

# Estimation and Control of Dynamical Systems

Stefano Di Lena

2025

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Controllabilità</b>	<b>1</b>
2.1	Gramiano di Controllabilità . . . . .	1
2.2	Matrice di Kalman di Controllabilità . . . . .	2
2.2.1	Forma di Kalman di Controllabilità . . . . .	2
<b>3</b>	<b>Retroazione di Stato</b>	<b>2</b>
3.1	Forma Compagna . . . . .	3
3.1.1	Stabilizzabilità . . . . .	3
<b>4</b>	<b>Osservabilità</b>	<b>3</b>
4.1	Gramiano di Osservabilità . . . . .	3
4.2	Matrice di Kalman di Osservabilità . . . . .	4
4.2.1	Forma di Kalman di Osservabilità . . . . .	4
4.2.2	Rivelabilità . . . . .	4
<b>5</b>	<b>Realizzazione</b>	<b>5</b>
<b>6</b>	<b>Controllo Ottimo</b>	<b>5</b>
<b>7</b>	<b>Osservatore</b>	<b>5</b>
7.1	Osservatore di Luenberger . . . . .	6
7.2	Osservatore di Ordine Ridotto . . . . .	6
<b>8</b>	<b>Matlab &amp; Simulink</b>	<b>7</b>

# 1 Introduzione

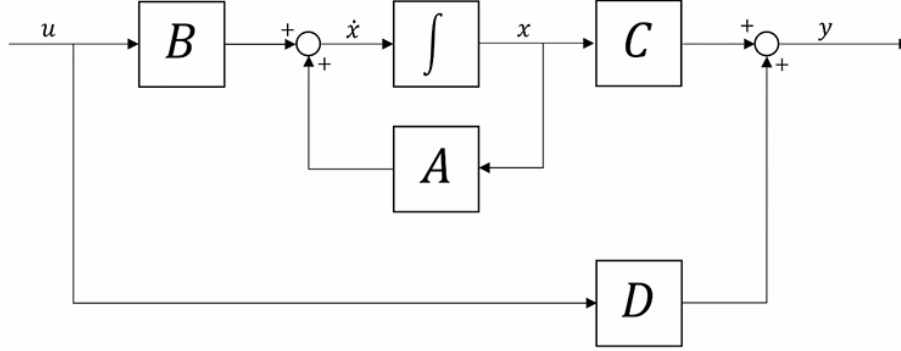
Un sistema dinamico LTI-TC è descritto dalle equazioni:

$$S : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Con  $x \in R^n, y \in R^p, u \in R^m$ .

Le dimensioni delle matrici sono:  $A : n \times n, B : n \times m, C : p \times n, D : p \times m$ .

Il sistema può essere rappresentato graficamente dal seguente schema a blocchi:



Se il sistema è strettamente proprio  $D = 0$ .

Per i sistemi LTI-TD:

$$S : \begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

## 2 Controllabilità

Un sistema dinamico LTI-TC si dice *controllabile* quando esiste un ingresso  $u$  che trasferisce lo stato del sistema da uno stato iniziale  $x_0 = x(0)$  ad un qualunque stato  $x_f = x(t_f)$  in un tempo  $t_f > 0$  finito.

### 2.1 Gramiano di Controllabilità

È una matrice  $n \times n$ :

$$\Gamma(t) = \int_0^t e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} d\tau$$

Il sistema è controllabile se e solo se:

$$\rho(\Gamma(t)) = n \quad \forall t > 0$$

L'ingresso di controllo  $u$ , che trasferisce lo stato del sistema da  $x_0$  ad  $x_f$  è:

$$u(t) = B^T e^{A^T(t_f-t)} \Gamma^{-1}(t_f) (x_f - e^{At_f} x_0)$$

Per i sistemi LTI-TD non esiste il gramiano per calcolare l'ingresso in grado di trasferire lo stato da  $x_0$  ad  $x_f$ , ma esiste una formula in grado di calcolare  $u(k)$  che porta il sistema da  $x_0$  ad  $x_f$  in massimo  $n$  passi (se il sistema è completamente controllabile). Dato un tempo  $t \geq n$ , si definisce il vettore contenente il valore di  $u(k)$  negli istanti di tempo da 0 a  $t-1$ :

$$u^{t-1} = \begin{bmatrix} u(t-1) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix} = C_t^T (C_t C_t^T)^{-1} x_f$$

con  $C_t$  matrice di controllabilità in  $t$  passi (di dimensione  $n \times mt$ ).

