单元 2.4- 关系的幂运算和闭包

第一编 集合论　第 2 章 二元关系

2.5 二元关系的幂运算

2.6 二元关系的闭包

内容提要

- 关系的 n 次幂
- 关系的自反闭包
- 关系的对称闭包
- 关系的传递闭包
- 闭包的性质和反例
- 闭包的求法

关系的 n 次幂

- $R \subseteq A \times A,\ n \in N$

$$\begin{cases} R^0 = I_A \\ R^{n+1} = R^n \circ R \quad (n \geq 0) \end{cases}$$

- 显然 $R^n \subseteq A \times A,\ n \in N$

$$R^n = \underbrace{R \circ R \circ \cdots \circ R}_{n个R}$$

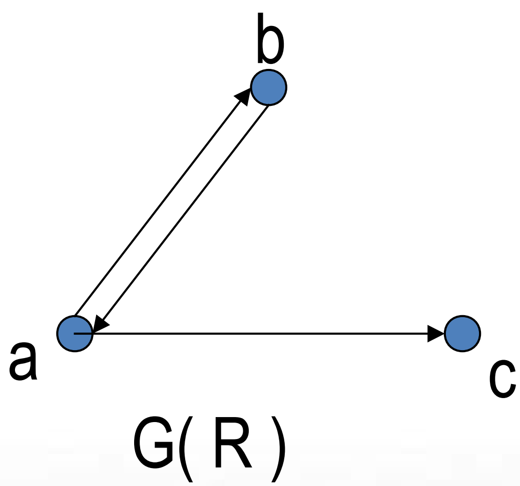
n个关系自己跟自己合成

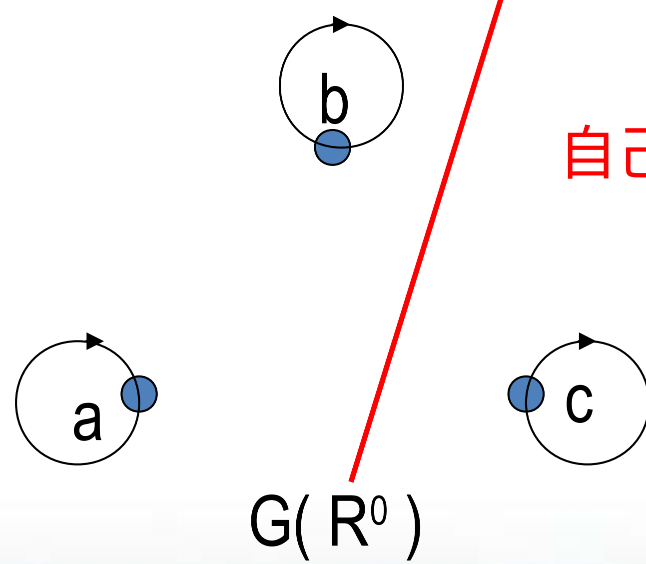
关系幂运算举例

- 设 $A=\{a,b,c\}$, $R\subseteq A\times A$ $R=\{<a,b>,<b,a>,<a,c>\}$, 求 R 的各次幂.
- 解：$R^0 = I_A$, $R^1 = R$

