ROBOTICS, MOD. 1: INDUSTRIAL HANDLING
LAUREA MAGISTRALE IN **AUTOMATION ENGINEERING**

ESAME/ESONERO DEL 28/01/2022

Quesito A (Solo Esame completo)
Assegnato il manipolatore in figura, con lunghezze dei bracci $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 0.5$, e posto $a_0 = 1$:

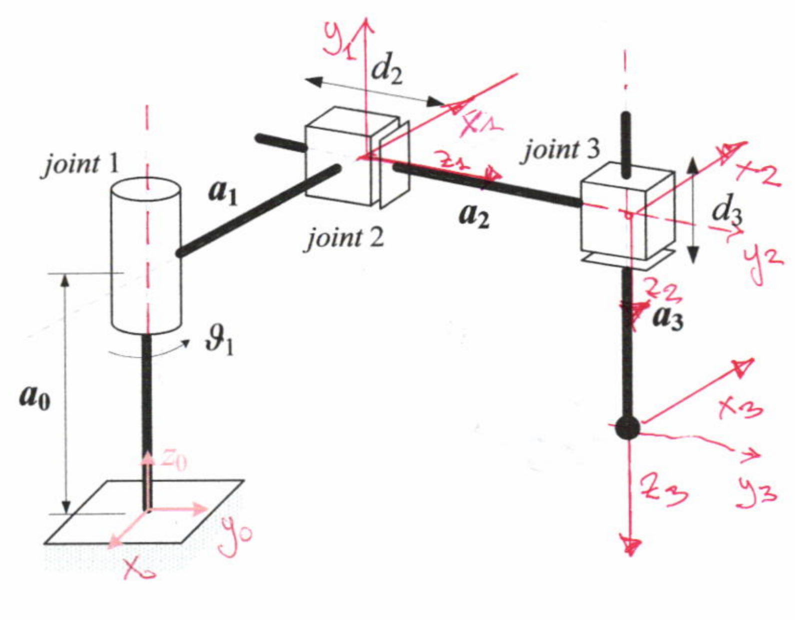
1. Si fissino le terne solidali con ciascun braccio seguendo la convenzione di Denavit-Hartenberg, giustificando adeguatamente la scelta;
2. Si calcoli la funzione cinematica diretta;
3. Si calcoli lo Jacobiano geometrico;
4. Si calcolino posizione e orientamento delle terne solidali con ciascun braccio, rispetto alla terna base, quando il vettore delle variabili di giunto assume il valore $q = \left[\frac{\pi}{2} \quad 0.5 \quad 0.2\right]^T$.
5. Si individui il vettore delle variabili di giunto corrispondente alla posizione dell'origine della terna dell'organo terminale data da $[-1, 1, 0.5]$. Si se determini il punto $[1, -1.5, 0.6]$ appartenga o meno allo spazio di lavoro del manipolatore.
6. Con riferimento alla configurazione del punto 4., si determini la velocità di ciascuna terna rispetto al riferimento fisso assumendo una velocità dei giunti data da $\dot{q} = [0 \quad 1 \quad 1]^T$. Si commenti il risultato.

Quesito B (Esame completo ed Esonero)
Si definisca la traiettoria per la variabile di un giunto (si caratterizzi matematicamente la legge oraria in termini di posizione $q(t)$, velocità $\dot{q}(t)$, accelerazione $\ddot{q}(t)$) adoperando tratti parabolici e lineari con passaggio in prossimità dei punti di via $q = 0, 2\pi, \pi/2$ negli istanti $t = 0, 2, 3$, con durate dei tratti parabolici $\Delta t' = 0.2, 0.2, 0.4$.

