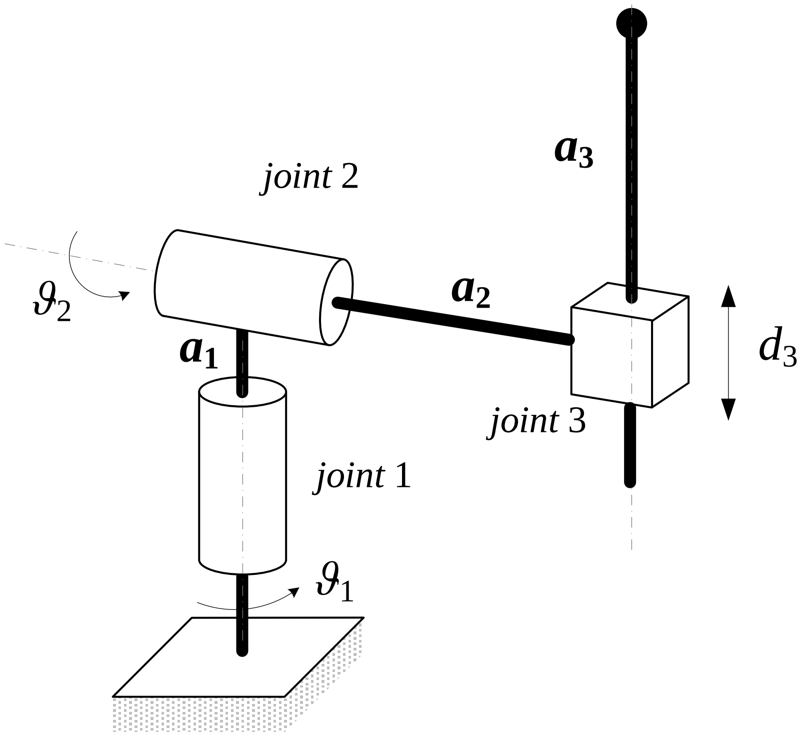
ROBOTICS, MOD. 1: INDUSTRIAL HANDLING
LAUREA MAGISTRALE IN **AUTOMATION ENGINEERING**

ESONERO DEL 20/11/2020

Assegnato il manipolatore in figura, con lunghezze dei bracci $a_1 = a_2 = a_3 = 1$:

1. Si fissino le terne solidali con ciascun braccio seguendo la convenzione di Denavit-Hartenberg, giustificando adeguatamente la scelta.
2. Si calcoli la funzione cinematica diretta.
3. Si calcoli lo Jacobiano geometrico.
4. Si determinino le singolarità del manipolatore con riferimento alla velocità lineare.
5. Si calcolino posizione e orientamento delle terne solidali con ciascun braccio quando il vettore delle variabili di giunto assume il valore $q = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} & 0.5 \end{bmatrix}^T$.
6. Con riferimento alla configurazione del manipolatore calcolata al punto precedente, si determini, se possibile, una rappresentazione dell'orientamento in angoli di Eulero ZYZ della terna solidale con il terzo braccio (versore dell'asse di rotazione e valore dell'angolo di rotazione). Si commenti il risultato ottenuto.
7. Con riferimento alla configurazione del punto 5., si determini la velocità della terna solidale con il terzo braccio assumendo una velocità dei giunti data da $\dot{q} = [0 \quad 1 \quad 0]^T$. Si commenti il risultato ottenuto.



$\boxed{1}$

Link	ϑ_i	d_i	a_i	α_i
1	ϑ_1	0	0	$-\pi/2$
2	ϑ_2	d_2	0	$\pi/2$
3	0	d_3	0	0

$\boxed{2}$

$$A_i = \begin{bmatrix} \cos\vartheta_i & -\sin\vartheta_i \cos\alpha_i & \sin\vartheta_i \sin\alpha_i & a_i \cos\vartheta_i \\ \sin\vartheta_i & \cos\vartheta_i \cos\alpha_i & -\cos\vartheta_i \sin\alpha_i & a_i \sin\vartheta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} & R_0^1 & z_1 & p_1 \end{array} \\ A_0^1 = & \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A_1^2 = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & -C_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_0^2 = A_0^1 \cdot A_1^2 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} R_0^2 & z_2 & p_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} c_1 c_2 & -s_1 & c_1 s_2 & -d_2 s_1 \\ s_1 c_2 & c_1 & s_1 s_2 & d_2 c_1 \\ -s_2 & 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$T_0^3 = A_0^3 = A_0^2 \cdot A_2^3 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} R_0^3 & p_3 = p \end{array} \\ \begin{bmatrix} c_1 c_2 & -s_1 & c_1 s_2 & d_3 c_1 s_2 - d_2 s_1 \\ s_1 c_2 & c_1 & s_1 s_2 & d_3 s_1 s_2 + d_2 c_1 \\ -s_2 & 0 & c_2 & d_3 c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$\boxed{3}$

