

Quesito A (Solo esame completo)

Sia assegnato il manipolatore in figura 1, con lunghezze dei bracci $a_1 = a_2 = a_3 = 1$.

- Assegnati posizione e orientamento della terna $O_3 - x_3y_3z$ definiti come di seguito specificato, si determini una possibile terna di variabili di giunto corrispondente;

$$T = \begin{bmatrix} 0.2620 & -0.2198 & 0.9397 & 0.5834 \\ 0.7198 & -0.6040 & -0.3420 & 1.603 \\ 0.6428 & 0.7660 & 0 & 0.9848 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Si determini la velocità della terna solidale con il terzo braccio nella configurazione assegnata assumendo una velocità dei giunti data da $\dot{q} = [1 \ 0.5 \ 1]^T$;
- Si supponga di applicare nel punto W nella configurazione assegnata un momento definito dal vettore $[0.5 \ 0.5 \ 0.5]$. Si calcolino le coppie ai giunti necessarie per mantenere il manipolatore nella configurazione assegnata utilizzando l'equazione statica.

Quesito B (Esame completo ed Esonero)

Sia assegnato il manipolatore in figura 2, con lunghezze dei bracci $l_1 = l_2 = 1$. Assegnate le configurazioni **iniziale**, **intermedia** e **finale**, si definisca la traiettoria di ciascun giunto rotoidale (si caratterizzi matematicamente la legge oraria in termini di posizione $q(t)$, velocità $\dot{q}(t)$, accelerazione $\ddot{q}(t)$) in modo che passi in prossimità dei punti di via, negli istanti $t = [t_1, t_2, t_3] = [0, 1, 3]$ e con durata dei tratti parabolici pari a 0.1 secondi, e assumendo velocità iniziali e finali nulle.

Quesito C (Esame completo ed Esonero)

Adottando un linguaggio sintetico ed appropriato, si discuta del controllo indipendente ai giunti, con retroazione di posizione, velocità e accelerazione (con controllori P, P, e PI, rispettivamente). In particolare, si illustrino:

- Schema di controllo in feedback;
- Metodi di taratura dei parametri dei regolatori;
- Schema per la stima dell'accelerazione a partire dalla misura diretta di velocità;
- Schema di compensazione in avanti decentralizzata.

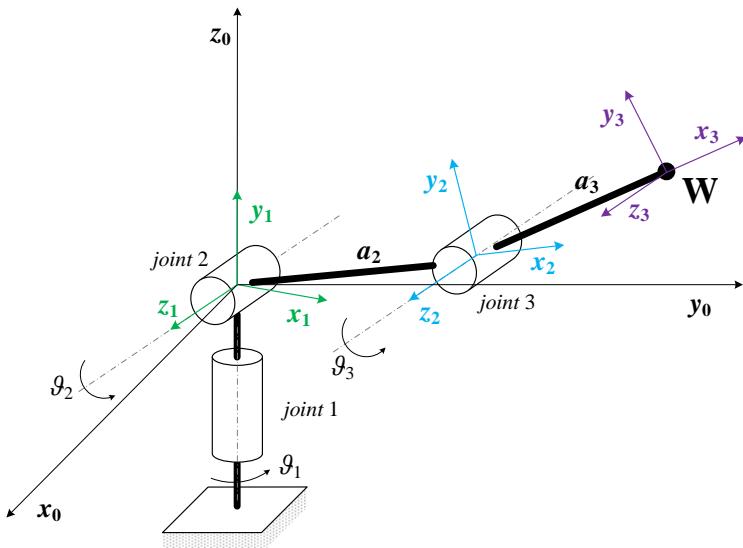


Figura 1

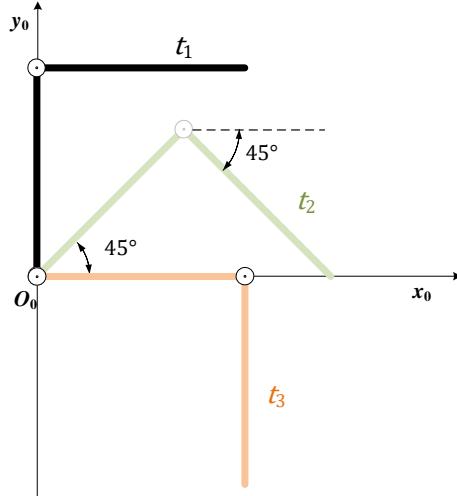


Figura 2

A]