Quesito C (Esame completo ed Esonero)
Adottando un linguaggio sintetico ed appropriato, si discuta del controllo indipendente ai giunti, con retroazione di posizione e controllore PI. In particolare, si illustri:

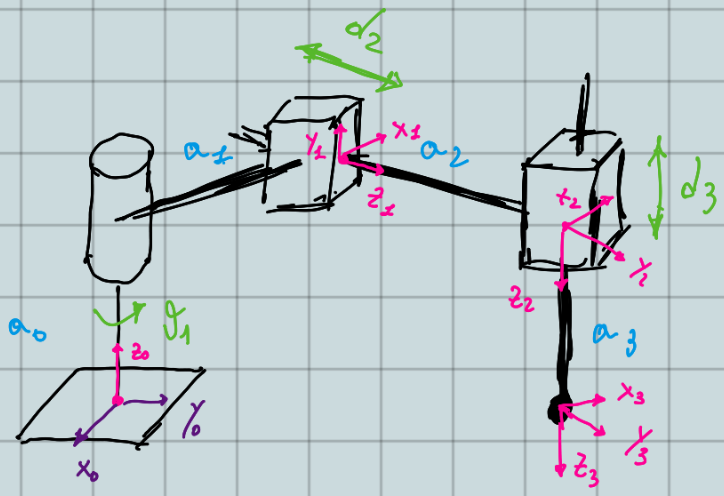
- In cosa consiste e quali sono i principi alla base del controllo indipendente ai giunti, e sotto quali ipotesi sia possibile utilizzare uno schema di controllo indipendente ai giunti;
- Lo schema di controllo in feedback per il singolo giunto con controllore di posizione;
- Un metodo di taratura dei parametri del regolatore che consenta di ottenere una dinamica del secondo ordine sottosmorzata in anello chiuso;
- Uno schema di compensazione in avanti decentralizzata.

Infine, si discuta della compensazione dei termini di accoppiamento mediante uno schema di controllo a coppia precalcolata.



A

1



guardando dall'asse x_i
rotazione traslazione
$z_i \to z_{i-1}$ (senso positivo antiorario)

Link	a_i	α_i	ϑ_i	d_i
# 1	a_1	$\pi/2$	ϑ_1	a_0
# 2	0	$\pi/2$	0	d_2
# 3	0	0	0	d_3

$a_0 = a_1 = a_2 = 1$

$a_3 = 0,5$

Gli assi z_{i-1} sono scelti lungo l'asse di rotazione/traslazione di giunto.
Per gli altri regole di DH.

2

$$A_i^{i-1} = \begin{bmatrix} C_{\vartheta_i} & -S_{\vartheta_i} C_{\alpha_i} & S_{\vartheta_i} S_{\alpha_i} & a_i C_{\vartheta_i} \\ S_{\vartheta_i} & C_{\vartheta_i} C_{\alpha_i} & -C_{\vartheta_i} S_{\alpha_i} & a_i S_{\vartheta_i} \\ 0 & S_{\alpha_i} & C_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$z_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$p_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_1^0 = \begin{bmatrix} C_{\vartheta_1} & 0 & S_{\vartheta_1} & a_1 C_{\vartheta_1} \\ S_{\vartheta_1} & 0 & -C_{\vartheta_1} & a_1 S_{\vartheta_1} \\ 0 & 1 & 0 & a_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & & z_1 & p_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} C_{\vartheta_1} & 0 & \boxed{\begin{matrix} S_{\vartheta_1} \\ -C_{\vartheta_1} \\ 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} C_{\vartheta_1} \\ S_{\vartheta_1} \\ 1 \end{matrix}} \\ S_{\vartheta_1} & 0 & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A_2^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2^0 = \begin{bmatrix} c_{\vartheta_1} & 0 & s_{\vartheta_1} & c_{\vartheta_1} \\ s_{\vartheta_1} & 0 & -c_{\vartheta_1} & s_{\vartheta_1} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{array}{c} \begin{matrix} \phantom{c_{\vartheta_1}} & \phantom{-c_{\vartheta_1}} & z_2 & p_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} c_{\vartheta_1} & s_{\vartheta_1} & 0 & d_2 s_{\vartheta_1} + c_{\vartheta_1} \\ s_{\vartheta_1} & -c_{\vartheta_1} & 0 & -d_2 c_{\vartheta_1} + s_{\vartheta_1} \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$T(q) = A_3^0 = \begin{bmatrix} c_{\vartheta_1} & s_{\vartheta_1} & 0 & d_2 s_{\vartheta_1} + c_{\vartheta_1} \\ s_{\vartheta_1} & -c_{\vartheta_1} & 0 & -d_2 c_{\vartheta_1} + s_{\vartheta_1} \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$
= \begin{array}{c} \\ \end{array}
\begin{array}{cccc} & & z_3 & p \equiv p_3 \\ \end{array}
$$

