

# Robotics I - Industrial Handling

Stefano Di Lena

2025

## 1 Rappresentazione della Posa e Rotazioni

### 1.1 Matrici di Rotazione Elementari

Le matrici di rotazione descrivono l'orientamento di una terna mobile rispetto a una fissa. Le rotazioni base attorno agli assi principali sono:

- **Rotazione attorno all'asse x di un angolo  $\alpha$ :**

$$R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

- **Rotazione attorno all'asse y di un angolo  $\beta$ :**

$$R_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}$$

- **Rotazione attorno all'asse z di un angolo  $\gamma$ :**

$$R_z(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 1.2 Proprietà delle Matrici di Rotazione

Una matrice di rotazione  $R \in SO(3)$  soddisfa le seguenti proprietà fondamentali:

- **Ortogonalità:**  $R^T R = I \implies R^T = R^{-1}$ .
- **Determinante:**  $\det(R) = +1$  (rotazione propria).
- **Norma:** Le colonne (e le righe) sono vettori a norma unitaria e mutuamente ortogonali.

### 1.3 Composizione di Rotazioni

- **Assi fissi (Fixed frame):** La rotazione avviene rispetto alla terna iniziale. Si moltiplica a sinistra.
- **Assi mobili (Current frame):** La rotazione avviene rispetto alla terna corrente. Si moltiplica a destra.

## 1.4 Problema Inverso dell'Orientamento (da $R$ a RPY)

Data una matrice di rotazione numerica  $R$ :

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

$$R_{RPY} = R_z(\phi)R_y(\vartheta)R_x(\psi) = \begin{bmatrix} c_\phi c_\vartheta & c_\phi s_\vartheta s_\psi - s_\phi c_\psi & c_\phi s_\vartheta c_\psi + s_\phi s_\psi \\ s_\phi c_\vartheta & -s_\phi s_\vartheta s_\psi + c_\phi c_\psi & s_\phi s_\vartheta c_\psi - c_\phi s_\psi \\ -s_\vartheta & c_\vartheta s_\psi & c_\vartheta c_\psi \end{bmatrix}$$

Si estraggono gli angoli  $(\phi, \theta, \psi)$  sotto l'ipotesi  $\cos \theta \neq 0$ :

1.  $\theta = \text{atan2}(-r_{31}, \sqrt{r_{32}^2 + r_{33}^2})$
2.  $\psi = \text{atan2}(r_{32}, r_{33})$
3.  $\phi = \text{atan2}(r_{21}, r_{11})$

*Nota: Se  $\cos \theta = 0$ , il sistema si trova in una configurazione di singolarità (Gimbal Lock).*

## 1.5 Problema Inverso dell'Orientamento (da $R$ a EUL)

Data una matrice di rotazione numerica  $R$ :

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

$$R_{EUL} = R_z(\varphi)R_{y'}(\vartheta)R_{z''}(\psi) = \begin{bmatrix} c_\varphi c_\vartheta c_\psi - s_\varphi s_\psi & -c_\varphi c_\vartheta s_\psi - s_\varphi c_\psi & c_\varphi s_\vartheta \\ s_\varphi c_\vartheta c_\psi + c_\varphi s_\psi & -s_\varphi c_\vartheta s_\psi + c_\varphi c_\psi & s_\varphi s_\vartheta \\ -s_\vartheta c_\psi & s_\vartheta s_\psi & c_\vartheta \end{bmatrix}$$

Si estraggono gli angoli  $(\phi, \theta, \psi)$  sotto l'ipotesi  $\cos \theta \neq 0$ :

1.  $\theta = \text{atan2}(\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2}, r_{33})$
2.  $\psi = \text{atan2}(r_{32}, -r_{31})$
3.  $\varphi = \text{atan2}(r_{23}, r_{13})$

*Nota: Se  $\sin \theta = 0$ , il sistema si trova in una configurazione di singolarità, è possibile determinare solo la differenza tra gli altri due angoli.*

## 1.6 Rappresentazione Asse-Angolo (Problema Inverso)

Data una matrice  $R$ , l'angolo  $\theta$  e il versore dell'asse  $r$  sono:

- **Angolo:**

$$\theta = \arccos\left(\frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2}\right)$$

- **Asse (Versore  $r$ ):**

$$r = \frac{1}{2 \sin \theta} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix}$$

Se  $\sin(\theta) = 0$  le relazioni perdono di significato; altrimenti esse caratterizzano la rotazione in termini di 4 parametri (l'angolo e le 3 componenti del vettore  $r$ ).

## 1.7 Trasformazioni Omogenee

Per descrivere contemporaneamente posizione  $p$  e orientamento  $R$  di una terna mobile:

$$T = \begin{bmatrix} R & p \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Inversione della Matrice Omogenea:**

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T p \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

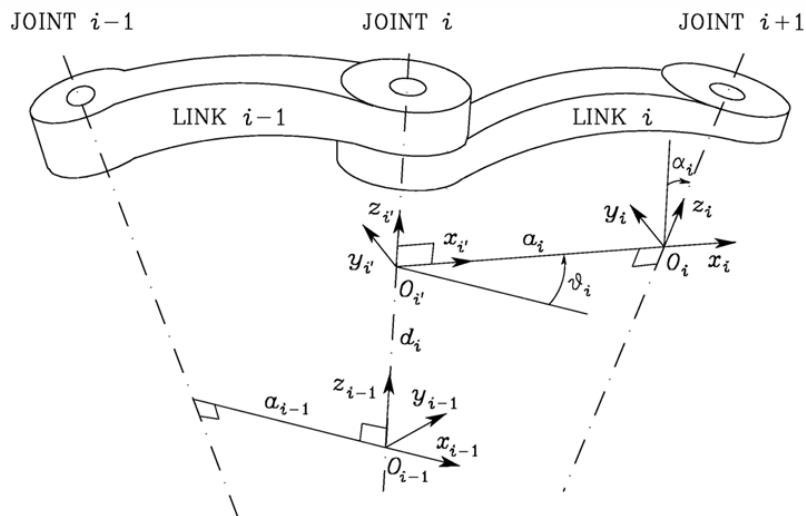
## 2 Cinematica Diretta

La cinematica diretta permette di determinare la posa (posizione e orientamento) dell'organo terminale (end-effector) in funzione delle variabili di giunto  $q = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$ .

