POLITECNICO DI BARI

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA ELETTRICA E DELL'INFORMAZIONE
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria dell'Automazione

Tema d'anno in Optimization and Control

Ottimizzazione di una Dieta Settimanale Bilanciata tramite Programmazione Lineare Intera

Professore
Agostino Marcello Mangini

Studenti
Stefano Di Lena
Paolo Santoro

Anno Accademico 2024/2025

Indice

Capitolo 1

Problema MILP (Mixed Integer Linear Programming)

1.1 Descrizione Qualitativa

Uno studente universitario ha un budget settimanale di 50$ per alimentarsi (acquisterà prodotti utili a sfamarli per 7 pranzi e 7 cene). I pasti devono essere vari ed equilibrati (carne, pesce, legumi, formaggi). Si vuole ottenere un equilibrio nutrizionale, cercando di integrare al giorno circa il 55% di carboidrati, 25% di grassi ed il 20% di proteine. La carne rossa può essere consumati al massimo una volta durante la settimana; il salmone non può essere mangiato più di due volte a settimana e la mozzarella non deve essere mangiata più di tre volte a settimana. I legumi, invece, devono essere mangiati almeno quattro volte durante la settimana. Nello stesso giorno se mangio le uova non posso mangiare anche il salmone. L'obiettivo è minimizzare la spesa totale.

Alimento	**Costo [$]**	**Kcal**	**Carb. [g]**	**Grassi [g]**	**Prot. [g]**
Carne Rossa	4,00	127	0	4,6	22
Pollo	1,10	165	0	3,5	30
Salmone	4,50	185	1	12	19
Merluzzo	1,90	82	0	0,5	17,8
Uova	0,10	128	0,7	8,7	12,4
Legumi	0,70	92	16,3	0,4	6,9
Mozzarella	1,50	275	2	23	20
Patate	0,13	75	16	0,1	2
Pasta	0,25	350	77	1,5	14
Pane	0,21	166	50,6	3,3	7,6

Tabella 1.1: Prezzo e valori nutrizionali per 100g di alimento.

Si assume un fabbisogno calorico giornaliero compreso tra le 2300 e le 2700 kcal/gg.

1.2 Formulazione Matematica

1.2.1 Insiemi

- $ALIMENTI = \{CarneRossa, Pollo, Salmone, Merluzzo, Uova, Legumi, Mozzarella, Patate, Pasta, Pane\}$: insieme degli alimenti.
- $DAY = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$: insieme dei giorni della settimana.

1.2.2 Parametri

- $Costo[a]$: prezzo per porzioni da 100g di ogni alimento.
- $Kcal[a]$: kcal associate a 100g di prodotto.
- $Carbo[a]$: carboidrati associate a 100g di prodotto.
- $Grassi[a]$: grassi associate a 100g di prodotto.
- $Prot[a]$: proteine associate a 100g di prodotto.
- $M = 10$: big number per i vincoli di collegamento delle variabili binarie.

1.2.3 Variabili Decisionali

- $Q[a][d] \geq 0$: quantità (in unità da 100g) di alimento a consumata il giorno d.
- $y[a][d] \in \{1, 0\}$: 1 se l'alimento a viene consumato nel giorno d, 0 altrimenti.

1.2.4 Funzione Obiettivo

- $\min Z = \sum_{a \in ALIMENTI} \sum_{d \in DAY} Q[a][d] \cdot Costo[a]$.

1.2.5 Vincoli

Bilancio Settimanale

Il costo totale non deve superare il budget dello studente.

- $\sum_{a \in ALIMENTI} \sum_{d \in DAY} Q[a][d] \cdot Costo[a] \leq 50$.

1.2.6 Fabbisogno Calorico Giornaliero

- $\sum_{a \in ALIMENTI} Kcal[a] \cdot Q[a][d] \geq 2300 \quad \forall d \in DAY$.
- $\sum_{a \in ALIMENTI} Kcal[a] \cdot Q[a][d] \leq 2700 \quad \forall d \in DAY$.

