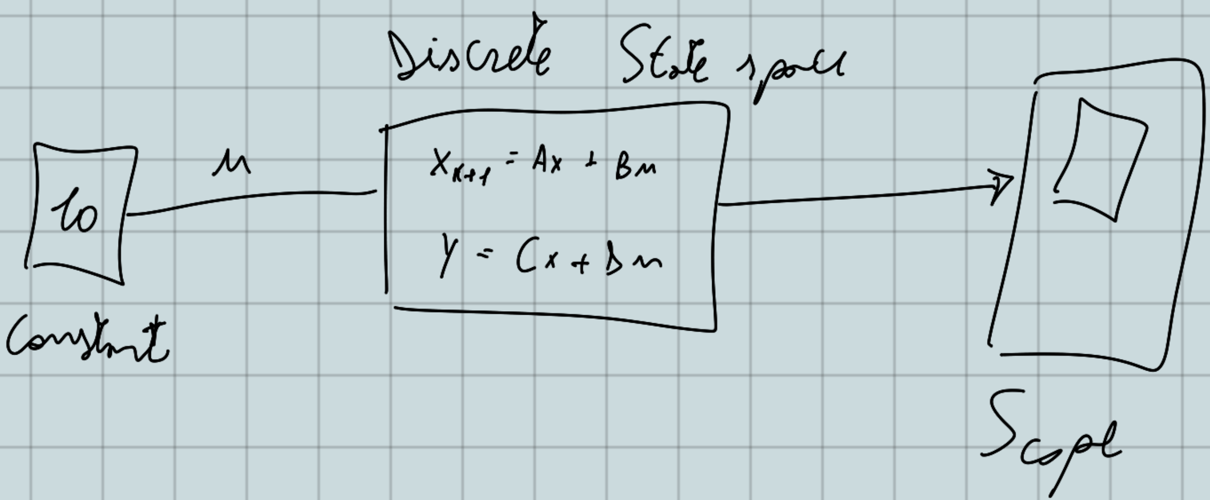
$$+ 4,5 + 5 = 16,06 + 3,65 + 4,05 =$$

$$\simeq 23,8$$

d)



oppure



Si consideri la dinamica degli studenti in un corso triennale. Al primo/secondo/terzo anno, una parte pari a a_1=0.5% / a_2=0.6% / a_3=0.5% degli studenti è bocciata mentre il resto è promosso. Si denoti con $u(k)$ il numero di studenti che si immatricolano alla fine dell'anno k. Si indichino con $x_1(k)$, $x_2(k)$ e $x_3(k)$ rispettivamente il numero di studenti frequentanti all'anno k il primo, il secondo ed il terzo anno.

a) Si fornisca una rappresentazione possibile del sistema in forma di stato, indicando in uscita con $y_1(k)$ e $y_2(k)$ rispettivamente il numero complessivo di studenti iscritti ed il numero di studenti che concludono il triennio (diplomati) nell'anno k.

b) Supponendo la presenza costante di 4000 immatricolazioni all'anno e uno stato iniziale nullo, si determini l'eventuale stato di equilibrio corrispondente a tale ingresso costante.

a)

$X_1(k)$: numero di frequentanti al 1° anno

$X_2(k)$: numero di frequentanti al 2° anno

$X_3(k)$: " " " " 3° "

$Y_1(k)$ = numero di studenti complessivi iscritti

$Y_2(k)$: numero di studenti diplomati all'anno k

$$
\begin{cases}
x_1(k+1) = \alpha_1 x_1(k) + u(k) \\
x_2(k+1) = (1-\alpha_1) x_1(k) + \alpha_2 x_2(k) \\
x_3(k+1) = (1-\alpha_2) x_2(k) + \alpha_3 x_3(k) \\
y_1(k) = x_1(k) + x_2(k) + x_3(k) \\
y_2(k) = (1-\alpha_3) x_3(k)
\end{cases}
$$

$$F = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 1-\alpha_1 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 1-\alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-\alpha_3 \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sostituendo $\alpha_1 = 0{,}005$ $\alpha_2 = 0{,}006$

b) $\alpha_3 = 0{,}005$ $\bar{u} = 4000$

$$F = \begin{bmatrix} 0{,}005 & 0 & 0 \\ 0{,}995 & 0{,}006 & 0 \\ 0 & 0{,}994 & 0{,}005 \end{bmatrix}$$

$$F - I = \begin{bmatrix} -0{,}995 & 0 & 0 \\ 0{,}995 & -0{,}994 & 0 \\ 0 & 0{,}994 & -0{,}995 \end{bmatrix}$$