## 2.2 Matrice di Kalman di Controllabilità

$$M_c = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

Se  $\rho(M_c) = n$  allora il sistema è controllabile. Altrimenti è possibile controllare solo  $n_c$  componenti [se  $\rho(M_c) = n_c < n$ ].

### 2.2.1 Forma di Kalman di Controllabilità

Se si effettua una trasformazione per similitudine sullo stato (recording), si identifica un nuovo vettore di stato tale che:  $x = P_c z \iff z = P_c^{-1}x$ .

La matrice di controllabilità diventa  $\tilde{M}_c = P_c^{-1}M_c = \begin{bmatrix} M_c \\ 0 \end{bmatrix}$ .

Per calcolare  $P_c$ : scegliamo le prime  $n_c$  colonne indipendenti di  $M_c$  e le restanti  $n - n_c$  colonne sono scelte in modo da essere indipendenti dalle prime e tra loro.

Possiamo scrivere scomponendo  $z$  le equazioni di stato e di uscita come:

$$\begin{cases} \dot{z}_c = A_c z_c + A_1 z_{n_c} + B_c u \\ \dot{z}_{n_c} = A_{n_c} z_{n_c} \\ y = C_1 z_c + C_2 z_{n_c} \end{cases}$$

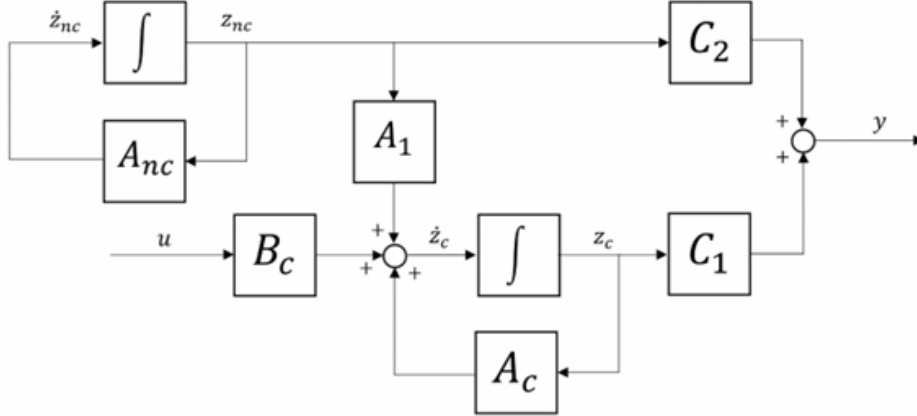
Con:

$$\begin{bmatrix} A_c & A_1 \\ 0 & A_{n_c} \end{bmatrix} = P_c^{-1}AP_c$$

$$\begin{bmatrix} B_c \\ 0 \end{bmatrix} = P_c^{-1}B$$

$$\begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} = CP_c$$

Lo schema a blocchi del sistema è:



L'evoluzione è  $z_{n_c} = e^{A_{n_c}t} z_{n_c}(0)$ .

## 3 Retroazione di Stato

Consiste nel sottrarre all'ingresso il vettore di stato, pre-moltiplicato per un opportuna matrice  $K$ .

Il nuovo ingresso di controllo è  $u = r - Kx$ , con  $r \in R^m, k \in R^{n \times m}$ . L'equazione di stato diventa:

$$\dot{x} = Ax + Bu = Ax + B(r - Kx) = (A - BK)x + Br = A_k x + Br$$

### 3.1 Forma Compagna

$$\dot{x}_\gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} x_\gamma + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Dove  $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$  sono i coefficienti del polinomio caratteristico della matrice di stato  $A_\gamma$ .