### 2.1 Convenzione di Denavit-Hartenberg (DH)

Per definire sistematicamente le trasformazioni tra i link, si adottano le seguenti regole per il posizionamento dei sistemi di riferimento  $\{O_i - x_i y_i z_i\}$ :

1. **Asse  $z_i$ :** Deve essere posizionato lungo l'asse del giunto  $i + 1$ .
2. **Asse  $x_i$ :** Deve essere posizionato lungo la normale comune tra gli assi  $z_{i-1}$  e  $z_i$ . Se gli assi sono incidenti,  $x_i$  è perpendicolare al piano formato da  $z_{i-1}$  e  $z_i$ . Se sono paralleli, la scelta è arbitraria lungo la normale.
3. **Origine  $O_i$ :** Punto di intersezione tra l'asse  $z_i$  e la normale comune tra  $z_{i-1}$  e  $z_i$ .
4. **Asse  $y_i$ :** Scelto in modo da completare una terna destrorsa (posizionando  $z$  sul pollice e  $x$  sull'indice la direzione del medio con la regola della mano destra sarà  $y$ ).



## 2.2 Parametri di Denavit-Hartenberg

La convenzione di DH riduce la descrizione di ogni link a 4 parametri fondamentali:

- $a_i$ : distanza tra gli assi  $z_{i-1}$  e  $z_i$  misurata lungo l'asse  $x_i$  (lunghezza del braccio).
- $\alpha_i$ : angolo tra gli assi  $z_{i-1}$  e  $z_i$  misurato attorno all'asse  $x_i$  (torsione del braccio).
- $d_i$ : distanza tra l'origine  $O_{i-1}$  e l'intersezione di  $x_i$  con  $z_{i-1}$  misurata lungo  $z_{i-1}$  (offset di giunto).
- $\theta_i$ : angolo tra gli assi  $x_{i-1}$  e  $x_i$  misurato attorno all'asse  $z_{i-1}$  (angolo di giunto).

### 2.2.1 Variabili di Giunto

- **Giunto Rotoidale**: la variabile è  $\theta_i$  ( $d_i$  è costante).
- **Giunto Prismatico**: la variabile è  $d_i$  ( $\theta_i$  è costante).

## 2.3 Matrice di Trasformazione del Link ( $A_i^{i-1}$ )

Utilizzando i quattro parametri di DH, la matrice che lega la terna  $i$  alla terna  $i-1$  è:

$$A_i^{i-1}(q_i) = \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i}c_{\alpha_i} & s_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_i c_{\theta_i} \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i}c_{\alpha_i} & -c_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_i s_{\theta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dove  $s = \sin$  e  $c = \cos$ .

## 2.4 Cinematica Totale

La posa dell'end-effector rispetto alla base è data dal prodotto delle matrici di ogni singolo link:

$$T_n^0(q) = A_1^0(q_1) \cdot A_2^1(q_2) \cdot \dots \cdot A_n^{n-1}(q_n)$$

Dove:

- La sottomatrice di rotazione  $R_n^0$  descrive l'orientamento.
- Il vettore  $p_n^0$  descrive la posizione.

## 3 Cinematica Differenziale

La cinematica differenziale descrive la relazione tra le velocità dei giunti  $\dot{q}$  e le velocità lineari  $v_e$  ed angolari  $\omega_e$  dell'organo terminale.

### 3.1 Jacobiano Geometrico

Lo Jacobiano geometrico  $J(q)$  lega le velocità dei giunti  $\dot{q}$  alle velocità lineari  $v$  e angolari  $\omega$  dell'end-effector:

$$v_e = \begin{bmatrix} \dot{p}_e \\ \dot{\omega}_e \end{bmatrix} = J(q)\dot{q} = \begin{bmatrix} J_P \\ J_O \end{bmatrix} \dot{q}$$

Dove  $J$  è una matrice  $(6 \times n)$ . La colonna  $i$ -esima  $J_i$  dipende dal tipo di giunto:

- **Giunto Rotoidale**:

$$J_i = \begin{bmatrix} z_{i-1} \times (p_e - p_{i-1}) \\ z_{i-1} \end{bmatrix}$$

- **Giunto Prismatico**:

$$J_i = \begin{bmatrix} z_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

### 3.1.1 Singolarità e Manipolabilità

- **Singolarità:** Configurazioni  $q$  in cui  $\det(J(q)) = 0$ . Il robot perde uno o più gradi di libertà.
- **Misura di Manipolabilità:**  $w(q) = \sqrt{\det(J(q)J^T(q))}$ . Se il robot non è ridondante ( $n = 6$ ),  $w = |\det(J)|$ .
- **Ellissoide di Manipolabilità:** Descrive le capacità di velocità nelle varie direzioni. Gli assi sono gli autovettori di  $JJ^T$ , le lunghezze sono i valori singolari  $\sigma_i$ .

### 3.2 Jacobiano Analitico

Se la posa è espressa tramite una rappresentazione minima  $\phi$  (es. angoli di Eulero), si definisce lo Jacobiano analitico  $J_A$ :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = J_A(q)\dot{q}$$

La relazione con lo Jacobiano geometrico è data da:

$$J = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & T(\phi) \end{bmatrix} J_A$$

Dove  $T(\phi)$  è la matrice che lega le derivate degli angoli alla velocità angolare  $\omega$ .

## 4 Statica e Dualità

La statica studia le relazioni tra le forze e i momenti applicati all'end-effector e le corrispondenti coppie (o forze) necessarie ai giunti per mantenere il sistema in equilibrio.

