

# Robotics I - Industrial Handling

Stefano Di Lena

2025

## 1 Rappresentazione della Posa e Rotazioni

### 1.1 Matrici di Rotazione Elementari

Le matrici di rotazione descrivono l'orientamento di una terna mobile rispetto a una fissa. Le rotazioni base attorno agli assi principali sono:

- **Rotazione attorno all'asse x di un angolo  $\alpha$ :**

$$R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

- **Rotazione attorno all'asse y di un angolo  $\beta$ :**

$$R_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}$$

- **Rotazione attorno all'asse z di un angolo  $\gamma$ :**

$$R_z(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 1.2 Proprietà delle Matrici di Rotazione

Una matrice di rotazione  $R \in SO(3)$  soddisfa le seguenti proprietà fondamentali:

- **Ortogonalità:**  $R^T R = I \implies R^T = R^{-1}$ .
- **Determinante:**  $\det(R) = +1$  (rotazione propria).
- **Norma:** Le colonne (e le righe) sono vettori a norma unitaria e mutuamente ortogonali.

### 1.3 Composizione di Rotazioni

- **Assi fissi (Fixed frame):** La rotazione avviene rispetto alla terna iniziale. Si moltiplica a sinistra.
- **Assi mobili (Current frame):** La rotazione avviene rispetto alla terna corrente. Si moltiplica a destra.

## 1.4 Problema Inverso dell'Orientamento (da $R$ a RPY)

Data una matrice di rotazione numerica  $R$ :

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

$$R_{RPY} = R_z(\phi)R_y(\vartheta)R_x(\psi) = \begin{bmatrix} c_\phi c_\vartheta & c_\phi s_\vartheta s_\psi - s_\phi c_\psi & c_\phi s_\vartheta c_\psi + s_\phi s_\psi \\ s_\phi c_\vartheta & -s_\phi s_\vartheta s_\psi + c_\phi c_\psi & s_\phi s_\vartheta c_\psi - c_\phi s_\psi \\ -s_\vartheta & c_\vartheta s_\psi & c_\vartheta c_\psi \end{bmatrix}$$

Si estraggono gli angoli  $(\phi, \theta, \psi)$  sotto l'ipotesi  $\cos \theta \neq 0$ :

1.  $\theta = \text{atan2}(-r_{31}, \sqrt{r_{32}^2 + r_{33}^2})$
2.  $\psi = \text{atan2}(r_{32}, r_{33})$
3.  $\phi = \text{atan2}(r_{21}, r_{11})$

*Nota: Se  $\cos \theta = 0$ , il sistema si trova in una configurazione di singolarità (Gimbal Lock).*

## 1.5 Problema Inverso dell'Orientamento (da $R$ a EUL)

Data una matrice di rotazione numerica  $R$ :

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

$$R_{EUL} = R_z(\varphi)R_{y'}(\vartheta)R_{z''}(\psi) = \begin{bmatrix} c_\varphi c_\vartheta c_\psi - s_\varphi s_\psi & -c_\varphi c_\vartheta s_\psi - s_\varphi c_\psi & c_\varphi s_\vartheta \\ s_\varphi c_\vartheta c_\psi + c_\varphi s_\psi & -s_\varphi c_\vartheta s_\psi + c_\varphi c_\psi & s_\varphi s_\vartheta \\ -s_\vartheta c_\psi & s_\vartheta s_\psi & c_\vartheta \end{bmatrix}$$

Si estraggono gli angoli  $(\phi, \theta, \psi)$  sotto l'ipotesi  $\cos \theta \neq 0$ :

1.  $\theta = \text{atan2}(\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2}, r_{33})$
2.  $\psi = \text{atan2}(r_{32}, -r_{31})$
3.  $\varphi = \text{atan2}(r_{23}, r_{13})$

*Nota: Se  $\sin \theta = 0$ , il sistema si trova in una configurazione di singolarità, è possibile determinare solo la differenza tra gli altri due angoli.*

## 1.6 Rappresentazione Asse-Angolo (Problema Inverso)

Data una matrice  $R$ , l'angolo  $\theta$  e il versore dell'asse  $r$  sono:

- **Angolo:**

$$\theta = \arccos\left(\frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2}\right)$$

- **Asse (Versore  $r$ ):**

$$r = \frac{1}{2 \sin \theta} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix}$$

Se  $\sin(\theta) = 0$  le relazioni perdono di significato; altrimenti esse caratterizzano la rotazione in termini di 4 parametri (l'angolo e le 3 componenti del vettore  $r$ ).