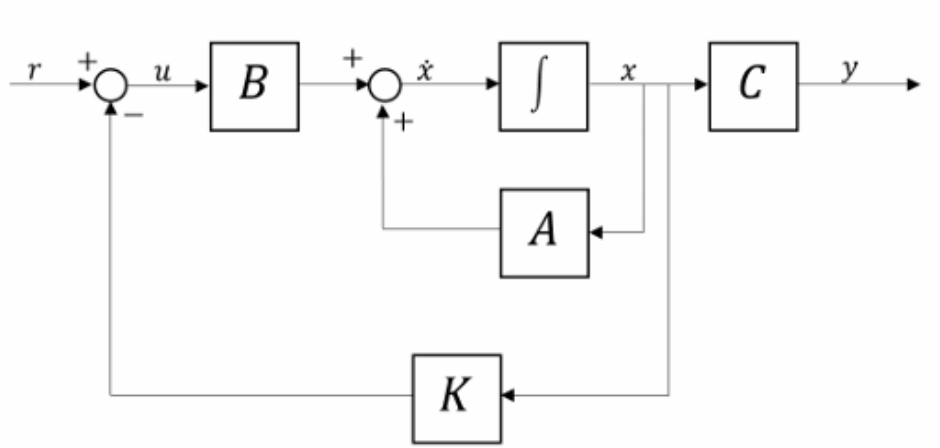
$$p(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$$

Un sistema in questa forma è controllabile; perciò i sistemi controllabili possono essere trasformati  $x = P_\gamma x_\gamma$ . Data la matrice di retroazione:

$$K_\gamma = [\bar{\alpha}_0 - \alpha_0 \quad \bar{\alpha}_1 - \alpha_1 \quad \cdots \quad \bar{\alpha}_{n-1} - \alpha_{n-1}]$$

Dove  $\bar{\alpha}_0, \dots, \bar{\alpha}_{n-1}$  sono i coefficienti del polinomio caratteristico desiderato.  $P = M_c M_c^{-1}$ .

$$M_c^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-1} & 1 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 & 0 \\ \alpha_{n-1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



#### 3.1.1 Stabilizzabilità

Nei sistemi *non controllabili* ha senso fare la retroazione di stato sulla parte controllabile solo se il sistema è *stabilizzabile*, ovvero se per ogni polo instabile è verificata la seguente condizione:

$$\rho([A - \lambda I \quad B]) = n$$

## 4 Osservabilità

Un sistema dinamico LTI-TC è detto osservabile se e solo se il suo stato iniziale  $x_0$  può essere determinato a partire dall'uscita  $y$  per un tempo finito  $t_f > 0$ .

### 4.1 Gramiano di Osservabilità

$$O(t) = \int_0^t e^{A^T \tau} C^T C e^{A \tau} d\tau$$

Il sistema è osservabile se e solo se:

$$\rho(O(t)) = n \quad \forall t > 0$$

Dall'uscita si può ricostruire lo stato iniziale:

$$x(0) = O^{-1}(t_f) \int_0^{t_f} e^{A^T \tau} C^T y(\tau) d\tau$$

Nei sistemi LTI-TD, invece, dato il vettore contenente i valori dell'uscita libera:

$$y_\ell^{t-1} = \begin{bmatrix} y(t-1) \\ \vdots \\ y(0) \end{bmatrix}$$

Il valore dello stato iniziale è dato da:

$$x(0) = (O_t^T O_t)^{-1} O_t^T y_\ell^{t-1}$$

Con  $O_t$  matrice di osservabilità in  $t$  passi (di dimensione  $pt \times n$ ).

## 4.2 Matrici di Kalman di Osservabilità

$$M_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Il sistema è osservabile se e solo se  $\rho(M_o) = n$ . Se, invece,  $\rho(M_o) = n_o < n$ ; allora solo  $n_o$  componenti dello stato iniziale potranno essere determinate.

