Formulario DST (Dinamical System Theory)

Stefano Di Lena

2025

Indice

1 Classificazione dei sistemi **1**
- 1.1 Sistemi tempo-continui (regolari) a dimensioni finite . . . 1
- 1.2 Sistemi tempo-discreto a dimensioni finite . . . 1
- 1.3 Formula di Lagrange . . . 2
  - 1.3.1 Sistemi regolari a dimensioni finite LTI . . . 2
  - 1.3.2 Sistemi tempo discreti a dimensioni finite LTI . . . 2
- 1.4 Metodo della traformata di Laplace . . . 2
  - 1.4.1 Funzione di Trasferimento . . . 2
- 1.5 Metodo della Z-trasformata . . . 2
  - 1.5.1 Funzione di Trasferimento . . . 3
- 1.6 Metodo del polinomio resto (Sylvester) . . . 3

2 Equilibrio **4**
- 2.1 Insiemi di equilibrio per sistemi LTI a dimensioni finite . . . 4
  - 2.1.1 Tempo Continui . . . 4
  - 2.1.2 Tempo Discreti . . . 5

3 Stabilità **7**
- 3.1 Forme quadratiche . . . 7
- 3.2 Minori principali . . . 7
- 3.3 Test di Sylvester . . . 8
  - 3.3.1 Corollario 1 . . . 8
  - 3.3.2 Secondo test . . . 8
  - 3.3.3 Corollario 2 . . . 8
- 3.4 Criteri di stabilità di Lyapunov . . . 8
  - 3.4.1 Sistemi TC . . . 8
  - 3.4.2 Sistemi TD . . . 8
- 3.5 Criterio di stabilità di Krasowskii . . . 9
- 3.6 Criterio di instabilità di Ceatev . . . 9
- 3.7 Forma di Jordan . . . 9
  - 3.7.1 Analisi di stabilità per sistemi TC . . . 10
  - 3.7.2 Analisi di stabilità per sistemi TD . . . 10
- 3.8 Analisi Modale . . . 10
  - 3.8.1 Modi Dominanti . . . 13
- 3.9 Criterio dell'equazione di Lyapunov . . . 13
  - 3.9.1 Tempo Continuo . . . 13
  - 3.9.2 Tempo Discreto . . . 13
- 3.10 Criterio di Hurwitz . . . 13
- 3.11 Test sul Modulo . . . 14
- 3.12 Trasformazione bilineare . . . 14
- 3.13 Criterio di La Salle . . . 14
  - 3.13.1 Variante di Krasowskii . . . 14

4 Linearizzazzione intorno all'equilibrio di sistemi non-lineari tempo invarianti **15**
- 4.1 Analisi di stabilità mediante linearizzazione . . . 15
  - 4.1.1 Tempo Continuo . . . 16
  - 4.1.2 Tempo Discreto . . . 16

5 Raggiungibilità, Cotrollabilità ed Osservabilità **17**
5.1 Raggiungibilità 17
5.2 Controllabilità (in senso stretto) 18
5.3 Osservabilità 19
5.4 Scomposizione di Kalman rispetto alla Raggiungibilità 19
5.5 Scomposizione di Kalman rispetto all'Osservabilità 20
5.6 Stabilizzabilità 21
5.7 Rivelabilità 21
5.8 Scomposizione di Kalman Completa 21
5.9 Stabilità Interna ed Esterna 22

6 Matlab **23**
6.1 Simulink 24

Capitolo 1

Classificazione dei sistemi

Matrici che caratterizzano il sistema:

- **F** $\rightarrow$ **Matrice di Stato** (di dimensione $n \times n$);
- **G** $\rightarrow$ **Matrice di Ingresso** (di dimensione $n \times m$);
- **H** $\rightarrow$ **Matrice di Uscita** (di dimensione $p \times n$);
- **L** $\rightarrow$ **Matrice Ingresso-Uscita** (di dimensione $p \times m$).

1.1 Sistemi tempo-continui (regolari) a dimensioni finite

- **Lineare**:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(t)x(t) + G(t)u(t) \\ y(t) = H(t)x(t) + L(t)u(t) \end{cases}$$

- **LTI (Lineare Tempo Invariante)**:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) = Hx(t) + Lu(t) \end{cases}$$

1.2 Sistemi tempo-discreto a dimensioni finite

- **Lineare**:

$$\begin{cases} x(t+1) = F(t)x(t) + G(t)u(t) \\ y(t) = H(t)x(t) + L(t)u(t) \end{cases}$$

- **LTI (Lineare Tempo Invariante)**:

$$\begin{cases} x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) = Hx(t) + Lu(t) \end{cases}$$

- **Libero**:

$$\begin{cases} x(t+1) = F(t)x(t) \\ y(t) = H(t)x(t) \end{cases}$$

- **Autonomo**:

$$\begin{cases} x(t+1) = Fx(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{cases}$$

1.3 Formula di Lagrange

1.3.1 Sistemi regolari a dimensioni finite LTI

$$x(t) = e^{F(t-\tau)}x(\tau) + \int_{\tau}^{t} e^{F(t-\xi)}Gu(\xi)d\xi$$

In cui si ha:

- **movimento libero** $x_l(t) = e^{F(t-\tau)}x(\tau)$
- **movimento forzato** $x_f(t) = \int_{\tau}^{t} e^{F(t-\xi)}Gu(\xi)d\xi$

1.3.2 Sistemi tempo discreti a dimensioni finite LTI

$$x(t) = F^{t-\tau}x(\tau) + \sum_{i=\tau}^{t-1} F^{t-i-1}Gu(i)$$

In cui si ha:

- **movimento libero** $x_l(t) = F^{t-\tau}x(\tau)$
- **movimento forzato** $x_f(t) = \sum_{i=\tau}^{t-1} F^{t-i-1}Gu(i)$

1.4 Metodo della traformata di Laplace

$$X(s) = (sI - F)^{-1}x(0) + (sI - F)^{-1}GU(s)$$
$$Y(s) = H(sI - F)^{-1}x(0) + [H(sI - F)^{-1}G + L]U(s)$$

Con:

- **movimento libero** $\rightarrow X_l(s) = (sI - F)^{-1}x(0)$
- **movimento forzato** $\rightarrow X_f(s) = (sI - F)^{-1}GU(s)$
- **uscita libera** $\rightarrow Y_l(s) = H(sI - F)^{-1}x(0)$
- **uscita forzata** $\rightarrow Y_f(S) = [H(sI - F)^{-1}G + L]U(s)$

1.4.1 Funzione di Trasferimento

Supponendo $x(0) = 0$, si ricava:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = H(sI - F)^{-1}G + L$$

É possibile ottenere i risultati nel dominio nel tempo effettuando l'antitraformata.

1.5 Metodo della Z-trasformata

$$X(z) = z(zI - F)^{-1}x(0) + (zI - F)^{-1}GU(z)$$
$$Y(z) = zH(zI - F)^{-1}x(0) + [H(zI - F)^{-1}G + L]U(z)$$

Con:

- **movimento libero** $\rightarrow X_l(z) = z(zI - F)^{-1}x(0)$
- **movimento forzato** $\rightarrow X_f(z) = (zI - F)^{-1}GU(z)$
- **uscita libera** $\rightarrow Y_l(z) = zH(zI - F)^{-1}x(0)$
- **uscita forzata** $\rightarrow Y_f(z) = [H(zI - F)^{-1}G + L]U(z)$

1.5.1 Funzione di Trasferimento

Supponendo $x(0) = 0$, si ricava:

$$W(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = H(zI - F)^{-1}G + L$$

É possibile ottenere la matrice delle risposte all'impulso di Kronecker effettuando l'antitrasformata.