### 4.1 Principio dei Lavori Virtuali

Sia  $\tau$  il vettore delle coppie ai giunti e  $\gamma = [f \mid \mu]^T$  il vettore delle forze e dei momenti (wrench) applicati all'end-effector. Il lavoro virtuale compiuto dalle forze ai giunti deve eguagliare il lavoro virtuale compiuto dalle forze nello spazio operativo:

$$\tau^T \delta q = \gamma^T \delta x_e$$

Sostituendo la relazione cinematica differenziale  $\delta x_e = J(q)\delta q$ , si ottiene la relazione fondamentale della statica:

$$\tau = J^T(q)\gamma$$

### 4.2 Dualità Forza-Velocità

Esiste una corrispondenza matematica speculare (dualità) tra lo spazio delle velocità e lo spazio delle forze:

- **Velocità:**  $\xi = J(q)\dot{q}$  (Lo Jacobiano mappa le velocità dai giunti all'end-effector).
- **Forze:**  $\tau = J^T(q)\gamma$  (Il trasposto dello Jacobiano mappa le forze dall'end-effector ai giunti).

### 4.3 Analisi delle Forze in Condizioni Critiche

- **Singolarità:** In una configurazione singolare, esistono forze applicabili all'end-effector che non possono essere contrastate da alcuna coppia ai giunti (le forze che appartengono al *null space* di  $J^T$ ).
- **Ridondanza:** In un robot ridondante, è possibile generare coppie ai giunti che non producono alcuna forza risultante all'end-effector (coppie appartenenti al *null space* di  $J$ ).

## 4.4 Ellissoidi di Manipolabilità

L'efficacia del robot nel muoversi o nell'esercitare forze dipende dalla configurazione  $q$ .

**Ellissoide di Velocità:** Descrive le velocità dell'end-effector raggiungibili con velocità dei giunti unitarie  $\|\dot{q}\| \leq 1$ :

$$\xi^T (JJ^T)^{-1} \xi \leq 1$$

**Ellissoide di Forza:** Descrive le forze esercitabili dall'end-effector con coppie ai giunti unitarie  $\|\tau\| \leq 1$ :

$$\gamma^T (JJ^T) \gamma \leq 1$$

*Proprietà di Dualità:* Gli assi principali dell'ellissoide di forza coincidono con quelli dell'ellissoide di velocità, ma le loro lunghezze sono inversamente proporzionali. Una direzione lungo la quale il robot è "veloce" (grande capacità di movimento) è una direzione lungo la quale è "debole" (piccola capacità di esercitare forza).

## 5 Pianificazione delle Traiettorie

### 5.1 Moto punto-punto

Il manipolatore deve muoversi da una configurazione iniziale delle variabili di giunto ad una finale in un intervallo di tempo fissato  $t_f$ . Il particolare percorso seguito dall'organo terminale non è in questo caso di interesse.

Nel caso più semplice il moto può essere definito assegnando l'istante iniziale e finale di tempo e specificando condizioni particolari di posizione, velocità ed accelerazione in questi particolari istanti.

Da un punto di vista matematico il problema da risolvere diventa: trovare una funzione che rispetti tali condizioni per  $t \in [t_o, t_f]$ :

$$q(t) = a_n t^n + \dots + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$$

La soluzione è quindi una *funzione polinomiale*.

I gradi di libertà sono  $n+1$ , dati dai coefficienti sconosciuti che possono essere assegnati per soddisfare i vincoli. Il grado  $n$  dipende dal numero di vincoli e da quanto il moto deve essere fluido.

*Solitamente il numero di condizioni imposte è pari, quindi il grado del polinomio sarà dispari.*

#### 5.1.1 Cubic and Quintic Polynomials

Per impostare la posizione e velocità iniziale e finale di un giunto sono necessari 4 coefficienti: abbiamo bisogno di almeno un polinomio di ordine 3.

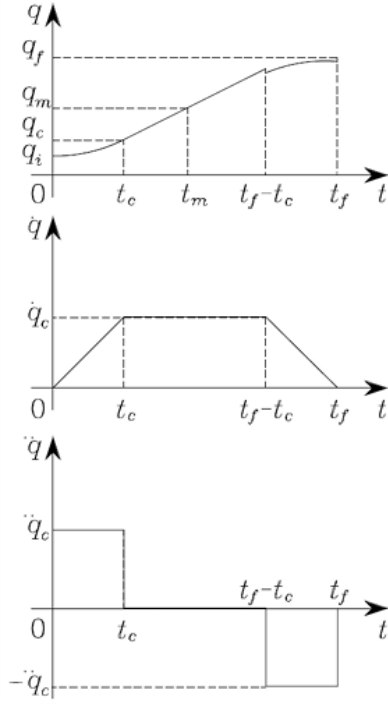
$$\begin{cases} q(t) = a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0 & \text{posizione} \\ \dot{q}(t) = 3a_3 t^2 + 2a_2 t + a_1 & \text{velocità} \\ \ddot{q}(t) = 6a_3 t + 2a_2 & \text{accelerazione} \end{cases}$$

Se dobbiamo assegnare anche le accelerazioni iniziali e finali abbiamo 6 vincoli: abbiamo bisogno di un polinomio di grado 5.

$$\begin{cases} q(t) = a_5 t^5 + a_4 t^4 + a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0 & \text{posizione} \\ \dot{q}(t) = 5a_5 t^4 + 4a_4 t^3 + 3a_3 t^2 + 2a_2 t + a_1 & \text{velocità} \\ \ddot{q}(t) = 20a_5 t^3 + 12a_4 t^2 + 6a_3 t + 2a_2 & \text{accelerazione} \end{cases}$$

### 5.2 Trapezoidal Velocity Profile

Questo metodo impone un'accelerazione costante nella fase di partenza, una velocità di crociera ed una decelerazione costante nella fase di arrivo. La traiettoria risultante è costituita da un tratto lineare raccordato con due tratti parabolici nell'intorno delle posizioni iniziali e finali.



Supponendo di aver assegnato il tempo iniziale e finale di durata della traiettoria. Supponendo che velocità iniziali e finali siano nulle ( $\dot{q}_i = \dot{q}_f = 0$ ) ed i tratti di accelerazione costante siano di durata uguale (ciò implica che  $\ddot{q}_c$  sia uguale nei due tratti). Queste scelte portano alla simmetria della traiettoria rispetto al punto medio  $q_m = (q_f + q_i)/2$  ottenuto al tempo medio  $t_m = t_f/2$ .