### 4.2.1 Forma di Kalman di Osservabilità

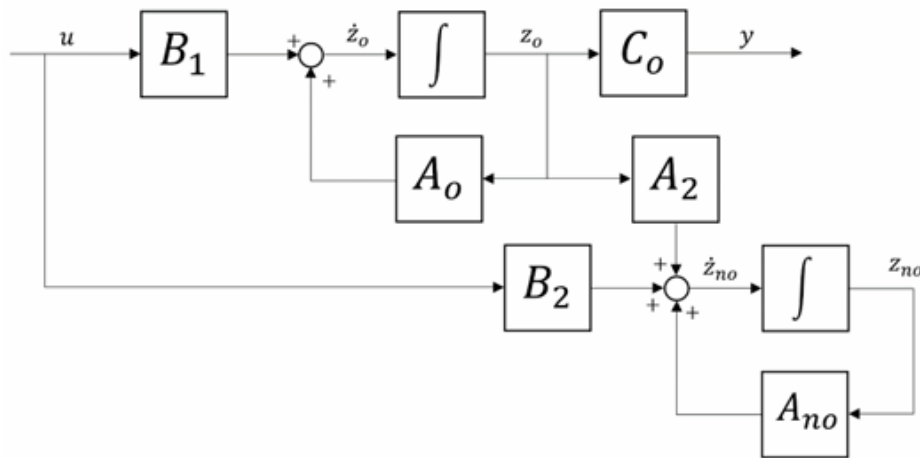
La matrice di trasformazione  $P_o$  è scelta in modo tale che le prime  $n_o$  colonne coincidano con le  $n_o$  righe indipendenti di  $M_o$  trasposte, e le restanti  $n - n_o$  colonne sono scelte in modo da essere ortogonali alle prime e linearmente indipendenti tra loro.

$$x = P_o z$$

Le equazioni di stato e di uscita si trasformano nel seguente modo:

$$\begin{cases} \dot{z}_o = A_o z_o + B_1 u \\ \dot{z}_{no} = A_2 z_o + A_{no} z_{no} + B_2 u \\ y = C_o z_o \end{cases}$$

Lo schema a blocchi che rappresenta il sistema è:



### 4.2.2 Rivelabilità

Il sistema si dice *rivelabile* se e solo se  $\rho\left(\begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix}\right) = n$  per ogni polo instabile.

## 5 Realizzazione

Consiste nel trovare un sistema dinamico a partire da una f.d.t. assegnata.

Considerando un sistema strettamente proprio ( $D=0$ ) di ordine  $n$ , il grado del numeratore è strettamente minore del grado del denominatore:

$$G(s) = \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \dots + \beta_1s + \beta_0}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0}$$

Le realizzazioni possibili di una f.d.t. sono infinite.

Una realizzazione *minima* è una realizzazione i cui autovalori sono completamente controllabili ed osservabili (il sistema sarà di ordine  $n$ ). Un esempio di questa realizzazione è ottenibile attraverso la forma compagna:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \dots \quad \beta_{n-1}]$$

## 6 Controllo Ottimo

Dato un generico sistema dinamico, descritto dall'equazione di stato  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$ , si vuole che esso assumi un certo comportamento in modo tale da minimizzare un certo obiettivo funzionale:

$$J = S(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} f_o(x(t), u(t), t) dt$$

Si definisce la funzione *Hamiltoniana*:

$$H(x, u, \lambda, t) = f_o(x, u, t) + \lambda^T f(x, u, t)$$

Dove  $\lambda \in R^n$  è detta variabile di co-stato.

Valgono le seguenti equazioni di stato:

$$\begin{cases} \dot{\lambda} = -(\frac{\partial H}{\partial x})^T \\ \dot{x} = (\frac{\partial H}{\partial \lambda})^T \end{cases}$$

Per minimizzare  $H$  rispetto ad  $u$  si pone la sua derivata uguale a zero, questa equazione viene detta "di controllo".

Se  $x_f$  o  $t_f$  sono assegnate possiamo ricavare altre condizioni. Si vuole che:

$$[H + \frac{\partial S}{\partial t}]_{t_f} \delta t_f + [(\frac{\partial S}{\partial x})^T - \lambda]_{t_f}^T \delta x_f = 0$$

Se  $t_f$  è assegnato  $\delta t_f = 0$ ; se  $x_f$  è assegnato  $\delta x_f = 0$ . Se invece non sono fissi, deve accadere che:

$$H(t_f) = -\frac{\partial S}{\partial t}|_{t_f} \quad \lambda(t_f) = (\frac{\partial S}{\partial x})^T|_{t_f}$$

## 7 Osservatore

Descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}\hat{u} \\ \hat{y} = \hat{C}\hat{x} \end{cases}$$

Dove  $\hat{x}$  è sia lo stato dell'osservatore, che la stima dello stato del sistema da osservare.

Si definisce l'errore sulla stima:  $\epsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ .

Parliamo di *stimatore asintotico* quando:  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\epsilon(t)| = 0$ .

