Tema n. 1 **10 pt**

Un'azienda deve ricompattare la merce del proprio magazzino che non ha più capacità disponibile per i nuovi materiali in arrivo. Il magazzino è composto da 10 cassoni ciascuno dei quali può contenere 15 scatole di un qualche prodotto di dimensioni standard. La politica iniziale di immagazzinare in ciascun cassone un solo tipo di prodotto ha portato nel tempo a caricare molti cassoni al di sotto della propria capacità. Nella tabella è riportato il numero di scatole attualmente immagazzinate in ciascun cassone. Si è, quindi, deciso di liberare il massimo numero di cassoni possibili ricompattando la merce e riempiendo i cassoni con prodotti distinti. Si desidera comunque che i prodotti dello stesso tipo vengano immagazzinati nello stesso cassone.

1) Formulare il problema di minimizzare il numero di cassoni necessario a contenere tutta la merce in magazzino (**7 punti**).
2) Risolvere tramite risolutore Excel il suddetto problema (**3 punti**).

Cassone	Scatole	Cassone	Scatole
A	4	F	6
B	6	G	14
C	7	H	2
D	3	I	4
E	5	L	3

$i = 1, 2, \dots, 10$ [cassoni] $(A, B, C, \dots, L)$

$j = 1, \dots, 10$ [tipi di scatola]

Variabili:

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{se il cassone é usato} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se il prodotto } j \text{ é immagazzinato nel cassone } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

parametri:

$$p_j = [4; 6; 7; 3; 5; 6; 14; 2; 4; 3]$$

obiettivo:

$$\min \sum_{i=1}^{10} y_i$$

vincolo:

$$\sum_{i=1}^{10} x_{ij} = 1 \qquad \text{per} \quad j = 1, \dots, 10$$

$$\sum_{j=1}^{10} p_j x_{ij} \leq 15 y_i \qquad \text{per} \quad i = 1, \dots, 10$$

Tema n. 2 **8 pt**

Dato il seguente problema (P) di PL:

$$\min z(x) = 2x_1 - x_2 + 2x_3$$

$$s.v.$$

$$2x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 1$$

$$-x_1 - 2x_2 = 2$$

$$x_1 - 2x_2 - 2x_3 \geq 5$$

$$x_1, x_3 \geq 0$$

$$x_2 \leq 0$$

1) costruire il duale di (P) (**3 punti**);
2) determinare in maniera grafica la soluzione ottima del problema (P), sapendo che $x_3^* = 0$. (**3 punti**)
3) determinare la soluzione ottima di (D) nel modo più semplice possibile (**2 punti**).