La traiettoria deve soddisfare dei vincoli per assicurare che la transizione da  $q_i$  a  $q_f$  avvenga nel tempo  $t_f$ . La velocità alla fine del tratto parabolico deve eguagliare la velocità (costante) del tratto lineare:

$$\dot{q}_c = \ddot{q}_c t_c = \frac{q_m - q_c}{t_m - t_c}$$

con  $q_c$  valore assunto dalla variabile di giunto alla fine del tratto parabolico, raggiunto all'istante di tempo  $t_c$  con accelerazione costante  $\ddot{q}_c$ . Si ha pertanto:

$$q_c = q_i + \frac{1}{2}\ddot{q}_c t_c^2 = q_i + \frac{1}{2}\ddot{q}_c t_c^2$$

Combinando le relazioni si ottiene:

$$\ddot{q}_c t_c^2 - \ddot{q}_c t_f t_c + q_f - q_i = 0$$

### 5.2.1 Legge del Moto

$$q(t) = \begin{cases} q_i + \frac{1}{2}\ddot{q}_c t^2 & \text{per } 0 \leq t \leq t_c \\ q_i + \ddot{q}_c t_c (t - \frac{t_c}{2}) & \text{per } t_c < t \leq t_f - t_c \\ q_f - \frac{1}{2}\ddot{q}_c (t_f - t)^2 & \text{per } t_f - t_c < t \leq t_f \end{cases}$$

Se siamo nel caso "bang-bang" ( $t_c = t_m$ ) l'equazione nel centro non compare. Configurazione usata quando è chiesto *shortest time trajectory*.

### 5.2.2 Caso 1

Se è pre-assegnata  $\ddot{q}_c$ <sup>1</sup> e sono noti  $t_f, q_i, q_f$ . Si ricava la soluzione che impone  $t_c \leq t_f/2$ :

$$t_c = \frac{t_f}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{t_f^2 \ddot{q}_c - 4(q_f - q_i)}{\ddot{q}_c}}$$

L'accelerazione pertanto è soggetta al vincolo (dovuto dal contenuto sotto radice che deve essere maggiore o uguale a 0):

$$|\ddot{q}_c| \geq \frac{4|q_f - q_i|}{t_f^2}$$

Se questa condizione è verificata con l'uguaglianza, la traiettoria non presenta il tratto a velocità costante, ma solo i tratti di accelerazione e decelerazione (profilo triangolare di velocità "bangbang").

### 5.2.3 Caso 2

Se (oltre a  $t_f, q_i, q_f$ ) viene specificata la velocità di crociera  $\dot{q}_c$  che è soggetta al vincolo:

$$\frac{|q_f - q_i|}{t_f} < |\dot{q}_c| \leq 2 \frac{|q_f - q_i|}{t_f}$$

<sup>1</sup> con il vincolo che  $\text{sgn}(\ddot{q}_c) = \text{sgn}(q_f - q_i)$

e ricordando che  $\dot{q}_c = \ddot{q}_c t_c$ , si ricava:

$$t_c = \frac{q_i - q_f + \dot{q}_c t_f}{\dot{q}_c}$$

e quindi sarà:

$$\ddot{q}_c = \frac{\dot{q}_c}{t_c} = \frac{\dot{q}_c^2}{q_i - q_f + \dot{q}_c t_f}$$

In questo caso saremo nel profilo bang-bang quando è verificata con l'uguaglianza la condizione di destra.

#### 5.2.4 Caso 3

Se sono assegnate  $\dot{q}_c, \ddot{q}_c$  (oltre a posizione iniziale e finale), possiamo calcolare direttamente:

$$t_c = \frac{\dot{q}_c}{\ddot{q}_c}$$

in seguito:

$$q_c = q_i + \frac{1}{2} \ddot{q}_c t_c^2$$

In questo caso l'obiettivo è determinare se il moto trapezoidale è realizzabile e bisogna calcolare i tempi risultanti.

Dobbiamo verificare la fattibilità (c'è abbastanza spazio per raggiungere la velocità di crociera?):

$$\Delta q = q_f - q_i - 2q_c \geq 0$$

Nel caso in cui questo calcolo fosse negativo, significa che non c'è abbastanza spazio per il tratto a velocità costante, ed il profilo diventa triangolare. Se il calcolo è uguale a zero siamo nel caso limite bang-bang (raggiungiamo la velocità impostata ma non verrebbe mantenuta, non abbiamo abbastanza spazio o tempo per il tratto a velocità costante).

Distinguiamo quindi i due casi:

- **profilo triangolare:**

$$t_m = \sqrt{\frac{q_f - q_i}{\ddot{q}_c}}$$

$$t_f = 2t_m$$

- **profilo trapezoidale**

$$\Delta t = \frac{\Delta q}{\dot{q}_c}$$

$$t_f = 2t_c + \Delta t$$

### 5.3 Moto attraverso una sequenza di punti

Se sono specificati N punti di cammino che devono essere raggiunti dal manipolatore in determinati istanti. Per ogni variabile di giunto si hanno N vincoli e si può usare un polinomio di grado N-1. Impostando ciò però non è possibile:

- assegnare velocità iniziale e finale;
- per polinomi di grado troppo elevato porta a traiettorie poco naturali;
- la sua precisione peggiora all'aumentare del grado;
- i coefficienti del polinomio dipendono da tutti i punti assegnati (se si vuole modificare un punto bisogna ricalcolare tutto).

Se invece di considerare un unico polinomio di grado elevato considerassimo un insieme di *polinomi interpolatori* di grado più basso, uniti tra loro nei punti di cammino, questi problemi possono essere superati.