## 7.1 Osservatore di Luenberger

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K_o(y - \hat{y}) = (A - K_o\hat{C})\hat{x} + Bu + K_o y \\ \hat{y} = \hat{C}\hat{x} \end{cases}$$

Definiamo quindi l'ingresso dell'osservatore  $\hat{u} = \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix}$ . Identifichiamo le matrici:

$$\hat{A} = A - K_o C \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} B & K_o \end{bmatrix}$$

Un osservatore così definito è *asintotico*.

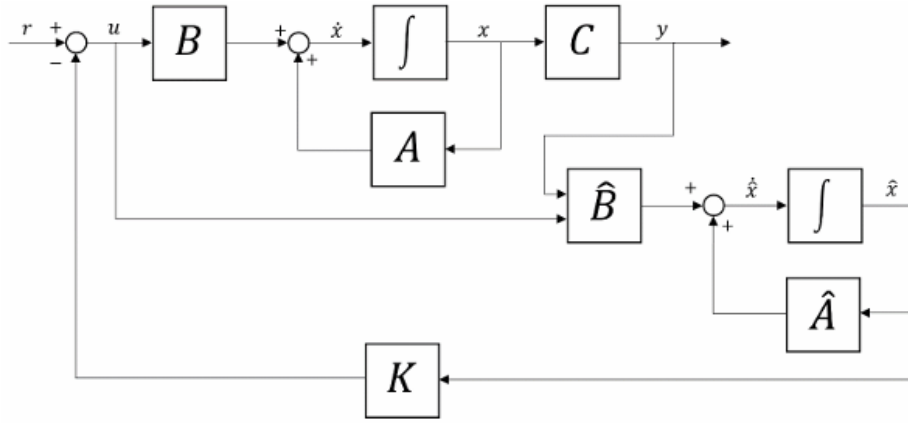
Per determinare  $K_o$  dobbiamo effettuare la retroazione di stato sul sistema duale:

$$\begin{cases} \dot{x}_D = A^T x_D + C^T u_D \\ y_D = B^T x_D \end{cases}$$

Quindi  $A_D = A^T, B_D = C^T, C_D = B^T$ .

La matrice di controllabilità del sistema duale è uguale alla trasposta della matrice di osservabilità del sistema di partenza:  $M_{CD} = M_O^T$ . Quindi se il sistema originale è completamente osservabile, allora il sistema duale è completamente controllabile e viceversa.

Dopo aver calcolato la retroazione di stato del sistema duale:  $K_o = K_D^T$ . Lo schema a blocchi:



## 7.2 Osservatore di Ordine Ridotto

Applicabile se l'uscita è del tipo  $y = Cx = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = C_1 x_1$ ; con  $C_1 \in R^{p \times p}$ .

Nel caso in cui sia invertibile, si ottengono le p componenti dello stato così:  $x_1 = C_1^{-1}y$ .

Resta da stimare  $\hat{x}_2 = z + Ly$ ; utilizzando un osservatore di ordine  $n - p$ :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u$$

Lo stimatore avrà uno stato regolato dalla seguente equazione di stato:  $\dot{z} = Fz + Gy + Hu$ .

Avendo introdotto 4 matrici, abbiamo bisogno di 3 vincoli:

$$\begin{cases} A_{21} + FLC_1 - GC_1 - LC_1 A_{11} = 0 \\ A_{22} - LC_1 A_{12} = 0 \\ B_2 - H - LC_1 B_1 = 0 \end{cases}$$

Possiamo quindi determinare:

$$\begin{cases} F = A_{22} - LC_1 A_{12} \\ G = (A_{21} - LC_1 A_{11})C_1^{-1} + FL \\ H = B_2 - LC_1 B_1 \end{cases}$$



Definiamo il sistema duale al sottosistema 2:

$$\dot{x}_{2D} = A_{22}^T x_{2D} + (C_1 A_{12})^T u$$

Si effettua la retroazione di stato su questo sistema e si ricava la matrice di retroazione  $K_D$ .