1.6 Metodo del polinomio resto (Sylvester)

Il polinomio resto ha una struttura del genere:

$$r(\lambda) = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda + \cdots + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1}$$

Dove λ sono autovalori di F, calcolati ponendo $|\lambda I - F| = 0$.

Una volta calcolati gli autovalori, questi possono ricadere in tre casi:

1. **Autovalori tutti distinti**

$$\begin{cases} S(\lambda_1) = r(\lambda_1) \\ S(\lambda_2) = r(\lambda_2) \\ \vdots \\ S(\lambda_n) = r(\lambda_n) \end{cases}$$

2. **Autovalori ripetuti con molteplicità m**

   Per ogni autovalore multiplo (molteplicità m) è necessario imporre ulteriori vincoli.

$$\begin{cases} S(\lambda_h) = r(\lambda_h) \\ S'(\lambda_h) = r'(\lambda_h) \\ \cdots \\ S^{(m-1)}(\lambda_h) = r^{(m-1)}(\lambda_h) \end{cases}$$

3. **Autovalori complessi e coniugati**

   Si procede come nel caso degli autovalori tutti distinti, ma in questo caso mi ritrovo delle soluzioni in cui ho necessità di applicare le formule di Eulero per semplificare il problema ricavandomi seno e coseno.

Nel caso dei sistemi TC si ha $S(\lambda) = e^{\lambda t}$, nel caso di quelli TD invece $S(\lambda) = \lambda^t$.

Matrice di transizione di stato per sistemi Tempo Continuo (TC):

$$e^{Ft} = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)F + \cdots + \alpha_{n-1}F^{n-1}$$

Matrice di transizione di stato per sistemi Tempo Discreto (TD):

$$F^t = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)F + \cdots + \alpha_{n-1}F^{n-1}$$

Capitolo 2

Equilibrio

É possibile calcolare gli stati di equilibrio di un sistema ponendo la sua derivata uguale a zero ($\dot{x}(t) = 0$) per sistemi tempo continui o ponendo l'incremento nel tempo costante ($x(k+1) = x(k)$) per sistemi tempo discreti.

Per i sistemi non-lineari possiamo ottenere diverse soluzioni:

1. non esistono stati di equilibrio
2. esiste un solo stato di equilibrio
3. esiste un numero finito di stati di equilibrio
4. esistono infiniti stati di equilibrio

2.1 Insiemi di equilibrio per sistemi LTI a dimensioni finite

2.1.1 Tempo Continui

L'equazione all'equilibrio è:

$$Fx = -Gu$$

Caso 1) $|F| \neq 0$

In questo caso la matrice F è invertibile (è non singolare), quindi:

- insieme degli ingressi di equilibrio

$$\bar{U} = U = R^m$$

tutti gli ingressi sono di equilibrio.

- insieme degli stati di equilibrio[1]

$$\bar{X} = \mathcal{R}(F^{-1}G)$$

- insieme degi stati di equilibrio corrispondenti ad un dato ingresso

$$\bar{X}_{\bar{u}} = \{-F^{-1}G\bar{u}\}$$

esiste un solo stato di equilibrio univocamente determinato.

[1] $\mathcal{R}$ indica il range della matrice, ovvero l'immagine.

Caso 2) $|F| = 0$ **e** $|G| \neq 0$

In questo caso la matrice F non è invertibile (è singolare), mentre G è invertibile quindi:

- insieme degli stati di equilibrio

$$\bar{X} = X = R^n$$

tutti gli stati sono di equilibrio

- insieme degli ingressi di equilibrio

$$\bar{U} = \mathcal{R}(G^{-1}F)$$

- insieme degi stati di equilibrio corrispondenti ad un dato ingresso[2]

$$\bar{X}_{\bar{u}} = \begin{cases} \emptyset & \texttt{se} \ \ u \notin \bar{U} \\ x0 + \mathcal{N}(F) & \texttt{se} \ \ u \in \bar{U} \end{cases}$$

esistono infiniti stati di equilibri per ogni ingresso di equilibrio.

Caso 3) $|F| = 0$ **e** $|G| = 0$

In questo caso la matrice F non è invertibile (è singolare) e G pure, quindi:

- insieme degli stati di equilibrio[3]

$$\bar{X} = \{Fx \in \mathcal{R}(G)\} = \left\{x : \rho([G \ \vdots \ Fx]) = \rho(G)\right\}$$

- insieme degli stati di equilibrio

$$\bar{U} = \{Gu \in \mathcal{R}(F)\} = \left\{u : \rho([F \ \vdots \ Gu]) = \rho(F)\right\}$$

- insieme degi stati di equilibrio corrispondenti ad un dato ingresso

$$\bar{X}_{\bar{u}} = \begin{cases} \emptyset & \texttt{se} \ \ u \notin \bar{U} \\ x0 + \mathcal{N}(F) & \texttt{se} \ \ u \in \bar{U} \end{cases}$$

ad un ingresso di equilibrio corrispondono infinii stati di equilibrio.

2.1.2 Tempo Discreti

L'equazione all'equilibrio è:

$$(F - I)x = -Gu$$

Caso 1) $|F - I| \neq 0$

In questo caso la matrice $F - I$ è invertibile (è non singolare), quindi:

- insieme degli ingressi di equilibrio

$$\bar{U} = U = R^m$$

tutti gli ingressi sono di equilibrio

[2]dove $\mathcal{N}$ indica il Kernel della matrice, ovvero il Nucleo.
[3]dove ρ indica il rango della matrice.

- insieme degli stati di equilibrio

$$\bar{X} = \mathcal{R}((F - I)^{-1}G)$$

- insieme degi stati di equilibrio corrispondenti ad un dato ingresso

$$\bar{X}_{\bar{u}} = \{-(F - I)^{-1}G\bar{u}\}$$

esiste un solo stato di equilibrio univocamente determinato

Caso 2) $|F - I| = 0$ **e** $|G| \neq 0$

In questo caso la matrice $F - I$ non è invertibile (è singolare), mentre G è invertibile quindi:

- insieme degli stati di equilibrio

$$\bar{X} = X = R^n$$

tutti gli stati sono di equilibrio

- insieme degli ingressi di equilibrio

$$\bar{U} = \mathcal{R}(G^{-1}(F - I))$$

- insieme degi stati di equilibrio corrispondenti ad un dato ingresso

$$\bar{X}_{\bar{u}} = \begin{cases} \emptyset & \texttt{se } u \notin \bar{U} \\ x0 + \mathcal{N}(F - I) & \texttt{se } u \in \bar{U} \end{cases}$$

esistono infiniti stati di equilibri per ogni ingresso di equilibrio.

Caso 3) $|F - I| = 0$ **e** $|G| = 0$

In questo caso la matrice F non è invertibile (è singolare) e G pure, quindi:

- insieme degli stati di equilibrio

$$\bar{X} = \{(F - I)x \in \mathcal{R}(G)\} = \left\{x : \rho([G \ \vdots \ (F - I)x]) = \rho(G)\right\}$$

- insieme degli stati di equilibrio

$$\bar{U} = \{Gu \in \mathcal{R}(F - I)\} = \left\{u : \rho([(F - I) \ \vdots \ Gu]) = \rho(F - I)\right\}$$

- insieme degi stati di equilibrio corrispondenti ad un dato ingresso

$$\bar{X}_{\bar{u}} = \begin{cases} \emptyset & \texttt{se } u \notin \bar{U} \\ x0 + \mathcal{N}(F - I) & \texttt{se } u \in \bar{U} \end{cases}$$

ad un ingresso di equilibrio corrispondono infinii stati di equilibrio.