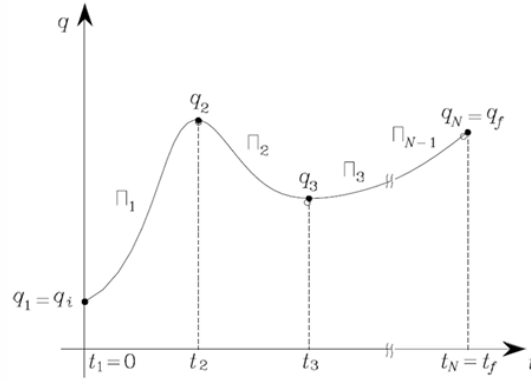


### 5.3.1 Sequenza di polinomi con vincoli imposti sulle velocità nei punti di cammino

Viene considerata una sequenza di polinomi cubici. È impostata la continuità della velocità imponendo  $\dot{\Pi}_k(t_{k+1}) = \dot{\Pi}_{k+1}(t_{k+1})$ .

Il sistema di equazioni che consente di calcolare i coefficienti degli N-1 polinomi cubici che connettono tra di loro gli N punti di cammino è ricavato imponendo le seguenti condizioni sul generico polinomio  $\Pi_k(t)$  che raccorda  $q_k$  con  $q_{k+1}$ .

$$\begin{cases} \Pi_k(t_k) = q_k \\ \Pi_k(t_{k+1}) = q_{k+1} \\ \dot{\Pi}_k(t_k) = \dot{q}_k \\ \dot{\Pi}_k(t_{k+1}) = \dot{q}_{k+1} \end{cases}$$

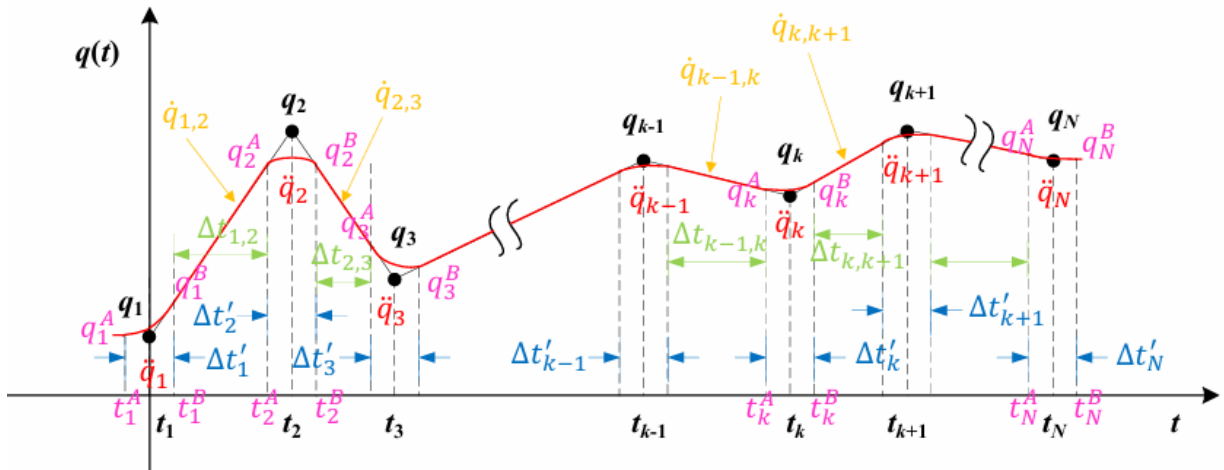


### 5.3.2 Sequenza di polinomi con accelerazione continua nei punti di cammino (spline)

Le soluzioni mostrate in precedenza non consentono di assicurare la continuità dell'accelerazione nei punti di cammino. Possiamo quindi considerare

$$\begin{cases} \Pi_{k-1}(t_k) = q_k \\ \Pi_{k-1}(t_k) = \Pi_k(t_k) \\ \dot{\Pi}_{k-1}(t_k) = \dot{\Pi}_k(t_k) \\ \ddot{\Pi}_{k-1}(t_k) = \ddot{\Pi}_k(t_k) \end{cases}$$

### 5.3.3 Sequenza di polinomi parabolico-lineari con passaggio in prossimità dei punti di via



Per risolvere questa tipologia di problemi dobbiamo descrivere due leggi del moto:

- **tratti lineari:**

$$q_k(t) = q_k + \frac{q_{k+1} - q_k}{\Delta t_k}(t - t_k)$$

- **profili parabolici:**

$$p_k(t) = a_{k0} + a_{k1}t + a_{k2}t^2$$

Calcolo le varie leggi del moto lineare. Calcolo i punti di connessione negli istanti di tempo  $t_k^A, t_k^B$  ( $q_k^A, q_k^B$ ).

Trovo:

$$\dot{q}_{k-1,k} = \frac{q_k - q_{k-1}}{\Delta t_{k-1}}$$

e

$$\ddot{q}_k = \frac{\dot{q}_{k,k-1} - \dot{q}_{k-1,k}}{\Delta t'_k}$$

derivo il polinomio nel tratto parabolico (una volta per avere le velocità e due volte per ottenere le accelerazioni) e mi ricavo i vari coefficienti nei vari casi.

Solitamente per il giunto iniziale abbiamo la posizione, la velocità e l'accelerazione note (facile da imporre i vincoli e ricavare i parametri). Per il giunto intermedio solitamente usiamo per calcolare i coefficienti i vincoli sulle posizioni ( $q_k^A, q_k^B$ ) e quello sull'accelerazione. Il tratto finale è analogo a quello iniziale.

Per concludere dopo aver trovato tutto scriviamo per esteso le varie leggi del moto (definendo in che istante di tempo è valido quel tratto).

## 6 Controllo PD con Compesazione di Gravità

Si vuole individuare la struttura del controllore che assicuri la stabilità asintotica globale della posizione di equilibrio. La determinazione del vettore di controllo che assicuri la stabilizzazione del punto di equilibrio è basata sull'impiego del metodo diretto di Lyapunov.