0次幂就是恒等关系

自己只和自己有关系





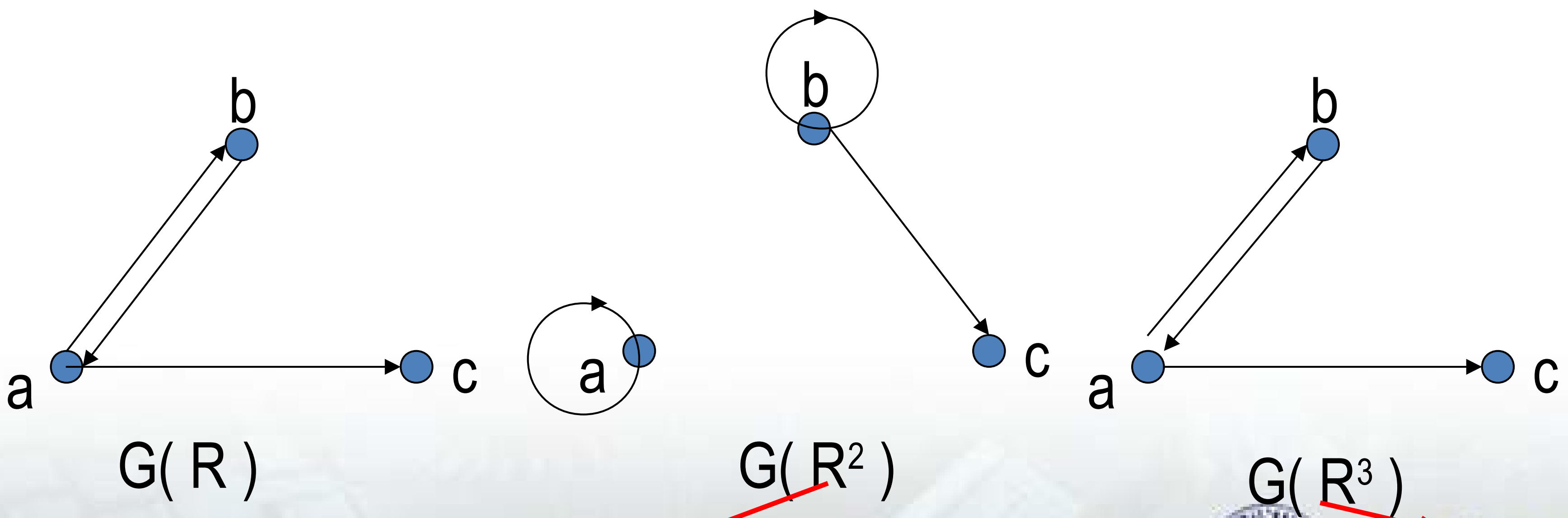
关系幂运算举例

$R^2 = R \circ R = \{<a,a>,<b,b>,<b,c>\}$,

$R^3 = R^2 \circ R = \{<a,b>,<b,a>,<a,c>\} = R^1$,

所以， $R^{2k+1}=R$, $k=0,1,2,\ldots$,

$R^{2k}=R^2$, $k=1,2,\ldots$. $R^0 = I_A$. #



在R中寻找路径长为2的关系　在R中寻找路径长为3的关系

定理 2.17

定理 2. 17 设 $R \subseteq A \times A$, $m,n \in N$, 则

$(1)\ R^m \circ R^n = R^{m+n}$; $(2)\ (R^m)^n = R^{mn}$.

证明 (1) 给定 m, 对 n 归纳 .

n=0 时， $R^m \circ R^n = R^m \circ R^0 = R^m \circ I_A = R^m = R^{m+0}$.

假设 $R^m \circ R^n = R^{m+n}$, 则

$R^m \circ R^{n+1} = R^m \circ (R^n \circ R^1)$

$= (R^m \circ R^n) \circ R^1 = R^{m+n} \circ R = R^{(m+n)+1} = R^{m+(n+1)}$.

(2) 可类似证明 . #

关系的闭包

闭包的性质

1、包含给定的元素

2、具有给定的性质

3、是最小的二元关系

每个元素都和自己有关系

- 自反闭包 r(R) 包含R，向R里面加一些元素，使R变成自反
- 对称闭包 s(R) 包含R，并且使R对称
- 传递闭包 t(R) 包含R，并且使R构成传递的二元关系

从关系R里任意挑出一组x，如果<x,y>在R里，<y,x>也在R里，R就是对称

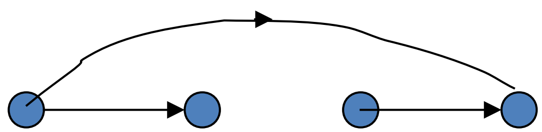
自反闭包

- 自反闭包 r(R)