## 1.7 Trasformazioni Omogenee

Per descrivere contemporaneamente posizione  $p$  e orientamento  $R$  di una terna mobile:

$$T = \begin{bmatrix} R & p \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Inversione della Matrice Omogenea:**

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T p \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

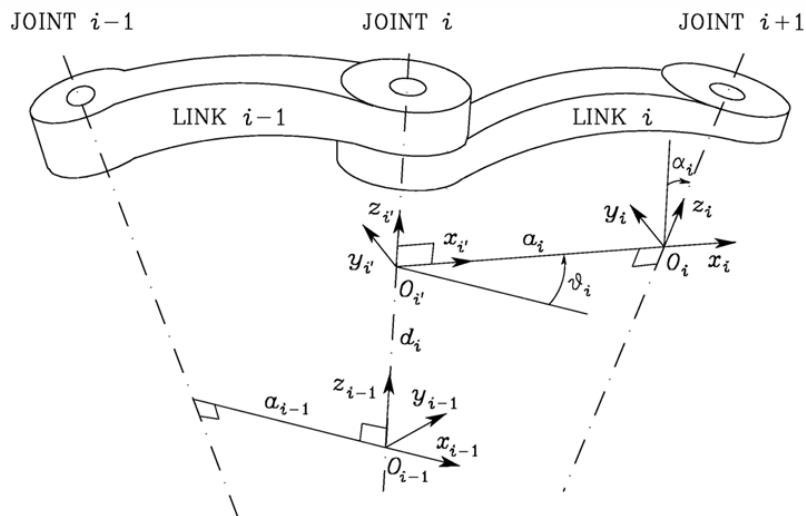
## 2 Cinematica Diretta

La cinematica diretta permette di determinare la posa (posizione e orientamento) dell'organo terminale (end-effector) in funzione delle variabili di giunto  $q = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$ .

### 2.1 Convenzione di Denavit-Hartenberg (DH)

Per definire sistematicamente le trasformazioni tra i link, si adottano le seguenti regole per il posizionamento dei sistemi di riferimento  $\{O_i - x_i y_i z_i\}$ :

1. **Asse  $z_i$ :** Deve essere posizionato lungo l'asse del giunto  $i + 1$ .
2. **Asse  $x_i$ :** Deve essere posizionato lungo la normale comune tra gli assi  $z_{i-1}$  e  $z_i$ . Se gli assi sono incidenti,  $x_i$  è perpendicolare al piano formato da  $z_{i-1}$  e  $z_i$ . Se sono paralleli, la scelta è arbitraria lungo la normale.
3. **Origine  $O_i$ :** Punto di intersezione tra l'asse  $z_i$  e la normale comune tra  $z_{i-1}$  e  $z_i$ .
4. **Asse  $y_i$ :** Scelto in modo da completare una terna destrorsa (posizionando  $z$  sul pollice e  $x$  sull'indice la direzione del medio con la regola della mano destra sarà  $y$ ).



## 2.2 Parametri di Denavit-Hartenberg

La convenzione di DH riduce la descrizione di ogni link a 4 parametri fondamentali:

- $a_i$ : distanza tra gli assi  $z_{i-1}$  e  $z_i$  misurata lungo l'asse  $x_i$  (lunghezza del braccio).
- $\alpha_i$ : angolo tra gli assi  $z_{i-1}$  e  $z_i$  misurato attorno all'asse  $x_i$  (torsione del braccio).
- $d_i$ : distanza tra l'origine  $O_{i-1}$  e l'intersezione di  $x_i$  con  $z_{i-1}$  misurata lungo  $z_{i-1}$  (offset di giunto).
- $\theta_i$ : angolo tra gli assi  $x_{i-1}$  e  $x_i$  misurato attorno all'asse  $z_{i-1}$  (angolo di giunto).

### 2.2.1 Variabili di Giunto

- **Giunto Rotoidale**: la variabile è  $\theta_i$  ( $d_i$  è costante).
- **Giunto Prismatico**: la variabile è  $d_i$  ( $\theta_i$  è costante).

## 2.3 Matrice di Trasformazione del Link ( $A_i^{i-1}$ )

Utilizzando i quattro parametri di DH, la matrice che lega la terna  $i$  alla terna  $i-1$  è:

$$A_i^{i-1}(q_i) = \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i}c_{\alpha_i} & s_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_i c_{\theta_i} \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i}c_{\alpha_i} & -c_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_i s_{\theta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dove  $s = \sin$  e  $c = \cos$ .

