单元11.2 地图着色与平面图点着色、边着色

第二编 图论　第十一章 平面图

12.3 地图着色与平面图点着色

12.4 边着色

内容提要

- 平面图的点着色
  - 面色数
  - 六色定理
  - 五色定理
- 边着色
  - 边色数
  - Vizing定理

(平面)地图

- 连通无桥平面图的平面嵌入及其所有的面
- 国家: 平面地图的面
- 相邻: 两国的公共边界至少有一条公共边
- k-面着色, k-色地图, 面色数$\chi^*(G)$

面着色与对偶图点着色

- 定理12.13: 地图G可k-面着色 ⇔ 对偶图G*可k-着色. #

- 定理12.14: 连通无环平面图G可k-面着色 ⇔ 对偶图G*可k-着色. #

- 研究平面图面着色 ⇔ 研究平面图点着色

六色定理

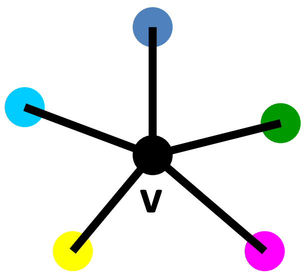
- **定理12.15:**

任何平面图都可6-着色

六色定理证明

- 证明: (归纳法) (1) $n\le 7$: 结论为真.

(2) 设$n=k(\ge 7)$时结论为真.



$n=k+1$时, $\exists v\in V(G)$, $d(v)\le 5$.

令$G_1=G-v$, 对G_1用归纳假设, G_1可6-着色.

模仿G_1对G着色, 与v相邻的点不超过5个, 至少剩1种颜色给v着色, 所以G可6-着色. #

五色定理

- 定理12.16(Heawood,1890):

  任何平面图都可5-着色

五色定理证明

- 证明: (归纳法) (1) $n\leq 5$: 结论为真.

  (2) 设$n=k(\geq 5)$时结论为真.

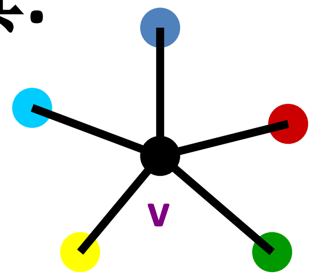
  $n=k+1$时, $\exists v\in V(G)$, $d(v)\leq 5$.

  令$G_1=G-v$, 对G_1用归纳假设, G_1可5-着色.