Capitolo 3

Stabilità

Consideriamo una funzione generica scalare definita sullo spazio di stato, a valori reali.

$$V : X \to R \qquad ovvero \qquad V : R^n \to R$$

Sia x_0 un punto dell'insieme X ed I_{x_0} un intorno piccolo a piacere di questo punto. Si dice che:

- V è **definita positiva** in x_0 quando

$$V(x_0) = 0; \quad \exists I_{x_0} : V(x) > 0, \forall x \neq x_0 \in I_{x_0}$$

- V è **definita negativa** in x_0 quando

$$V(x_0) = 0; \quad \exists I_{x_0} : V(x) < 0, \forall x \neq x_0 \in I_{x_0}$$

- V è **semidefinita positiva** in x_0 quando

$$V(x_0) = 0; \quad \exists I_{x_0} : V(x) \geq 0, \forall x \neq x_0 \in I_{x_0}$$

- V è **semidefinita negativa** in x_0 quando

$$V(x_0) = 0; \quad \exists I_{x_0} : V(x) \leq 0, \forall x \neq x_0 \in I_{x_0}$$

3.1 Forme quadratiche

$$V(x) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + a_{13}x_1x_3 + a_{33}x_3^2 + \cdots = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

I termini a_{ii} sono detti "quadrati", quelli a_{ij} invece "rettangolari".

Si può associare ad ogni forma quadratica una matrice simmetrica quadra in corrispondenza biunivoca.

$$V(x) = x^T Ax$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

3.2 Minori principali

Data una matrice A, quadrata di ordine n, si diconi minori principali di ordine k gli n determinanti ottenuti cancellando $n-k$ righe ed $n-k$ colonne dalla matrice A nello stesso ordine, per $k = 1, \ldots, n$.

Vengono detti **minori principali dominanti** quei minori ottenuti cancellando le ultime $n-k$ righe e le ultime $n-k$ colonne dalla matrice A, per $k = 1, \ldots, n$.

3.3 Test di Sylvester

Condizione necessaria e sufficiente affinché una matrice A, quadrata, sia definita positiva nell'origine è che tutti i suoi minori principali dominanti siano strettamente positivi.

3.3.1 Corollario 1

Una matrice A è definita negativa nell'origine se e solo se tutti i minori principali domaninanti di $-A$ sono strettamente positivi.

3.3.2 Secondo test

Condizione necessaria e sufficiente affinché una matrice A, quadrata, sia semidefinita positiva nell'origine è che tutti i suoi minori principali dominanti siano non negativi.

3.3.3 Corollario 2

Una matrice A è semidefinita negativa nell'origine se e solo se tutti i minori principali domaninanti di $-A$ sono non negativi.

Considerazioni

Se una matrice A è definita positiva (negativa) allora è anche semidefinita positiva (negativa).

3.4 Criteri di stabilità di Lyapunov

3.4.1 Sistemi TC

Sia $(\bar{x}, \bar{u})$ una coppia stato-ingresso di equilibrio.

1. Se esiste una funzione $V(x)$ che soddisfa le sequenti ipotesi:
   - V continua con derivate continue
   - V definita positiva in $\bar{x}$
   - $\dot{V}$ definita negativa in $\bar{x}$

   Allora la coppia stato-ingresso di equilibrio $(\bar{x}, \bar{u})$ è un punto di equilibrio *asintoticamente stabile*.
2. Se esiste una funzione $V(x)$ che soddisfa le sequenti ipotesi:
   - V continua con derivate continue
   - V definita positiva in $\bar{x}$
   - $\dot{V}$ semidefinita negativa in $\bar{x}$

   Allora la coppia stato-ingresso di equilibrio $(\bar{x}, \bar{u})$ è un punto di equilibrio *stabile*.
3. Se esiste una funzione $V(x)$ che soddisfa le sequenti ipotesi:
   - V ha segno positivo, lungo una qualunque direzione
   - $V(\bar{x}) = 0$
   - $\dot{V}$ definita positiva in $\bar{x}$

   Allora la coppia stato-ingresso di equilibrio $(\bar{x}, \bar{u})$ è un punto di equilibrio *instabile*.

3.4.2 Sistemi TD

All'istante t si ha $V[x(t)]$ ed all'istante successivo $V[x(t+1)]$, pertanto si definisce al posto della $\dot{V}$ la variazione:

$$\Delta V(x) = V[f(x)] - V(x)$$

Tutti i criteri restano uguali

3.5 Criterio di stabilità di Krasowskii

Se $\bar{x}$ è uno stato di equilibrio con:

- V definita positiva in $\bar{x}$
- $\dot{V}$ semidefinita negativa in $\bar{x}$

Considerato un insieme $S = \{x \in X : V(x) = 0\}$. Lo stato $\bar{x}$ è di equilibrio asintoticamente stabile se non esistono traiettorie perturbate interamente contenuti in S.

3.6 Criterio di instabilità di Ceatev

Siano l'insieme A un intorno di $\bar{x}$ ed A_1 una sottoregione interna ad A. Se esiste una $V(x)$ che soddisfi:

- V continua con derivate continue
- V e $\dot{V}$ sono definite positive nei punti interni ad A_1
- $V = 0$ su ∂A_1 (frontiera di A_1)
- $\bar{x} \in \partial A_1$

allora $(\bar{x}, \bar{u})$ è un punto di equilibrio instabile.

3.7 Forma di Jordan

La matrice di Jordan è una matrice diagonale a blocchi, che ha gli stessi autovalori e polinomi caratteristici di F.

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_h \end{bmatrix}$$

dove h è il numero di autovalori.

I termini J_i con $i = 1, \dots, h$ soo detti blocchi di Jordan, a ciascuno di essi è associato un autovalore distinto (con molteplicità algebrica m_i e molteplicità geometrica q_i).

Ciascun blocco è a sua volta una matrice diagonale:

$$J_i = \begin{bmatrix} J_{i1} & & & \\ & J_{i2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{i_{q_i}} \end{bmatrix}$$

I termini J_{ik} con $k = 1, \dots, q_i$sono detti miniblocchi di Jordan.

$$q_i = n - \rho([\lambda_i I - F]) \rightarrow 1 \leq q_i \leq m_i$$

con n numero di colonne di F. Un miniblocco ha dimensione 1 se e solo se $m_i = q_i$.

Ciascun miniblocco è una matrice bi-diagonale in cui gli elementi della diagonale principale sono uguali a λ_i, tutti quelli sopra ad essa uguali ad 1 e tutti 0 altrove.

$$J_{i_{q_i}} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

L'indice μ_i di un autovalore λ_i è l'ordine del più grande blocco di Jordan associato a λ_i in J.

Polinomio caratteristico

$$p(\lambda) = |\lambda I - F| = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} + \cdots + (\lambda - \lambda_i)^{m_i}$$

3.7.1 Analisi di stabilità per sistemi TC

Il sistema è:

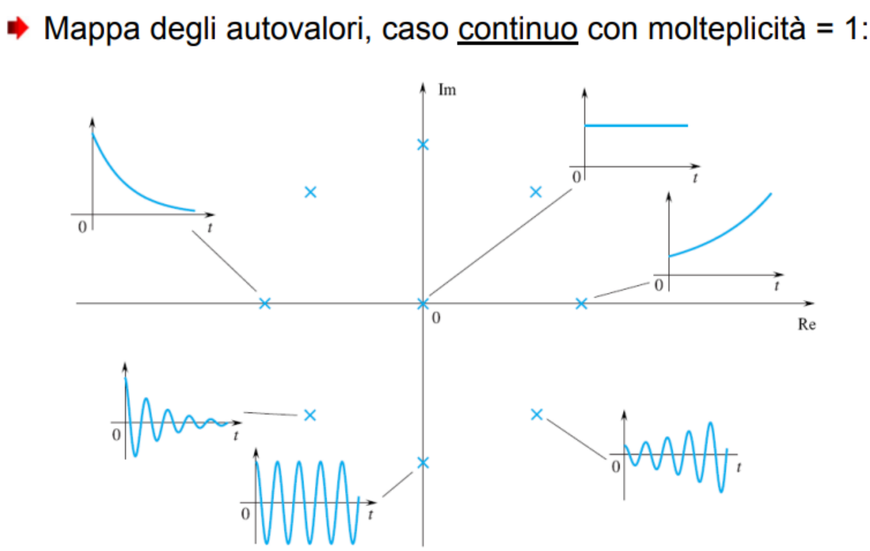
- **asintoticamente stabile** se e solo se tutti gli autovalori sono disposti nel semipiano sinistro di Gauss.
$$Re(\lambda_i) < 0 \qquad \forall \lambda_i$$
- **instabile** se e solo se esiste almento un autovalore disposto nel semipiano destro di Gauss oppure esiste almeno un autovalore sulla frontiera con indice non unitario.
$$\exists \lambda_i : Re(\lambda_i) > 0 \qquad \bigvee \qquad \exists \lambda_i : Re(\lambda_i) = 0 \quad con \quad m_i \neq q_i$$
- **semplicemente stabile** se e solo se tutti gli autovalori sono disposti nel semipiano sinistro di Gauss oppure sulla frontiera ma avendo indice unitario.
$$Re(\lambda_i) < 0 \qquad \forall \lambda_i \qquad \bigvee \qquad \forall \lambda_i : Re(\lambda_i) = 0 \quad con \quad m_i = q_i$$

3.7.2 Analisi di stabilità per sistemi TD

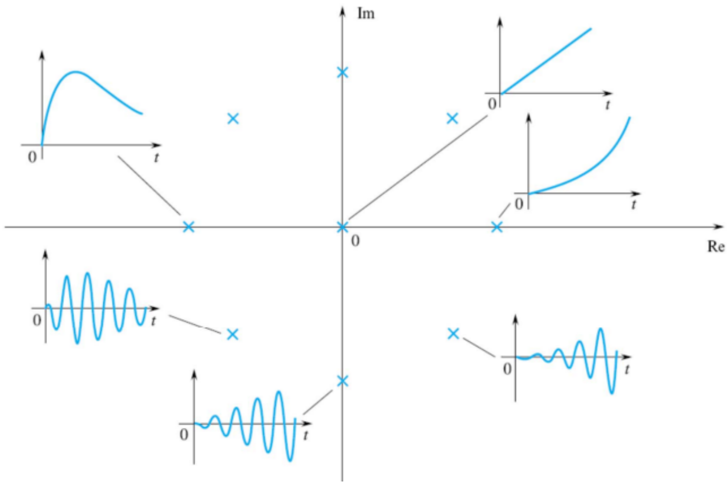
Il sistema è:

- **asintoticamente stabile** se e solo se tutti gli autovalori sono disposti all'interno della circonferenza di raggio unitario.
$$|\lambda_i| < 1 \qquad \forall \lambda_i$$
- **instabile** se e solo se esiste almeno un autovalore disposto al fi fuori della circonferenza unitaria oppure su di essa con indice non unitario.
$$\exists \lambda_i : |\lambda_i| > 1 \qquad \bigvee \qquad \exists \lambda_i : |\lambda_i| = 1 \quad con \quad m_i \neq q_i$$
- **semplicemente stabile** se e solo se tutti gli autovalori sono disposti all'interno della circonferenza unitario o al più sulla circonferenza ma avendo indice unitario.
$$|\lambda_i| < 1 \qquad \forall \lambda_i \qquad \bigvee \qquad \forall \lambda_i : |\lambda_i| = 1 \quad con \quad m_i = q_i$$

3.8 Analisi Modale

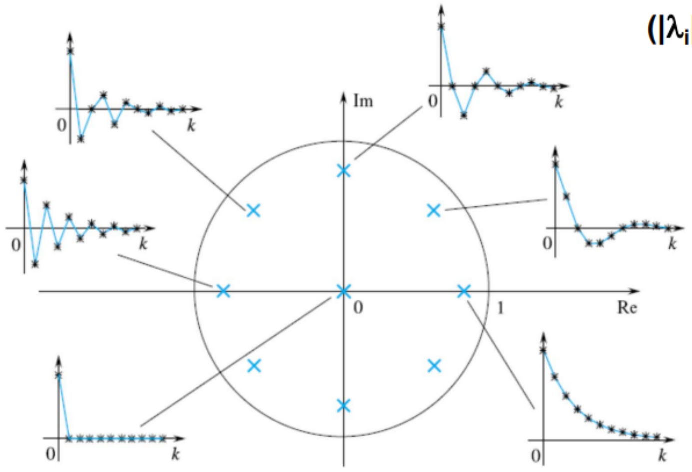


➧ Mappa degli autovalori, caso continuo con molteplicità = 2:



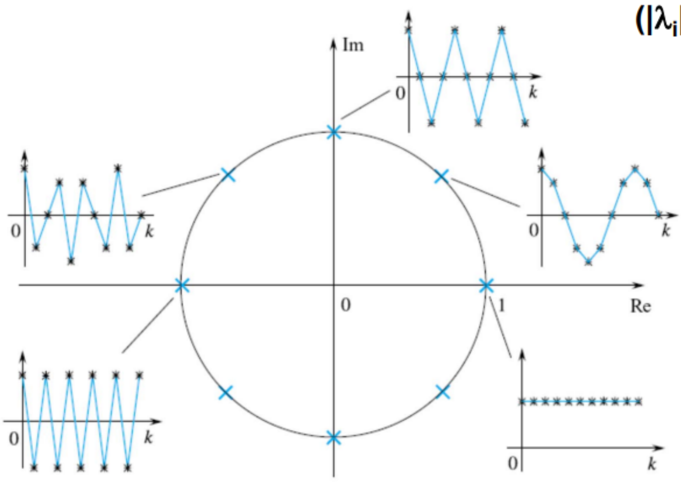
➧ Mappa degli autovalori, caso discreto con molteplicità = 1:

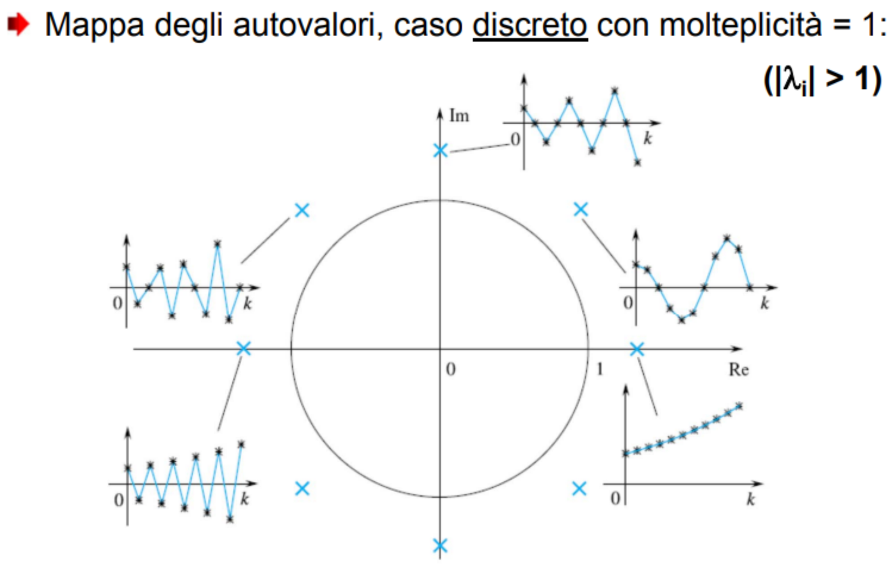
($|\lambda_i| < 1$)

