Tema n. 1 **10 pt**

Una azienda che produce e vende scarpe da ginnastica prevede per i prossimi 6 mesi la seguente domanda (coppie di scarpe):

Mese	1	2	3	4	5	6
Domanda	6.000	5.000	8.000	4.000	7.000	5.000

Tutte le richieste devono essere soddisfatte nel mese stesso e non oltre. Ogni scarpa è prodotta da lavoratori e richiede 20 minuti per coppia. Ogni lavoratore lavora 200 ore per mese e può fare fino a 40 ore di straordinario per mese. I lavoratori sono pagati con uno stipendio mensile di 3.000 euro per mese, più 75 euro per ora di straordinario. Prima della produzione in ogni mese, l'azienda può assumere lavoratori addizionali o licenziare alcuni dei suoi lavoratori. A causa delle spese amministrative, 2.000 euro sono necessari per assumere un nuovo lavoratore e 3.000 euro per licenziare un operaio. Al massimo 3.000 coppie di scarpe possono essere immagazzinate nei magazzini. Ogni coppia di scarpe costa 5 euro per mese nel magazzino. Se ci sono 15 lavoratori e 1.000 coppie di scarpe nei magazzini all'inizio del mese 1, determinare come l'azienda può minimizzare i suoi costi soddisfando la domanda.

1) Formulare il modello di ottimizzazione che permette di determinare la soluzione ottima (**7 punti**).
2) Risolvere tramite risolutore Excel il suddetto problema (**3 punti**).

$t: 1, 2, 3, 4, 5, 6$

$$d_t = \begin{bmatrix} 6000 \\ 5000 \\ 8000 \\ 4000 \\ 7000 \\ 5000 \end{bmatrix} \qquad I_0 = 1000 \qquad W_0 = 15$$

X_t : Numero di paia prodotte nel mese t $\in \mathbb{N}^+$

W_t : Numero di lavoratori impiegati nel mese t $\in \mathbb{N}^+$

H_t : Numero di lavoratori assunti all'inizio del mese t $\in \mathbb{N}^+$

F_t : " " " licenziati " " " " t $\in \mathbb{N}^+$

Y_t : Ore di straordinario lavorate nel mese t. $\in \mathbb{R}^+$

I_t : Numero di paia di scarpe in magazzino alla fine del tempo t $\in \mathbb{N}^+$

$$F.O.: \quad \min \sum_{t=1}^{6} \left(3000\, W_t + 75\, Y_t + 2000\, H_t + 3000\, F_t + 5\, I_t\right)$$

VINCOLI:

$$W_t = W_{t-1} + H_t - F_t \qquad \text{per } t = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

20 min sono $\frac{1}{3}$ h

$$\frac{1}{3} x_t \leq 200\, W_t + Y_t$$

$$Y_t \leq 40\, W_t$$

$\geq$ possiamo mettere

$$I_t = I_{t-1} + x_t - d_t \qquad \text{per } t = 1, \dots, 6$$

$$I_t \leq 3000 \qquad \text{per } t = 1, \dots, 6$$

Tema n. 2 **10 pt**

Dato il seguente problema (P) di PL:

$$\max z(x) = x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4$$

$$s.v.$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

$$2x_2 + x_3 + x_4 = 6$$

$$3x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0,$$

1) costruire il duale di (P) (**3 punti**)
2) verificare se gli insiemi di indici {1, 2, 3} e {1, 2, 4}possono essere insiemi di indici ammissibili di base per il problema (P) (**3 punti**);
3) in caso affermativo, determinare le corrispondenti SBA e verificare le condizioni di ottimalità. (**4 punti**).

1)

$$\min\ w(y) = 4y_1 + 6y_2$$

$$y_1 + 3y_3 \geq 1$$

$$y_1 + 2y_2 - 2y_3 \geq 2$$

$$y_1 + y_2 - 2y_3 \geq -1$$

$$y_2 \geq 1$$

$$[\ y_1, y_2, y_3 \text{ libere}\ ]$$

2/

$$B_1 = \{1, 2, 3\} \qquad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \{1, 2, 4\}$$

$$A_{B1} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{B2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{B1}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1,5 & 2,5 & 0,5 \\ 3 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_{B_2}^{-1} = \begin{bmatrix} \; \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}_{B_1} = A_{B1}^{-1} b = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1,5 & 2,5 & 0,5 \\ 3 & -4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-6 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

NON AMMISSIBILI

($x_B \le 0$, per essere ammissibile $x_B \geq 0$)

$$\bar{X}_{B_2} = A_{B_2}^{-1} b = \begin{bmatrix} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \end{bmatrix} \leq 0$$

È AMMISSIBILE

3)

$$\bar{c}^T = c^T - c_{B_2}^T A_{B_2}^{-1} A \leq 0^T$$

* VALUTIAMO QUELLE NON IN BASE

CONDIZIONI OTTIMALITÀ

MASSIMIZZAZIONE

$\geq 0^T$ MINIMIZZAZIONE

$$\bar{c} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}25 & -1{,}75 & -2{,}5 \end{bmatrix}$$

* OTTIMALE

Tema n. 3 **8 pt**

Dato il seguente problema di ottimizzazione (P) non lineare:

$$\min \max(|5x_1 - 3x_2|, |x_1 - 4x_2|)$$

$$s.v.$$

$$2x_1 - 5x_2 \leq 7$$

oppure

$$4x_1 - 7x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0,$$

Formalizzare un problema di programmazione lineare misto equivalente a (P).
In altri termini linearizzare il min max (**3 pt**), i vincoli alternativi (**3 pt**) e il valore assoluto (**2 pt**).
Suggerimento: se non si è in grado di risolvere il problema con il valore assoluto, considerare la funzione obiettivo $\min \max(5x_1 - 3x_2, x_1 - 4x_2)$.

$\min K$

$K_1 = |5x_1 - 3x_2|$

$K_2 = |x_1 - 4x_2|$

$K \geq K_1$

$K \geq K_2$

$K \geq 0$

$K_1 \geq 5x_1 - 3x_2$

$K_1 \geq -(5x_1 - 3x_2)$

$K_1 \geq 0, \ K_2 \geq 0$

$K_2 \geq x_1 - 4x_2$

$K_2 \geq -x_1 + 4x_2$

$$2x_1 - 5x_2 - My \leq 7$$

$$4x_1 - 7x_2 - M(1-y) \leq 4$$

$$y \in \{0, 1\}$$