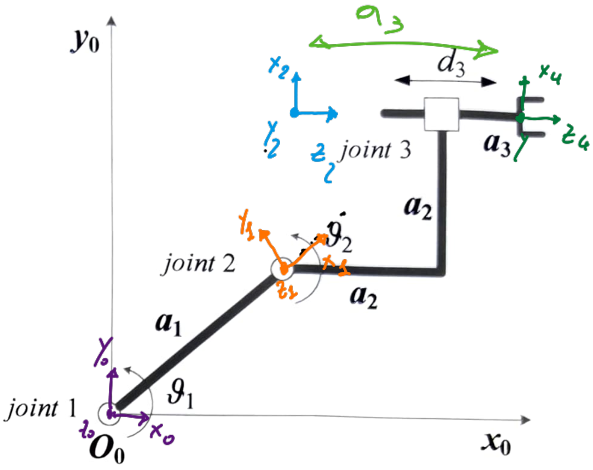
ROBOTICS, MOD. 1: INDUSTRIAL HANDLING
LAUREA MAGISTRALE IN **AUTOMATION ENGINEERING**

**ESAME DEL 10/06/2025**

---

**Quesito A**

Sia assegnato il manipolatore planare in figura (2 giunti rotoidali ed uno prismatico), con le seguenti lunghezze dei bracci:
$a_1 = 1$, $a_2 = 0.8$, $a_3 = 0.5$.




✓ • Si fissino le terne solidali con ciascun braccio seguendo la convenzione di Denavit-Hartenberg, giustificando adeguatamente la scelta; quindi, si rappresenti graficamente il manipolatore nella configurazione iniziale (valori delle variabili di giunto nulli), rappresentando altresì le terne solidali con ciascun braccio;
✓ • Si calcoli la funzione cinematica diretta;
✓ • Si calcoli lo Jacobiano geometrico;
✓ • Si determini la velocità della terna solidale con il terzo braccio nella configurazione $q = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, 0.2\right]^T$, assumendo velocità dei giunti $\dot{q} = [0.1, -0.2, 0.05]^T$. Si rappresenti graficamente in tale configurazione il manipolatore e il vettore velocità lineare dell'organo terminale;
✓ • Si verifichi se la configurazione considerata al punto precedente sia prossima ad una singolarità.

**Quesito B**

Si calcoli la traiettoria di un giunto rotoidale (definendo le leggi orarie di posizione, velocità, accelerazione) adoperando un profilo di velocità trapezoidale, considerando come valori iniziale e finale della variabile di giunto rispettivamente $q_i = 0\ rad$ e $q_f = \frac{\pi}{2} rad$, con tempo totale di esecuzione pari a 2 secondi. Per la pianificazione della traiettoria si assumano limiti massimi di velocità e accelerazione rispettivamente pari a $1\ rad/s$ e $2\ rad/s^2$, verificando se il profilo è realizzabile con i vincoli assegnati, e in caso contrario si proponga una modifica opportuna.

**Quesito C**

- Richiamando il principio dei lavori virtuali, si mostri come ottenere il legame tra il vettore delle coppie ai giunti e il vettore delle forze all'end-effector di un manipolatore industriale.
- Con linguaggio appropriato, si spieghi sinteticamente qual è l'effetto delle singolarità del Jacobiano sulla trasmissione delle forze dall'end-effector ai giunti, eventualmente aiutandosi con un esempio pratico.

| L# | $a_i$ | $\vartheta_i$ | $\alpha_i$ | $d_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $a_1$ | $\vartheta_1$ | 0 | 0 |
| 2 | $a_2$ | $\vartheta_2$ | $\pi/2$ | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | $d_3+a_3$ |