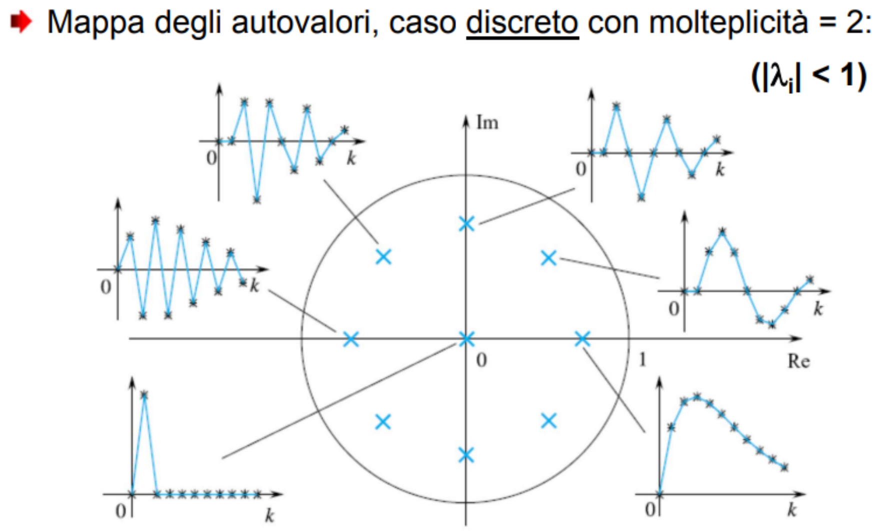


➧ Mappa degli autovalori, caso discreto con molteplicità = 1:

($|\lambda_i| = 1$)







Tempo Discreto:

- autovalori interni alla circonferenza unitaria → *modi convergenti*
- autovalori esterni alla circonferenza unitaria → *modi divergenti*
- autovalori sulla circonferenza unitaria
  - ed indice 1 → *modi limitati*
  - indice maggiore di 1 → *primo modo limitato e gli altri illimitati*

Tempo Continuo:

- autovalori nel semipiano sinistro → *modi convergenti*
- autovalori nel semipiano destro → *modi divergenti*
- autovalori sull'asse immaginario
  - ed indice 1 → *modi limitati*
  - indice maggiore di 1 → *primo modo limitato e gli altri illimitati*

3.8.1 Modi Dominanti

Alcuni modi tendono a zero più rapidamente di altri (per cui la loro influenza sul comportamento asintotico del sistema diventa trascurabile all'aumentare del tempo).

Considerando per semplicità autovalori reali e distinti, se λ_i sono gli autovalori della matrice A allora l'autovalore λ_1 è **dominante** se vale la relazione:

- **TC**
$$Re(\lambda_1) > Re(\lambda_2) > \cdots > Re(\lambda_n)$$
- **TD**
$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_n|$$

3.9 Criterio dell'equazione di Lyapunov

3.9.1 Tempo Continuo

Un sistema LTI è asintoticamente stabile se e solo se per ogni matrice Q, simmetrica e definita positiva, esiste una matrice P, simmetrica e definita positiva, tale che:

$$F'P + PF = -Q$$

Fissando una qualunque Q (solitamente scegliamo la matrice identità I) se si trova una matrice P si conclude che il sistema TC è asintoticamente stabile.

3.9.2 Tempo Discreto

Un sistema LTI è asintoticamente stabile se e solo se per ogni matrice Q, simmetrica e definita positiva, esiste una matrice P, simmetrica e definita positiva, tale che:

$$F'PF - P = -Q$$

Fissando una qualunque Q (solitamente scegliamo la matrice identità I) se si trova una matrice P si conclude che il sistema TD è asintoticamente stabile.

3.10 Criterio di Hurwitz

Si utilizza per valutare la stabilità dei sistemi LTI tempo continui.

Consideriamo il polinomio caratteristico monico:

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_n$$

Ad esso è possibile associare la matrice di Hurwitz, quadrata di dimensione $n \times n$.

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & \cdots & & & & & \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & \cdots & & & \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & \cdots & \\ \vdots & & & & & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema LTI tempo continuo sia asintoticamente stabile è che i minori principali dominani della matrice di Hurwitz siano strettamente positivi. Se almeno uno è negativo, è instabile.

3.11 Test sul Modulo

Si utilizza per valutare la stabilità dei sistemi LTI tempo discreti.

Consideriamo il polinomio caratteristico monico:

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_n$$

Calcoliamo la condizione:

$$|a_i| < \binom{n}{i} \qquad \forall i = 1, \ldots, n$$

in cui

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

Se questa condizione viene violata allora il sistema non è asintoticamente stabile. Se invece la condizione è verificata, non è possibile trarre alcuna conclusione sulla stabilità del sistema.

3.12 Trasformazione bilineare

Vengono trasformati i punti al di fuori del cerchio di raggio unitario in punti del semipiano destro di Gauss; punti interni al cerchio unitario in punti del semipiano sinistro di Gauss; punti sulla circonferenza unitaria in punti all'ifinito nel piano di Gauss.

$$\lambda = \frac{w+1}{w-1}$$

3.13 Criterio di La Salle

Sia $(\bar{x}, \bar{u})$ una coppia stato-ingresso di equilibrio. Se esiste una funzione $V(x)$ che soddisfa le seguenti ipotesi:

- V continua con derivate continua
- V definita positiva in $\bar{x}$ con riferimento a tutto lo spazio di stato X
- $\dot{V}$ definita negativa in $\bar{x}$ con riferimento a tutto lo spazio di stato X
- V radialmente illimitata

allora $(\bar{x}, \bar{u})$ è uno stato di equilibrio ***globalmente stabile***.

Per verificare se una funzione è *radialmente illimitata* consiste nel verificare che il gradiente della funzione V si annulli solamente nell'origine $\bar{x}$.

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\Big|_{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} & \frac{\partial V}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix} = 0 \qquad \textit{se e solo se } \bar{x} = 0$$

3.13.1 Variante di Krasowskii

Sia $(\bar{x}, \bar{u})$ una coppia stato-ingresso di equilibrio. Definiamo l'insieme $S = \{x : \dot{V}(x) = 0\}$. Se esiste una funzione $V(x)$ che soddisfa le seguenti ipotesi:

- V continua con derivate continua
- V definita positiva in $\bar{x}$ con riferimento a tutto lo spazio di stato X
- $\dot{V}$ semidefinita negativa in $\bar{x}$ con riferimento a tutto lo spazio di stato X
- V radialmente illimitata
- non esistono traiettorie perturbate interamente contenute in S

allora $(\bar{x}, \bar{u})$ è uno stato di equilibrio ***globalmente stabile***.

Malkin afferma che se un movimento è asintoticamente stabile in presenza di una perturbazione non persistente, allora lo è anche rispetto ad una persistente.

Capitolo 4

Linearizzazzione intorno all'equilibrio di sistemi non-lineari tempo invarianti

Sia $(\bar{x}, \bar{u})$ una coppia stato-ingresso di equilibrio. É possibile espandere ciascuna funzione in serie di Taylor arrestando lo sviluppo al 1° ordine.

$$f(x,u) = f(\bar{x},\bar{u}) + \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(\bar{x},\bar{u})}(x-\bar{x}) + \frac{\partial f}{\partial u}\Big|_{(\bar{x},\bar{u})}(u-\bar{u})$$

$$g(x,u) = f(\bar{x},\bar{u}) + \frac{\partial g}{\partial x}\Big|_{(\bar{x},\bar{u})}(x-\bar{x}) + \frac{\partial g}{\partial u}\Big|_{(\bar{x},\bar{u})}(u-\bar{u})$$

Quindi otteniamo delle nuove matrici Jacobiane:

$$F = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(\bar{x},\bar{y})} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \qquad G = \frac{\partial f}{\partial u}\Big|_{(\bar{x},\bar{y})} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial u_n} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_n} \end{bmatrix}$$

$$H = \frac{\partial g}{\partial x}\Big|_{(\bar{x},\bar{y})} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \frac{\partial g_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \qquad L = \frac{\partial g}{\partial u}\Big|_{(\bar{x},\bar{y})} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \frac{\partial g_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u_1} & \frac{\partial g_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial u_n} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial u_1} & \frac{\partial g_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial u_n} \end{bmatrix}$$

Indichiamo con: $\Delta x = x - \bar{x}$ e $\Delta u = u - \bar{u}$.