$$
= \begin{bmatrix} c_{\vartheta_1} & s_{\vartheta_1} & 0 & d_2 s_{\vartheta_1} + c_{\vartheta_1} \\ s_{\vartheta_1} & -c_{\vartheta_1} & 0 & -d_2 c_{\vartheta_1} + s_{\vartheta_1} \\ 0 & 0 & -1 & -d_3 + 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

3

$$
J(q) = \begin{bmatrix} z_0 \wedge (p - p_0) & z_1 & z_2 \\ z_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =
$$

$$
z_0 \wedge p = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ d_2 s_{\vartheta_1} + c_{\vartheta_1} & -d_2 c_{\vartheta_1} + s_{\vartheta_1} & -d_3 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_2 c_{\vartheta_1} - s_{\vartheta_1} \\ d_2 s_{\vartheta_1} + c_{\vartheta_1} \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} d_2 c_{\vartheta_1} - s_{\vartheta_1} & s_{\vartheta_1} & 0 \\ d_2 s_{\vartheta_1} + c_{\vartheta_1} & -c_{\vartheta_1} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

4

$$
q = \begin{bmatrix} \vartheta_1 & d_2 & d_3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \pi/2 & 0{,}5 & 0{,}2 \end{bmatrix}'
$$

$$R_0^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad p_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$R_0^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad p_2 = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$R_0^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad p_3 = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1 \\ 0,8 \end{bmatrix}$$

6

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \dot{\vartheta}_1 & \dot{d}_1 & \dot{d}_2 \end{bmatrix}'$$

$$[0 \quad 1 \quad 1]$$

$$J_{L_1} = \begin{bmatrix} z_0 \wedge (p_1 - p_0) & 0 & 0 \\ z_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V_1 = J_{L1}\,\dot q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}}\right\} \dot p_1 \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}}\right\} \omega_1 \end{matrix}$$

La velocità lineare di p_1 è NULLA, il joint 1 non si muove.

$$J_{L2} = \begin{bmatrix} z_0 \wedge (\overset{[0{,}5 \;\; 1 \;\; 1]}{p_2} - p_0) & z_1 & 0 \\ z_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

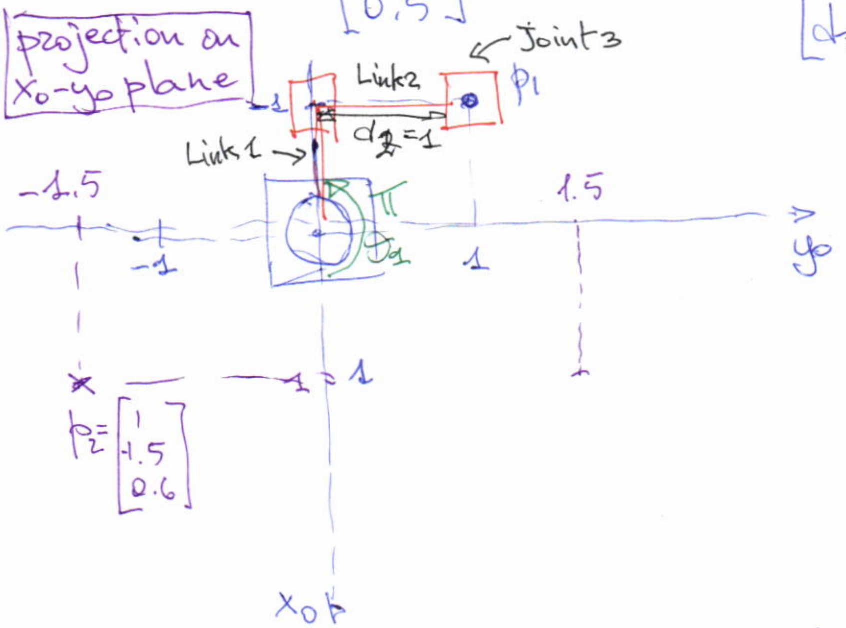
$$V_2 = J_{L2}\,\dot q = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}}\right\} \dot p_2 \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}}\right\} \omega_2 \end{matrix}$$

