Un sistema lineare tempoinvariante e tempocontinuo ha matrici $\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{H} = [1 \quad 0]$, $\boldsymbol{L} = [0]$.

a) Utilizzando il metodo della trasformata di Laplace, si determini l'espressione del movimento libero dell'uscita a partire dal tempo $t = 0$ nel caso di condizione iniziale $\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

b) Utilizzando il metodo della trasformata di Laplace, si determini l'espressione del movimento forzato dell'uscita quando l'ingresso vale $u(t) = 1, t \geq 0$.

c) Si determini la matrice di trasferimento del sistema.

d) Si scrivano i comandi MATLAB per definire il sistema e tracciarne lo stato libero nei primi 50 secondi a partire dalla condizione iniziale definita al punto a).

a)

$$X_\ell(s) = (sI - F)^{-1} x(0) = \frac{\text{Adj}\left((sI-F)^T\right)}{\det(sI-F)} x(0)$$

$$= \frac{\text{Adj}\begin{bmatrix} s-1 & -1 \\ -2 & s \end{bmatrix}^T}{s(s-1)-2} x(0) =$$

$$= \frac{1}{s^2-s-2} \text{Adj}\begin{bmatrix} s-1 & -2 \\ -1 & s \end{bmatrix} x(0) =$$

$$= \frac{1}{s^2 - s - 2} \begin{bmatrix} s & 1 \\ 2 & s-1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{s^2 - s - 2} \begin{bmatrix} s - 1 \\ 2 - s + 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

$$s_{1,2} = \frac{+1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} =$$

$$= + \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} = \begin{cases} +4/2 = +2 \\ -1 \end{cases}$$

antitrasformando:

$$\frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+1} = \frac{As + A + Bs - 2B}{(s-2)(s+1)}$$

1

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ A - 2B = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} A = 1 - B \\ 1 - B - 2B = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = \frac{1}{3} \\ B = +2/3 \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{3} e^{2t} + \frac{2}{3} e^{-t}$$

2

$$\begin{cases} A + B = -1 \\ A - 2B = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} A = -1 - B \\ -1 - B - 2B = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = -1 + 4/3 = 1/3 \\ B = -4/3 \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{3} e^{2t} - \frac{4}{3} e^{-t}$$

Quindi:

$$x_e(t) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} e^{2t} + 2e^{-t} \\ e^{2t} - 4e^{-t} \end{bmatrix}$$

b) $U(s) = \frac{1}{s}$

$$X_f(s) = (sI - F)^{-1} G \, U(s) =$$

$$= \frac{1}{(s+1)(s-2)} \begin{bmatrix} s & 1 \\ 2 & s-1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{s} =$$

$$= \frac{1}{s(s+1)(s-2)} \begin{bmatrix} 1 \\ s-1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array}$$

Antitrasformiamo:

$$\frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s-2} =$$

$$= \frac{A(s^2+s-2s-2) + B(s^2-2s) + C(s^2+s)}{s(s+1)(s-2)}$$

$$= \frac{(A+B+C)s^2 + (-2B-A+C)s - 2A}{\quad}$$

$$=$$

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ -A-2B+C=0 \\ -2A=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} B = 1/2 - C \\ 1/2 - 1 + 2C + C = 0 \\ A = -1/2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \quad '' \\ 3C = 1/2 \\ \quad '' \end{cases} \qquad \begin{cases} B = 1/2 - 1/6 = 1/3 \\ C = 1/6 \\ A = -1/2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} \quad -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} e^{-t} + \frac{1}{6} e^{2t}$$

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ -A - 2B + C = 1 \\ -2A \qquad = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} B = -1/2 - C \\ -1/2 + 1 + 2C + C = 1 \\ A = 1/2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = -1/2 - 1/6 = -4/6 = -2/3 \\ C = 1/6 \\ A = 1/2 \end{cases}$$

$$x_f(t) = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -3+2e^{-t}+e^{2t} \\ 3-4e^{-t}+e^{2t} \end{bmatrix}$$

c)

$$W(s) = H(sI-F)^{-1}G + L =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{(s+1)(s-2)} \begin{bmatrix} s & 1 \\ 2 & s-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(s+1)(s-2)} \begin{bmatrix} s & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(s+1)(s-2)} \rightarrow$$ Volendo si può antitrasformare

d)

```
F = [1, 1; 2, 0];
G = [0; 1];
H = [1, 0];
L = 0;
x_0 = [1; -1]
t = 0:50
sys = ss(F, G, H, L)
initial(sys, x_0, t)
```