1.2.7 Equilibrio Nutrizionale

Assumiamo delle tolleranze (± 2) dal valore target. Se chiamiamo:

- $TotalKcal[d] = \sum_{a \in ALIMENTI} Kcal[a] \cdot Q[a][d] \quad \forall d \in DAY$: il totale delle calorie assunte nel giorno d.

Allora possiamo calcolare i vincoli per i macro-nutrienti.

1. **Carboidrati**:
   - $\sum_{a \in ALIMENTI} Carbo[a] \cdot Q[a][d] \cdot 4 \geq 0{,}53 \cdot TotalKcal[d] \quad \forall d \in DAY$.
   - $\sum_{a \in ALIMENTI} Carbo[a] \cdot Q[a][d] \cdot 4 \leq 0{,}57 \cdot TotalKcal[d] \quad \forall d \in DAY$.
2. **Grassi**:
   - $\sum_{a \in ALIMENTI} Grassi[a] \cdot Q[a][d] \cdot 9 \geq 0{,}23 \cdot TotalKcal[d] \quad \forall d \in DAY$.
   - $\sum_{a \in ALIMENTI} Grassi[a] \cdot Q[a][d] \cdot 9 \leq 0{,}27 \cdot TotalKcal[d] \quad \forall d \in DAY$.
3. **Proteine**:
   - $\sum_{a \in ALIMENTI} Prot[a] \cdot Q[a][d] \cdot 4 \geq 0{,}18 \cdot TotalKcal[d] \quad \forall d \in DAY$.
   - $\sum_{a \in ALIMENTI} Prot[a] \cdot Q[a][d] \cdot 4 \leq 0{,}22 \cdot TotalKcal[d] \quad \forall d \in DAY$.

Si è usata la "regola del 4-4-9", conosciuta anche come *Atwater general factor system* ed ampiamente adottata nella nutrizione.

1.2.8 Vincoli di Collegamento

Per legare la variabile continua di quantità a quella binaria: se un alimento viene consumato, la sua variabile binaria corrispondente deve essere uguale ad 1. Se la variabile binaria è 0 allora la quantità deve essere 0.

- $Q[a][d] \leq M \cdot y[a][d] \quad \forall a \in ALIMENTI, d \in DAY$.

1.2.9 Restrizioni Alimentari

- $\sum_{d \in DAY} y[CarneRossa][d] \leq 1$.
- $\sum_{d \in DAY} y[Salmone][d] \leq 2$.
- $\sum_{d \in DAY} y[Mozzarella][d] \leq 3$.
- $\sum_{d \in DAY} y[Legumi][d] \geq 4$.
- $y[Uova][d] + y[Salmone][d] \leq 1. \quad \forall d \in DAY$.

1.3 Conclusioni

Il modello consente di pianificare una dieta settimanale ottimale per studenti aventi un budget limitato, bilanciando comunque la spesa ed una varietà alimentare che porti ad un giusto equilibrio nutrizionale.

1.3.1 Espansione tramite Ottimizzazione Robusta

Nella realtà, i parametri non soni noti con certezza. Tramite l'ottimizzazione robusta affrontiamo questa incertezza senza dover fare ipotesi probabilistiche sulla distribuzione dei parametri incerti.

L'obiettivo è trovare una soluzione che sia efficace anche in presenza di variazioni dei parametri, garantendo l'ammissibilità dei vincoli e limitando le fluttuazioni del valore della funzione obiettivo.

Se conoscessimo per ciascun alimento i cosi massimi e minimi, possiamo utilizzare il **criterio della robustezza assoluta**.

Alimento	**Costo[a][Min]**	**Costo[a][Max]**
Carne Rossa	2,5	6
Pollo	0,70	1,10
Salmone	3,6	4,5
Merluzzo	0,80	2,90
Uova	0,05	0,10
Legumi	0,45	1,10
Mozzarella	0,70	1,6
Patate	0,10	0,25
Pasta	0,15	0,25
Pane	0,15	0,30

Tabella 1.2: Prezzi massimi e minimi per 100g di ogni alimento.