$a_1 = 1$

$a_2 = 0{,}8$

$a_3 = 9{,}5$

A

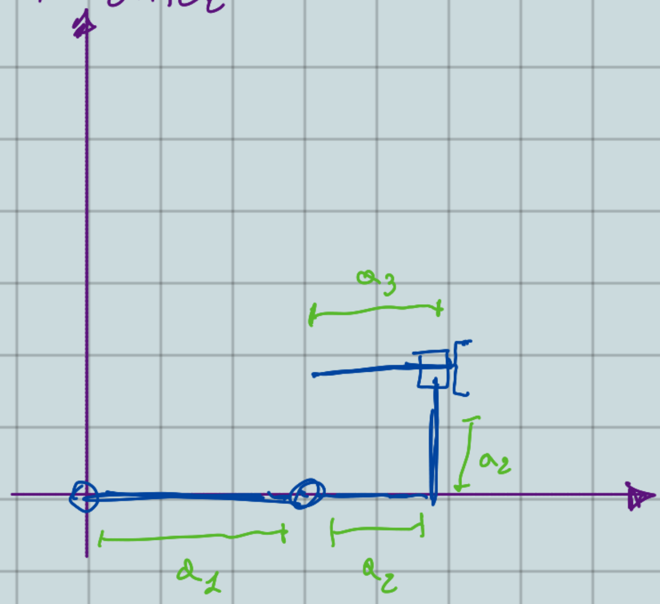
$$A_i^{i-1} = \begin{bmatrix} C_{\vartheta_i} & -S_{\vartheta_i} C_{\alpha_i} & S_{\vartheta_i} S_{\alpha_i} & a_i C_{\vartheta_i} \\ S_{\vartheta_i} & C_{\vartheta_i} C_{\alpha_i} & -C_{\vartheta_i} S_{\alpha_i} & a_i S_{\vartheta_i} \\ 0 & S_{\alpha_i} & C_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_1^0 = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & C_1 \\ S_1 & C_1 & 0 & S_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2^1 = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & S_2 & 0{,}8\,C_2 \\ S_2 & 0 & -C_2 & 0{,}8\,S_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_3+d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

CONFIGURAZIONE INIZIALE



$$A_2^0 = \begin{bmatrix} c_1 c_2 - s_1 s_2 & 0 & c_1 s_2 - s_1 c_2 & \overset{*_1}{0{,}8 c_1 c_2 - 0{,}8 s_1 s_2 + c_1} \\ s_1 c_2 + c_1 s_2 & 0 & s_1 s_2 - c_1 c_2 & \underset{*_2}{0{,}8 s_1 c_2 + 0{,}8 c_1 s_2 + s_1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^0 = \begin{bmatrix} c_1 c_2 - s_1 s_2 & 0 & c_1 s_2 - s_1 c_2 & (c_1 s_2 - s_1 c_2)(a_3 + d_3) + *_1 \\ s_1 c_2 + c_1 s_2 & 0 & s_1 s_2 - c_1 c_2 & (s_1 s_2 - c_1 c_2)(a_3 + d_3) + *_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$p - p_1 = \begin{bmatrix} c_1 s_2 a_3 + c_1 s_2 d_3 - s_1 c_2 a_3 - s_1 c_2 d_3 + 0{,}8 c_1 c_2 - 0{,}8 s_1 s_2 \\ s_1 s_2 a_3 + s_1 s_2 d_3 - c_1 c_2 a_3 - c_1 c_2 d_3 + 0{,}8 s_1 c_2 + 0{,}8 c_1 s_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$z_0 \wedge p = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_j \\ p_i \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$z_1 \wedge (p - p_1) = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_j \\ p_i \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} z_0 \wedge p & z_1 \wedge (p - p_1) & z_2 \\ z_0 & z_1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} s_1 s_2 0{,}5 + s_1 s_2 d_3 - c_1 c_2 0{,}5 - c_1 c_2 d_3 + 0{,}8 s_1 c_2 + 0{,}8 c_1 s_2 + s_1 & s_1 s_2 0{,}5 + s_1 s_2 d_3 - c_1 c_2 0{,}5 - c_1 c_2 d_3 + 0{,}8 s_1 c_2 + 0{,}8 c_1 s & c_1 s_2 - s_1 c_2 \\ c_1 s_2 0{,}5 + c_1 s_2 d_3 - s_1 c_2 0{,}5 - s_1 c_2 d_3 + 0{,}8 c_1 c_2 - 0{,}8 s_1 s_2 + c_1 & c_1 s_2 0{,}5 + c_1 s_2 d_3 - s_1 c_2 0{,}5 - s_1 c_2 d_3 + 0{,}8 c_1 c_2 - 0{,}8 s_1 s & s_1 s_2 - c_1 c_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$q = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{6} & 0{,}2 \end{bmatrix}^T$$