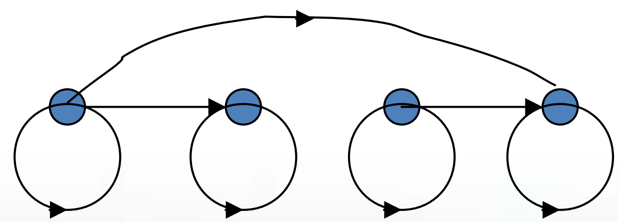
(1) R⊆r(R)

(2) r(R) 是自反的

(3) ∀S((R⊆S∧S 自反)→r(R)⊆S)



G(R)



G(r(R))

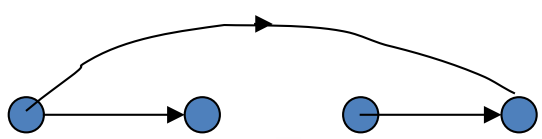
对称闭包

- 对称闭包 **s(R)**

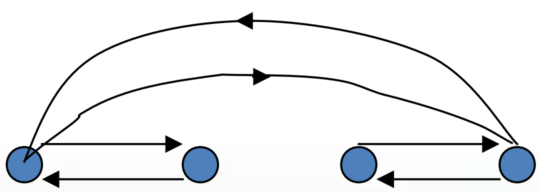
  (1) $R \subseteq s(R)$

  (2) s(R) 是对称的

  (3) $\forall S((R \subseteq S \wedge S$ 对称 $) \rightarrow s(R) \subseteq S)$



G(R)



G(s(R))

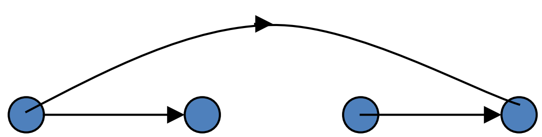
传递闭包

- 传递闭包 **t(R)**

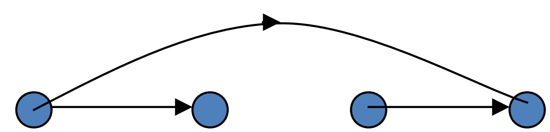
  (1) $R \subseteq t(R)$

  (2) $t(R)$ 是传递的

  (3) $\forall S(\ (R \subseteq S \wedge S$ 传递 $) \rightarrow t(R) \subseteq S\ )$



G(R)



G(t(R))

定理 2.19-2.20

定理 2. 19　设 $R\subseteq A\times A$ 且 $A\neq\varnothing$, 则

(1) R 自反 $\Leftrightarrow$ $r(R)=R$;　(2) R 对称 $\Leftrightarrow$ $s(R)=R$;

(3) R 传递 $\Leftrightarrow$ $t(R)=R$.　#

定理 2. 20　设 $R_1\subseteq R_2\subseteq A\times A$ 且 $A\neq\varnothing$, 则

(1) $r(R_1)\subseteq r(R_2)$;　(2) $s(R_1)\subseteq s(R_2)$;

(3) $t(R_1)\subseteq t(R_2)$.　#

北京大学

定理 2.21

定理 2. 21　设 $R_1,R_2\subseteq A\times A$ 且 $A\neq\varnothing$，则

(1) $r(R_1\cup R_2)=r(R_1)\cup r(R_2)$; (2) $s(R_1\cup R_2)=s(R_1)\cup s(R_2)$;

(3) $t(R_1\cup R_2)\supseteq t(R_1)\cup t(R_2)$.

证明 (1) $R_1\cup R_2\subseteq r(R_1)\cup r(R_2)\subseteq r(R_1\cup R_2)$ (定理 2.20).

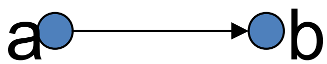
再由 $r(R_1)\cup r(R_2)$ 自反，所以 $r(R_1\cup R_2)\subseteq r(R_1)\cup r(R_2)$.

(2) 可类似证明 .