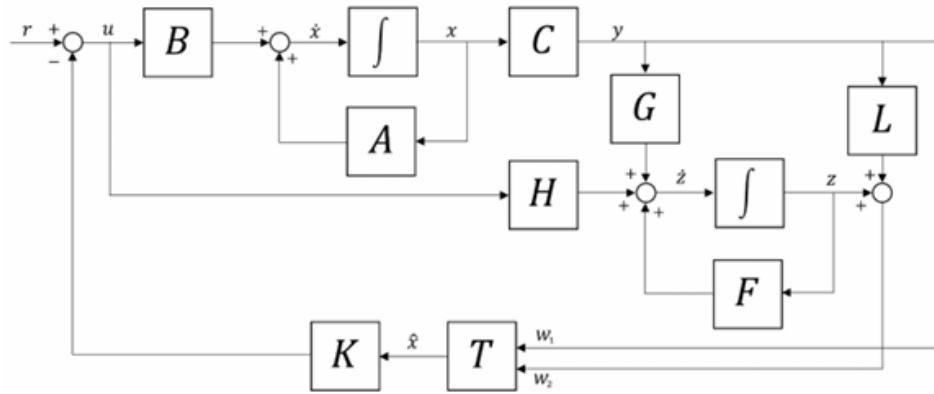
Quindi  $L = K_D^T$ .

Se il sistema non è nella forma descritta possiamo effettuare una trasformazione  $T^{-1} = \begin{bmatrix} C \\ R \end{bmatrix}$ , dove  $R$  è una qualsiasi matrice tale da garantire la non singolarità di  $T$ . Effettuando la trasformazione  $x = Tw$ , si ottiene il sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = w_1$$

Lo schema a blocchi che rappresenta il sistema è:



## 8 Matlab & Simulink

### Esempio 1

Considerando il seguente sistema lineare dinamico:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 2x_1(t) + x_2(t) + 2x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) = 2x_1(t) + 2x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_3(t) = -6x_3(t) + 2u(t) \\ y(t) = 2x_1(t) + x_2(t) + 2x_3(t) \end{cases}$$

Script Matlab (.m) in cui:

- determinare il sistema in forma di stato;
- analizzare la controllabilità e l'osservabilità (dire se il sistema è completamente controllabile ed osservabile);
- determinare una matrice di retroazione di stato  $K$  che imponga gli autovalori  $[-2, -3, -6]$ ;
- determinare il sistema chiuso in retroazione con  $K$  in forma di stato e la sua risposta al gradino;
- verificare che il sistema chiuso in retroazione ha gli autovalori richiesti;
- determinare un osservatore di ordine ridotto che imponga gli autovalori  $[-1 \pm j]$ ;
- verificare che il sistema con l'osservatore determinato abbia gli autovalori richiesti.

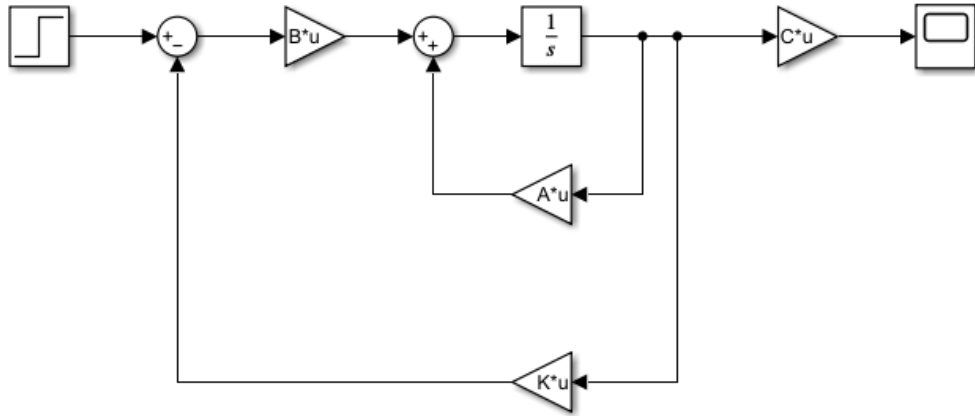
```

1 % Sistema lineare dinamico fornito
2 A = [2, 1, 2; 2, 2, 0; 0, 0, -6];
3 B = [0; 1; 2];
4 C = [2, 1, 2];
5 D = 0;
6
7 % Sistema in forma di stato
8 sys_ol = ss(A,B,C,D);
9 n = length(A);
10 % Analisi la Controllabilita'
11 Mc = ctrb(A,B);
12
13 if (rank(Mc) == n)
14     disp("il sistema e' completamente controllabile");
15 else
16     disp("il sistema non e' completamente controllabile");
17 end
18 % Analisi l'Osservabilita'
19 Mo = obsv(A,C);
20
21 if (rank(Mo) == n)
22     disp("il sistema e' completamente osservabile");
23 else
24     disp("il sistema non e' completamente osservabile");
25 end
26
27 % Retroazione di stato
28 p = [-2, -3, -6];
29 K = place(A,B,p);
30 % Sistema chiuso in retroazione con K in forma di stato
31 % e la sua risposta al gradino
32 A_cl = A-B*K;
33 sys_cl = ss(A_cl,B,C,D);
34 step(sys_cl);
35 % Verifica che il sistema chiuso in retroazione ha gli autovalori
    richiesti
36 eig_cl = eig(sys_cl);
37 disp(eig_cl);
38
39 % Osservatore di ordine ridotto
40 po = [-1-1j, -1+1j];
41
42 T = [C;0,1,0;0,0,1]; %Trasformazione di stato
43
44 A_1 = T*A/T; %con A/T e' equivalente a fare A*inv(T)
45 B_1 = T*B;
46 C_1 = C/T;
47
48 A_2 = A_1(end-1:end, end-1:end); %Selezione sottomatrice A22
49 B_2 = (C_1(1)*A_1(1,end-1:end))'; %Calcolo di C1*A12 trasposto
50 Kd = place(A_2',B_2,po);
51 L = Kd';
52
53 % Verifica che gli autovalori sono quelli richiesti
54 F = A_2 - L*C_1(1)*A_1(1,2:3);
55 eig_obs = eig(F);
56 disp(eig_obs);

```

Simulink:

- schema a blocchi del sistema chiuso in retroazione con K con la possibilità di visualizzare la risposta del sistema ad un gradino di ampiezza 2.



## Esempio 2

Considerando il seguente sistema lineare dinamico:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) + 4x_2(t) + 4x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) = 2x_1(t) + 2x_2(t) \\ \dot{x}_3(t) = -6x_3(t) + u(t) \\ y(t) = 4x_1(t) \end{cases}$$

Script Matlab (.m) in cui:

- determinare il sistema in forma di stato;
- determinare la f.d.t. (funzione di trasferimento) del sistema;
- analizzare la controllabilità e l'osservabilità (dire se il sistema è completamente controllabile ed osservabile);
- determinare una matrice di retroazione di stato K che imponga gli autovalori  $[-1, -2, -3]$ ;
- determinare il sistema chiuso in retroazione con K in forma di stato e la sua risposta al gradino;
- verificare che il sistema chiuso in retroazione ha gli autovalori richiesti;
- determinare un osservatore di ordine ridotto che imponga gli autovalori  $[-5, -30]$ ;
- verificare che il sistema con l'osservatore determinato abbia gli autovalori richiesti.

Simulink:

- schema a blocchi del sistema chiuso in retroazione con K, con la possibilità di visualizzare la risposta del sistema ad un riferimento costante di ampiezza 1.

```

1 % Definizione matrici
2 A = [1, 4, 4; 2, 2, 0; 0, 0, -6];
3 B = [0; 0; 1];
4 C = [4, 0, 0];
5 D = 0;
6
7 % Definizione del sistema nello spazio di stato
8 sys_ol = ss(A,B,C,D);
9 [num,den] = ss2tf(A,B,C,D);
10
11 % Controllabilita' e Osservabilita'
12 Mc=ctrb(A,B);
13 if(rank(Mc)==length(A))
14     disp("Il sistema e' completamente controllabile")
15 else
16     disp("Il sistema non e' completamente controllabile")
17 end
18
19 Mo=obsv(A,C);
20 if(rank(Mo)==length(A))
21     disp("Il sistema e' completamente osservabile");
22 else
23     disp("Il sistema non e' completamente osservabile");
24 end
25
26 % Retroazione di stato
27 p = [-1,-2,-3];
28 K = place(A,B,p);
29 sys_cl = ss(A-B*K,B,C,D);
30 step(sys_cl); %risposta al gradino
31
32 eig_cl = eig(A-B*K);
33 disp(eig_cl);
34
35 %Osservatore di ordine ridotto
36 po = [-5,-30];
37 kd = place(A(end-1:end,end-1:end)',C(1)*A(1,end-1:end)',po);
38 L=kd';
39 eig_L = eig(A(end-1:end,end-1:end)-L*C(1)*A(1,end-1:end));
40 disp(eig_L);

```

