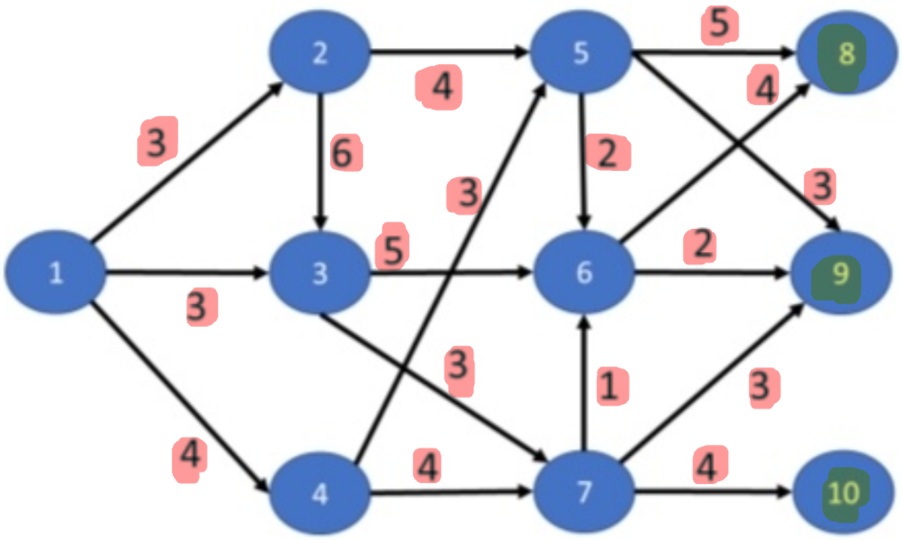
Tema n. 1 **15 pt**

Una veicolo autonomo dovrà raggiungere una tra le località 8, 9 e 10. Supponendo che sugli archi ci sia il tempo di percorrenza del tratto stradale, si vuole minimizzare il tempo necessario a raggiungere una delle tre località.

1) Formulare il modello di ottimizzazione (**7 punti**).
2) Se invece il veicolo riceverà l'informazione della destinazione (8, 9 o 10) solo dopo aver raggiunto i nodi 2, 3 o 4 come cambia il modello di ottimizzazione per tener conto dell'incertezza sulla destinazione. Supporre che la probabilità di andare nella località 8 è del 40%, nella località 9 del 20% e nella località 10 del 40% (**5 punti**).
3) Risolvere il problema 1) in Excel (**3 punti**).



Variabili

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se la città 'i' è visitata prima di 'j'} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$y_k = \begin{cases} 1 & \text{se si raggiunge l'uscita k} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

obiettivo:

$$\min \sum_{(i,j)\in A} x_{ij}\, c_{ij}$$

costo percorso

vincoli:

$$-x_{12} - x_{13} - x_{14} = -1$$

$$x_{12} - x_{23} - x_{25} = 0$$

$$x_{13} - x_{36} - x_{37} = 0$$

$$x_{14} - x_{45} - x_{47} = 0$$

$$x_{25} + x_{45} - x_{56} - x_{58} - x_{59} = 0$$

$$x_{36} + x_{56} + x_{76} - x_{68} - x_{69} = 0$$

$$x_{47} + x_{37} - x_{76} - x_{79} - x_{710} = 0$$

$$x_{58} + x_{68} = 1 \cdot y_1$$

$$x_{59} + x_{69} + x_{79} = 1 \cdot y_2$$

$$x_{710} = 1\, y_3$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 1$$

$$p_s = \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0,2 \\ 0,4 \end{bmatrix}$$

Usiamo la programmazione stocastica a due stadi.

$$\min \sum_{K=2}^{4} c_{1K} x_{1K}^{(0)} + \sum_{S=8}^{10} p_S \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} y_{ij}^{(S)}$$

$$x_{1K}^{(0)} = \begin{cases} 1 & \text{se l'arco } (1,K) \text{ é scelto nel primo stadio} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$y_{ij}^{(s)} = \begin{cases} 1 & \text{se l'arco } (i,j) \text{ é parte del camino ottimo del } 2^\circ \text{ stadio} \\ & \text{per lo scenario 's'} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\sum_{K=2}^{4} x_{1K}^{(0)} = 1$$

$$\sum_{(i,K)\in A} y_{iK}^{(s)} - \sum_{(K,j)\in A} y_{Kj}^{(s)} = -x_{1K}^{(0)} \qquad \text{per } K = 2,3,4$$