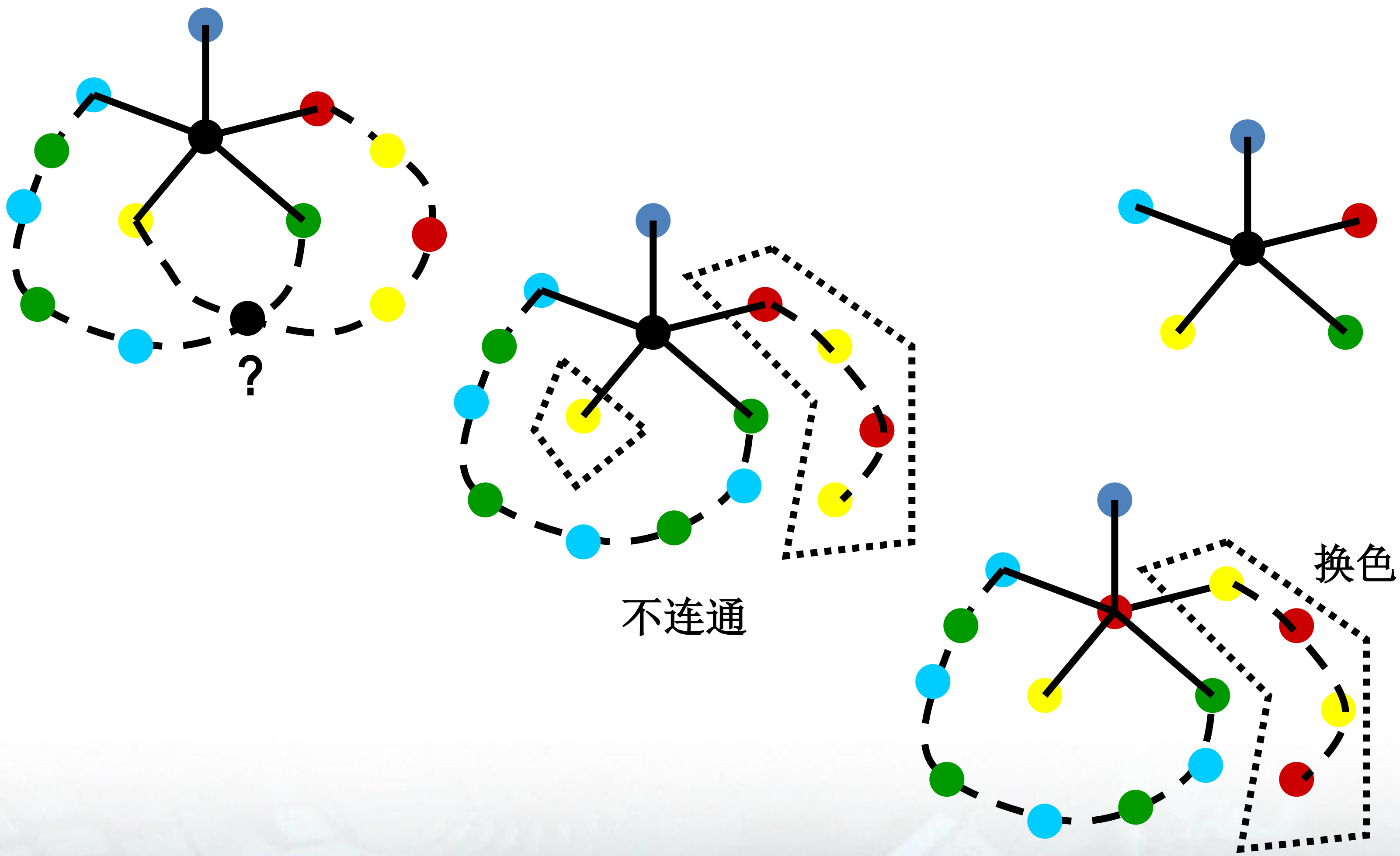
  模仿G_1对G着色. 当$d(v)<5$,

  或$d(v)=5$但与v相邻的点用了少于5种颜色时,

  至少剩1种颜色给v着色.



五色定理证明示意图



五色定理证明

- 当d(v)=5且与v相邻的点用了5种颜色时，

  设v_i与v相邻且着颜色i, i=1, 2,..., 5.

  根据Jordan定理，从v_1到v_3只有{1,3}这2种颜色的路径，和从v_2到v_4只有{2,4}这2种颜色的路径，不能同时存在. 不妨设在只有{1,3}这2种颜色的顶点的导出子图中，v_1与v_3是在不同的连通分支中，于是把v_1所在分支里1与3颜色互换，然后把颜色1给v. #

边着色

- 定理12.17(Vizing):