Il sistema ottenuto risulta LTI, quindi è possibile calcolare il movimento del sistema non lineare utilizzando il sistema linearizzato (a patto che si considerino piccole variazioni rispetto all'equilibrio: se ci si allontana dal punto i termini di ordine superiore ad 1 diventano più significativi e l'approssimazione non è più valida).

4.1 Analisi di stabilità mediante linearizzazione

É possibile stimare, usando il modello del sistema linearizzato, il comportamento del sistema in termini di stabilità dell'equilibrio.

La matrice Jacobiana F dipende dallo stato di equilibrio, quindi i suoi autovalori contengono informazioni circa la stabilità del punto di equilibrio attorno a cui si è linearizzato il sistema.

4.1.1 Tempo Continuo

- $$Re(\lambda_i) < 0 \quad \forall\lambda_i \longrightarrow (\bar{x}, \bar{u}) \text{ è un punto di equilibrio } \textbf{asintoticamente stabile}$$

- $$\exists\lambda_i : Re(\lambda_i) > 0 \longrightarrow (\bar{x}, \bar{u}) \text{ è un punto di equilibrio } \textbf{instabile}$$

- $$Re(\lambda_i) < 0 \quad \forall\lambda_i, \qquad \exists\lambda_i : Re(\lambda_i) = 0 \longrightarrow (\bar{x}, \bar{u}) \textit{ non è possibile concludere nulla}$$

4.1.2 Tempo Discreto

- $$|\lambda_i| < 1 \quad \forall\lambda_i \longrightarrow (\bar{x}, \bar{u}) \text{ è un punto di equilibrio } \textbf{asintoticamente stabile}$$

- $$\exists\lambda_i : |\lambda_i| > 1 \longrightarrow (\bar{x}, \bar{u}) \text{ è un punto di equilibrio } \textbf{instabile}$$

- $$|\lambda_i| < 1 \quad \forall\lambda_i, \qquad \exists\lambda_i : |\lambda_i| = 1 \longrightarrow (\bar{x}, \bar{u}) \textit{ non è possibile concludere nulla}$$

Capitolo 5

Raggiungibilità, Cotrollabilità ed Osservabilità

5.1 Raggiungibilità

Si indaga sulla possibilità di passare dallo stato nullo ad un dato stato x.

Gli stati raggiungibili in 1 passo sono dati da:

$$x(1) = Gu(0)$$

Chiamiamo *sottospazio di raggiungibilità in un passo* l'insieme degli stati raggiungiili in un passo, che si ottiene applicando la relazione precedente a tutti i possibili ingressi, vale dunque:

$$X_{R_1} = \mathcal{R}(G)$$

Analogamente gli stati raggiungibili in 2 passi sono dati da:

$$x(2) = FGu(0) + Gu(1) = \begin{bmatrix} G & FG \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}$$

Quindi il *sottospazio di raggiungibilità in due passi* è:

$$X_{R_2} = \mathcal{R}(\begin{bmatrix} G & FG \end{bmatrix})$$

Gli stati raggiungibili in 3 passi sono dati da:

$$x(2) = F^2Gu(0) + FGu(1) + Gu(2) = \begin{bmatrix} G & FG & FFG \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(2) \\ u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}$$

Quindi il *sottospazio di raggiungibilità in tre passi* è:

$$X_{R_2} = \mathcal{R}(\begin{bmatrix} G & FG & FFG \end{bmatrix})$$

Il sottospazio di raggiungibilità in n passi è:

$$X_{R_n} = \begin{bmatrix} G & FG & \cdots & F^{n-1}G \end{bmatrix}$$

Possiamo scrivere la catena di inclusioni:

$$X_{R_1} \subseteq X_{R_2} \subseteq X_{R_3} \subseteq \cdots X_{R_n} = X_{R_{n+1}} = X_{R_{n+2}} = \cdots$$

Quindi il **sottospazio di raggiungibilità del sistema** è

$$X_R = X_{R_n} = \mathcal{R}(\mathcal{K})$$

Dove $\mathcal{K}$ è detta **matrice di Kalman** del sistema (di dimensione $n \times nm$),

Quando il sottospazio di raggiungibilità coincide con lo spazio di stato X, si dice che il sistema è **completamente raggiungibile**. Quindi deve accadere che:

$$\rho(\mathcal{K}) = n \longleftrightarrow X_R = X$$

Se un sistema non è completamente raggiungibile allora la matrice di Kalman ha rango inferiore ad n ed ha senso definire il *sottospazio di non raggiungibilità*, indicato con X_{NR} che soddisfa:

1. $X_{NR} \subset X$
2. $X_{NR} \bigcap X_R = 0$

Questi due vincoli portano ad infinite soluzioni. Per risolvere questa ambiguità si sceglie l'unico sottospazio vettoriale complementare che è anche ortogonale a quello dato: $X_{NR} = X_R^{\perp}$.

5.2 Controllabilità (in senso stretto)

Si indaga sulla possibilità di passara da un dato stato x allo stato nullo.

Gli stati raggiungibili in 1 passo sono dati da:

$$Fx + Gu(0) = 0$$

Gli stati che soddisfano l'equazione definiscono *l'insieme di controllabilità in un passo*:

$$X_{C_1} = \{x : Fx \in \mathcal{R}(G)\}$$

Imporre l'appartenenza del vettore Fx al range della matrice G corrisponde a trovare la x che soddisfa:

$$\rho(\begin{bmatrix} G & Fx \end{bmatrix}) = \rho(G)$$

Gli stati controllabili in 2 passi sono dati da[1]:

$$F^2x + FGu(0) + Gu(1) = 0 \longleftrightarrow FFx + \begin{bmatrix} G & FG \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} = 0$$

Il *sottospazio di controllabilità in due passi* è:

$$X_{C_2} = \{x : F^2x \in \mathcal{R}(\begin{bmatrix} G & FG \end{bmatrix})\}$$

Il *sottospazio di controllabilità in* n *passi* è:

$$X_{C_n} = \{x : F^n x \in \mathcal{R}(\mathcal{K})\}$$

Possiamo scrivere la catena di inclusioni:

$$X_{C_1} \subseteq X_{C_2} \subseteq X_{C_3} \subseteq \cdots X_{C_n} = X_{C_{n+1}} = X_{C_{n+2}} = \cdots$$

Quindi il **sottospazio di controllabilità** è: $X_C = X_{C_n}$.

Se tutti gli stati sono controllabili si dice che il sistema è *completamente controllabile*:

$$X_C = X \longleftrightarrow \rho(\mathcal{K}) = \rho(\begin{bmatrix} \mathcal{K} & F^n \end{bmatrix})$$

Se $|F| \neq 0$ allora il sistema è *reversibile* perchiò il problema di raggiungibilità ed osservabilità hanno lo stesso risultato ($X_R = X_C$). Se invece $|F| = 0$ allora i problemi di raggiungibilità e controllabilità possono risultare uguali o diversi ($X_R \subseteq X_C$).

Tutti questi risultati erano riferiti a sistemi TD, per sistemi TC non si parla di passi ma di intervalli di tempo. Pertanto se uno stato è raggiungibile (o controllabile) lo è per qualsiasi intervallo di tempo. Definiamo quindi soltanto il sottospazio di raggiungibilità (o di controllabilità), perché qualisasi sistema LTI regolare è reversibile ($X_R = X_C = \mathcal{R}(\mathcal{K})$.

