单元12.3 二部图中的匹配

第二编 图论　第十一章 平面图

13.3 二部图中的匹配

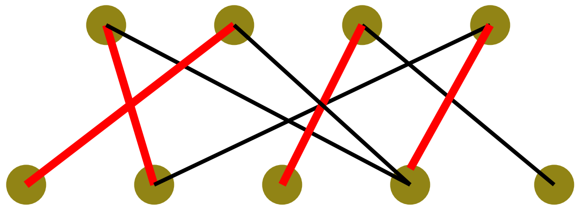
北京大学

内容提要

- 完备匹配
  - 充要条件： Hall-条件 (相异性条件)
  - 充分条件： t-条件
- k正则二部图
- 无孤立点二部图

完备匹配

- 二部图$G=<V_1,V_2,E>$, $|V_1|\le|V_2|$,
  M是匹配 $\wedge$ $|M|=|V_1|$

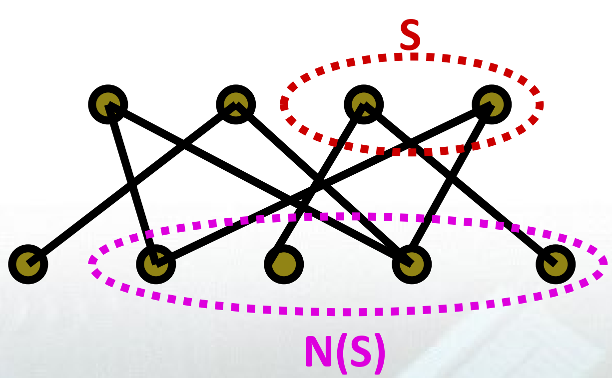


霍尔条件

- 又称“相异性条件”：

$$\forall S \subseteq V_1,\ |S| \le |N(S)|$$

- $N(S) = \{\, u \mid \exists v \in S, (v,u) \in E \,\} = \cup_{v \in S} \Gamma(v)$



霍尔定理(婚姻定理)

- 定理13.11(Hall,1935):

二部图G有完备匹配 $\Leftrightarrow$ G满足霍尔条件

($\forall S$, $|S| \leq |N(S)|$)

霍尔定理证明

- 证: $(\Rightarrow)$ 显然

$(\Leftarrow)$ (反证) 设$G=\langle V_1,V_2,E\rangle$是极小反例,

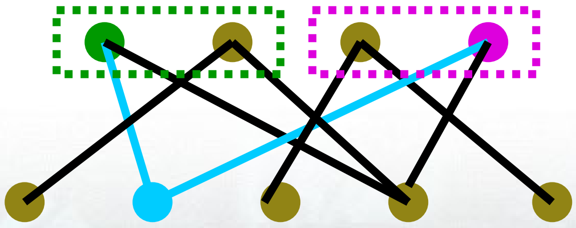
则存在$a_1,a_2\in V_1$, $x\in V_2$, $(a_1,x),(a_2,x)\in E$.

删除任一个(a_i,x)将破坏条件,

则存在$A_1,A_2\subseteq V_1$, $a_i\in A_i$,

在A_i中只有a_i与x相邻,

$|\Gamma(A_i)|=|A_i|$.



霍尔定理证明

- $|\Gamma(A_1)\cap\Gamma(A_2)|$

$\geq |\Gamma(A_1-\{a_1\}) \cap \Gamma(A_2-\{a_2\})| + 1$

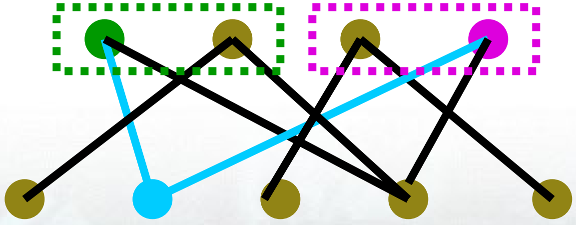
$\geq |\Gamma(A_1\cap A_2)| + 1 \geq |A_1\cap A_2| + 1.$