Un sistema lineare tempoinvariante e tempodiscreto ha matrici $\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{L} = [0]$.

a) Utilizzando il metodo della Z-trasformata, si determini l'espressione del movimento libero dello stato a partire dal tempo $k = 0$ nel caso di condizione iniziale $\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

b) Utilizzando il metodo della Z-trasformata, si determini l'espressione del movimento forzato dello stato quando l'ingresso vale $u(k) = 1, k \geq 0$.

c) Si determini la matrice di trasferimento del sistema.

d) Si rappresenti graficamente uno schema Simulink per analizzare l'uscita del sistema dato utilizzando la condizione iniziale definita al punto a) e l'ingresso definito al punto b).

a)

$$X_\ell(z) = z(zI - F)^{-1} x(0) =$$

$$= z \frac{\mathrm{Adj}(zI - F)^T}{\det(zI - F)} x(0) =$$

$$= z \frac{\mathrm{Adj}\begin{bmatrix} z & -2 \\ -1 & z-1 \end{bmatrix}^T}{z^2 - z - 2} x(0) =$$

$$= \frac{z}{(z+1)(z-2)} \mathrm{Adj}\begin{bmatrix} z & -1 \\ -2 & z-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{z}{(z+1)(z-2)} \begin{bmatrix} z-1 & 2 \\ 1 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{z}{(z+1)(z-2)} \begin{bmatrix} -z+1+2 \\ -1+z \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} =$$

1 Antitrasformando:

$$\begin{array}{r|l} -z^2 + 3z & z^2 - z - 2 \\ \cline{2-2} -z^2 + z + 2 & -1 \\ \hline // \ + 2z - 2 & \end{array}$$

$$-1 + \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-2} = \frac{Az - 2A + Bz + B}{m.c.m.}$$

$$\begin{cases} A + B = 2 \\ B - 2A = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 4/3 \\ B = 2/3 \end{cases}$$

$$z^{-1} \rightarrow -\delta(t) + \left[\frac{4}{3}(-1)^{t-1} + \frac{2}{3}(2)^{t-1}\right] 1(t-1)$$

2

$$\begin{array}{r|l} z^2 - z & z^2 - z - 2 \\ \hline z^2 - z - 2 & 1 \\ \hline // \quad // \quad 2 & \end{array}$$

$$\rightarrow \quad 1 + \frac{2}{(z-2)(z+1)} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z+1} = \frac{Az + A + Bz - 2B}{\cancel{}}$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A - 2B = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2/3 \\ B = -2/3 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{z^{-1}} \quad \delta(t) + \left[\frac{2}{3}(2)^{t-1} - \frac{2}{3}(-1)^{t-1} \right] \cdot$$

$$\cdot \, 1(t-1)$$

b)

$$U(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$X_f(z) = (zI - F)^{-1} G\, U(z) =$$

$$= \frac{1}{(z+1)(z-2)} \begin{bmatrix} z-1 & 2 \\ 1 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{z}{z-1}$$

$$= \frac{z}{(z+1)(z-1)(z-2)} \begin{bmatrix} z-1 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{z}{(z+1)(z-2)} \\[2ex] \dfrac{z}{(z+1)(z-1)(z-2)} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\[4ex] 2 \end{matrix}$$

Antitrasformando:

1

$$\frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-2} = \frac{Az - 2A + Bz + B}{(z+1)(z-2)}$$

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ -2A + B = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 1/3 \\ B = 2/3 \end{cases}$$

2

$$\frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{z-2} =$$

$$= \frac{A(z^2 - 3z + 2) + B(z^2 - z - 2) + C(z^2 - C}{}$$

=

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ -3A - B = 1 \\ 2A - 2B - C = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = -1/6 \\ B = -1/2 \\ C = 2/3 \end{cases}$$

$$X_f(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(-1)^{t-1} + \frac{2}{3}(2)^{t-1} \\ \\ -\frac{1}{6}(-1)^{t-1} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3}(2)^{t-1} \end{bmatrix} 1(t-1)$$

c)