G是简单图 $\Rightarrow \Delta(G) \le \chi'(G) \le \Delta(G)+1$ #

- 边色数 $\chi'(G)$

例12.5

G是二部图 $\Rightarrow \chi'(G)=\Delta(G)$

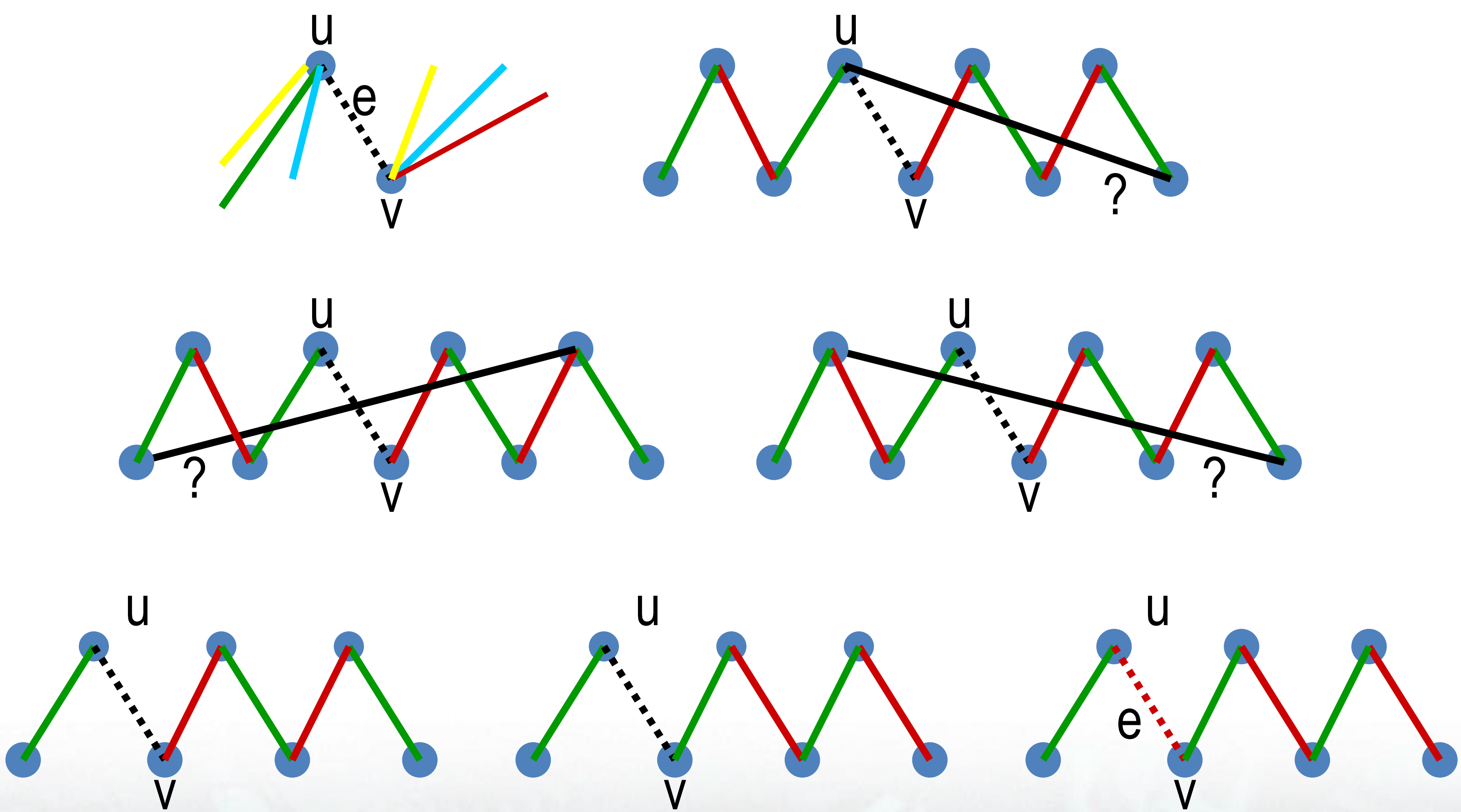
例12.5证明

- 证: (归纳法) (1) $m=0,1$: 结论为真.

  (2) 设$m=k(\geq 1)$时结论为真.

  $m=k+1$时, $\exists e=(u,v)\in E(G)$. 令$G_1=G-e$. $\Delta(G_1)\leq\Delta(G)=\Delta$, 由归纳假设, G_1可Δ-边着色. 模仿G_1对G边着色, 当存在颜色α既不出现在u也不出现在v时, 用颜色α给e着色.

例12.5证明示意图



例12.5证明

- 设 颜色β出现在u而不出现在v,
  颜色γ出现在v而不出现在u.

则不存在从v到u只有{β,γ}这2种颜色的路径.

即在只有{β,γ}这2种颜色的边的导出子图中,

v与u是在不同的连通分支中.