$$\max w(y) = 1y_1 + 2y_2 + 5y_3$$

$$2y_1 - y_2 + y_3 \leq 2$$

$$2y_1 - 2y_2 - 2y_3 \geq -1$$

$$-y_1 - 2y_3 \leq 2$$

$$y_1 \geq 0$$

$$y_3 \geq 0$$

y_2 libera

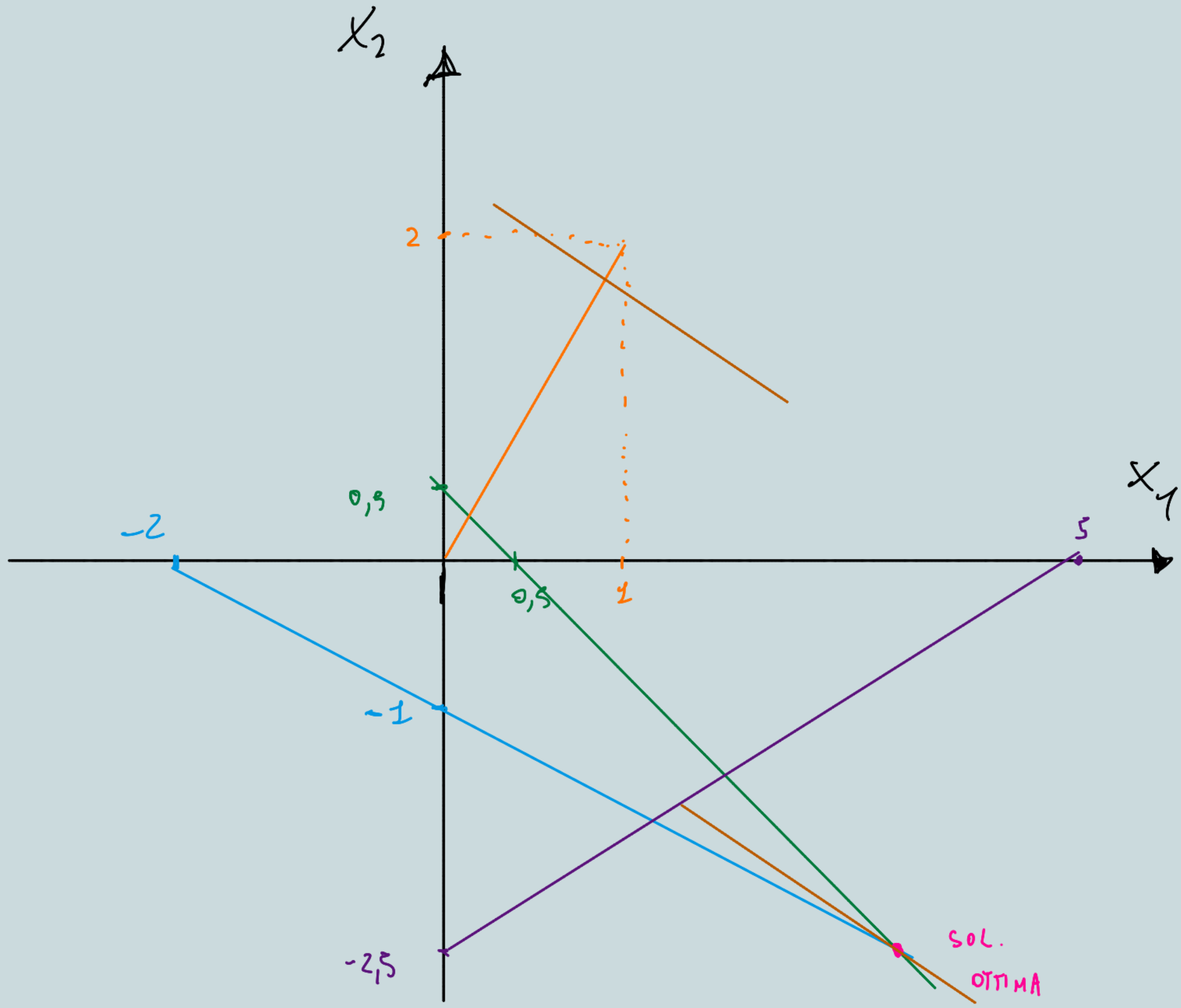
Se $x_3^* = 0$

$$\min \; 2x_1 - x_2 \qquad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

- $2x_1 + 2x_2 \geq 1$
- $-x_1 - 2x_2 = 2$
- $x_1 - 2x_2 \geq 5$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \leq 0$



$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -2x_2 - 2 \\ -4x_2 - 4 + 2x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 5 - 2 = 3 \\ x_2 = -\frac{5}{2} = -2{,}5 \end{cases}$$

$$z^* = 2 \cdot 3 - (-2{,}5) = 8{,}5$$

$W^* = 8{,}5$ → per il Teorema della Dualitá Forte

Valuto i vincoli attivi e non

1°) $2x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 1$ →

→ $6 - 5 \geq 1$ → ATTIVO → Y_1 può essere $\neq 0$

2°) $-3 - 2(-2{,}5) = 2$ → ATTIVO → $Y_2 \neq 0$

3°) $3-2(-2,5) \geq 5 \rightarrow 8 \geq 5 \rightarrow$ INATTIVO $\rightarrow y_3 = 0$