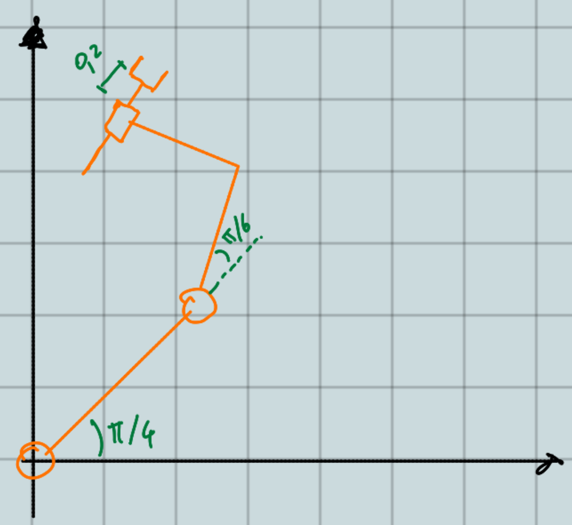
$$\dot{q} = \begin{bmatrix} 0{,}1 & -0{,}2 & 0{,}05 \end{bmatrix}^T$$

$$J(q) = \begin{bmatrix} 1{,}299 & 0{,}592 & -0{,}259 \\ 0{,}733 & 0{,}026 & -0{,}259 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V = J\dot{q} = \begin{bmatrix} 0{,}1 \cdot 1{,}299 - 0{,}2 \cdot 0{,}592 - 0{,}05 \cdot 0{,}259 \\ 0{,}1 \cdot 0{,}733 - 0{,}2 \cdot 0{,}026 - 0{,}05 \cdot 0{,}259 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0{,}1 - 0{,}2 + 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -0{,}00145 \\ 0{,}05515 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0{,}1 \end{bmatrix}$$

CONFIGURAZIONE IN $q$



$$
\begin{vmatrix}
s_1 s_2 0{,}5 + s_1 s_2 d_3 - c_1 c_2 0{,}5 - c_1 c_2 d_3 + 0{,}8 s_1 c_2 + 0{,}8 c_1 s_2 + s_1 & s_1 s_2 0{,}5 + s_1 s_2 d_3 - c_1 c_2 0{,}5 - c_1 c_2 d_3 + 0{,}8 s_1 c_2 + 0{,}8 c_1 s & c_1 s_2 - s_1 c_2 \\
s_2 0{,}5 + c_1 s_2 d_3 - s_1 c_2 0{,}5 - s_1 c_2 d_3 + 0{,}8 c_1 c_2 - 0{,}8 s_1 s_2 + c_1 & c_1 s_2 0{,}5 + c_1 s_2 d_3 - s_1 c_2 0{,}5 - s_1 c_2 d_3 + 0{,}8 c_1 c_2 - 0{,}8 s_1 s & s_1 s_2 - c_1 c_2 \\
1 & 1 & 0
\end{vmatrix}
$$

Singolarity $\rightarrow \det(J) = 0$

$$\Rightarrow \cancel{(s_1 s_2 0{,}5 + s_1 s_2 d_3 - c_1 c_2 0{,}5 - c_1 c_2 d_3 + 0{,}8 s_1 c_2 + 0{,}8 c_1 s)(s_1 s_2 - c_1 c_2)} +$$