### 6.1 Spazio dei Giunti

Considerando come stato del sistema  $[\tilde{q}^T, \dot{\tilde{q}}^T]$  con  $\tilde{q} = q_d - q$  che rappresenta l'errore (differenza tra la posizione desiderata e quella attuale). La funzione candidata di Lyapunov è:

$$V(\dot{q}, q) = \frac{1}{2}\dot{q}^T B(q)\dot{q} + \frac{1}{2}\tilde{q}^T K_p \tilde{q} > 0$$

$\forall \dot{q}, \tilde{q} \neq 0$ . Derivando rispetto al tempo:

$$\dot{V} = \dot{q}^T B(q)\ddot{q} + \dot{q}^T \dot{B}(q)\dot{q} - \dot{q}^T K_p \tilde{q}$$

Ricavando B dall'equazione dinamica del manipolatore:

$$B(q)\ddot{q} = -C(q, \dot{q})\dot{q} - F\dot{q} - g(q) + u$$

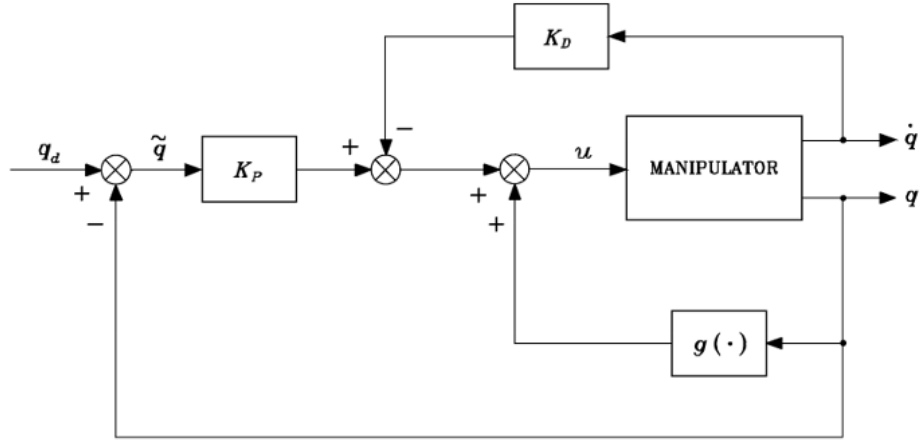
Otteniamo:

$$\dot{V} = \frac{1}{2}\underbrace{\dot{q}^T [\dot{B}(q) - 2C(q, \dot{q})]\dot{q}}_{\omega^T N(q, \dot{q}) \omega = 0} - \dot{q}^T F\dot{q} + \dot{q}^T [u - g(q) - K_p \tilde{q}]$$

Semplificando, per la proprietà di anti-simmetria, ed assumendo un'azione di controllo:

$u = g(q) + K_p \tilde{q} - K_d \dot{q}$ , otteniamo  $\dot{V} = -\dot{q}^T (F + K_d)\dot{q}$  che è semidefinita negativa.

All'equilibrio ( $\dot{q} = 0, \ddot{q} = 0$ ), prendendo l'equazione dinamica del manipolatore ed effettuando le varie semplificazioni, troviamo:  $q_d = q$ .



## 6.2 Spazio Operativo

Assegnata una  $x_d$  costante, si vuole individuare una struttura del controllore tale che l'errore nello spazio operativo ( $\tilde{x} = x_d - x$ ) tenda asintoticamente a zero.

La funzione candidata di Lyapunov è:

$$V(\dot{q}, q) = \frac{1}{2} \dot{q}^T B(q) \dot{q} + \frac{1}{2} \tilde{x}^T K_p \tilde{x} > 0$$

$\forall \dot{q}, \tilde{x} \neq 0$ . Derivando rispetto al tempo:

$$\dot{V} = \dot{q}^T B(q) \ddot{q} + \dot{q}^T \dot{B}(q) \dot{q} - \tilde{x}^T K_p \dot{\tilde{x}}$$

Dato che  $\dot{x}_d = 0 \Rightarrow \dot{\tilde{x}} = 0 - J_A(q) \dot{q}$  Ricavando B dall'equazione dinamica del manipolatore:

$$B(q) \ddot{q} = -C(q, \dot{q}) \dot{q} - F \dot{q} - g(q) + u$$

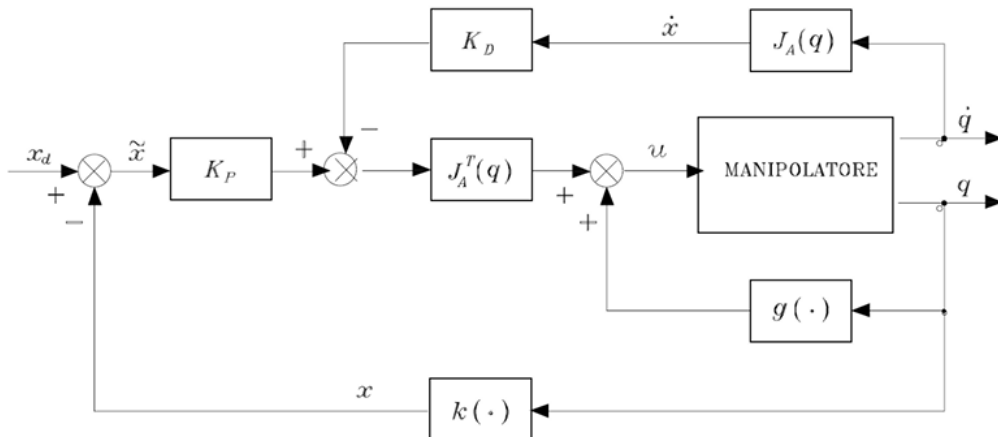
Otteniamo:

$$\dot{V} = \frac{1}{2} \underbrace{\dot{q}^T [\dot{B}(q) - 2C(q, \dot{q})] \dot{q}}_{\omega^T N(q, q) \omega = 0} - \dot{q}^T F \dot{q} + \dot{q}^T [u - g(q) - J_A^T(q) K_p \tilde{x}]$$

Semplificando, per la proprietà di anti-simmetria, ed assumendo un'azione di controllo:

$u = g(q) + J_A^T(q) K_p \tilde{x} - J_A^T(q) K_d \dot{q}$ , otteniamo  $\dot{V} = -\dot{q}^T [F + J_A^T(q) K_d J_A(q)] \dot{q}$  che è semidefinita negativa.

All'equilibrio ( $\dot{q} = 0, \ddot{q} = 0$ ), prendendo l'equazione dinamica del manipolatore ed effettuando le varie semplificazioni, troviamo:  $x_d = x^2$ .