$J_{\omega_i} = z_{i-1}$; $J_{v_i} = z_{i-1} \wedge (p - p_{i-1})$ per i giunti ROTOIDALI

$J_{\omega_i} = 0$; $J_{v_i} = z_{i-1}$ per i giunti PRISMATICI

$$\left\{ \begin{array}{l} z_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ p_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

$$J(q) = \begin{bmatrix} J_v \\ J_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_0 \wedge (p - p_0) & z_1 \wedge (p - p_1) & z_2 \\ z_0 & z_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Per fare il prodotto vettoriale:

$$A \times B = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ A_x B_z - A_z B_x \\ A_x B_y - A_y B_x \end{bmatrix}$$

$$z_0 \wedge (p - p_0) = \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} d_3 c_1 s_2 - d_2 s_1 \\ d_3 s_1 s_2 + d_2 c_1 \\ d_3 c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 - (1)(d_3 s_1 s_2 + d_2 c_1) \\ 0 - 1 \cdot (d_3 c_1 s_2 - d_2 s_1) \\ 0 - 0 \end{bmatrix}$$

$$z_1 \wedge (p - p_1) = \begin{bmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} d_3 c_1 s_2 - d_2 s_1 \\ d_3 s_1 s_2 + d_2 c_1 \\ d_3 c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 d_3 c_2 - 0 \\ -s_1 d_3 c_2 - 0 \\ -s_1^2 d_3 s_2 - \cancel{d_2 c_1 s_1} - d_3 c_1^2 s_2 + \cancel{d_2 c_1 s_1} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow -d_3 s_2 \underbrace{(s_1^2 + c_1^2)}_{1}$$

$$J(q) = \begin{bmatrix} -d_2 c_1 - d_3 s_1 s_2 & d_3 c_1 c_2 & c_1 s_2 \\ d_2 s_1 - d_3 c_1 s_2 & -d_3 s_1 c_2 & s_1 s_2 \\ 0 & -d_3 s_2 & c_2 \\ \hdashline 0 & -s_1 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} J_P \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} J_O \end{array}$$

$\boxed{4}$

$$\det(J_p) = (-d_2 c_1 - d_3 s_1 s_2)(-d_3 s_1 c_2) c_2 +$$

$$+ (d_3 c_1 c_2)(s_1 s_2) \cdot 0 + (d_2 s_1 - d_3 c_1 s_2) \cdot$$

$$\cdot (-d_3 s_2) c_1 s_2 - \Big[0 + (d_2 s_1 - d_3 c_1 s_2) \cdot$$

$$\cdot (d_3 c_1 c_2) c_2 + (-d_2 c_1 - d_3 s_1 s_2)(-d_3 s_2) s_1 s_2 \Big]$$

$$= \cancel{+ d_2 d_3 s_1 c_1 c_2^2} + d_3^2 s_1^2 s_2 c_2^2 \cancel{- d_2 d_3 s_1 c_1 s_2^2} +$$

$$+ d_3^2 c_1^2 s_2^3 \cancel{- d_2 d_3 s_1 c_1 c_2^2} + d_3^2 c_1^2 s_2 c_2^2 -$$

$$\cancel{- d_2 d_3 s_1 c_1 s_2^2} - d_3^2 s_1^2 s_2^3 = d_3^2 s_2 c_2^2 (s_1^2 + c_1^2)$$

$$+ d_3^2 s_2^3 (c_1^2 - s_1^2) = d_3^2 s_2^2 c_2^2 =$$

$= \ldots$ calcoli miei e/o Prof. sbagliati? $\neq -d_3^2 s_2$

$$\det(J_p) = 0 \Rightarrow \begin{cases} d_3 = 0 \\ s_2 = 0 \rightarrow \theta_2 = 0, \pi \end{cases}$$