$$|F - I| = (-0{,}995)(-0{,}994)(-0{,}995) \neq 0$$

$$(F - I)x + G\bar{u} = 0 \rightarrow$$

$$x = -(F - I)^{-1} G \bar{u} = \frac{\operatorname{Adj}\begin{bmatrix} -0{,}995 & 0{,}995 & 0 \\ 0 & -0{,}994 & 0{,}996 \\ 0 & 0 & -0{,}995 \end{bmatrix}}{0{,}984} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \bar{u}$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}99 & 0 & 0 \\ -0{,}99 & 0{,}99 & 0 \\ 0{,}99 & -0{,}99 & 0{,}99 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\bar{u}}{0{,}984} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}99 \\ -0{,}99 \\ 0{,}99 \end{bmatrix} \frac{\bar{u}}{0{,}984} \approx \begin{bmatrix} \bar{u} \\ -\bar{u} \\ \bar{u} \end{bmatrix}$$

con $\bar{u} \in \mathbb{R}$

$\bar{u} = 4000$

a) Si consideri un allevamento di salmoni classificabili nelle tre fasce di età: neonati, individui giovani e individui vecchi. Ogni anno si possono immettere neonati e prelevare individui vecchi; i prelievi e le immissioni avvengono alla fine dell'anno *k*. Dopo un anno i neonati diventano giovani e i giovani diventano vecchi. Il tasso di sopravvivenza dei neonati è *a*, quello dei giovani è *b* e quello dei vecchi è *c*. Solo i giovani possono riprodursi e vengono generati ogni anno mediamente *d* neonati per ogni individuo che era giovane l'anno precedente.

b) Si fornisca una rappresentazione possibile del sistema in forma di stato, scegliendo come uscita *y(k)* il numero totale di salmoni nell'allevamento all'inizio dell'anno *k*.

c) Si scriva la formula di Lagrange per calcolare l'uscita del sistema all'anno *k*.

d) Si scriva una serie di comandi Matlab per definire la quadrupla di matrici (***F***, ***G***, ***H***, ***L***) del sistema supponendo l'assenza di prelievo di individui vecchi, la presenza di una immissione costante di 10 neonati all'anno, uno stato iniziale nullo e un valore dei parametri pari a *a*=*b*=*1/2* e *c*=*d*=1/4, e calcolare il numero di totale di salmoni *y(4)* (suggerimento: si scrivano dei comandi per applicare ricorsivamente l'equazione di stato e calcolare *x(4)* e si ottenga *y(4)* con l'equazione di uscita).

a)

b)

$x_1(k)$: salmoni neonati

$x_2(k)$: " giovani

$x_3(k)$: " vecchi

$$\begin{cases} x_1(k+1) = u_1(k) + d\, x_2(k) \\ x_2(k+1) = a\, x_1(k) \\ x_3(k+1) = b\, x_2(k) - u_2(k) + c\, x_3(k) \\ y(k) = x_1(k) + x_2(k) + x_3(k) \end{cases}$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & d & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c)

$$y(K) = H\left[F^{K-t}x(t) + \sum_{i=t}^{K-1} F^{K-i-1} G\, u(i)\right]$$

d)

$$F = [0, 1/4, 0; \quad 1/2, 0, 0; \quad 0, 1/2, 1/4];$$

$$G = [1, 0; \quad 0, 0; \quad 0, -1];$$

$$H = [1, 1, 1];$$

$$L = [0, 0];$$

$$X0 = [0; 0; 0];$$

$$M = [10; 0];$$

```
for K = 1:4
    X = F*X + G*u;
end

y = H*X
```

Sia il sistema non lineare senza ingresso detto modello di crescita logistica di Verhulst che descrive la dinamica di una popolazione di individui x(t): $\dot{x}(t) = rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{k}\right)$ con r e k parametri reali positivi.

a) Si determinino tutti gli stati di equilibrio del sistema.

b) Si discuta la stabilità di tali stati di equilibrio e si commenti brevemente il significato dei risultati trovati dal punto di vista della evoluzione della popolazione.

c) Si rappresenti graficamente un possibile schema Simulink per analizzare il movimento del sistema a partire da $\boldsymbol{x}(\mathbf{0}) = 200$ con r=1 e k=100.

a)

$$0 = rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{k}\right) \rightarrow rx(t) = 0 \qquad \left(1 - \frac{x(t)}{k}\right) = 0$$

$$\rightarrow x(t) = 0 \quad a$$

$$\rightarrow x(t) = k \quad b$$

b)

$$F = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\bar{x}} = \left. r\left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{rx}{k}\right|_{\bar{x}} =$$

$$= \left. r - \frac{rx}{k} - \frac{rx}{k}\right|_{\bar{x}} = \left. r\left(1 - \frac{2}{k}x\right)\right|_{\bar{x}}.$$

$= \begin{cases} \text{(a)} \to r & \text{Se } r>0 \to \text{sistema instabile} \\ \text{(b)} \to r - \dfrac{2r}{K}K = -r & \text{se } r>0 \text{ sistema asintot. stabile} \end{cases}$

c)

$r = 1, \quad K = 100, \quad x(0) = 200$