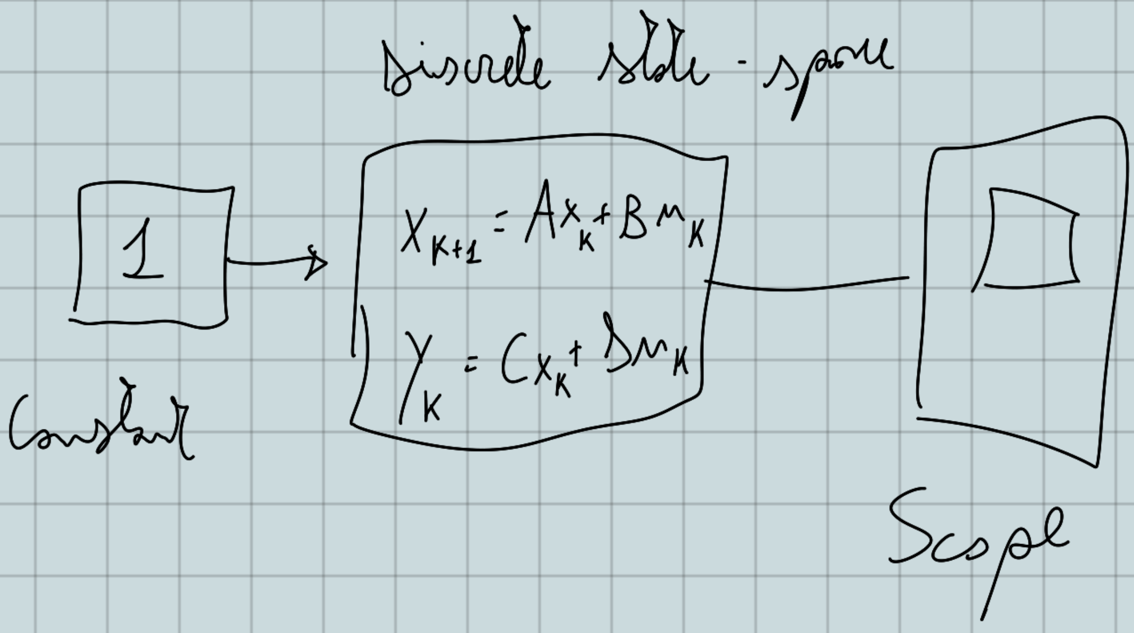
$$W(z) = H(zI - F)^{-1} G + L =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{(z-2)(z+1)} \begin{bmatrix} z-1 & 2 \\ 1 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + [0]$$

$$= \frac{1}{(z-2)(z+1)} \begin{bmatrix} z-1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

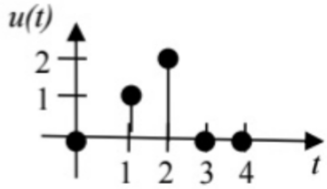
$$= \frac{z-1}{(z-2)(z+1)}$$

d)



Per il sistema descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x_1(t+1) = -3x_1(t) - x_2(t) \\ x_2(t+1) = 2x_1(t) + u(t) \end{cases}$$



a) Si determini una espressione analitica del movimento (per tutti gli istanti di tempo t>0) prodotto dall'ingresso u(t) in figura, con stato iniziale x(0)=[0 0]'.

b) Si scrivano opportuni comandi MATLAB per rappresentare il sistema e per rappresentare il movimento.

a)

$$u(t) = \begin{cases} t & \text{per } 0 < t \leq 2 \\ \emptyset & \text{altrove} \end{cases}$$

$$u(t) = t \cdot 1(t) - t \cdot 1(t-2) - 2 \cdot 1(t-2)$$

$$X_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow U(z) = \frac{z}{(z-1)^2} - \frac{z}{(z-1)^2} \cdot z^{-2} - 2\frac{z}{z-1} \cdot z^{-2}$$

$$= \frac{z - z^{1-2} - 2 \cdot z^{1-2}(z-1)}{(z-1)^2} =$$

$$= \frac{z - z^{-1} - 2 + 2z^{-1}}{(z-1)^2} =$$

$$= \frac{z^{-1}\left(z^2 - 1 - 2z + 2\right)}{(z-1)^2} =$$

$$= \frac{z^2 - 2z + 1}{z(z-1)^2} = \frac{(z-1)^2}{z(z-1)^2}$$

$$= \frac{1}{z}$$

$$F = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$X_f(z) = (zI - F)^{-1} G\, U(z) =$$

$$= \frac{\operatorname{Adj} \begin{bmatrix} z+3 & 1 \\ -2 & z \end{bmatrix}^{T}}{z^2 + 3z + 2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{z} =$$

$$= \frac{\operatorname{Adj} \begin{bmatrix} z+3 & -2 \\ 1 & z \end{bmatrix}}{(z+2)(z+1)} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{z} =$$

$$= \frac{1}{z(z+2)(z+1)} \begin{bmatrix} z & -1 \\ 2 & z+3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{z(z+2)(z+1)} \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{c} -1 \\ z+3 \end{array} \right] & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \end{array}$$

antitrasformiamo:

$$\frac{A}{z} + \frac{B}{z+2} + \frac{C}{z+1} =$$

$$= \overbrace{A(z+2)(z+1)}^{z^2+3z+2} + B(z^2+z) +$$

$$+ C(z^2+2z)$$

1

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ 3A+B+2C=0 \\ 2A=-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} B = 1/2 - C \\ -3/2 + 1/2 - C + 2C = 0 \\ A = -1/2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = 1/2 - 1 = -1/2 \\ C = 1 \\ A = -1/2 \end{cases}$$

2

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ 3A + B + 2C = 1 \\ 2A = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} B = -3/2 - C \\ 9/2 - 3/2 - C + 2C = 1 \\ A = 3/2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = -3/2 + 4/2 = 1/2 \\ C = 1 - \dfrac{6}{2} = \dfrac{2-6}{2} = -4/2 = -2 \\ // \end{cases}$$

Quindi

$$x_f(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\delta(t-1) - \frac{1}{2}(-2)^{t-1} 1(t-1) + (-1)^{t-1} \cdot 1(t-1) \\ \frac{3}{2}\delta(t-1) + \frac{1}{2}(-2)^{t-1} 1(t-1) - 2(-1)^{t-1} \cdot 1(t-1) \end{bmatrix}$$

Si consideri il sistema in forma di stato:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -5x_1(t) - 6x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) + u(t) \\ y(t) = x_1(t) + x_2(t) + u(t) \end{cases}.$$

a) Si classifichi il sistema e si individuino le matrici che lo caratterizzano.

b) Sapendo che lo stato iniziale è $\boldsymbol{x_0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, si determini l'espressione dello stato libero nel tempo con il metodo della trasformata di Laplace.

c) Sapendo che l'ingresso è un gradino unitario, si determini l'espressione dello stato forzato nel tempo con il metodo della trasformata di Laplace.

a) Il sistema é a dimensioni finite, regolare, LTI.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} u(t)$$

La matrice di stato:

$$F = \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice di ingresso:

$$G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La matrice di uscita:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice ingresso-uscita

$$L = [1]$$

b) $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \tau = 0$

Movimento libero, utilizzando il metodo di Laplace

$$(sI - F) = \begin{bmatrix} s+5 & 6 \\ -1 & s \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - F) = s^2 + 5s + 6 = (s+3)(s+2)$$

$$(sI - F)^T = \begin{bmatrix} s+5 & -1 \\ 6 & s \end{bmatrix}$$

$$Adj\left((sI - F)^T\right) = \begin{bmatrix} s & -6 \\ 1 & s+5 \end{bmatrix}$$

$$(sI-F)^{-1} = \frac{\mathrm{Adj}\left((sI-F)^T\right)}{\det(sI-F)} =$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} s & -6 \\ 1 & s+5 \end{bmatrix}}{(s+3)(s+2)}$$

$$(sI-F)^{-1} X(0) = \frac{\begin{bmatrix} s & -6 \\ 1 & s+5 \end{bmatrix}}{(s+3)(s+2)} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{s}{(s+3)(s+2)} \\ \dfrac{1}{(s+3)(s+2)} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

(1) $\longrightarrow$ $$\frac{A}{s+3} + \frac{B}{s+2} = \frac{As + A2 + Bs + B3}{(s+3)(s+2)}$$

$$\begin{cases} |A+B|\,s = s \\ A2 + B3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} A + B = 1 \\ A = -\frac{3B}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} -3B + 2B = 2 \\ // \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = -2 \\ A = \frac{3\cdot(-2)}{2} = +3 \end{cases}$$

$$\frac{+3}{s+3} + \frac{-2}{s+2} \xrightarrow{\mathcal{L}} 3e^{-3t} - 2e^{-2t}$$

$② \to \frac{C}{s+3} + \frac{D}{s+2} = \frac{sC + 2C + sD + 3D}{(s+3)(s+2)}$

$$\begin{cases} (C+D)s = 0 \\ 2C + 3D = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} C = -D \\ -2D + 3D = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} C = -1 \\ D = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{s+3} + \frac{1}{s+2} \xrightarrow{\mathcal{L}} -e^{-3t} + e^{-2t}$$

Quindi

$$x_e(t) = \begin{bmatrix} 3e^{-3t} - 2e^{-2t} \\ -e^{-3t} + e^{-2t} \end{bmatrix}$$