$$J_{L_3} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = J$$

$$V_3 = J\,\dot{q} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\0\\-1\end{matrix}}\right\} \dot{p}_3 \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}}\right\} \omega_3 \end{matrix}$$

A.5

Given $p_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$, find $q = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$ to obtain it



$\theta_1 = \pi$

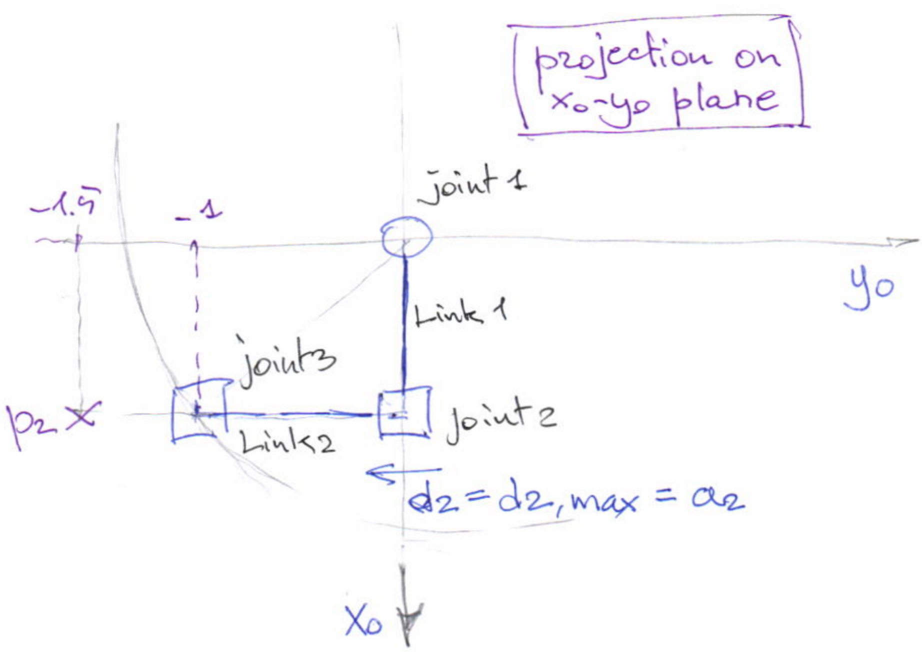
$d_2 = 1$

$d_3 = 0.5$

$q = \begin{bmatrix} \pi \\ 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$

According to the choice mode for reference frames,

$p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1.5 \\ 0.6 \end{bmatrix}$ p_2 does not belong to the working space of the manipulator, because p_y coordinate overcomes the length of link 2