Una soluzione è definita *ottima robusta in senza assoluto* se minimizza il costo massimo che si potrebbe ottenere in corrispondenza di tutti i possibili scenari. Nel nostro contesto quindi il caso peggiore si ottiene quando tutti i costi degli alimenti raggiungono il valore massimo. Quindi la funzione obiettivo andrebbe cambiata in maniera tale da minimizzare il costo nel caso peggiore:

$$\min Z = \sum_{a \in ALIMENTI} \sum_{d \in DAY} Q[a][d] \cdot Costo[a][Max]. \tag{1.1}$$

Dove $Costo[a][Max]$ rappresenta il costo massimo per 100g grammi dell'alimento [a] osservato durante l'anno.

Gli altri vincoli rimangono inalterati e deterministici. Se l'incertezza è concentrata nei prezzi.

1.3.2 Modifiche Necessarie

Durante le prime esecuzioni del modello, abbiamo osservato che la soluzione tendeva a sfruttare in modo eccessivo alimenti ad alto contenuto energetico e basso costo: **Uova** (in quantità superiori ai 600g al giorno) e **Pasta**.

Gli altri alimenti venivano completamente ignorati al fine di minimizzare i costi.

Questo comportamento, pur rispettando i vincoli di costo e quelli nutrizionali, non risultava compatibile con i vero e proprio obiettivo che alla fine è quello di seguire una dieta sana ed equilibrata.

Per migliorare la qualità della soluzione quindi sono stati introdotti dei nuovi vincoli che riflettono sui consumi realistici consigliati di ciascun alimento.

Vicoli aggiunti

- $\sum_{d \in DAY} Q[CarneRossa][d] \leq 3{,}5$: massimo 350g di carne rossa a settimana;
- $\forall d \in DAY : Q[Uova][d] \leq 1$: max 100g di uova al giorno;
- $\forall d \in DAY : Q[Salmone][d] \leq 1{,}5$: max 150g di salmone al giorno;
- $\forall d \in DAY : Q[Merluzzo][d] \leq 3$: max 300g di merluzzo al giorno;
- $\forall d \in DAY : Q[Legumi][d] \leq 1{,}5$: max 150g di legumi al giorno;
- $\forall d \in DAY : Q[Pasta][d] \leq 5$: max 500g di pasta al giorno;
- $\forall d \in DAY : Q[Pane][d] \leq 1{,}5$: max 150g di pane al giorno;
- $\forall d \in DAY : Q[Patate][d] \leq 2$: max 200g di patate al giorno;
- $\forall d \in DAY : Q[Pollo][d] \leq 3$: max 300g di pollo al giorno;
- $\forall d \in DAY : Q[Mozzarella][d] \leq 2$: max 200g di mozzarella al giorno;
- le uova non possono essere mangiate due volte di fila, $\forall d \in \{1, \ldots, 6\}$: $y[Uova][d] + y[Uova][d+1] \leq 1$.

É stato introdotto anche un parametro $\epsilon = 0{,}5$ per obbligare il modello a consumare almeno 50g se un alimento viene scelto (evitando così che il modello attivi un alimento con quantità quasi nulla solo per soddisfare i vincoli binari).

- $Q[a][d] \geq \epsilon \cdot y[a][d] \quad \forall a \in ALIMENTI, d \in DAY$.

Con l'introduzione di questi nuovi vincoli aumenta la varietà degli alimenti, le porzioni giornaliere diventano più coerenti con quelle di una dieta reale, tutti gli alimenti vengono usati in modo bilanciato durante la settimana.

Questo dimostra che un modello matematico, per quanto formalmente corretto, può produrre soluzioni inadeguate se non viene guidato da vincoli realistici.