<sup>2</sup>Nell'ipotesi che lo Jacobiano sia a rango pieno.

## 7 Controllo a Dinamica Inversa

L'approccio si basa sull'individuare un vettore di controllo ( $u$ ), funzione dello stato del sistema, che sia in grado di realizzare relazioni input-output che presentino caratteristiche lineari.

### feedback linearization

$$x^{(n)} = v \begin{cases} x^{(n)} = f(x) + b(x)u \\ u = \frac{1}{b(x)}[v - f(x)] \end{cases}$$

impostando  $v = -k_1x - k_2\dot{x} - \dots - k_n x^{(n-1)}$ ,  
otteniamo  $x^{(n)} + k_n x^{(n-1)} + \dots + k_1 x = 0$

### 7.1 Spazio dei Giunti

Il modello dinamico di un manipolatore ad  $n$  giunti è espresso nella forma:

$$B(q)\ddot{q} + n(q, \dot{q}) = u$$

con  $n(q, \dot{q}) = C(q, \dot{q})\dot{q} + F_v\dot{q} + g(q)$ . Scegliendo  $u = B(q)y + n(q, \dot{q}) \Rightarrow \ddot{q} = y^3$ .

Scegliendo una legge di controllo che sia stabilizzante:

$$y = -K_P q - K_D \dot{q} + r$$

conduce al sistema di equazioni del secondo ordine:

$$\ddot{q} + K_D \dot{q} + K_P q = r$$

Dobbiamo scegliere  $r$  in maniera tale che  $q$  segna la traiettoria desiderata:

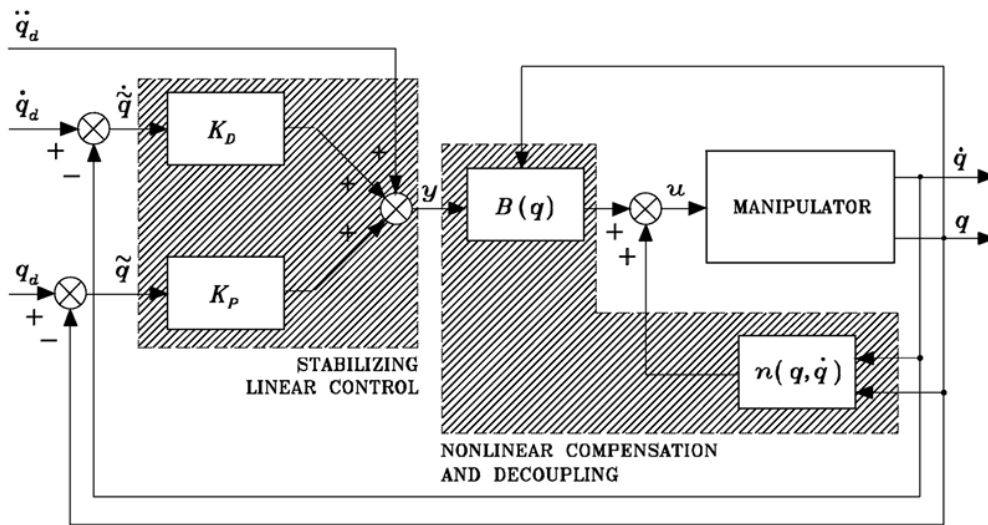
$$r = \ddot{q}_d + K_D \dot{q}_d + K_P q_d$$

Se  $\tilde{q} = q_d - q$  è l'errore di posizione, otteniamo:  $\ddot{\tilde{q}} + K_D \dot{\tilde{q}} + K_P \tilde{q} = 0$ . Scegliamo:

$$K_P = \text{diag}\{w_{n1}^2, \dots, w_{nn}^2\}$$

$$K_D = \text{diag}\{2\delta_1 w_{n1}, \dots, 2\delta_n w_{nn}\}$$

Quindi  $r_i$  influenza la sola variabile di giunto  $q_i$  con una relazione INPUT-OUTPUT del secondo ordine caratterizzata da una *pulsazione naturale*  $w_{ni}$  ed un *coefficiente di smorzamento*  $\delta_i$ .



$$u = B(q) \underbrace{[K_P \tilde{q} + K_D \dot{\tilde{q}}]}_{\text{PD control}} + \underbrace{B(q)\ddot{q}_d + n(q, \dot{q})}_{\text{Dynamics cancellation}}$$

<sup>3</sup>dove  $y$  rappresenta un nuovo vettore d input per il sistema.

## 7.2 Spazio Operativo

Il modello dinamico di un manipolatore ad  $n$  giunti è espresso nella forma:

$$B(q)\ddot{q} + n(q, \dot{q}) = u$$

con  $n(q, \dot{q}) = C(q, \dot{q})\dot{q} + F\dot{q} + g(q)$ . Scegliendo  $u = B(q)y + n(q, \dot{q}) \Rightarrow \ddot{q} = y$ .

Il nuovo ingresso di controllo deve essere sintetizzato in maniera da consentire l'inseguimento di una traiettoria specificata da  $x_d$ . Derivando l'equazione cinematica:

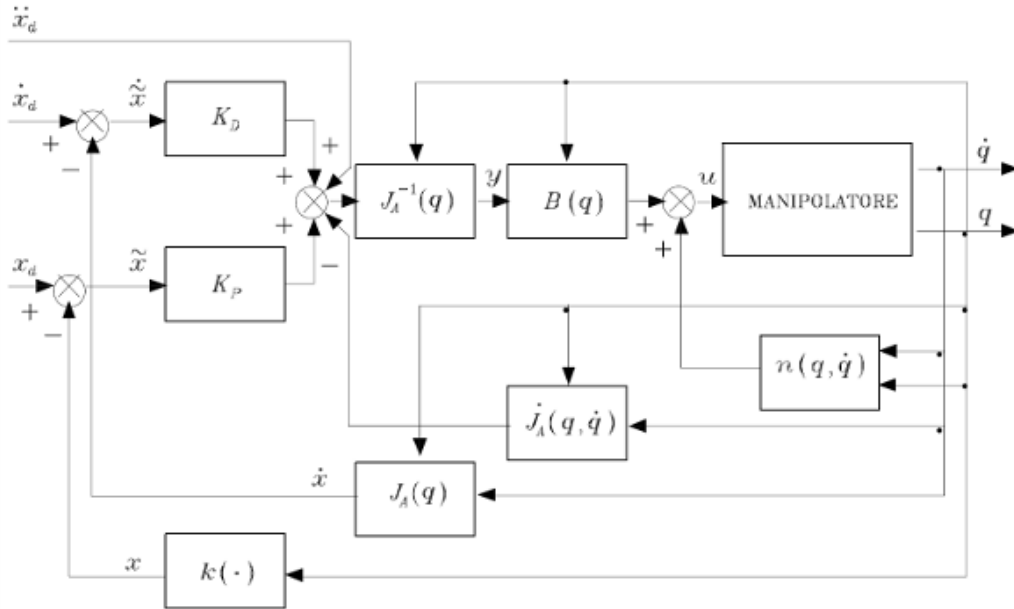
$$\ddot{x} = J_A(q)\ddot{q} + \dot{J}_A(q, \dot{q})\dot{q}$$

per un manipolatore NON ridondante è scelta:

$$y = J_A^{-1}(q)[\ddot{x} + K_D\dot{\tilde{x}} + K_P\tilde{x} - \dot{J}_A(q, \dot{q})\dot{q}]$$

Sostituendo  $\ddot{x} = \ddot{\tilde{x}} + \ddot{x}$ , otteniamo:

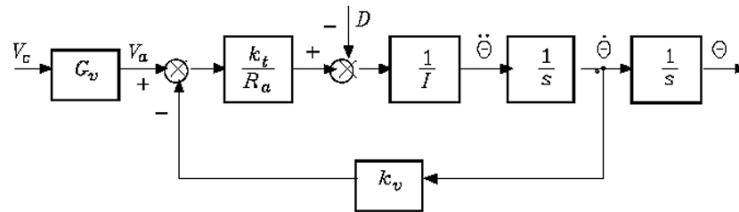
$$\ddot{\tilde{x}} + K_D\dot{\tilde{x}} + K_P\tilde{x} = 0$$



## 8 Controllo Indipendente ai Giunti

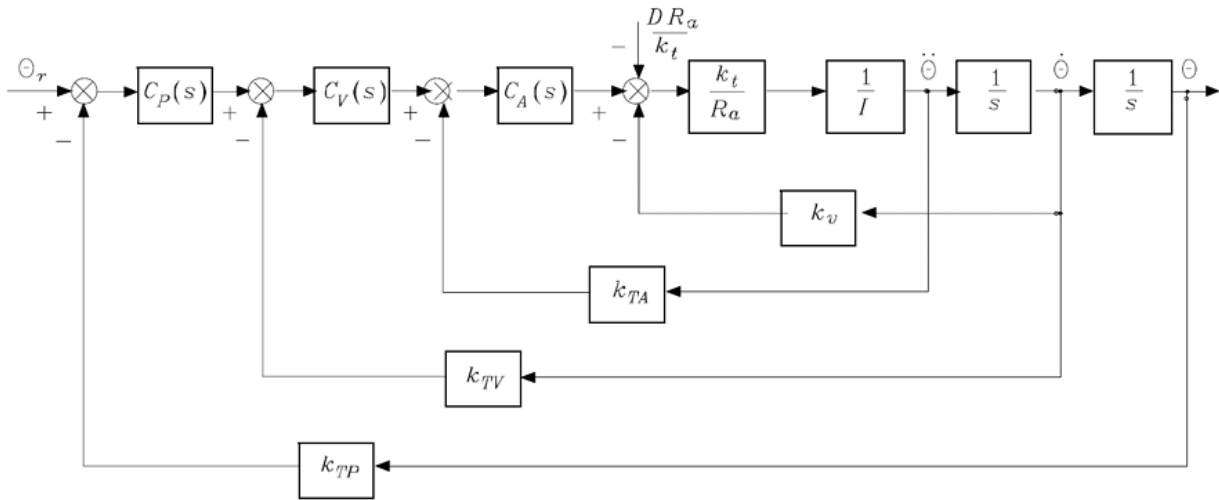
È un tipo di controllo decentralizzato (tratta il manipolatore come  $n$  sistemi lineari indipendenti).

L'attuatore è un motore rotante a corrente continua:



$$M(s) = \frac{k_m}{s(1 + sT_m)}$$

dove  $k_m = 1/k_v$  (speed-voltage gain),  $T_m = (R_a I)/k_t k_v$  (motor time constant).



Per ottenere un efficace reiezione del disturbo sull'input  $\Theta$  è necessario:

- un elevato valore del guadagno degli amplificatori a monte del punto di applicazione del disturbo (**P**);
- la presenza nel controllore di un'azione integrale al fine di annullare a regime ( $\Theta$  costante) l'effetto della componente gravitazionale sull'uscita (**I**).

Quindi è necessario un controllore PI con f.d.t.

$$C(s) = K_c \frac{1 + sT_c}{s}$$

## 8.1 Retroazione di Posizione

In questo caso  $C_V(s) = C_A(s) = 1$ ,  $k_{TV} = k_{TA} = 0$  e  $C_P(s) = K_P \frac{1+sT_P}{s}$ .

La f.d.t del ramo di azione diretta è:

$$P(s) = C_P(s)M(s) = \frac{k_m K_P (1 + sT_P)}{s^2 (1 + sT_m)}$$

la f.d.t. del ramo in retroazione è:

$$H(s) = K_{TP}$$

la funzione di trasferimento in anello chiuso sarà:

$$W(s) = \frac{P(s)}{1 + H(s)P(s)} = \frac{\frac{1}{k_{TP}}}{1 + \frac{s^2 (1 + sT_m)}{k_m K_P K_{TP} (1 + sT_P)}}$$

se  $T_P < T_m$  il sistema risulta *intrinsecamente instabile*. Per assicurare la stabilità deve risultare  $T_P > T_m$ . Per ottenere migliori caratteristiche di prontezza si sceglie  $T_P \gg T_m$ .