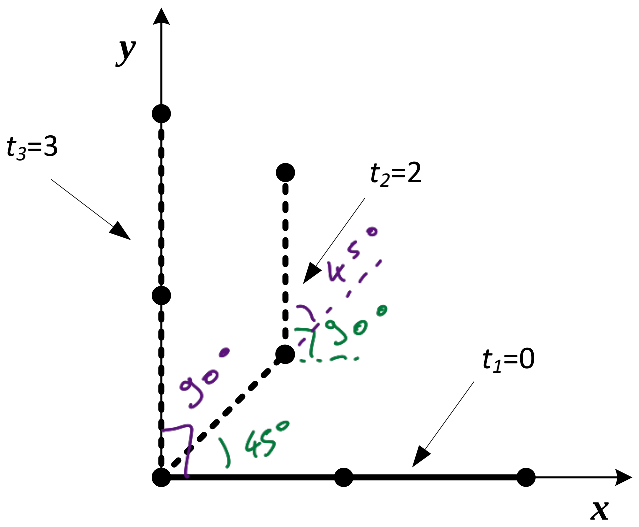
ROBOTICS, MOD. 1: INDUSTRIAL HANDLING
LAUREA MAGISTRALE IN **AUTOMATION ENGINEERING**

ESONERO DEL 28/01/2020

- Sia assegnato il manipolatore planare a due bracci in figura, con lunghezze dei bracci $a_1 = a_2 = 1$. Si calcoli la traiettoria di ciascun giunto (in termini di posizione, velocità, accelerazione) affinché il manipolatore passi dalla configurazione iniziale all'istante t_1 alla configurazione finale all'istante t_3, passando per la configurazione intermedia all'istante t_2, imponendo velocità iniziali e finali nulle. Si adottino traiettorie polinomiali distinte per ciascun tratto intermedio, garantendo la continuità della velocità.
- Considerato il manipolatore in figura, per ciascuna delle configurazioni iniziale e finale, si determini la manipolabilità in velocità, nonché le direzioni e le dimensioni degli assi principali dell'ellissoide di manipolabilità. Si commenti il risultato ottenuto.
- Si discuta del controllo PD con compensazione di gravità nello spazio dei giunti per un manipolatore a n giunti. In particolare, si illustri nel dettaglio la metodologia di progetto (dimostrando come viene derivata), si mostri perché l'algoritmo di controllo è in grado di stabilizzare il punto di equilibrio di riferimento, e si disegni lo schema di controllo.



$\dot{q}_1 = 0$

$\dot{q}_3 = 0$

$q_1 = q(t_1)$

$q_2 = q(t_2)$

$q_3 = q(t_3)$

$\dot{q}(t_2^-) = \dot{q}(t_2^+) = v_2$

1) Manipolatore planare 2R

Le traiettorie sono spline cubiche (traiettorie polinomiali a tratti):

$$q_j(t) = q_{j0} + q_{j1}(t-t_j) + a_{j2}(t-t_j)^2 + a_{j3}(t-t_j)^3$$

all'istante $t_1=0$ i bracci sono sull'asse x : $q_1(0)=0$; $q_2(0)=0$

all'istante $t_2=2 \to q_1(2)=\pi/4$ e $q_2(2)=\pi/4$

per $t_3=3 \to q_1(3)=\pi/2$ e $q_2(3)=0$

intervalli temporali $\Delta t_1 = t_2 - t_1 = 2$ $\qquad \Delta t_2 = t_3 - t_2 = 1$

Per calcolare la velocità intermedia, imponiamo (proprietà delle spline cubiche) $[v_1 = v_3 = 0]$:

$$\frac{6(q_2-q_1)}{\Delta t_1^2} - \frac{4v_2}{\Delta t_1} = \frac{6(q_3-q_2)}{\Delta t_2^2} - \frac{4v_2}{\Delta t_2}$$

Per il giunto 1:

$$\frac{\overset{3}{\cancel{6}}(\pi/4-0)}{\underset{2}{\cancel{4}}} - \frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{\underset{1}{\cancel{2}}}V_{12} = \frac{6(\pi/2-\pi/4)}{1} - \frac{4}{1}V_{12}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{8}\pi - 2V_{12} = \overset{3}{\cancel{6}}\,\frac{\pi}{\underset{2}{\cancel{4}}} - 4V_{12} \Rightarrow \boxed{V_{12} = \frac{12-3}{8}\pi\cdot\frac{1}{2} = \frac{9}{16}\pi}$$

Per il giunto 2:

$$\frac{6(\pi/4 - 0)}{4} - \frac{4}{2} V_{23} = \frac{6(0 - \pi/4)}{1} - \frac{4 V_{23}}{1}$$

$$\frac{3\pi}{8} - 2V_{23} = -\frac{3}{2}\pi - 4V_{23} \Rightarrow \boxed{V_{23} = -\frac{12-3}{8}\pi \cdot \frac{1}{2} = \Rightarrow -\frac{15}{16}\pi}$$

Jacobiano Geometrico:

$$J(q) = \begin{bmatrix} -\sin(q_1) - \sin(q_1 + q_2) & -\sin(q_1 + q_2) \\ \cos(q_1) + \cos(q_1 + q_2) & \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix}$$

Nella condizione INIZIALE e FINALE $(q_2 = 0)$

→ SINGOLARITÁ CINEMATICA (braccio teso).

Misura della Manipolabilità:

$$w(q) = \sqrt{\det\left(J(q)\,J^T(q)\right)} = \left|\det\left(J(q)\right)\right|$$

$$w = \left|a_1 a_2 \sin(q_2)\right| = \left|\sin(q_2)\right| = 0$$

Ellissoide: degenera in un segmento

START

$q_1 = 0 \rightarrow \quad J = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \sigma_1 = \sqrt{5}$ in direzione verticale y. Il robot non può muoversi in x.

END

$q_1 = \pi/2 \rightarrow \quad J = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \sigma_1 = \sqrt{5}$ in direzione orizzontale. Non può muoversi in y.

Data la dinamica del Robot: $\quad B(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + g(q) = u$

si sceglie la legge di controllo: $\quad u = g(q) + K_P\tilde{q} - K_D\dot{q}$

con $\tilde{q} = q_d - q$ (errore di posizione).

Stabilità (Lyapunov):

$$V(\dot{q}, \tilde{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^T B(q)\,\dot{q} + \frac{1}{2}\tilde{q}^T K_P\,\tilde{q} \quad > 0$$

Derivando rispetto al tempo e sfruttando la proprietà di antisimmetria di $\dot{B} - 2C$:

$$\dot{V} = -\dot{q}^T K_D\,\dot{q} \leq 0 \rightarrow \text{Semi-definita Negativa.}$$

Per il principio di INVARIANZA di La Salle: il sistema converge asintoticamente al punto di equilibrio $\tilde{q} = \dot{q} = 0$ a patto che K_P e K_D siano matrici definite positive.

Schema di controllo: