**Tema n. 1** **10 pt**

Una compagnia di distribuzione deve rifornire i suoi clienti C1, C2, C3, C4 e C5 che sono dislocati in località diverse di una regione. Per ottimizzare il rifornimento la compagnia vuole costruire un numero di depositi non superiore a due disponendo di tre possibili zone dove costruirli. A seconda della zona in cui vengono costruiti, i tre possibili depositi hanno un costo di costruzione e una capacità massima diversi. La tabella che segue riporta questi costi in migliaia di euro e queste capacità in tonnellate.

| | Costo di costruzione | Capacità massima |
|---|---|---|
| Deposito 1 | 10.000 | 180 |
| Deposito 2 | 15.000 | 230 |
| Deposito 3 | 13.000 | 500 |

Il quantitativo di merce (in tonnellate) richiesto da ciascun cliente è riportato nella tabella che segue insieme ai costi (in migliaia di euro) del trasporto di una unità di merce da ciascuno dei possibili depositi a ciascun cliente.

| features/products | C1 | C2 | C3 | C4 | C5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Richiesta | 91 | 170 | 135 | 153 | 110 |
| Deposito 1 | 15 | 13 | 27 | 9 | 7 |
| Deposito 2 | 12 | 21 | 34 | 21 | 3 |
| Deposito 3 | 7 | 10 | 2 | 17 | 12 |

Costruire un modello lineare che rappresenti il problema in analisi per soddisfare esattamente la richiesta minimizzando il costo complessivo trascurando la possibilità di costruire ulteriori collegamenti rispetto a quelli esistenti e supponendo che non ci siano limitazioni sulle quantità massime di merci trasportabili (**7 punti**)

Risolvere il problema di ottimizzazione in Excel (**3 punti**)

$j = C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$ $\qquad i = 1, 2, 3$

Variabili decisionali:

$X_{ij}$ : quantitativo di merce in tonnellate trasportata dal deposito "i" al cliente "j"

$$Y_i : \begin{cases} 0 & \text{se il deposito "i" NON è costruito} \\ 1 & \text{" " " "i" è costruito} \end{cases}$$

parametri:

$$f_i = \begin{bmatrix} 10'000 \\ 15'000 \\ 13'000 \end{bmatrix}$$

$$q_i = \begin{bmatrix} 180 \\ 230 \\ 500 \end{bmatrix}$$

$$d_j = \begin{bmatrix} 91 \\ 170 \\ 135 \\ 153 \\ 110 \end{bmatrix}$$

$C_{ij}$ : costo di trasporto dal deposito "i" al cliente "j"

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} 15 & 13 & 27 & 9 & 7 \\ 12 & 21 & 34 & 21 & 3 \\ 7 & 10 & 2 & 17 & 12 \end{bmatrix}$$

funzione obiettivo:

$$\min \sum_{i=1}^{3} f_i y_i + \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=c_1}^{c_5} c_{ij} x_{ij}$$

VINCOLI :

$$\sum_{i=1}^{3} y_i \leq 2$$

$$\sum_{j=c_1}^{c_5} x_{ij} \leq q_i \, y_i \qquad \text{per } i = 1, 2, 3$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_{ij} = d_j \qquad \text{per } j = c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$$

$$x_{ij} \geq 0$$

$$y_i \in \{0, 1\}$$

**Tema n. 2** **13 pt**

La vostra azienda produce un certo bene in due varianti, A e B, al prezzo unitario rispettivamente di 2000 euro e 3000 euro, attraverso una lavorazione che prevede il completamento di 3 fasi. Di ciascuna fase si conosce la durata unitaria per ciascuna variante, e la capacità totale dei macchinari:

| Variante/Fasi | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| A | 15' | 5' | 10' |
| B | 10' | 8' | 1' |
| capacità | 25h | 16h 40' | 8h 20' |

Sapendo che occorre rispettare dei contratti che prevedono di produrre almeno 10 unità della prima variante e 30 della seconda: i) si formuli il problema di massimizzazione del ricavo (**3pt**); il suo duale (**3pt**), lo si risolva graficamente (**3pt**), si individuino i vincoli attivi e quelli inattivi (**1pt**), si calcolino i prezzi ombra (shadow prices) (**3pt**).

$$\left.\begin{array}{l} P_A = 2000\ €/\text{unitá} \\ P_B : 3000\ €/\text{unitá} \end{array}\right\} \text{prezzo unitario}$$

$$\left.\begin{array}{l} F_1 : 25h = 25*60 = 1500 \text{ minuti} \\ F_2 : 16h\ 40' = 16*60+40 = 1000 \text{ minuti} \\ F_3 : 8h\ 20' : 8*60+20 : 500 \text{ minuti} \end{array}\right\} \text{capacitá macchinari}$$

Variabili decisionali:

$X_A$: numero di unitá della variante A da produrre

$X_B$: " " " " " B " "

obiettivo: $\text{MAX } z(x) = 2000\,X_A + 3000\,X_B \rightarrow \begin{cases} X_A = 1 \\ X_B = -0{,}67 \end{cases}$

VINCOLI:

$15X_A + 10X_B \leq 1500$

$5X_A + 8X_B \leq 1000$

$10X_A + X_B \leq 500$

$X_A \geq 10$

$X_B \geq 30$ $\quad X_A, X_B \geq 0$

Il duale diventa:

$$\min w(y) = 1500\,y_1 + 1000\,y_2 + 500\,y_3 + 10\,y_4 + 30\,y_5$$

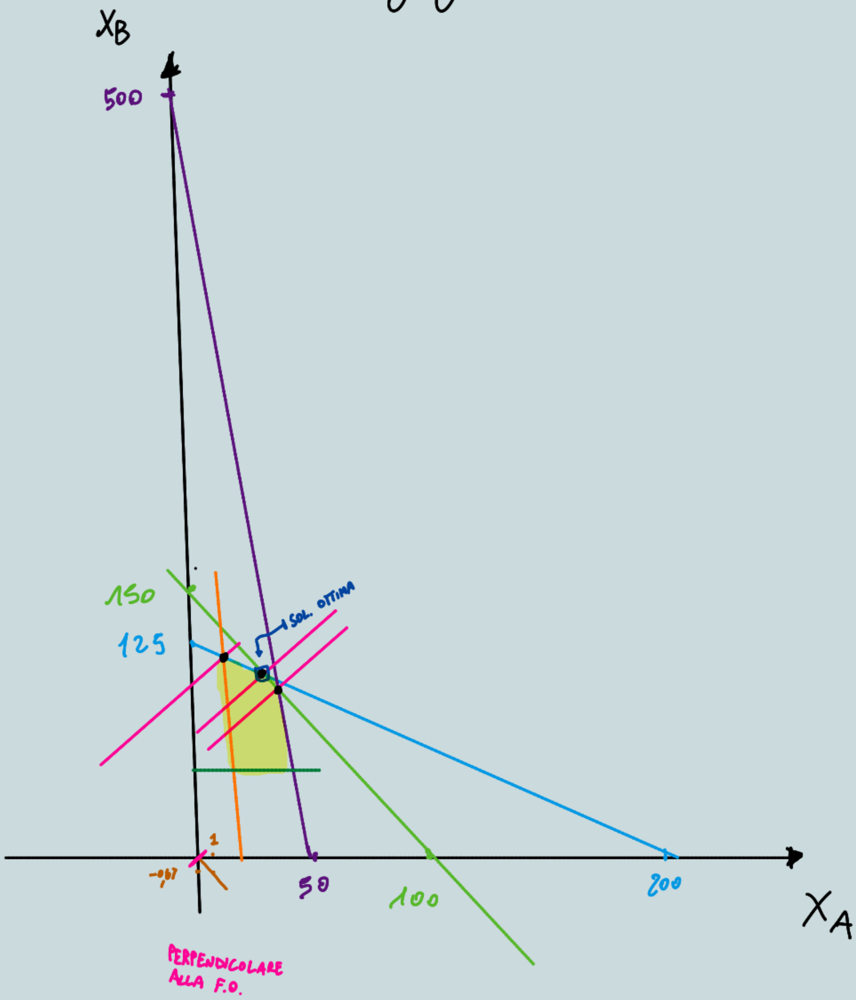
$$15\,y_1 + 5\,y_2 + 10\,y_3 + y_4 \geq 2000$$

$$10\,y_1 + 8\,y_2 + y_3 + y_5 \geq 3000$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

$$y_4, y_5 \leq 0$$

Rappresento il PRIMALE graficamente:




$$\begin{cases} x_A = 10 \\ 5x_A + 8x_B = 1000 \end{cases} \quad \begin{cases} x_A = 10 \\ x_B = \frac{950}{8} = 118{,}75 \end{cases}$$

$$z = 20'000 + 356\,250 = 376'250$$

$$\begin{cases} 15x_A + 10x_B = 1500 \\ 5x_A + 8x_B = 1000 \end{cases} \quad \begin{cases} x_A = \dfrac{200}{7} \\ x_B = \dfrac{750}{7} \end{cases}$$

→ SOL. OTTIMA

Verifico i vincoli ATTIVI ed inattivi

$15 \cdot \frac{200}{7} + 10 \cdot \frac{750}{7} = 1500 \rightarrow 1500 = 1500$ ATTIVO

$5 \cdot \frac{200}{7} + 8 \cdot \frac{750}{7} = 1000 \rightarrow 1000 = 1000$ ATTIVO

$10 \frac{200}{7} + \frac{750}{7} = 392{,}86 \rightarrow 392{,}86 < 500$ INATTIVO

$\frac{200}{7} > 10$ INATTIVO

$\frac{750}{7} > 30$ INATTIVO

Per calcolare gli shadow price; pongo $y_3 = y_4 = y_5 = 0$ (perché INATTIVI)

$$\begin{cases} 15y_1 + 5y_2 + 10y_3 + y_4 = 2000 \\ 10y_1 + 8y_2 + y_3 + y_5 = 3000 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = 14{,}29 \\ y_2 = 357{,}14 \end{cases}$$

**Tema n. 3**____________________________________________________________________________**5 pt**

Formulare la funzione del PSO per risolvere il seguente problema (**4pt**) e risolverlo in Matlab (**1pt**):

$\min\ (x1 - x2)^2 + \sin(x1 \cdot x2)$

s.t.

$1 + x1^2 + 3x2 = 1$

$2x1 - 4x2 \geq 3$

$x1, x2 \in R$

Riscrivo i vincoli in forma standard:

$$\overbrace{x_1^2 + 3x_2}^{h_1(x_1, x_2)} = 0$$

$$\underbrace{3 - 2x_1 + 4x_2}_{g(x_1, x_2)} \leq 0$$

Formulazione della AOF per PSO:

potevamo anche scrivere $h_j^2$

$$\min F(x) = \underbrace{Z(x)}_{\text{funzione obiettivo originale}} + \underbrace{B}_{\text{big NUMBER}} * \sum_j \left[\max(g_j, 0) + \max(|h_j|, 0)\right]$$