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$$

$$T = \begin{bmatrix} 0,2620 & -0,2198 & 0,0357 & 0,5834 \\ 0,7138 & -0,6060 & -0,3420 & 1,603 \\ 0,6428 & 0,7660 & 0 & 0,9848 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

$$w = \begin{bmatrix} 0,5834 \\ 1,603 \\ 0,9848 \end{bmatrix} \begin{matrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{matrix}$$

la posizione dell'organo terminale rispetto alla base

Il primo giunto ruota attorno all'asse z_0 e determina il piano in cui giace il resto del braccio:

$$\vartheta_1 = \arctan 2 \left(w_x, w_y \right) = 1,222 \text{ rad} \approx 70^\circ$$

$$\text{oppure } \tan \vartheta_1 = \frac{\sin \vartheta_1}{\cos \vartheta_1} \rightarrow \vartheta_1 = \arctan \left(\frac{0,7138}{0,2620} \right) = 1,222 \text{ rad}$$

Per un braccio omopomario ricaviamo applicando il teorema del coseno al triangolo formato dai link 2 e 3:

$$\cos(\vartheta_3) = \frac{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2}{2 \alpha_2 \alpha_3} = 0,040 \rightarrow \vartheta_3 = \arccos(0,04) \approx 0,349 \approx 20^\circ$$

$$\gamma = \vartheta_2 + \vartheta_3$$

$\nearrow s_{23}$

$$c_{23} = \sqrt{x_{3i}^2 + x_{3j}^2} = 0,766$$

$$\gamma = \arctan \left(\frac{0,6428}{0,7660} \right) = 0,698 \approx 40^\circ$$

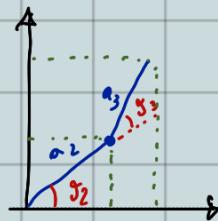
$\searrow c_{23}$

Possiamo calcolare poi semplicemente: $\vartheta_2 = \varphi - \vartheta_3 = 0,349 \approx 20^\circ$

Alternative:

$$\vartheta_2 = \text{atan} 2 \left(\sqrt{w_x^2 + w_y^2}, w_z \right) - \text{atan} 2 \left(\alpha_2 + \alpha_3 \cos(\vartheta_3), \alpha_3 \sin(\vartheta_3) \right)$$

$$\vartheta_3 = \text{atan} 2 \left(\cos \vartheta_3, \pm \sqrt{1 - \cos^2 \vartheta_3} \right)$$



$$\dot{\vartheta} = [1 \quad 0,5 \quad 2]^\top$$

$$J = \begin{bmatrix} -S_1(\alpha_2 c_2 + \alpha_3 c_{23}) & -C_1(\alpha_2 s_2 + \alpha_3 s_{23}) & -\alpha_3 c_1 s_{23} \\ C_1(\alpha_2 c_2 + \alpha_3 c_{23}) & -S_1(\alpha_2 s_2 + \alpha_3 s_{23}) & -\alpha_3 s_1 s_{23} \\ 0 & -\alpha_2 c_2 - \alpha_3 c_{23} & \alpha_3 c_{23} \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & S_1 & S_1 \\ 0 & -C_1 & -C_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vartheta = [\vartheta_1 \quad \vartheta_2 \quad \vartheta_3]^\top = [1,222 \quad 0,349 \quad 0,349]^\top$$

$$J(q) = \begin{bmatrix} -0,0426 & -0,0183 & -0,012 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0,021 & 0,021 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$v = J(q) \dot{q} = \begin{bmatrix} -0,0426 & -0,0183 & -0,012 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0,021 & 0,021 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -0,064 \\ 2 \\ 0,5 \\ 0,0315 \\ -1,5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Momento esterno applicato al punto W $\rightarrow \mu = [0,5 \quad 0,5 \quad 0,5]^T$