## 2.4 Cinematica Totale

La posa dell'end-effector rispetto alla base è data dal prodotto delle matrici di ogni singolo link:

$$T_n^0(q) = A_1^0(q_1) \cdot A_2^1(q_2) \cdot \dots \cdot A_n^{n-1}(q_n)$$

Dove:

- La sottomatrice di rotazione  $R_n^0$  descrive l'orientamento.
- Il vettore  $p_n^0$  descrive la posizione.

## 3 Cinematica Differenziale

La cinematica differenziale descrive la relazione tra le velocità dei giunti  $\dot{q}$  e le velocità lineari  $v_e$  ed angolari  $\omega_e$  dell'organo terminale.

### 3.1 Jacobiano Geometrico

Lo Jacobiano geometrico  $J(q)$  lega le velocità dei giunti  $\dot{q}$  alle velocità lineari  $v$  e angolari  $\omega$  dell'end-effector:

$$v_e = \begin{bmatrix} \dot{p}_e \\ \dot{\omega}_e \end{bmatrix} = J(q)\dot{q} = \begin{bmatrix} J_P \\ J_O \end{bmatrix} \dot{q}$$

Dove  $J$  è una matrice  $(6 \times n)$ . La colonna  $i$ -esima  $J_i$  dipende dal tipo di giunto:

- **Giunto Rotoidale**:

$$J_i = \begin{bmatrix} z_{i-1} \times (p_e - p_{i-1}) \\ z_{i-1} \end{bmatrix}$$

- **Giunto Prismatico**:

$$J_i = \begin{bmatrix} z_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

### 3.1.1 Singolarità e Manipolabilità

- **Singolarità:** Configurazioni  $q$  in cui  $\det(J(q)) = 0$ . Il robot perde uno o più gradi di libertà.
- **Misura di Manipolabilità:**  $w(q) = \sqrt{\det(J(q)J^T(q))}$ . Se il robot non è ridondante ( $n = 6$ ),  $w = |\det(J)|$ .
- **Ellissoide di Manipolabilità:** Descrive le capacità di velocità nelle varie direzioni. Gli assi sono gli autovettori di  $JJ^T$ , le lunghezze sono i valori singolari  $\sigma_i$ .

### 3.2 Jacobiano Analitico

Se la posa è espressa tramite una rappresentazione minima  $\phi$  (es. angoli di Eulero), si definisce lo Jacobiano analitico  $J_A$ :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = J_A(q)\dot{q}$$

La relazione con lo Jacobiano geometrico è data da:

$$J = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & T(\phi) \end{bmatrix} J_A$$

Dove  $T(\phi)$  è la matrice che lega le derivate degli angoli alla velocità angolare  $\omega$ .

## 4 Statica e Dualità

La statica studia le relazioni tra le forze e i momenti applicati all'end-effector e le corrispondenti coppie (o forze) necessarie ai giunti per mantenere il sistema in equilibrio.

### 4.1 Principio dei Lavori Virtuali

Sia  $\tau$  il vettore delle coppie ai giunti e  $\gamma = [f \mid \mu]^T$  il vettore delle forze e dei momenti (wrench) applicati all'end-effector. Il lavoro virtuale compiuto dalle forze ai giunti deve eguagliare il lavoro virtuale compiuto dalle forze nello spazio operativo:

$$\tau^T \delta q = \gamma^T \delta x_e$$

Sostituendo la relazione cinematica differenziale  $\delta x_e = J(q)\delta q$ , si ottiene la relazione fondamentale della statica:

$$\tau = J^T(q)\gamma$$

### 4.2 Dualità Forza-Velocità

Esiste una corrispondenza matematica speculare (dualità) tra lo spazio delle velocità e lo spazio delle forze:

- **Velocità:**  $\xi = J(q)\dot{q}$  (Lo Jacobiano mappa le velocità dai giunti all'end-effector).
- **Forze:**  $\tau = J^T(q)\gamma$  (Il trasposto dello Jacobiano mappa le forze dall'end-effector ai giunti).

### 4.3 Analisi delle Forze in Condizioni Critiche

- **Singolarità:** In una configurazione singolare, esistono forze applicabili all'end-effector che non possono essere contrastate da alcuna coppia ai giunti (le forze che appartengono al *null space* di  $J^T$ ).
- **Ridondanza:** In un robot ridondante, è possibile generare coppie ai giunti che non producono alcuna forza risultante all'end-effector (coppie appartenenti al *null space* di  $J$ ).

## 4.4 Ellissoidi di Manipolabilità

L'efficacia del robot nel muoversi o nell'esercitare forze dipende dalla configurazione  $q$ .