$|\Gamma(A_1\cup A_2)| = |\Gamma(A_1)\cup\Gamma(A_2)|$

$= |\Gamma(A_1)| + |\Gamma(A_2)| - |\Gamma(A_1) \cap \Gamma(A_2)|$

$\leq |A_1|+|A_2|-(|A_1\cap A_2|+1)$

$= |A_1\cup A_2|-1$, 矛盾!　　#

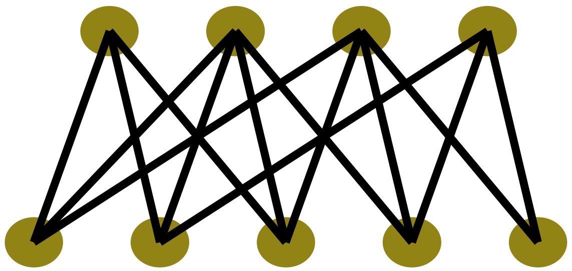


t-条件

- 二部图$G=<V_1,V_2,E>$，$t\geq 1$

  V_1中每个顶点至少关联t条边$\wedge$

  V_2中每个顶点至多关联t条边



t=3

定理13.12

- 设$G=<V_1,V_2,E>$是二部图, 则

G满足t-条件 $\Rightarrow$ G中存在完备匹配

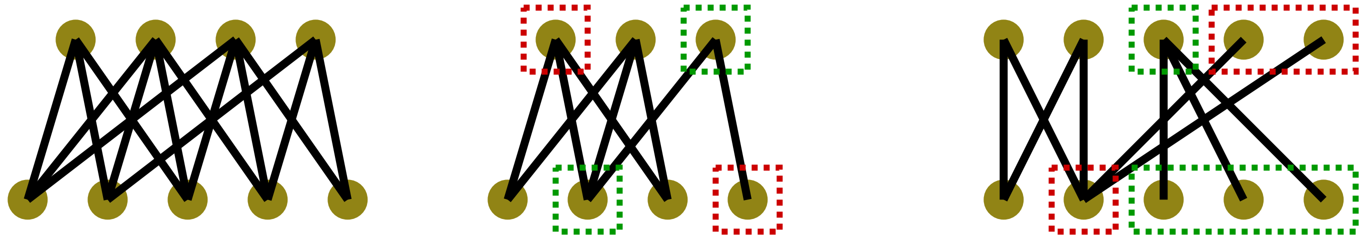
定理13.12证明

- 证:

V_1中任意 k 个顶点至少关联 kt 条边,
这 kt 条边至少关联V_2中 k 个顶点,
即相异性条件成立. #

例

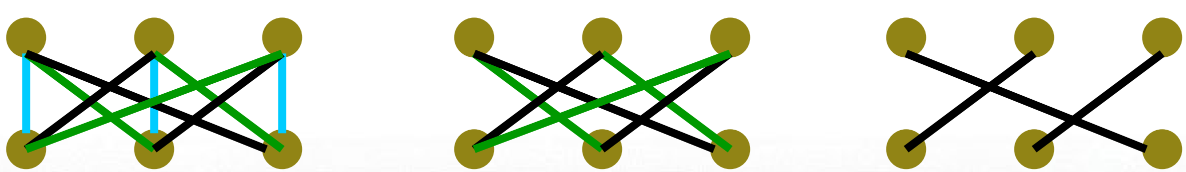
- (1) 满足t-条件 (t=3)　(也满足Hall-条件)
- (2) 满足Hall-条件　　(但不满足t-条件)
- (3) 不满足Hall-条件　(无完备匹配)



(1)　(2)　(3)

定理13.13 (k-正则二部图)

- k-正则二部图$G=\langle V_1,V_2,E\rangle$中,
  存在k个边不重的完美匹配



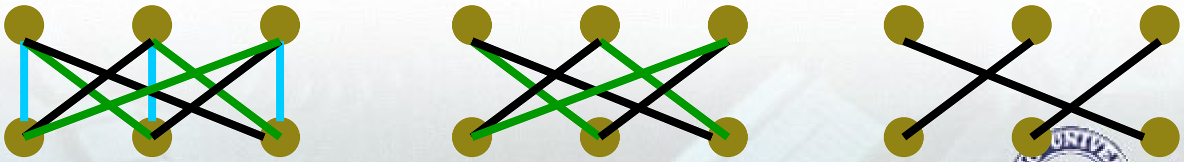
定理13.13证明

- 证：G满足t=k的t条件，所以有完备匹配M_1,又$|V_1|=|V_2|$，所以完备匹配就是完美匹配. G-M_1是(k-1)-正则二部图,又有完美匹配M_2,

  G-M_1-M_2是(k-2)-正则二部图, ……,

  一共可得k个完美匹配.

  显然这些匹配是边不重的. #



定理13.14(无孤立点二部图)

- 无孤立点二部图$G=\langle V_1,V_2,E\rangle$中,

$$\alpha_0 = \beta_1$$

定理13.14证明

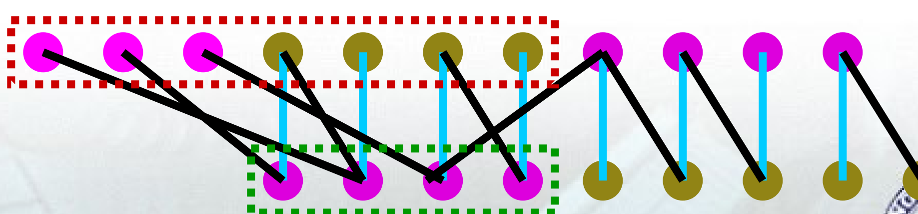
- 证: 设M是最大匹配, X是V_1非饱和点集,

$S = \{ u \in V_1 \mid \exists v \in X$, 从v到u有交错路径 $\}$,

$T = \{ u \in V_2 \mid \exists v \in X$, 从v到u有交错路径 $\}$.

则 $N = (V_1 - S) \cup T$是点覆盖, $|N| = |M|$,

由定理13.6知 N 是最小覆盖. #



小结

- 完备匹配
  - 充要条件： Hall-条件 (相异性条件)
  - 充分条件： t-条件
- k正则二部图
  - 有k个边不重完美匹配
- 无孤立点二部图
  - $\alpha_0=\beta_1$