$c_1$

$$+ \cancel{(s_2 0{,}5 + c_1 s_2 d_3 - s_1 c_2 0{,}5 - s_1 c_2 d_3 + 0{,}8 c_1 c_2 - 0{,}8 s_1 s_2 + c_1)}(c_1 s_2 - s_1 c_2) -$$

$$- \cancel{(c_1 s_2 0{,}5 + c_1 s_2 d_3 - s_1 c_2 0{,}5 - s_1 c_2 d_3 + 0{,}8 c_1 c_2 - 0{,}8 s_1 s)(c_1 s_2 - s_1 c_2)} -$$

$s_1$

$$- \cancel{(s_1 s_2 0{,}5 + s_1 s_2 d_3 - c_1 c_2 0{,}5 - c_1 c_2 d_3 + 0{,}8 s_1 c_2 + 0{,}8 c_1 s_2 + s_1)}(s_1 s_2 - c_1 c_2) =$$

$$= c_1^2 s_2 - \cancel{s_1 c_1 c_2} - s_1^2 s_2 + \cancel{s_1 c_1 c_2} =$$

$$= s_2 (c_1^2 - s_1^2) = 0$$

$$\Rightarrow s_2 = 0 \Rightarrow \vartheta_2 = 0, \pi$$

$$c_1^2 - s_1^2 = 0 \rightarrow c_1^2 = s_1^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow c_1 = s_1 \rightarrow \quad \vartheta_1 = \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}$$

B

$q_i = 0$

$q_f = \frac{\pi}{2}$

$t_f = 2$

$\dot{q}_{MAX} = 1$

$\ddot{q}_{MAX} = 2$

$t_f = ?$ (vedere se effettivamente realizzabile)

$$t_c = \frac{\dot{q}_{MAX}}{\ddot{q}_{MAX}} = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$q_c = q_i + \frac{1}{2} \ddot{q}_{MAX} t_c^2 = 0 + \frac{1}{2} \cdot 2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4} = 0,25$$

check

$$\Delta q = q_f - q_i - 2q_c = \frac{\pi}{2} - 2 \cdot 0{,}25 =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \simeq 2{,}14 \underline{> 0} \quad ok!$$

fattibile
raggiungere la
velocità di crociera
MAX

$$\Delta t = \frac{\Delta q}{\dot{q}_{MAX}} = \frac{2{,}14}{2} = 1{,}07$$

$$t_f = \Delta t + 2t_c = \underbrace{2{,}07}_{}$$

é > 2 sec ($t_f$ traccia)

NON realizzabile

Possiamo adottare un profilo

BANG - BANG :

$$t_m = \sqrt{\frac{q_f - q_i}{\ddot{q}_{max}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 0,89$$

$$t_f = 2t_m = \sqrt{\pi} = 1,77 \underline{< 2 \text{ ok!}}$$

## C) Principio dei Lavori Virtuali

Per determinare la relazione tra forze e coppie applicate ai giunti $(\tau)$ e le forze ed i momenti esercitate dall'organo terminale $(\gamma)$.

Lavoro virtuale ai giunti: lavoro compiuto dalle coppie ai giunti per uno spostamento virtuale elementare dei giunti $\delta W_\tau = \tau^T \delta q$

Lavoro virtuale dell'organo terminale: // // forze dell'organo Terminale (composto da forze $f$ e momenti $\mu$) per uno spostamento virtuale cartesiano $\delta x$ (composto da spostamento lineare $dp$ ed angolare $\omega dt$)

$\delta W_\gamma = \gamma^T \underbrace{\delta x} = \gamma^T \underbrace{J(q)\,\delta q}$

Per l'equilibrio $\delta W_\tau = \delta W_\gamma \quad \forall \delta q \Rightarrow \tau = J^T(q)\,\gamma$

### Effetto Singolarità dello Jacobiano sulla Trasmissione della Forza.

Se $\gamma \in N((J^T)) \Rightarrow$ la forza esterna viene interamente assorbita dalla struttura meccanica del robot. "Il manipolatore risulta bloccato in quella posa specifica".