**Tema n. 1____________________________________________________________________________________________ 10 pt**

Una società composta da negozi di informatica prevede che durante i successivi 5 mesi sia necessario disporre di personale specializzato in grado di garantire un numero di ore lavorative pari rispettivamente a 6.000, 7.000, 8.000, 9.500 e 11.000. All'inizio del primo mese lavorano presso la società 50 tecnici specializzati ognuno in grado di garantire fino a un massimo di 160 ore mensili. Al fine di soddisfare la domanda futura si pone il problema di addestrare altro personale. Il processo di addestramento ha la durata di un mese e richiede la supervisione del personale specializzato per la durata di 50 ore. Ogni tecnico specializzato riceve una paga mensile di 2.500 € mentre il personale in addestramento è pagato 1.800 €. Dati storici mostrano che alla fine di ogni mese il 5% dei tecnici specializzati abbandona la società per unirsi ad altre società, che garantiscono salari più alti. Determinare il piano di addestramento più economico che consenta di soddisfare la domanda prevista nei successivi 5 mesi. Risolvere il problema con variabili decisionali continue.

1) Formulare il modello di ottimizzazione che permette di determinare il piano di addestramento più economico. (**7 punti**).
2) Risolvere tramite risolutore Excel il suddetto problema (**3 punti**).

$t: 1, 2, 3, 4, 5$

$W_0 = 50$

$$d_t = \begin{bmatrix} 6000 \\ 7000 \\ 8000 \\ 9500 \\ 11000 \end{bmatrix}$$

Ore x tecnico = 160

addestramento 1 mese durata 50h.

tecnico pro è pagato 2500 €/mese;

addestramento 1800 €/mese

[5% dei tecnici specializzati abbandona]

dopo ogni mese

Variabili: (continue) $[\geq 0]$

$X_t$ : numero di tecnici specializzati all'inizio del mese $t$

$Y_t$ : " " " che iniziano l'addestramento " " " $t$

obiettivo:

$$\min \sum_{t=1}^{5} (2500\, X_t + 1800\, Y_t)$$

Vincoli:

$$X_1 = 50$$

$$160\, X_t - 50\, Y_t \geq d_t \qquad \forall t = 1, \dots, 5$$

$$X_{t+1} = X_t (1 - 0{,}05) + Y_t \qquad \forall t = 1, \dots, 4$$

$$X_t \geq 0, \quad Y_t \geq 0 \quad (\forall t = 1, \dots, 5) \quad \text{CONTINUE}$$

**Tema n. 2** **8 pt**

Dato il seguente problema (P) di PL:

$$\max z(x) = 3x_1 + 2x_2 + 2x_3$$

$$s.v.$$

$$4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 16$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 9$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0,$$

sapendo di sapere che la SBA ottima per (P) è in corrispondenza dell'insieme di indici di base $B = \{1,2\}$:

1) trovare la soluzione ottima del problema duale di (P) (**6 punti**);
2) verificare se può esistere una SBA ottima per (P) con valore della seconda componente pari a 2 (**2 punti**).

$$\min w(y) = 16y_1 + 9y_2$$

$$4y_1 + 2y_2 \geq 3$$

$$2y_1 + 3y_2 \geq 2$$

$$3y_1 + y_2 \geq 2$$

$$y_1 \geq 0$$

$y_2$ libera

Se $x_1$ e $x_2$ sono in base $\Rightarrow x_3 = 0$

i primi due vincoli del duale devono essere attivi:

$$\begin{cases} 4y_1 + 2y_2 = 3 \\ 2y_1 + 3y_2 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 4 - 6y_2 + 2y_2 = 3 \\ y_1 = 1 - \frac{3}{2}y_2 \end{cases} \quad \begin{cases} y_2 = 1/4 \\ y_1 = 5/8 \end{cases}$$

verifichiamo che il 3° vincolo sia soddisfatto:

$$3 \cdot \frac{5}{8} + \frac{1}{4} = 17/8 \geq 2 \quad \text{ok!}$$

$$w^* = z^* = \cancel{16}^{\,8} \cdot \frac{5}{\cancel{8}_{\,4}} + 9 \cdot \frac{1}{4} = \frac{49}{4} = 12{,}25$$

Se $x_2 = 2$

dobbiamo calcolare se le due

basi $B = \{1, 2\}$ e $B = \{2, 3\}$

sono ammissibili e se poi sono

verificate come ottimo.