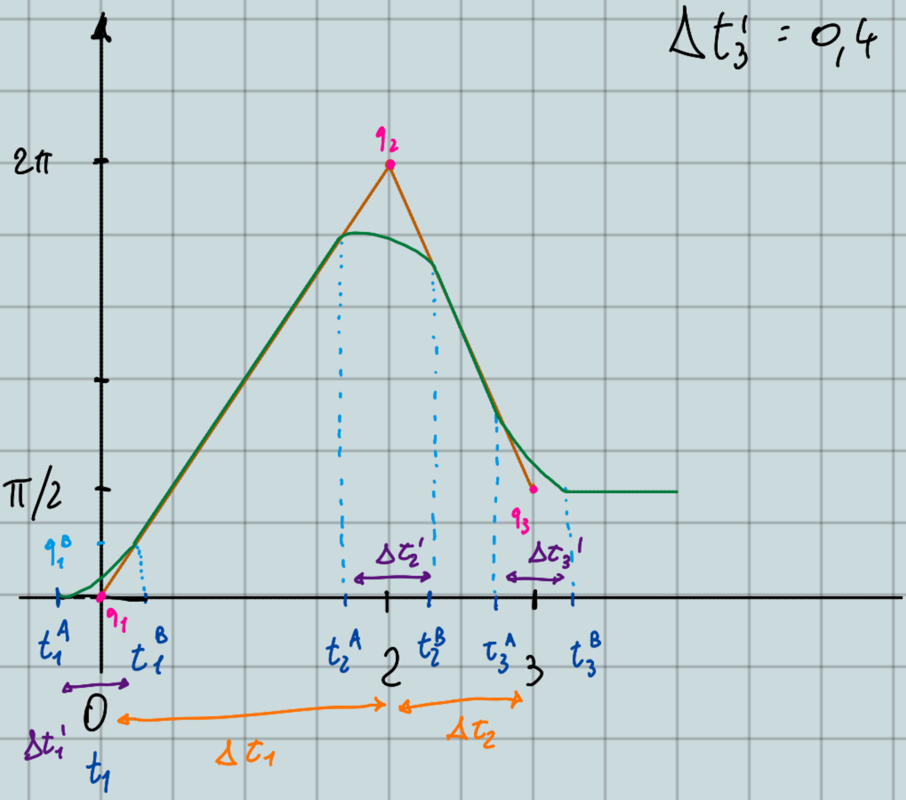
B

$q = [0 \quad 2\pi \quad \pi/2]$

$\Delta t_1' = 0,2$

$\Delta t_2' = 0,2$

$\Delta t_3' = 0,4$



Motion Law :

linear path → $q_k(t) = q_k + (q_{k+1} - q_k)\dfrac{t - t_k}{\Delta t_k}$ $\quad k = 1, 2$

parabolic blends → $p_k(t) = a_{k0} + a_{k1}t + a_{k2}t^2$ $\quad k = 1, 2, 3$

Vincoli su velocità ed accelerazioni :

$$\dot{q}_{k-1,k} = \frac{q_k - q_{k-1}}{\Delta t_{k-1}}$$

$$\ddot{q}_k = \frac{\dot{q}_{k,k+1} - \dot{q}_{k-1,k}}{\Delta t_k'}$$

LINEAR PATH:

$$\begin{cases} q_1(t) = q_1 + (q_2 - q_1)\dfrac{t - t_1}{\Delta t_1} = 2\pi \dfrac{t}{2} = \pi t \quad \text{per} \quad t_1^B \le t \le t_2^A \\ q_2(t) = q_2 + (q_3 - q_2)\dfrac{t - t_2}{\Delta t_2} = 2\pi + \left(\dfrac{\pi}{2} - 2\pi\right)\dfrac{t-2}{1} = -\dfrac{3}{2}\pi t + 5\pi \end{cases}$$

$\to$ per $t_2^B \le t \le t_3^A$

Calcolo delle velocità dei tratti lineari e le accelerazioni dai tratti parabolici:

$$\begin{cases} \dot{q}_{01} = 0 \\ \dot{q}_{12} = \dfrac{q_2 - q_1}{\Delta t_1} = \pi \\ \dot{q}_{23} = \dfrac{q_3 - q_2}{\Delta t_2} = -\dfrac{3}{2}\pi \\ \dot{q}_{34} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{q}_1 = \dfrac{\dot{q}_{1,2} - \dot{q}_{0,1}}{\Delta t_1'} = \dfrac{\pi}{0,2} = 5\pi \\ \ddot{q}_2 = \dfrac{\dot{q}_{2,3} - \dot{q}_{1,2}}{\Delta t_2'} = -\dfrac{25}{2}\pi \\ \ddot{q}_3 = \dfrac{\dot{q}_{3,4} - \dot{q}_{2,3}}{\Delta t_3'} = \dfrac{15}{4}\pi \end{cases}$$