Tema n. 2 **9 p**

Dato il seguente problema (P) di PL:

$$\max z(x) = x_1 - 3x_2 - x_3$$

$$s.v.$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6$$

$$2x_1 + 3x_2 - 2.5x_3 \leq 10$$

$$2x_1 - x_2 - 4x_3 \geq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_3 \leq 0$$

1) costruire il duale di (P) (**3 punti**);
2) determinare in maniera grafica la soluzione ottima del problema (P), sapendo che $x_2^* = 0$. (**3 punti**)
3) determinare la soluzione ottima di (D) nel modo più semplice possibile (**3 punti**).

$$\min w(y) = 6y_1 + 10y_2 + 8y_3$$

s.t.

$$3y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 1$$

$$2y_1 + 3y_2 - y_3 \geq -3$$

$$y_1 - 2,5y_2 - 4y_3 \leq -1$$

$$y_1, y_2 \geq 0 \qquad y_3 \leq 0$$

1/

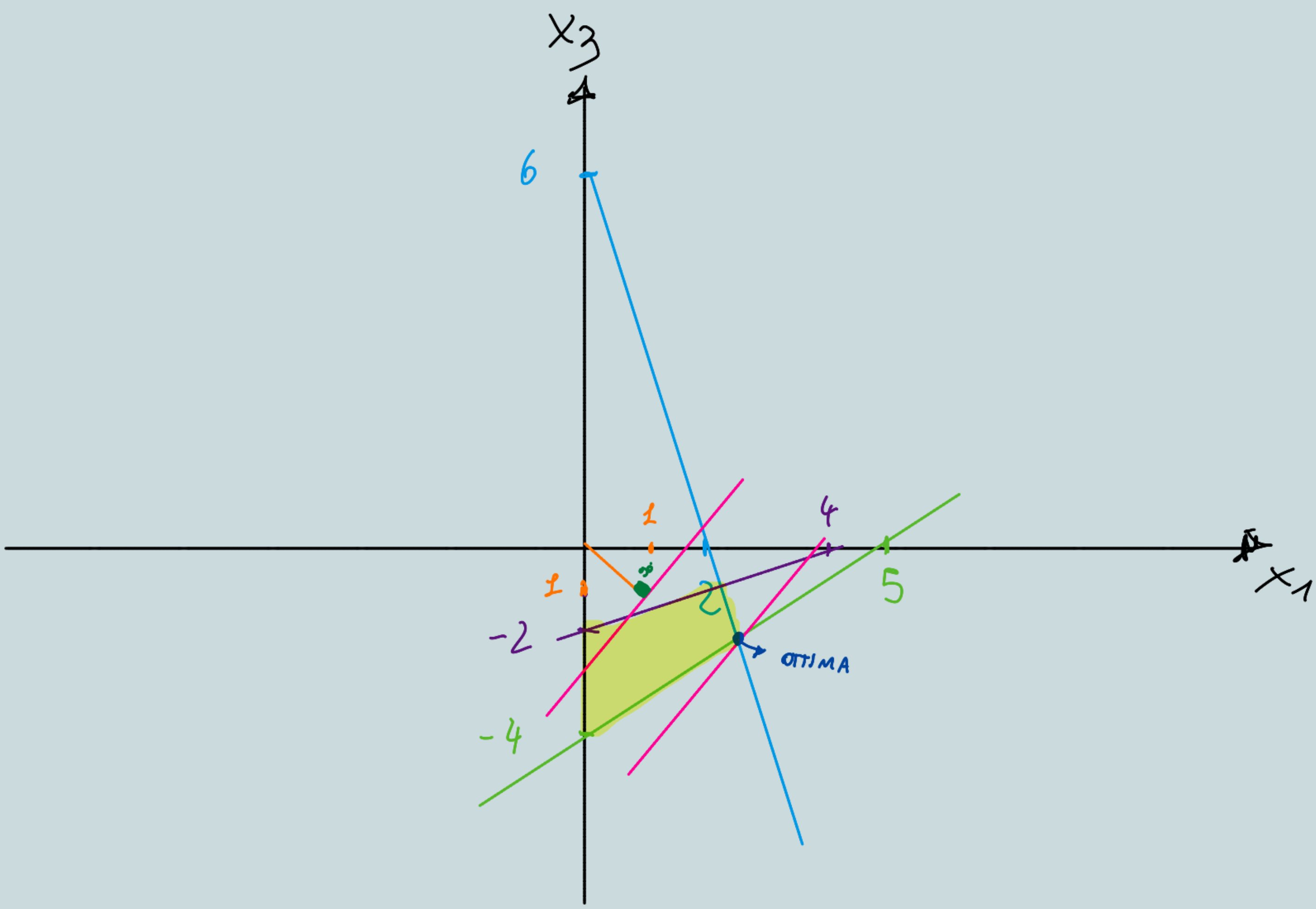
$\max \quad x_1 - x_3$

$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$

- $3x_1 + x_3 \leq 6$
- $2x_1 - 2{,}5\, x_3 \leq 10$
- $2x_1 - 4x_3 \geq 8$

$x_1 \geq 0 \quad x_3 \leq 0$

$x_2^* = 0$



$$\begin{cases} 3x_1 + x_3 = 6 \\ 2x_1 - 2{,}5\,x_3 = 10 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 6 - 3x_1 \\ 2x_1 - 15 + 7{,}5\,x_1 = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3^* = -1{,}8 \\ x_1^* = \dfrac{25}{9{,}5} = 2{,}6 \end{cases} \qquad z^* = 2{,}6 + 1{,}8 = 4{,}4$$

$$w^* = 4{,}4$$

x_1, x_3 sono in base quindi il 1° e 3° vincolo duale devono essere attivi.