Il vettore delle forze generalizzate esterne (perché è applicato solo un momento) è: $\gamma = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0,5 \quad 0,5 \quad 0,5]^T$

per il principio dei lavori virtuali:

$$\tau = J^T(\varphi) \gamma = \begin{bmatrix} -0,0426 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0,0183 & 0 & 1 & 0,021 & -1 & 0 \\ -0,012 & 0 & 1 & 0,021 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0,5 \\ -0,43 \\ -0,43 \end{bmatrix}$$

$$T_3^0(\varphi) = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} & s_1 & c_1 (\alpha_2 c_2 + \alpha_3 c_{23}) \\ s_1 c_{23} & -s_1 s_{23} & -c_1 & s_1 (\alpha_2 c_2 + \alpha_3 c_{23}) \\ s_{23} & c_{23} & 0 & \alpha_2 s_2 + \alpha_3 s_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

B

$$t = [t_1, t_2, t_3] = [0, 2, 3] \quad \Delta t_k^1 = 0, 1$$



Si giungono posizionali:

$$q_{11} = \pi/2$$

$$q_{12} = \pi/4$$

$$q_{13} = 0$$

$$h = 0,05$$

$$\Delta t_1 = 2 = t_2 - t_1$$

$$\Delta t_2 = 2 = t_3 - t_2$$

$$\begin{aligned} \dot{q}_{01} &= 0 \\ \dot{q}_{34} &= 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Velocità INIZIALE e FINALE nulle!} \end{array} \right\}$$

$$\dot{q}_{12} = \frac{q_{12} - q_{11}}{\Delta t_1} = \frac{\pi/2 - \pi/4}{1} = -\pi/4 \approx -0,785 \text{ rad/s}$$

$$\dot{q}_{23} = \frac{q_{23} - q_{12}}{\Delta t_2} = \frac{0 - \pi/4}{2} = -\pi/8 \approx -0,393 \text{ rad/s}$$

$$\ddot{\varphi}_1 = \frac{\dot{\varphi}_{12} - \dot{\varphi}_{01}}{\Delta t_1} = \frac{-\pi/4 - 0}{0,1} = -7,85 \text{ rad/s}^2$$

$$\ddot{\varphi}_2 = \frac{\dot{\varphi}_{23} - \dot{\varphi}_{12}}{\Delta t_2} = \frac{-\pi/8 + \pi/4}{0,1} = 3,93 \text{ rad/s}^2$$

$$\ddot{\varphi}_3 = \frac{\dot{\varphi}_{34} - \dot{\varphi}_{23}}{\Delta t_3} = \frac{0 - \pi/8}{0,1} = 3,93 \text{ rad/s}^2$$

Hall: linear:

$$\varphi_{12} = \varphi_1 + (\varphi_2 - \varphi_1) \cdot \frac{(t - t_1)}{\Delta t_1} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} t$$

$$\varphi_{23} = \varphi_2 + (\varphi_3 - \varphi_2) \frac{(t - t_2)}{\Delta t_2} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8}(t - 1)$$

Traffi Parabolici:

punti di partenza ed arrivo:

$$\begin{cases} t_1^A = -0,05; & q_1^A = \frac{\pi}{2} = 1,571 \\ t_1^B = 0,05; & q_1^B = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \cdot (0,05) = 1,531 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_2^A = 0,95; & q_2^A = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} (0,95 - 1) = 0,805 \\ t_2^B = 1,05; & q_2^B = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} (1,05 - 1) = 0,766 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_3^A = 2,95; & q_3^A = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} (2,95 - 2) = 0,02 \\ t_3^B = 3,05; & q_3^B = 0 \end{cases}$$

ogni tracollo segue la forma: $q(t) = \alpha_0 + \alpha_1 (t - t_K) + \alpha_2 (t - t_K)^2$

$$\begin{cases} \dot{\pi}_1 = \alpha_{01} + \alpha_{11} t_1^A + \alpha_{21} t_1^{A^2} \\ \ddot{\pi}_1 = \alpha_{11} + 2\alpha_{21} t_1^A \\ \dddot{\pi}_1 = 2\alpha_{21} \end{cases} \quad \begin{cases} 1,571 = \alpha_{01} + \alpha_{11} (-0,05) + 0,0025 \alpha_{21} \\ 0 = \alpha_{11} - 0,1 \alpha_{21} \\ -7,85 = 2 \alpha_{21} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_{01} = 1,571 - 0,02 + 0,0098 = 1,561 \\ \alpha_{11} = -0,393 \\ \alpha_{21} = -3,925 \end{cases}$$