Poiché $x_1, x_2 \neq 0$ i primi due vincoli del duale devono essere attivi:

$$\begin{cases} 2y_1 - y_2 + y_3 \leq 2 \\ 2y_1 - 2y_2 - 2y_3 \geq -1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2y_1 - y_2 = 2 \\ 2y_1 - 2y_2 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2 = 2y_1 - 2 \\ 2y_1 - 4y_1 + 4 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} y_2 = 3 \\ y_1 = \frac{5}{2} = 2,5 \end{cases}$$

$$y^* = [2.5, 3, 0]$$

[(scarti tramite complementari) trovata la soluzione]

Tema n. 3 **10 pt**

Dato il seguente problema (P) di PL in forma standard:

$$\min z(x) = x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4$$

$$s.v.$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 3$$

$$-2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

1) definire il problema equivalente a (P) in forma canonica rispetto all'insieme di indici di base $B=\{1,4\}$ (**3 punti**);
2) verificare se la SBA corrispondente a B è ottima (**1 punto**);
3) verificare se tale SBA rimarrà ottima anche nel caso in cui il secondo coefficiente della funzione obiettivo assuma valore 1 (**3 punti**);
4) determinare se la B rimarrà ancora ottima nel caso in cui $b_1=5$ (**3 punti**).

$$A_B = \{x_1, x_4\} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/6 \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = A_B^{-1} b = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 4/3 \end{bmatrix}$$

$$\bar{z} = c_B^T A_B^{-1} b = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 \\ 4/3 \end{bmatrix} = 3$$

$$\bar{A}_N = A_B^{-1} A_N = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1/3 \\ -1/2 & 2/3 \end{bmatrix}$$

$$\bar{c}^T = c^T - c_B^T A_B^{-1} A = [1 \quad 2 \quad 4 \quad 2] - [1 \quad 2] \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = [0 \quad \underline{4} \quad \underline{3} \quad 0]$$

(IN BASE)

Forma CANONICA:

$$\min \ \bar{z} + \bar{c}_N x_N$$

$$x_B = \bar{b} - \bar{A}_N x_N$$

$$x_N, x_B \geq 0$$

$$\min \ 3 + 4x_2 + 3x_3$$

$$\begin{cases} x_1 = 1/3 + x_3 + \frac{1}{3} x_4 \\ x_2 = 4/3 + \frac{1}{2} x_3 - \frac{2}{3} x_4 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

PONIAMO UGALI A ZERO LE VARIABILI IN BASE

$$SBA = [1/3 \quad 0 \quad 0 \quad 4/3]$$

$\bar{C}^T \geq 0$ la soluzione è ottima.

Se $c_2 = 1$

(fuori base) $\rightarrow$ $\Delta \bar{C}_2 \geq -\bar{C}_J$

$$\bar{C}_J = \bar{C}_N^T - \bar{C}_B^T A_B^{-1} A_N = \begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/6 \end{bmatrix}$$

$$\cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -3 \end{bmatrix}$$

c_2 di partenza

$\Delta_{c_2} = 1 \leftarrow (2 - \Delta_{c_2}) = 1$ modifica c_2 della traccia

$1 \geq -4$ la base rimane ottima

Se $\overset{\text{new:}}{b_1 = 5}$ $(\Delta b_2 = 0)$

$b_1 + \Delta b_1 = b_{1\,new} \rightarrow 3 + \Delta b_1 = 5 \rightarrow \Delta b_1 = 2$

$A_B^{-1} \Delta b \geq -A_B^{-1} b$

$$\begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \geq - \begin{bmatrix} 1/3 \\ 4/3 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} -1/3 \\ -4/3 \end{bmatrix}$$

la base resta ammissibile

Rimane anche ottima perché la $\bar{c}^T$ non dipende da b.