5

$$q = [\pi/2, \ \pi/2, \ 0.5]'$$

$$\vartheta_1 = \pi/2$$

$$\vartheta_2 = \pi/2$$

$$d_3 = 0.5$$

Riprendiamo da sopra le Matrici di rotazione e sostituiamo i valori seguenti:

$$R_0^1 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 \\ s_1 & 0 & c_1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$p_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$R_0^2 = \begin{bmatrix} c_1 c_2 & -s_1 & c_1 s_2 \\ s_1 c_2 & c_1 & s_1 s_2 \\ -s_2 & 0 & c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$p_2 = \begin{bmatrix} -d_2 s_1 \\ d_2 c_1 \\ 0 \end{bmatrix} \underset{d_2 = 1}{=} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$R_0^3 = \begin{bmatrix} c_1 c_2 & -s_1 & c_1 s_2 \\ s_1 c_2 & c_1 & s_1 s_2 \\ -s_2 & 0 & c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$p = \begin{bmatrix} d_3 c_1 s_2 - d_2 s_1 \\ d_3 s_1 s_2 - d_2 c_1 \\ d_3 c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0,5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\boxed{6}$ Descriviamo l'orientamento della terna solidale con il terzo braccio rispetto alla terna fissa, utilizzando la terna di angoli di eulero ZYZ (ϕ, ϑ, ψ).

La Matrice di Rotazione risultante é data da:

$$R_{ZYZ}(\phi, \vartheta, \psi) = R_z(\phi) R_y(\vartheta) R_z(\psi) = \begin{bmatrix} c_\phi c_\vartheta c_\psi - s_\phi s_\psi & -c_\phi c_\vartheta s_\psi - s_\phi c_\psi & c_\phi s_\vartheta \\ s_\phi c_\vartheta c_\psi + c_\phi s_\psi & -s_\phi c_\vartheta s_\psi + c_\phi c_\psi & s_\phi s_\vartheta \\ -s_\vartheta c_\psi & s_\vartheta s_\psi & c_\vartheta \end{bmatrix}$$

Per estrarre gli angoli da una matrice nota si usano:

$$\vartheta = \operatorname{atan2}\left(\pm\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2},\ r_{33}\right)$$

$$\phi = \operatorname{atan2}(r_{23}, r_{13}) \qquad \text{se} \quad \sin(\vartheta) > 0$$

$$\psi = \operatorname{atan2}(r_{32}, -r_{31}) \qquad \text{se} \quad \sin(\vartheta) > 0$$

$$R_0^3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

angolo di nutazione : $\vartheta = \operatorname{atan2}(\pm\sqrt{1}, 0) = \frac{\pi}{2}$ (dato che $S_\vartheta = 1$)

angolo di precessione : $\phi = \operatorname{atan2}(1, 0) = \frac{\pi}{2}$

angolo di rotazione propria : $\psi = \operatorname{atan2}(0, 1) = 0$

La rappresentazione é ben definita ($\sin\vartheta = 1 \neq 0$). Non ci troviamo "SINGOLARITÀ" dove gli assi z della prima e terza rotazione si allineano rendendo ϕ e ψ INDISTINGUIBILI.

Il risultato indica (geometricamente) che l'orientamento finale é ottenuto ruotando la base di 90° attorno a z e poi di 90° attorno al nuovo y.

$\boxed{7}$

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} \vartheta_1 &= \pi/2 \\ \vartheta_2 &= \pi/2 \\ d_3 &= 0,5 \end{aligned}$$

$$J(q) = \begin{bmatrix} -d_2 c_1 - d_3 s_1 s_2 & d_3 c_1 c_2 & c_1 s_2 \\ d_2 s_1 - d_3 c_1 s_2 & -d_3 s_1 c_2 & s_1 s_2 \\ 0 & -d_3 s_2 & c_2 \\ \hline 0 & -s_1 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$
= \begin{bmatrix} -0,5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -0,5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
v = J(q) \cdot \dot{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,5 \\ \hdashline -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \dot{p} \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \omega \end{matrix}
$$

L'organo Terminale si sta muovendo solo lungo l'asse z, con velocità 0,5 unità/s (verso il basso)

La Terna solidale sta ruotando lungo l'asse x della terna base