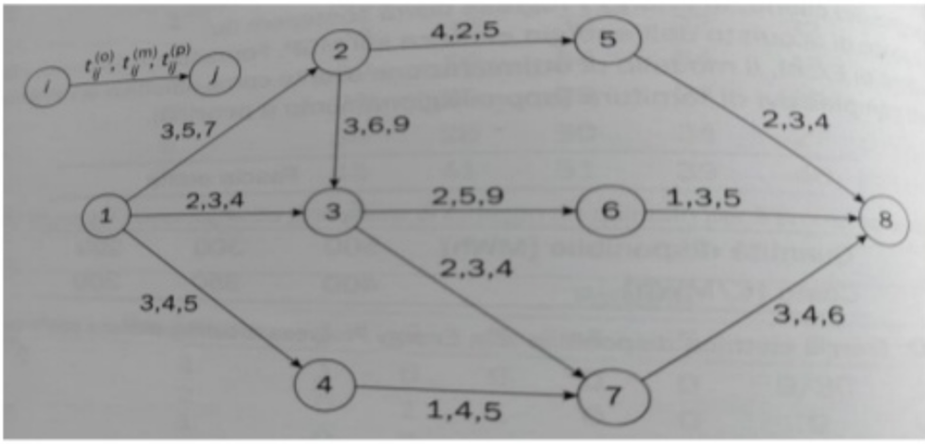
In entrambi i casi le condizioni

di ortogonalità conducono a contraddizioni

$\nexists$ SBA ottima per $x_2 = 2$ !

**Tema n. 3** **10 pt**

Un'azienda deve trasportare della merce dal proprio deposito (nodo 1 in figura) a un proprio punto vendita (nodo 8 della stessa figura). I tempi di trasferimento all'interno dell'area geografica di riferimento dipendono dal livello di traffico e sono stati stimati prendendo in considerazione differenti scenari: ottimistico (o) medio (m) e pessimistico (p).




1) Risolvere il problema di cammino a costo minimo dal deposito al punto vendita per lo scenario medio con gli algoritmi del Bellman-Ford e del Dijkstra mostrando la tabella delle iterazioni (**6 punti**);
2) Mettere in evidenza le differenze dei due algoritmi (**2 punti**);
3) Formulare il problema al punto 1) con un modello di ottimizzazione robusta (**2 punti**).

Bellman - Ford :

| h | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | flag |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $0_{(1)}$ | $+\infty_{(1)}$ | $+\infty_{(1)}$ | $+\infty_{(1)}$ | $+\infty_{(1)}$ | $+\infty_{(1)}$ | $+\infty_{(1)}$ | $+\infty_{(1)}$ | true |
| 1 | $0_{(1)}$ | $5_{(1)}$ | $3_{(1)}$ | $4_{(1)}$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty_{(1)}$ | true |
| 2 | $0_{(1)}$ | $5_{(1)}$ | $3_{(1)}$ | $4_{(1)}$ | $7_{(2)}$ | $8_{(3)}$ | $8_{(4)}$ $6_{(3)}$ | $+\infty_{(1)}$ | true |
| 3 | $0_{(1)}$ | $5_{(1)}$ | $3_{(1)}$ | $4_{(1)}$ | $7_{(2)}$ | $8_{(3)}$ | $6_{(3)}$ | $10_{(7)}$, $11_{(6)}$, $10_{(5)}$ | true |
| 4 | 0 | 5 | 3 | 4 | 7 | 8 | 6 | $10_{(5)}$ | false |

Costo MINIMO → 10

PERCORSO: 1 → 2 → 5 → 8