(3) $t(R_1)\cup t(R_2)\subseteq t(R_1\cup R_2)$　(定理 2.20).　#

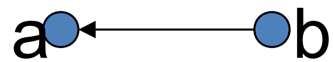
注意：$t(R_1)\cup t(R_2)$ 不一定传递，

反例



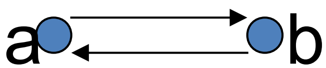
$G(R_1)=G(t(R_1))$

传递



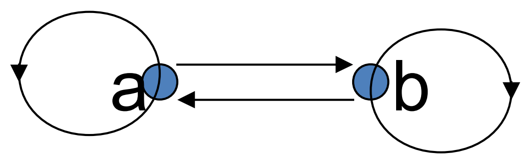
$G(R_2)=G(t(R_2))$

传递



$G(t(R_1)\cup t(R_2))$

非传递



$G(t(R_1\cup R_2))$

传递

闭包的求法

- 设 $R\subseteq A\times A$ 且 $A\neq\varnothing$, 则

(定理 2.22) $r(R)=R\cup I_A$ 自反闭包 = R 并上 恒等关系（图形表示就是给每个点加上环）

(定理 2.23) $s(R)=R\cup R^{-1}$ 对称闭包 = R 并上 R的逆（图形表示就是给每个边加上反向的边）

(定理 2.24) $t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$ 传递闭包

- 对比： R 自反 $\Leftrightarrow$ $I_A\subseteq R$

  R 对称 $\Leftrightarrow$ $R=R^{-1}$

  R 传递 $\Leftrightarrow$ $R^2\subseteq R$

北京大学

定理 2.22

定理 2. 22　$r(R)=R\cup I_A$

证明　(1) $R\subseteq R\cup I_A$

(2) $I_A\subseteq R\cup I_A \Leftrightarrow R\cup I_A$ 自反 $\Rightarrow r(R)\subseteq R\cup I_A$

(3) $R\subseteq r(R)\wedge r(R)$ 自反

$\Rightarrow R\subseteq r(R)\wedge I_A\subseteq r(R)\Rightarrow R\cup I_A\subseteq r(R)$

$\therefore\ r(R)=R\cup I_A$　　　#

定理 2.23

定理 2. 23 $s(R)=R\cup R^{-1}$

证明 (1) $R\subseteq R\cup R^{-1}$

(2) $(R\cup R^{-1})^{-1}=R\cup R^{-1}\Leftrightarrow R\cup R^{-1}$ 对称

$\Rightarrow s(R)\subseteq R\cup R^{-1}$

(3) $R\subseteq s(R)\wedge s(R)$ 对称

$\Rightarrow R\subseteq s(R)\wedge R^{-1}\subseteq s(R)\Rightarrow R\cup R^{-1}\subseteq s(R)$

$\therefore$ $s(R)=R\cup R^{-1}$ #

定理 2.24

定理 2. 24　$t(R) = R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$

证明　(1) $R\subseteq R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$

(2) $(R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots)^2=R^2\cup R^3\cup\ldots\subseteq R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$

$\Leftrightarrow$ $R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$ 传递 $\Rightarrow$ $t(R)\subseteq R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$

(3) $R\subseteq t(R)\wedge t(R)$ 传递

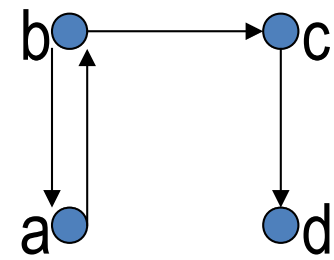
$\Rightarrow R\subseteq t(R)\wedge R^2\subseteq t(R)\wedge R^3\subseteq t(R)\wedge\ldots$

$\Rightarrow R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots\subseteq t(R)$　$\therefore$ $t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$　#