ⓒ $u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$ (gradino)

$$U(s) = \frac{1}{s}$$

$$(sI - F)^{-1} G = \frac{\begin{bmatrix} s & -6 \\ 1 & s+5 \end{bmatrix}}{(s+3)(s+2)} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{-6}{(s+3)(s+2)} \\[2ex] \dfrac{s+5}{(s+3)\,(s+2)} \end{bmatrix}$$

$$X_f(s) = \overbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{-6}{(s+3)(s+2)} \\[2ex] \dfrac{s+5}{(s+3)(s+2)} \end{bmatrix}}^{(sI-F)^{-1}G} \overbrace{\frac{1}{s}}^{U}$$

$$\rightarrow \frac{A}{s} + \frac{B}{s+3} + \frac{C}{s+2} =$$

$$= \frac{(s+3)(s+2)A + (s^2+2s)B + (s^2+3s)C}{s(s+3)(s+2)}$$

$$= \frac{(s^2+5s+6)A + (s^2+2s)B + (s^2+3s)C}{}$$

$$=$$

$$\begin{cases} (A+B+C)s^2 = 0 \\ 5As + 2Bs + 3Cs = 0 \\ 6A = -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = -1 \\ -5 + 2B + 3C = 0 \\ -1 + B + C = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} // \\ -5 + 2 - 2C + 3C = 0 \\ B = 1 - C \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = -1 \\ C = 3 \\ B = -2 \end{cases}$$

$$\frac{-1}{s} + \frac{-2}{s+3} + \frac{3}{s+2}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} -1 + -2e^{-3t} + 3e^{-2t}$$

$$= \frac{(s^2+5s+6)A + (s^2+2s)B + (s^2+3s)C}{s(s+3)(s+2)}$$

$$\begin{cases} (A+B+C)s^2 = 0 \\ 5As + 2Bs + 3Cs = s \\ 6A = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = 5/6 \\ \frac{25}{6} + 2B + 3C = 1 \\ C = -B - \frac{5}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} // \\ \frac{25}{6} + 2B - 1 - 3B - \frac{15}{6} = 0 \\ // \end{cases}$$

$$\begin{cases} // \\ 25 + 12B - 6 - 18B - 15 = 0 \\ // \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = 5/6 \\ B = -\dfrac{20}{6} = -\dfrac{10}{3} \\ C = \dfrac{10}{3} - \dfrac{5}{6} = \dfrac{20-5}{6} = \dfrac{15}{6} = \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{5/6}{s} - \frac{10/3}{s+3} + \frac{5/2}{s+2}$$

$$\mathcal{L}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{6} - \frac{10}{3} e^{-3t} + \frac{5}{2} e^{-2t}$$

Un sistema lineare tempoinvariante tempodiscreto è descritto dalla terna di matrici $\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\boldsymbol{H} = [1 \quad 1]$.

a) Si determini la funzione di trasferimento del sistema W(z).

b) Quindi, utilizzando la z-trasformata e la funzione di trasferimento, si determini la risposta forzata del sistema nel tempo quando l'ingresso vale $u(t) = (-1)^t$ per t≥0.

a)

$$W(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = H(zI - F)^{-1} G + L$$

$$zI - F = \begin{bmatrix} z & -1 \\ 0 & z-1 \end{bmatrix}$$

$$\det(zI - F) = z(z-1) = z^2 - z$$

$$(zI - F)^T = \begin{bmatrix} z & 0 \\ -1 & z-1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Adj}((zI - F)^T) = \begin{bmatrix} z-1 & 1 \\ 0 & z \end{bmatrix}$$

$$(zI - F)^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} z-1 & 1 \\ 0 & z \end{bmatrix}}{z^2 - z} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{z} & \frac{1}{z(z-1)} \\ 0 & \frac{1}{z-1} \end{bmatrix}$$

$$H(z-F)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} '' & '' \\ 0 & '' \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{z} & \frac{1}{z(z-1)} + \frac{1}{z-1} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{z} & \frac{z+1}{z(z-1)} \end{bmatrix}$$

$$H(z-F)^{-1}G = \begin{bmatrix} u & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{z+1}{z(z-1)} \end{bmatrix} = W(s) \qquad \left(\text{perché } L = 0\right)$$

b) $$U(z) = \frac{z}{z+1}$$

Risposta forzata:

$$H(zI-F)^{-1}G\,U(z) = \begin{bmatrix} \dfrac{z+1}{z(z-1)} \end{bmatrix} \frac{z}{z+1} =$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{1}{z-1} \end{bmatrix}$$