**Ellissoide di Velocità:** Descrive le velocità dell'end-effector raggiungibili con velocità dei giunti unitarie  $\|\dot{q}\| \leq 1$ :

$$\xi^T (J J^T)^{-1} \xi \leq 1$$

**Ellissoide di Forza:** Descrive le forze esercitabili dall'end-effector con coppie ai giunti unitarie  $\|\tau\| \leq 1$ :

$$\gamma^T (J J^T) \gamma \leq 1$$

*Proprietà di Dualità:* Gli assi principali dell'ellissoide di forza coincidono con quelli dell'ellissoide di velocità, ma le loro lunghezze sono inversamente proporzionali. Una direzione lungo la quale il robot è "veloce" (grande capacità di movimento) è una direzione lungo la quale è "debole" (piccola capacità di esercitare forza).

## 5 Pianificazione delle Traiettorie

## 6 Controllo PD con Compensazione di Gravità

Si vuole individuare la struttura del controllore che assicuri la stabilità asintotica globale della posizione di equilibrio. La determinazione del vettore di controllo che assicuri la stabilizzazione del punto di equilibrio è basata sull'impiego del metodo diretto di Lyapunov.

### 6.1 Spazio dei Giunti

Considerando come stato del sistema  $[\tilde{q}^T, \dot{\tilde{q}}^T]$  con  $\tilde{q} = q_d - q$  che rappresenta l'errore (differenza tra la posizione desiderata e quella attuale). La funzione candidata di Lyapunov è:

$$V(\dot{q}, q) = \frac{1}{2} \dot{q}^T B(q) \dot{q} + \frac{1}{2} \tilde{q}^T K_p \tilde{q} > 0$$

$\forall \dot{q}, \tilde{q} \neq 0$ . Derivando rispetto al tempo:

$$\dot{V} = \dot{q}^T B(q) \ddot{q} + \dot{q}^T \dot{B}(q) \dot{q} - \dot{q}^T K_p \tilde{q}$$

Ricavando B dall'equazione dinamica del manipolatore:

$$B(q) \ddot{q} = -C(q, \dot{q}) \dot{q} - F \dot{q} - g(q) + u$$

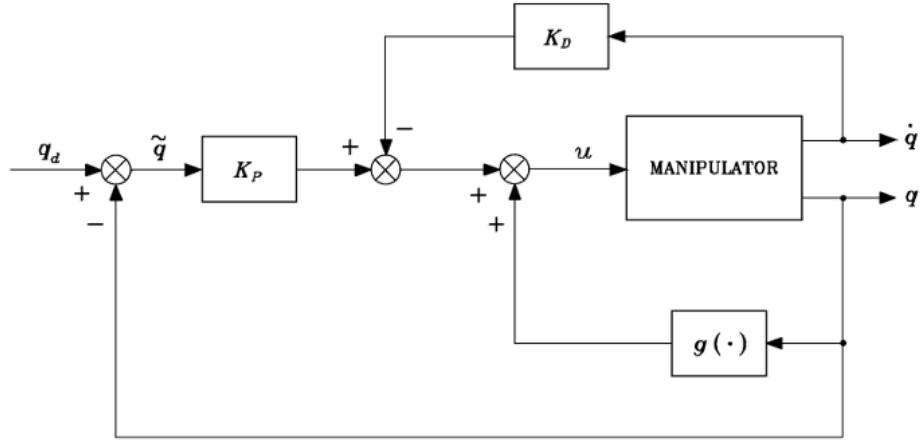
Otteniamo:

$$\dot{V} = \frac{1}{2} \underbrace{\dot{q}^T [\dot{B}(q) - 2C(q, \dot{q})] \dot{q}}_{\omega^T N(q, \dot{q}) \omega = 0} - \dot{q}^T F \dot{q} + \dot{q}^T [u - g(q) - K_p \tilde{q}]$$

Semplificando, per la proprietà di anti-simmetria, ed assumendo un'azione di controllo:

$$u = g(q) + K_p \tilde{q} - K_d \dot{q}, \text{ otteniamo } \dot{V} = -\dot{q}^T (F + K_d) \dot{q} \text{ che è semidefinita negativa.}$$

All'equilibrio ( $\dot{q} = 0, \ddot{q} = 0$ ), prendendo l'equazione dinamica del manipolatore ed effettuando le varie semplificazioni, troviamo:  $q_d = q$ .