推论 设 $R\subseteq A\times A$ 且 $0<|A|<\infty$, 则$\exists\, l\in N$, 使得

$t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots\cup R^l$.　#

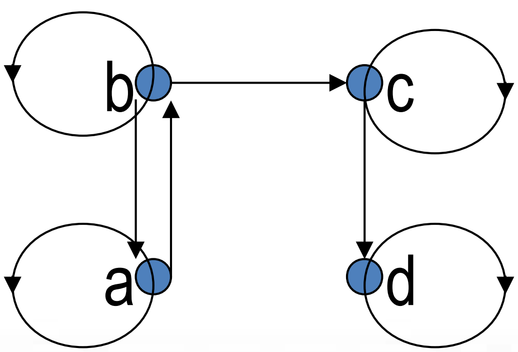
例 2.8

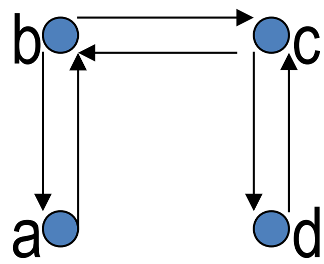


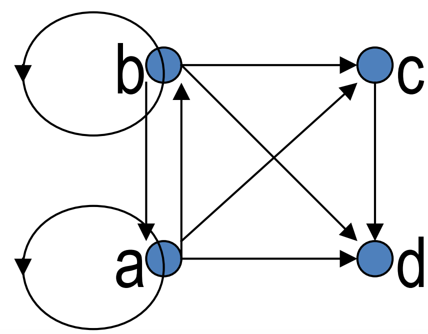
- $A=\{a,b,c,d\}$,

  $R=\{<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>\}$.

  求 $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$.







自反闭包

每个点补个环就行了

对称闭包

为单向边再补一条反向边

传递闭包

a可以到b，b可以到c
就把a和c之间补一条
路径

例 2.8

- **R={<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>}**

$$M(R)=\begin{array}{c@{}c}
 & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\
\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}.$$

自反闭包就是把主对角线全置为1

$$M(r(R)) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

对称闭包就是以主对角线为基准
进行对称操作

$$M(s(R)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

例 2.8

$$M(R)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}.\quad M(R^2)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

$$M(R^3)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

$$M(R^4)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=M(R^2).$$

例 2.8

$$M(t(R)) = M(R) \vee M(R^2) \vee M(R^3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad \#$$

闭包运算与关系性质

- 定理 2.25

	自反性	对称性	传递性
r(R)	√（定义）	√（2）	√（3）
s(R)	√（1）	√（定义）	×（反例）
t(R)	√（1）	√（2）	√（定义）

定理 2.25(1)

定理 2. 25 （1）R 自反$\Rightarrow$ s(R) 和 t(R) 自反

证明 $I_A \subseteq R \cup R^{-1} = s(R)$

$\therefore$ s(R) 自反 .

$I_A \subseteq R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots = t(R)$

$\therefore$ t(R) 自反 .

定理 25(2)

定理 2. 25 R 对称 $\Rightarrow$ r(R) 和 t(R) 对称；

证明 $r(R)^{-1}=(I\cup R)^{-1}=I_A^{-1}\cup R^{-1}=I_A\cup R^{-1}=I_A\cup R=r(R)$

$\therefore$ r(R) 对称 .

$t(R)^{-1}=(R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots)^{-1}$

$=R^{-1}\cup(R^2)^{-1}\cup(R^3)^{-1}\cup\ldots$

$=R^{-1}\cup(R^{-1})^2\cup(R^{-1})^3\cup\ldots$ ($(FoG)^{-1}=G^{-1}oF^{-1}$)

$=R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$

$=t(R)$ $\therefore$ t(R) 对称 .

北京大学

定理 25(3)

定理 2.25 （3） R 传递 $\Rightarrow$ r(R) 传递

证明： $r(R) \circ r(R) = (I_A \cup R) \circ (I_A \cup R)$

$= (I_A \circ I_A) \cup (I_A \circ R) \cup (R \circ I_A) \cup (R \circ R)$

$\subseteq I_A \cup R \cup R \cup R = I_A \cup R = r(R)$

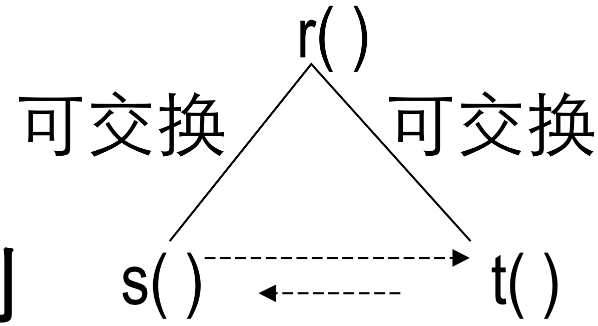
$\therefore$ r(R) 传递 . #

反例 R 传递，但是 s(R) 非传递

G(R)