于是把v所在分支里β与γ颜色互换,

然后把颜色γ给e=(u,v).　#

例12.6

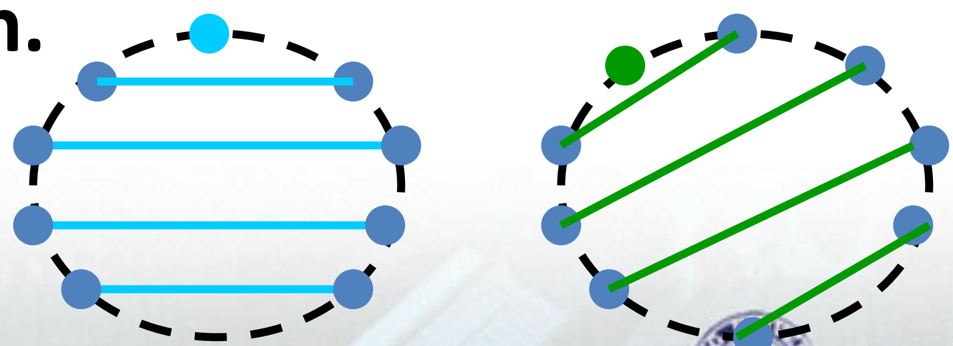
- n>1时,

$$\chi'(K_n) = \begin{cases} n, & n\text{为奇数} \\ n-1, & n\text{为偶数} \end{cases}$$

例12.6(n为奇数)

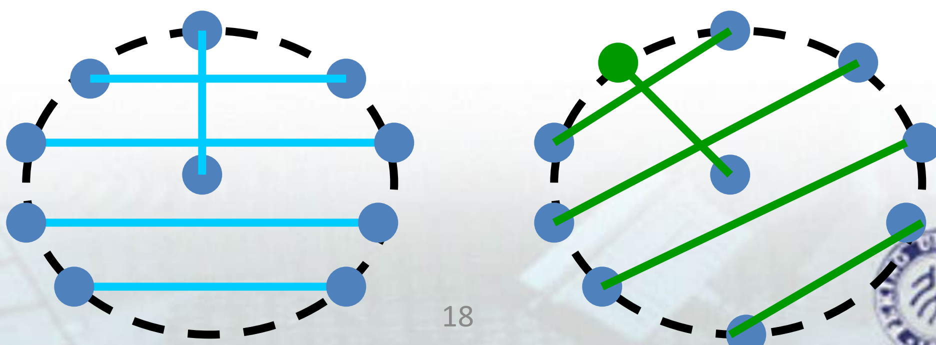
- n为奇数时, $\chi'(K_n)=n$.

- 每边关联2个不同端点, 同色边没有公共端点, 同色边至多有(n-1)/2条, 至少需要n种颜色, $\chi'(K_n)\geq n$. 又存在n-边着色, $\chi'(K_n)\leq n$. 所以$\chi'(K_n)=n$.



例12.6(n为偶数)

- n为偶数时, $\chi'(K_n)=n-1$.
- 每边关联2个不同端点, 同色边没有公共端点, 同色边至多有n/2条, 至少需要n-1种颜色, $\chi'(K_n)\geq n-1$. 又存在(n-1)-边着色, $\chi'(K_n)\leq n-1$. 所以$\chi'(K_n)=n-1$. #