## 6.2 Spazio Operativo

Assegnata una  $x_d$  costante, si vuole individuare una struttura del controllore tale che l'errore nello spazio operativo ( $\tilde{x} = x_d - x$ ) tenda asintoticamente a zero.

La funzione candidata di Lyapunov è:

$$V(\dot{q}, q) = \frac{1}{2} \dot{q}^T B(q) \dot{q} + \frac{1}{2} \tilde{x}^T K_p \tilde{x} > 0$$

$\forall \dot{q}, \tilde{x} \neq 0$ . Derivando rispetto al tempo:

$$\dot{V} = \dot{q}^T B(q) \ddot{q} + \dot{q}^T \dot{B}(q) \dot{q} - \dot{\tilde{x}}^T K_p \tilde{x}$$

Dato che  $\dot{x}_d = 0 \Rightarrow \dot{\tilde{x}} = 0 - J_A(q) \dot{q}$  Ricavando B dall'equazione dinamica del manipolatore:

$$B(q) \ddot{q} = -C(q, \dot{q}) \dot{q} - F \dot{q} - g(q) + u$$

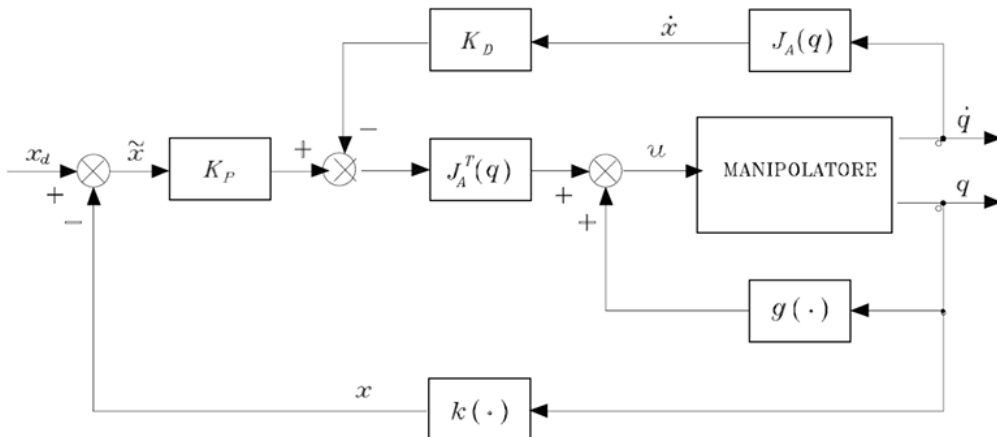
Otteniamo:

$$\dot{V} = \frac{1}{2} \underbrace{\dot{q}^T [\dot{B}(q) - 2C(q, \dot{q})] \dot{q}}_{\omega^T N(q, q) \omega = 0} - \dot{q}^T F \dot{q} + \dot{q}^T [u - g(q) - J_A^T(q) K_p \tilde{x}]$$

Semplificando, per la proprietà di anti-simmetria, ed assumendo un'azione di controllo:

$u = g(q) + J_A^T(q) K_p \tilde{x} - J_A^T(q) K_d \dot{q}$ , otteniamo  $\dot{V} = -\dot{q}^T [F + J_A^T(q) K_d J_A(q)] \dot{q}$  che è semidefinita negativa.

All'equilibrio ( $\dot{q} = 0, \ddot{q} = 0$ ), prendendo l'equazione dinamica del manipolatore ed effettuando le varie semplificazioni, troviamo:  $x_d = x^1$ .



<sup>1</sup>Nell'ipotesi che lo Jacobiano sia a rango pieno.

## 7 Controllo a Dinamica Inversa

L'approccio si basa sull'individuare un vettore di controllo ( $u$ ), funzione dello stato del sistema, che sia in grado di realizzare relazioni input-output che presentino caratteristiche lineari.

### feedback linearization

$$x^{(n)} = v \begin{cases} x^{(n)} = f(x) + b(x)u \\ u = \frac{1}{b(x)}[v - f(x)] \end{cases}$$

impostando  $v = -k_1x - k_2\dot{x} - \dots - k_n x^{(n-1)}$ ,  
otteniamo  $x^{(n)} + k_n x^{(n-1)} + \dots + k_1 x = 0$

### 7.1 Spazio dei Giunti

Il modello dinamico di un manipolatore ad  $n$  giunti è espresso nella forma:

$$B(q)\ddot{q} + n(q, \dot{q}) = u$$

con  $n(q, \dot{q}) = C(q, \dot{q})\dot{q} + F\dot{q} + g(q)$ .

Scegliendo

### 7.2 Spazio Operativo