[1] x è la condizione iniziale

5.3 Osservabilità

Risponde all'esigenza di risalire allo stato del sistema a partire dalle conoscenza delle sue uscite.

Considerando sistemi tempo discreti, pruamente dinamici, propri, caratterizzati da equazioni con matrice ingresso-uscita nulla.

Per risolvere il problema di determinare lo stato iniziale tutti gli ingressi sono equivalenti, quindi consideriamo l'ingresso nullo ed otteniamo:

$$y_l(t) = Hx_l(t) = HF^t x$$

Ovvero:

$$\begin{cases} y_l(0) = Hx \\ y_l(1) = HFx \\ \vdots \\ y_l(n-1) = HF^{n-1}x \end{cases} \qquad \longleftrightarrow \qquad \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} y_l(0) \\ y_l(1) \\ \vdots \\ y_l(n-1) \end{bmatrix}$$

Nota l'uscita libera, risolvendo il sistema di equazioni determiniamo lo stato iniziale x.

Definiamo **matrice di Kalman di osservabilità** (di dimensione $pn \times n$):

$$\mathcal{K}_O = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix}$$

Il sistema di equazioni ammette soluzione unica solo se: $\rho(\mathcal{K}) = n \longrightarrow$ *sistema completamente osservabile*. Uno stato che produce un'uscita libera identicamente nulla si dice *non osservabile*.

L'insieme contenente gli stati non osservabili prende il nome di *sottospazio di non osservabilità*:

$$X_{NO} = \mathcal{N}(\mathcal{K}_O)$$

Il *sottospazio di osservabilità* è definito come complemento ortogonale del sottospazio di non osservabilità: $X_O = X_{NO}^{\perp}$.

Se il sistema non è completamente osservabile ($\rho(\mathcal{K}_O) < n$) allora non è possibile individuare univocamente lo stato di partenza a partire da una daa uscita libera, poiché il sistema di equazioni non ha soluzione unica.

Si possono trovare tutti gli stati candidati ad essere stati iniziali. Questo insieme di stati prende il nome di **Classe di Indistinguibilità**:

$$CI(x) = \tilde{x} + X_{NO}$$

dove $\tilde{x}$ è una soluzione particolare dell'equazione $\mathcal{K}_O x = \hat{y}$, con $\hat{y}$ uscita libera fissata per i primi n campioni. Per riconoscere se due stati x_A ed x_B soo o meno indistinguibili basta verificare se la loro differenza appartiene al nucleo della matrice di osservabilità.

$$x_A - x_B \in \mathcal{N}(\mathcal{K}_O)$$

Tutti i risultati ottenuti per i sistemi tempo discreto valgono anche per quelli tempo continuo.

5.4 Scomposizione di Kalman rispetto alla Raggiungibilità

Per un dato sistema a dimensioni finite LTI si vuole effettuare una trasformazione lineare per fare in modo che il sistema esibisca in modo evidente le proprietà di raggiungibilità. [Ragioniamo su un sistema TC, ma i risultati restano invariati per i sistemi TD].

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) = Hx(t) + Lu(t) \end{cases}$$

Ponendo $x(t) = Tz(t)$, con T qualsiasi invertibile ($|T| \neq 0$), possiamo scrivere $z(t) = T^{-1}x(t) \longrightarrow \dot{z}(t) = T^{-1}\dot{x}(t)$. Quindi:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = T^{-1}FTz(t) + T^{-1}Gu(t) \\ y(t) = HTz(t) + Lu(t) \end{cases}$$

Possiamo definire delle nuove matrici $\tilde{F} = T^{-1}FT$; $\tilde{G} = T^{-1}G$; $\tilde{H} = HT$; $\tilde{L} = L$.

Tra tutte le trasformazioni possibili scegliamo una matrice dimensione $n \times n$ costruita nel seguente modo:

$$T = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_r & \vdots & b_{r+1} & b_{r+1} & b_n \end{bmatrix}$$

Quindi è partizionata in due colonne, la prima che ha una base per X_R di dimensione r e la seconda una base per X_{NR} di dimensione $n - r$.

Possiamo partizionare anche le matrici, ottenendo:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_A(t) \\ \dot{z}_B(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{F}_{AA} & \tilde{F}_{AB} \\ 0 & \tilde{F}_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_A(t) \\ z_B(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{G}_A \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} \tilde{H}_A & \tilde{H}_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_A(t) \\ z_B(t) \end{bmatrix} + Lu(t)$$

Notiamo che:

- $\dot{z}_A(t)$ può raggiungere qualunque stato, per questo è detto *sottospazio completamente controllabile (raggiungibile).*

  Gli autovalori del blocco $\tilde{F}_{AA}$ sono detti *controllabili (raggiungibili).*

- $\dot{z}_B(t)$ può raggiungere qualunque stato, per questo è detto *sottospazio completamente non controllabile (raggiungibile).*

  Gli autovalori del blocco $\tilde{F}_{BB}$ sono detti *non controllabili (raggiungibili).*

La matrice di trasferimento del sistema è:

$$\tilde{W}(s) = \tilde{H}_A(sI - \tilde{F}_{AA})^{-1}\tilde{G}_A + \tilde{L}$$

Possiamo vedere come il sottoinsieme non controllabile non ha alcuna influenza sulla W. I poli del sistema coincidono al più con gli autovalori raggiungibili del sistema stesso.

5.5 Scomposizione di Kalman rispetto all'Osservabilità

Per un dato sistema a dimensioni finite LTI si vuole effettuare una trasformazione lineare per fare in modo che il sistema esibisca in modo evidente le proprietà di osservabilità. [Ragioniamo su un sistema TC, ma i risultati restano invariati per i sistemi TD].

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{cases}$$

Ponendo $x(t) = Tz(t)$, con T qualsiasi invertibile ($|T| \neq 0$), possiamo scrivere $z(t) = T^{-1}x(t) \longrightarrow \dot{z}(t) = T^{-1}\dot{x}(t)$. Quindi:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = T^{-1}FTz(t) + T^{-1}Gu(t) \\ y(t) = HTz(t) \end{cases}$$

Possiamo definire le nuove matrici $\tilde{F} = T^{-1}FT$; $\tilde{G} = T^{-1}G$; $\tilde{H} = HT$; $\tilde{L} = L$.

Tra tutte le trasformazioni possibili scegliamo una matrice dimensione $n \times n$ costruita nel seguente modo:

$$T = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_r & \vdots & b_{r+1} & b_{r+1} & b_n \end{bmatrix}$$

Quindi è partizionata in due colonne, la prima che ha una base per X_{NO} di dimensione r e la seconda una base per X_O di dimensione $n - r$.

Possiamo partizionare anche le matrici, ottenendo:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_A(t) \\ \dot{z}_B(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{F}_{AA} & \tilde{F}_{AB} \\ 0 & \tilde{F}_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_A(t) \\ z_B(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{G}_A \\ \tilde{G}_B \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{H}_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_A(t) \\ z_B(t) \end{bmatrix}$$

Notiamo che:

- $\dot{z}_A(t)$ non ha influenza sul sistema, per questo è detto *sottosistema completamente non osservabile.*

  Gli autovalori del blocco $\tilde{F}_{AA}$ sono detti *non osservabili.*

- $\dot{z}_B(t)$ può raggiungere qualunque stato, per questo è detto *sottosistema completamente osservabile.*

  Gli autovalori del blocco $\tilde{F}_{BB}$ sono detti *osservabili.*

La matrice di trasferimento del sistema è:

$$\tilde{W}(s) = \tilde{H}_B(sI - \tilde{F}_{BB})^{-1}\tilde{G}_B$$

5.6 Stabilizzabilità

Un sistema si dice *stabilizzabile* se può essere reso asintoticamente stabile, ovvero se tutti i suoi autovalori che compromettono la stabilità possono essere spstati in modo da garantirla.