Tema n.3 (per esame da 6 CFU e I esonero)

Si consideri il seguente sistema in forma di stato:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -2x_1(t) + 2x_2(t) + 2u_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) + x_2(t) - u_2(t) \\ y(t) = x_1(t) - x_2(t) \end{cases}$$

a) Si determini la matrice di trasferimento che caratterizza il sistema.

b) Inoltre, utilizzando la matrice di trasferimento, si calcoli l'andamento nel tempo dell'uscita forzata ottenuta in risposta all'ingresso $\boldsymbol{u}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \delta(t) \end{bmatrix}$

c) Data la condizione iniziale $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x_0} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, si scriva un elenco di comandi MATLAB che permetta di definire il sistema e tracciarne l'evoluzione dell'uscita libera nei primi 50 secondi.

a)

$$F = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$L = [0]$$

$$|\lambda I - F| = \begin{vmatrix} \lambda + 2 & 2 \\ 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 2)(\lambda - 1) - 2 = 0$$

$$\rightarrow \lambda^2 + 2\lambda - \lambda - 2 = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \lambda_1 = -2 \;, \quad \lambda_2 = 1$$

$$\begin{cases} \alpha_0 - 2\alpha_1 = e^{-2t} \\ \alpha_0 + \alpha_1 = e^{t} \end{cases}$$

Sottraendo la 2° dalla 1°

$$-3\alpha_1 = e^{-2t} - e^{t} \rightarrow \alpha_1 = \frac{e^{-2t} - e^{t}}{3}$$

Per sostituzione

$$\rightarrow \alpha_0 = e^{t} - \frac{e^{-2t} - e^{t}}{3} = \frac{4e^{t} - e^{-2t}}{3}$$

Quindi:

$$e^{Ft} = \alpha_0 I + \alpha_1 F =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{4e^{t} - e^{-2t}}{3} - \frac{2}{3}\left(e^{-2t} - e^{t}\right) & \frac{2}{3}\left(e^{-2t} - e^{t}\right) \\ \frac{e^{t} - e^{-2t}}{3} & \frac{4e^{t} - e^{-2t}}{3} + \frac{e^{-2t} - e^{t}}{3} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\cancel{6}^{\,2}}{\cancel{3}} e^{t} - \frac{\cancel{3}}{\cancel{3}} e^{-2t} & \frac{2}{3}\left(e^{-2t} - e^{t}\right) \\ \frac{1}{3}\left(e^{t} - e^{-2t}\right) & \frac{\cancel{3}}{\cancel{3}} e^{t} \end{bmatrix}$$

$$(sI - F)^{-1} = \begin{bmatrix} s+2 & -2 \\ 1 & s-1 \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= \frac{1}{(s+2)(s-1)+2} \begin{bmatrix} s-1 & 2 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix} =$$

$s^2 + s - \cancel{2} + \cancel{2} \rightarrow s(s+1)$

$$= \begin{bmatrix} \frac{s-1}{s(s+1)} & \frac{2}{s(s+1)} \\ \frac{-1}{s(s+1)} & \frac{s+2}{s(s+1)} \end{bmatrix}$$

$$W(S) = H(sI - F)^{-1} G + L =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{s-1}{s(s+1)} & \dfrac{2}{s(s+1)} \\ \dfrac{-1}{s(s+1)} & \dfrac{s+2}{s(s+1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + 0 =$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{s-\cancel{1}}{s(s+1)} + \dfrac{\cancel{1}}{s(s+1)} & \dfrac{\cancel{2}}{s(s+1)} - \dfrac{s+\cancel{2}}{s(s+1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{2\cancel{s}}{\cancel{s}(s+1)} & \dfrac{\cancel{s}}{\cancel{s}(s+1)} \end{bmatrix}$$

$$u(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \delta(t) \end{bmatrix} \rightarrow U(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Uscita forzata:

$$Y_f(s) = W(s)\,U(s) =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{s+1} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{s+1}$$

c) % Definisco le matrici

```
F = [-2, 2; -1, 1];

G = [2, 0; 0, -1];

H = [1, -1];

L = 0;
```

% definizione della condizione iniziale

```
x0 = [-1; 2];
```

% creazione del sistema nello spazio di stato

```
sys = ss(F, G, H, L);
```

% calcolo della risposta libera

```
t = linspace(0, 50, 1000);   % valore di t definito da 0 a 50 sec
initial(sys, x0, t);
```