G(s(R))

定理 2.26



定理 2.26 设 $R\subseteq A\times A$ 且 $A\neq\varnothing$，则

(1) $rs(R) = sr(R)$ (2) $rt(R) = tr(R)$ (3) $st(R) \subseteq ts(R)$

说明：$rs(R)=r(s(R))$

证明 (1) $rs(R) = r(s(R)) = r(R\cup R^{-1}) = I_A\cup(R\cup R^{-1})$

$= (I_A\cup R)\cup(I_A^{-1}\cup R^{-1}) = (I_A\cup R)\cup(I_A\cup R)^{-1}$

$= r(R)\cup r(R)^{-1} = s(r(R)) = sr(R).$

(2) $rt(R)=r(t(R)) = r(R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots) = I_A\cup(R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots)$

$= (I_A\cup R)\cup(I_A\cup R\cup R^2)\cup(I_A\cup R\cup R^2\cup R^3)\cup\ldots$

$= (I_A\cup R)\cup(I_A\cup R)^2\cup(I_A\cup R)^3\cup\ldots$

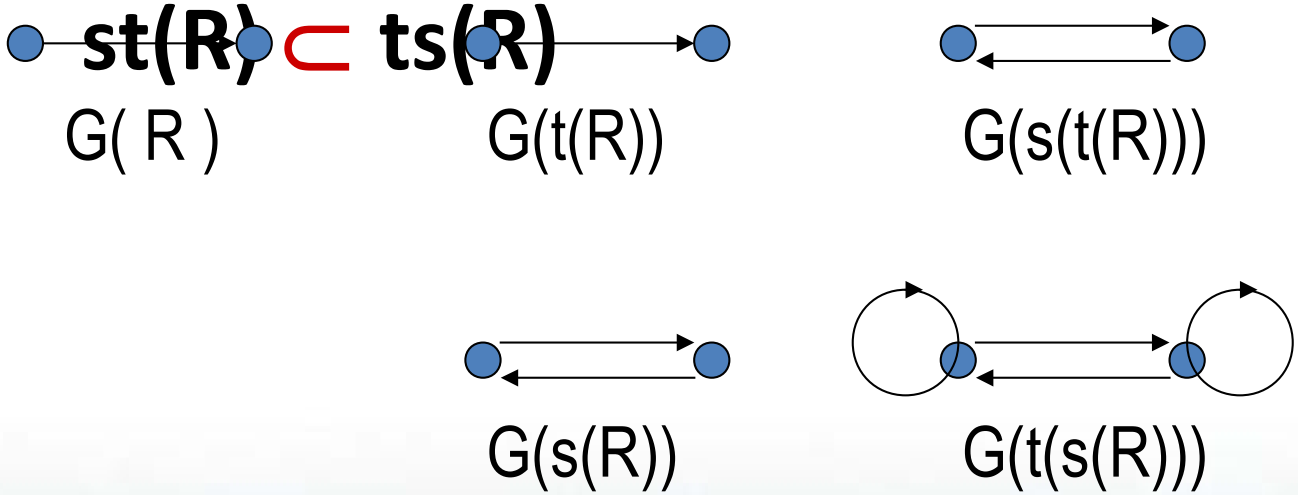
$= r(R)\cup r(R)^2\cup r(R)^3\cup\ldots=t(r(R))$

定理 26(3)

证明 (3) $st(R) \subseteq st(s(R)) = sts(R) = s(ts(R)) = ts(R)$

($ts(R)$ 对称，定理 2.25(2)). #

反例 $st(R) \subset ts(R)$



小结

- R^n
- r(R), s(R), t(R)
- 反例