同色边

- 无环图G=<V,E>进行k-边着色, $k\geq\chi'(G)$. 令

  $$R = \{ (e_i,e_j) \mid e_i\text{与}e_j\text{着同色} \}$$

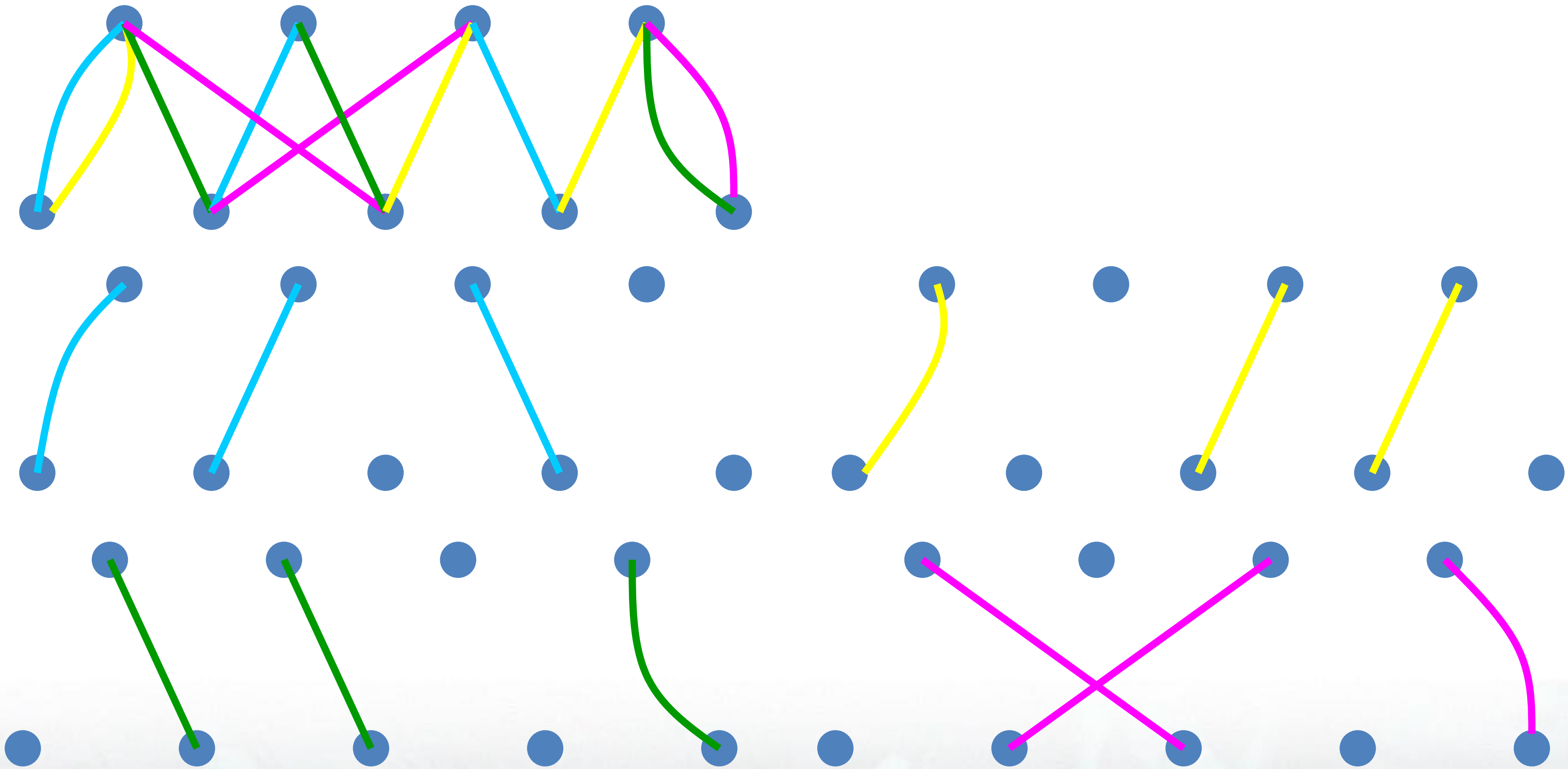
  则R是E上等价关系, 商集合

  $$E/R = \{E_1,E_2,\ldots,E_k\}$$

  是E的划分, 划分块中元素着同色

- 说明: 同色边构成“边独立集”, 或“匹配”

例



例12.7

- 某一天内有n个教师给m个班上课.每个教师在同课时只能给一个班上课.

(1) 这一天内至少排多少节课?

(2) 不增加节数情况下至少需要几个教室?

(3) 若$n=4,m=5$. 教师是t_1,t_2,t_3,t_4, 班是c_1,c_2,c_3,c_4,c_5. 已知t_1给c_1,c_2,c_3上2节,1节,1节课, t_2给c_2,c_3各上1节课, t_3给c_2,c_3,c_4各上1节课, t_4给c_4,c_5上1节,2节课. 求最省教室的课表.

例12.7

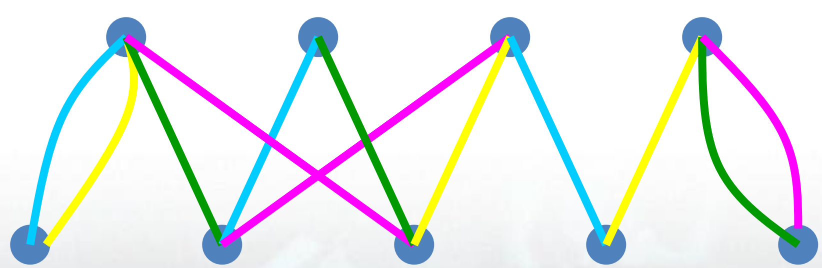
- 令二部图 $G = \langle T,C; E\rangle$, 其中

$$T = \{ t_1,t_2,\ldots,t_n \}$$

$$C = \{ c_1,c_2,\ldots,c_m \}$$

$$E = \{ (t_i,c_j) \mid t_i\text{给}c_j\text{上一节课} \}$$

给G进行边着色.