$$\pi_1(t) = 1,561 - 0,393 t - 3,925 t^2$$

$$\begin{cases} \dot{\pi}_2 = \alpha_{02} + \alpha_{12} t_2^A + \alpha_{22} t_2^{A^2} \\ \ddot{\pi}_2 = \alpha_{12} + 2\alpha_{22} t_2^A \\ \dddot{\pi}_2 = 2\alpha_{22} \end{cases} \quad \begin{cases} 0,805 = \alpha_{02} + 0,95\alpha_{12} + 0,903\alpha_{22} \\ -0,785 = \alpha_{12} + 1,9\alpha_{22} \\ 3,93 = 2\alpha_{22} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_{02} = 0,805 + 4,293 - 1,774 = 3,324 \\ \alpha_{12} = -4,519 \\ \alpha_{22} = 1,965 \end{cases}$$

$$\pi_2(t) = 3,324 - 4,519t + 1,965t^2$$

$$\begin{cases} \dot{\pi}_3 = \alpha_{03} + \alpha_{13} t_3^B + \alpha_{23} t_3^{B^2} \\ \ddot{\pi}_3 = \alpha_{13} + 2\alpha_{23} t_3^B \\ \dddot{\pi}_3 = 2\alpha_{23} \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = \alpha_{03} + 3,05\alpha_{13} + 3,3\alpha_{23} \\ 0 = \alpha_{13} + 6,1\alpha_{23} \\ 3,93 = 2\alpha_{23} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_{03} = 36,56 - 18,27 = 18,286 \\ \alpha_{13} = -11,987 \\ \alpha_{23} = 4,965 \end{cases}$$

$$\pi_3(t) = 18,286 - 11,987t + 4,965t^2$$

C

Il controllo indipendente ai giunti con retroazione di posizione, velocità e accelerazione rappresenta un'architettura a loop annidati progettata per linearizzare e decapare la dinamica dei singoli giunti di un manipolatore.

Schema di controllo in feedback:

- Anello di Accelerazione: regolatore PI, agisce direttamente sulla coppia/fuerza generata dal motore per contrastare i disturbi dinamici ($C_A(s) = K_A \frac{1+sT_A}{s}$).
- Anello di Velocità: regolatore P, fornisce lo smorzamento necessario al sistema ($C_V(s) = K_V$)
- Anello di Posizione: regolatore P, garantisce l'inseguimento del riferimento del riferimento angolare desiderato ($C_P(s) = K_P$).

Metodi di taratura dei parametri

- Compensazione Pol-teso: tarando il tempo di integrazione del regolatore affinché sia uguale alla costante di tempo meccanica del motore ($T_A = T_m$). Questo semplifica la dinamica del sistema in anello chiuso.
- Posizionamento dei poli: una volta semplificati i loop interni il sistema può essere carico ad una f.d.t. del 2° ordine caratterizzata da una frequenza naturale ω_n ed un coefficiente di smorzamento ξ .

• Calcolo dei guadagni $K_V = \frac{2\zeta\omega_n}{K_{TP}K_m}$; $K_P = \frac{\omega_n^2}{K_m K_{TP} K_V}$

Schema per la stima dell'accelerazione

La misura diretta dell'accelerazione è spesso rumorosa o non disponibile, si utilizza un filtro del primo ordine per stimarla a partire dalla misura di velocità.

La f.d.t. del filtro è del tipo $\frac{s}{s+K_f}$. Il segnale $K_f \dot{v}$ di velocità è inviato ad un integratore con guadagno di feedback K_f , producendo una stima dell'accelerazione che evita l'amplificazione del rumore.

Schemi di compensazione in avanti decentralizzata

Termini aggiuntivi ($\ddot{\theta}_d, \dot{\theta}_d, \ddot{g}_d$) sono basati sulla traiettoria desiderata

- Compensazione di Velocità: $\dot{\theta}_d$ viene inviato attraverso un guadagno K_{TV} (costante di trasduttore) direttamente nel sommatore del loop di velocità
- Compensazione a Accelerazione: $\ddot{\theta}_d$ è compensato per la dinamica residua del driver e del motore attraverso un blocco di guadagno $(K_{TA} + \frac{1}{K_m + K_A})$ sommato all'uscita del regolatore di velocità.