Tema n. 1 **10 pt**

Un'azienda di telecomunicazioni deve installare delle antenne per la copertura di 5 zone ($Z_1, \ldots, Z_5$) sul territorio in cui opera. Sono stati individuati quattro siti possibili per l'installazione delle antenne ($S_1, \ldots, S_4$). Il livello del segnale (in dB) presente nelle zone e proveniente da un'antenna installata nei vari siti è riportato in tabella. L'azienda, tramite un'opportuna formulazione matematica, vuole risolvere il problema di dove installare le antenne per coprire il maggior numero di zone, rispettando i seguenti vincoli:

- i ricevitori sono sensibili ai segnali (nel senso di somma) di livello di almeno 15 dB;
- non è possibile avere più di un segnale sopra la soglia di 15dB in una stessa zona;
- l'installazione di un'antenna nel sito 4 necessita dell'installazione di un'antenna nel sito 3 che faccia da ponte.

1) Formulare il problema di ottimizzazione minimizzando le installazioni (**7 punti**).
2) Risolvere tramite risolutore Excel il suddetto problema (**3 punti**).

dB,

	Zona				
Sito	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5
S_1	12	17	18	8	2
S_2	8	7	20	15	4
S_3	10	9	6	13	8
S_4	8	16	14	16	12

$i = Z1, Z2, Z3, Z4, Z5$

$j : S1, S2, S3, S4$

Variabili decisionali:

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{se il sito 'j' è installato} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

obiettivo:

$$\min \sum_{j=1}^{4} x_j$$

vincoli:

$$\sum_{j=1}^{4} dB_{ij} x_j \geq 15 \qquad \text{per } i = 1, \ldots, 5$$

ZONA 1 VINCOLO RISPETTATO

ZONA 2 $x_1 + x_4 \leq 1$

ZONA 3 $x_1 + x_2 \leq 1$

ZONA 4 $x_2 + x_4 \leq 1$

ZONA 5 SEMPRE OK!

$$x_4 \leq x_3$$

$$x_j \in \{0, 1\}$$

Tema n. 2 **7 pt**

Dato il seguente problema (P) di PL:

$$\min z(x) = 4x_1 + 2x_2$$

$$s.v.$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 4$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$-2x_1 + 4x_2 \leq 12$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

1) formulare il corrispondente problema (P') in forma standard (**2 punti**);
2) verificare se il punto corrispondente a $\bar{x} = [0 \;\; 2 \;\; 0]^T$ in (P') è una SBA per (P') (**2 punti**);
3) determinare i coefficienti di costo ridotto in (P') relativi a $\bar{x}$ e verificare se $\bar{x}$ è una soluzione ottima del problema (**3 punti**)

1.)

$$\min \; z(x) = 4x_1 + 2x_2$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 4$$

$$-x_1 + 2x_2 + x_4 = 4$$

$$-2x_1 + 4x_2 + x_5 = 12$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

2) $\bar{X} = [0\ 2\ 0]$

$2x_2 = 4$ ok!

$2x_2 + x_4 = 4 \rightarrow x_4 = 0$

$4x_2 + x_5 = 12 \rightarrow x_5 = 4$

Abbiamo $n = 5$ variabili ed $m = 3$ vincoli

$\rightarrow n - m = 2$ variabili non di base $= 0$.

Quindi:

$SBA = [0\ 2\ 0\ 0\ 4] = \{x_2, x_4, x_5\}$

base degenere $x_4 = 0$.

3)

$$A_B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_N = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_B^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C}^T = C^T - C_B^T A_B^{-1} A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \geq 0$$ ok è ottima!

MIN

Tutti i costi ridotti sono non negativi.

Tema n. 3____**7 pt**

Dato il seguente problema di PL in forma standard:

$$\min z(x) = 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4$$

$$s.v.$$

$$2x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 6$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 8$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

1) definire il problema equivalente in forma canonica rispetto all'insieme di indici di base $B=\{2,4\}$ (**3 punti**);
2) verificare se la SBA corrispondente a B è ottima (**1 punto**);
3) effettuare l'analisi di sensitività sul primo e sul secondo coefficiente di costo della funzione obiettivo (**3 punti**).

Tema n. 4____**4 pt**

Dire se la seguente matrice è TUM, giustificando la risposta. Tale proprietà cosa ci consente di affermare?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice non é TUM perché calcolando i determinati di tutte le sottomatrici dovrebbero essere ± 1. Nel nostro caso non accade.