例12.7(1)(2)

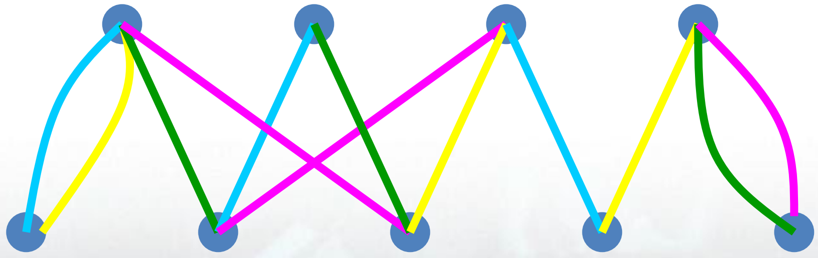
- 同色边代表的教学可以同时进行.

所以颜色数就是节数, 同色边数就是教室数.

(1) 最少节数 = $\chi'(G) = \Delta(G)$.

(2) 最少教室数 = $\min_{\Delta\text{-边着色}} \max\{k_1,k_2,\ldots,k_\Delta\}$.

其中k_i是着颜色i的边数.



例12.7(3)

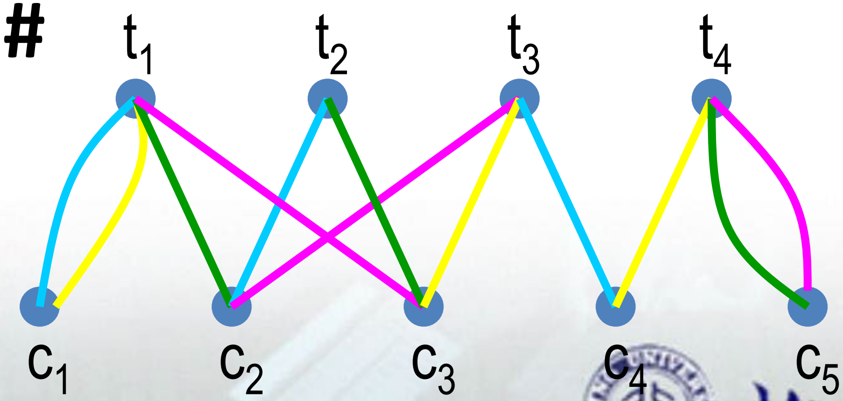
- (3) 已知条件下得出下图G,

  其中 $T=\{t_1,t_2,\ldots,t_4\}$, $C=\{c_1,c_2,\ldots,c_5\}$.

  $\Delta(G)=4$, 节数最少是4.

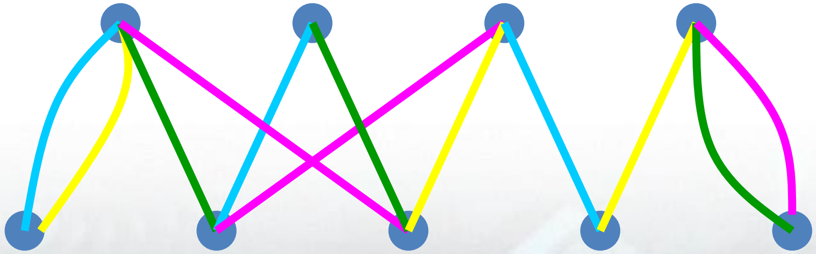
  $\min\max\{k_1,k_2,\ldots,k_4\}=3$, 教室数最少是3.

  课表如下页所示. #



例12.7(3)

节	t_1	t_2	t_3	t_4
1	c_1	c_2	c_4	--
2	c_1	--	c_3	c_4
3	c_2	c_3	--	c_5
4	c_3	--	c_2	c_5



小结

- 面色数$\chi^*(G)$, 边色数$\chi'(G)$

- (五色定理) 平面图 $\chi^* \le 5$
- (Vizing定理) 简单图 $\Delta \le \chi' \le \Delta+1$
  - 二部图, 偶阶完全图 $\chi' = \Delta$
  - 奇阶完全图 $\chi' = \Delta+1$