Un sistema LTI è stabilizzabile se è completamente raggiungibile o, se non lo è, se la nua parte non raggiungibile è asintoticamente stabile. Quindi gli autovalori del blocco $\tilde{F}_{BB}$ devono risultare asintoticamente stabili.

5.7 Rivelabilità

Per poter stimare lo stato, gli autovalori non osservabili devono risultare asintoticamente stabili. Quindi un sistema è *rivelabile* se e solo se gli autovalori del blocco $\tilde{F}_{AA}$ risultano tutti asintoticamente stabili.

5.8 Scomposizione di Kalman Completa

Un sistema a dimensione finite LTI si può rappresentare in maniera tale che siano contemporaneamente evidenti le sue proprietà di controllabilità e di osservabilità.

Definiamo:

- *sottospazio di raggiungibilità e non osservabilità*

  $$X_A = X_R \bigcap X_{NO}$$

  (di dimensione r_A)

- *sottospazio di raggiungibilità e osservabilità*

  $$X_B = X_R \bigcap X_A^{\perp}$$

  (di dimensione r_B)

- *sottospazio di non raggiungibilità e non osservabilità*

  $$X_C = X_{NO} \bigcap X_A^{\perp}$$

  (di dimensione r_C)

- *sottospazio di non raggiungibilità e osservabilità*

$$X_D = (X_A + X_B + X_C)^{\perp}$$

 (di dimensione r_D)

La trasformazione, non singolare, che permette di evidenziare le proprietà del sistema è:

$$T = \begin{bmatrix} \textit{base per } X_A & \vdots & \textit{base per } X_B & \vdots & \textit{base per } X_C & \vdots & \textit{base per } X_D \end{bmatrix}$$

L'equazione di stato del sistema diventa:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_A(t) \\ \dot{z}_B(t) \\ \dot{z}_C(t) \\ \dot{z}_D(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{F}_{AA} & \tilde{F}_{AB} & \tilde{F}_{AC} & \tilde{F}_{AD} \\ 0 & \tilde{F}_{BB} & 0 & \tilde{F}_{BD} \\ 0 & 0 & \tilde{F}_{CC} & \tilde{F}_{CD} \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{F}_{DD} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_A(t) \\ z_B(t) \\ z_C(t) \\ z_D(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{G}_A \\ \tilde{G}_B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

L'equazione dell'uscita invece:

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{H}_B & 0 & \tilde{H}_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_A(t) \\ z_B(t) \\ z_C(t) \\ z_D(t) \end{bmatrix}$$

Abbiamo quindi:

- S_A **sottosistema raggiungibile e non osservabile**: è influenzato dall'ingresso u e non influenza l'uscita y.

  Quindi $\tilde{F}_{AA}$ comprende gli *autovalori raggiungibili e non osservabili.*

- S_B **sottosistema raggiungibile e osservabile**: è influenzato dall'ingresso u e influenza l'uscita y.

  Quindi $\tilde{F}_{BB}$ comprende gli *autovalori raggiungibili e osservabili.*

- S_C **sottosistema non raggiungibile e non osservabile**: non è influenzato dall'ingresso u e non influenza l'uscita y.

  Quindi $\tilde{F}_{CC}$ comprende gli *autovalori non raggiungibili e non osservabili.*

- S_D **sottosistema non raggiungibile e osservabile**: non è influenzato dall'ingresso u e influenza l'uscita y.

  Quindi $\tilde{F}_{DD}$ comprende gli *autovalori non raggiungibili e osservabili.*

La matrice di trasferimento del sistema è:

$$\tilde{W}(s) = \tilde{H}_B(sI - \tilde{F}_{BB})^{-1}\tilde{G}_B$$

I sottosistemi S_A, S_C, S_D sono irrilevanti perché o non sono influenzati da u oppure non influenzano y.

5.9 Stabilità Interna ed Esterna

Quando si considera la matirce $\tilde{F}$ si ha una visione più completa sulla dinamica del sistema. Si parla di *stabilità interna* quando risultano stabili gli autovalori di questa matrice.

La matrice di trasferimento $\tilde{W}$ invece contiene informazioni sul comportamento del sistema visto dall'esterno. Si parla quindi di *stabilità esterna* quando gli autovalori del blocco $\tilde{F}_{BB}$ risultano stabili.

Se un sistema è completamente raggiungibile è anche completamente osservabile, la stabilità interna coincide con la stabilità esterna.

Capitolo 6

Matlab

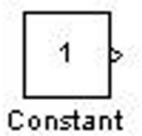
```
% Definizione delle matrici del modello
F = [a_11, a_12; a_21, a_22];
G = [b_11; b22];
H = [c_11, c_12];
L = [d_11];

% Rappresentazione del sistema nello spazio degli stati
sys_TC = ss(F,G,H,L); % se il sitema e' TC
sys_TD = ss(F,G,H,L,-1); % se il sitema e' TD

% tempo di simulazione
t = 0:0.1:50; % da 0 a 50 con passo 0.1

% Condizione iniziale
x_0 = [x0_1; x0_2];
u = t*0; % ingresso nullo

% funzione di trasferimento del sistema
ftd_TC = tf(sys_TC);
fdt_TD = tf(sys_TD);

% risposta libera
initial(sys_TC, x_0, t);
initial(sys_TD, x_0, t);

% risposta forzata
lsim(sys_TC, u, t, x_0);
lsim(sys_TD, u, t, x_0, 1);

% calcolo degli autovalori
eig(F);

% calcolo dei poli
pole(fdt_TC);
pole(fdt_TD);

% metodo iterativo
x = x_0;
for k=0:1:10
    x = F*x + G*u;
end
y = H*x + L*u;
```

```
% matrice di controllabilita' di Kalman
ctrb(F,G);

% matrice di osservabilita' di Kalman
obsv(F,H);

% matrice in forma di Jordan
jordan(F);

% matrice identita' di dimensione n
A = eye(n);

% matrice di zero (dimensione mxn)
B = zeros(m,n);

% matrice di uno (dimensione mxn)
C = ones(m,n);

% matrice di numeri casuali (compresi tra 0 e 1)
D = rand(m,n);

% inversa di una matrice
inv(A);

% determinante di un matrice
det(B)

% rango di una matrice
rank(C);

% restituisce i coefficienti del polinomio caratteristico di
    una matrice
charpoly(D);

% antitrasformata di laplace
ilaplace(D)
```

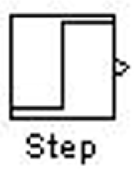
6.1 Simulink

Elenco di alcuni blocchi utili:

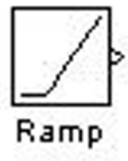
- ingresso costante



- ingresso gradino

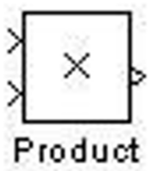


- ingresso a rampa

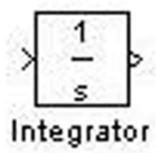


- guadagno

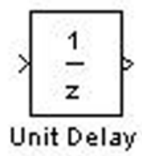
- prodotto



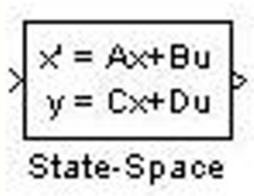
- integratore



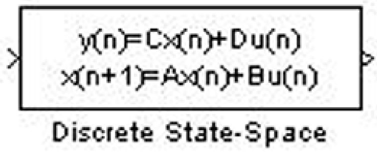
- ritardo unitario



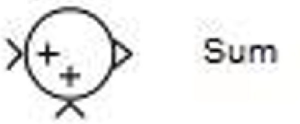
- state-space



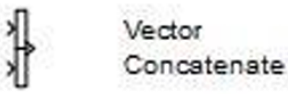
- state-space discreto



- somma



- concatenare due segnali



- grafico