Connection Points $\left[t_K^A = t_K - \dfrac{\Delta t_K'}{2} \; ; \; t_K^B = t_K + \dfrac{\Delta t_K'}{2} \right]$

$$\begin{cases} t_1^A = t_1 - \dfrac{\Delta t_1'}{2} = -0,1 \\ t_1^B = t_1 + \dfrac{\Delta t_1'}{2} = 0,1 \end{cases} \quad \begin{cases} q_1^A = 0 \\ q_1^B = q_1(t_1^B) = \pi \cdot 0,1 = 0,314 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_2^A = t_2 - \dfrac{\Delta t_2'}{2} = 1,9 \\ t_2^B = t_2 + \dfrac{\Delta t_2'}{2} = 2,1 \end{cases} \quad \begin{cases} q_2^A = q_1(t_2^A) = \pi \cdot 1,9 = 5,969 \\ q_2^B = q_2(t_2^B) = -\dfrac{3}{2}\pi \cdot 2,1 + 5\pi = 5,812 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_3^A = t_3 - \dfrac{\Delta t_3'}{2} = 2,8 \\ t_3^B = t_3 + \dfrac{\Delta t_3'}{2} = 3,2 \end{cases} \quad \begin{cases} q_3^A = q_2(t_3^A) = -\frac{3}{2}\pi \cdot 2,8 + 5\pi = 2,513 \\ q_3^B = \pi/2 \end{cases}$$

Parabolics Blends :

$t = t_1^A$

$$\begin{cases} p_1(t) = a_{10} + a_{11} t + a_{12} t^2 \\ \dot{p}_1(t) = a_{11} + 2a_{12} t \\ \ddot{p}_1(t) = 2a_{12} \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = a_{10} + a_{11}(-0,1) + a_{12}(-0,1)^2 \\ 0 = a_{11} + 2a_{12}(-0,1) \\ 5\pi = 2a_{12} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{12} = \frac{5}{2}\pi = 7,85 \\ a_{11} = -2(7,85)(-0,1) = 1,57 \\ a_{10} = -1,57(-0,1) - 7,85(0,01) = 0,08 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_2(t) = a_{20} + a_{21} t + a_{22} t^2 \\ \dot{p}_2(t) = a_{21} + 2a_{22} t \\ \ddot{p}_2(t) = 2a_{22} \end{cases} \quad \begin{cases} p_2(t_2^A) = a_{20} + a_{21} t_2^A + a_{22} (t_2^A)^2 \\ p_2(t_2^B) = a_{20} + a_{21} t_2^B + a_{22} (t_2^B)^2 \\ -\frac{25}{2}\pi = 2a_{22} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5,969 = a_{20} + a_{21}(1,9) + (-19,64)(1,9)^2 \\ 5,812 = a_{20} + a_{21}(2,1) + (-19,64)(2,1)^2 \\ a_{22} = -19,64 \end{cases} \quad \begin{cases} a_{20} = 70,85 \\ a_{21} = 77,70 \\ // \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho_3(t) = a_{30} + a_{31}t + a_{32}t^2 \\ \dot{\rho}_3(t) = a_{31} + 2a_{32}t \\ \ddot{\rho}_3(t) = 2a_{32} \end{cases}$$

$t = t_3^B$

$$\begin{cases} \pi/2 = a_{30} + a_{31}(3,2) + a_{32}(3,2)^2 \\ -\frac{3}{2}\pi = a_{31} + 2a_{32} \\ \frac{15}{4}\pi = 2a_{32} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{30} = 61,90 \\ a_{31} = -37,70 \\ a_{32} = 5,89 \end{cases}$$

MOTION LAWS

$$\begin{cases} q(t) = 0,08 + 1,57t + 7,85t^2 & \text{per } -0,1 \le t \le 0,1 \\ q(t) = \pi t & \text{per } 0,1 \le t \le 1,9 \\ q(t) = 70,85 + 77,70t - 19,64t^2 & \text{per } 1,9 \le t \le 2,1 \\ q(t) = -\frac{3}{2}\pi t + 5\pi & \text{per } 2,1 \le t \le 2,8 \\ q(t) = 61,90 - 37,70t + 5,89t^2 & \text{per } 2,8 \le t \le 3,2 \end{cases}$$