I vincoli attivi del primale sono:

$3x_1 + x_3 \le 6 \rightarrow \quad 6 \le 6 \quad$ ATTIVO $(y_1 \neq 0)$

$2x_1 - 2{,}3x_3 \leq 10 \rightarrow 10 = 10$ ATTIVO $(y_2 \neq 0)$

$2x_1 - 4x_3 \geq 8 \rightarrow 12{,}4 \geq 8$ INATTIVO $(y_3 = 0)$

$$\begin{cases} 3y_1 + 2y_2 + 2y_3 = 1 \\ y_1 - 2{,}5y_2 - 4y_3 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y_1 + 2y_2 = 1 \\ y_1 - 2{,}5y_2 = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 7{,}5y_2 - 3 + 2y_2 = 1 \\ y_1 = 2{,}5y_2 - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2^* = 4/9{,}5 = 0{,}42 \\ y_1^* = 1{,}05 - 1 = 0{,}05 \end{cases}$$

Tema n. 3 **4 pt**

Dato il seguente problema (P) di PNL:

$$\min \max \{3y_1 - 2y_2 + y_3 + y_4, 2y_1 + y_2 + 2y_3 - y_4, \ y_1 - y_2 + 3y_3 - y_4\}$$

s.v.

$y_1 = 1$ se e solo se $y_2 = 1$ e $y_3 = 1$
$y_3 = 1$ se e solo se $y_1 = 1$ oppure $y_4 = 1$
$y_i = \{0,1\}$ *con* $i = 1, \dots, 4$

determinare il modello linearizzato di P.

$\min K$

$K \geq 3y_1 - 2y_2 + y_3 + y_4$

$K \geq 2y_1 + y_2 + y_3 - y_4$

$K \geq y_1 - y_2 + 3y_3 - y_4$

$y_i \in \{0, 1\}$

$i = 1, 2, 3, 4$

$$\left.\begin{aligned} y_1 &\leq y_2 \\ y_1 &\leq y_3 \\ y_1 &\geq y_2 + y_3 - 1 \end{aligned}\right\} \text{AND}$$

$$\left.\begin{aligned} y_3 &\leq y_1 + y_4 \\ y_3 &\geq y_1 \\ y_3 &\geq y_4 \end{aligned}\right\} \text{OR}$$