单元11.1 点着色与色多项式

第二编 图论　第十一章 平面图

12.1 点着色

12.2 色多项式

内容提要

第十二章　图的着色

12.1 点着色

12.2 色多项式

着色

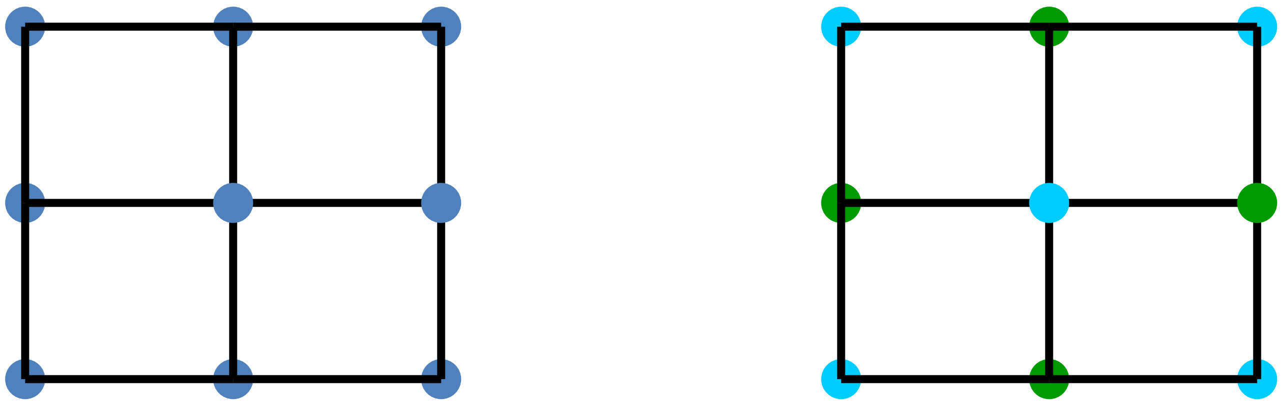
- 给无环图的每个顶点指定1种颜色, 使得相邻顶点有不同颜色
- 颜色集C={1,2,…,k},

$$f: V \to C,$$

$$\forall u \forall v (u,v \in V \wedge u\text{与}v\text{相邻} \to f(u) \neq f(v))$$

- k-着色: |C|=k

例: 2-着色

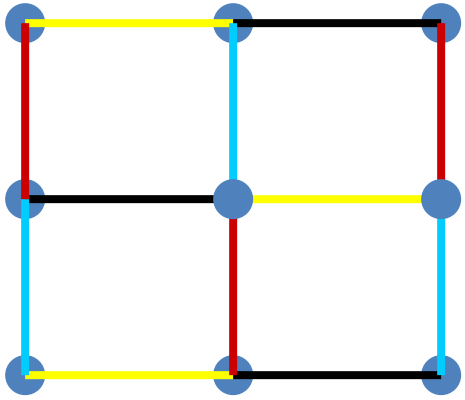


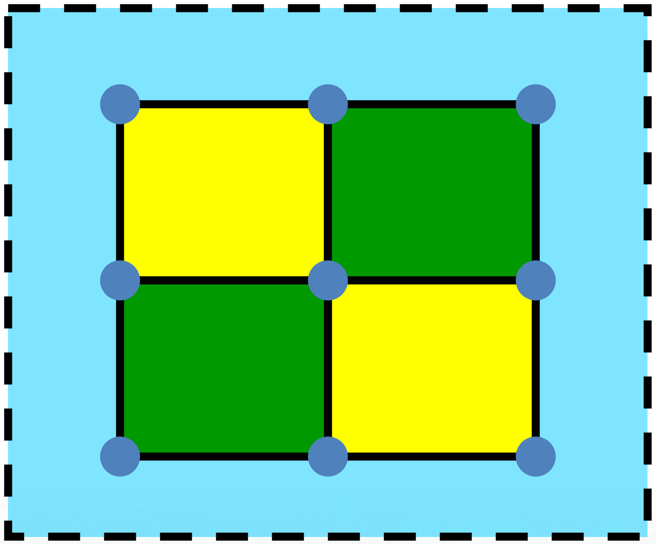
色数

- **k-色图: 可k-着色,但不可(k-1)-着色**
- 色数: 着色所需最少颜色数
- 点色数χ(G)
- 边色数χ’(G), 面色数χ*(G)

色数举例

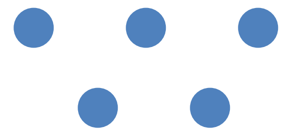
- 例: $\chi(G)=2$, $\chi'(G)=4$, $\chi^*(G)=3$

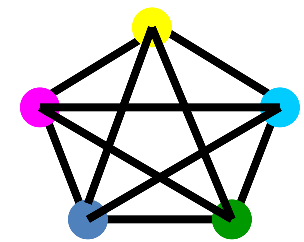




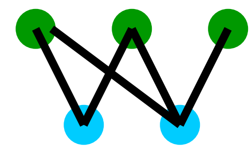
点色数性质

- $\chi(G)=1 \Leftrightarrow$ G是零图

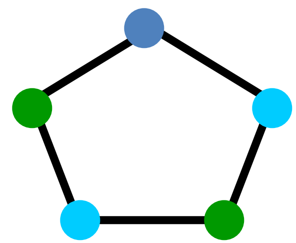


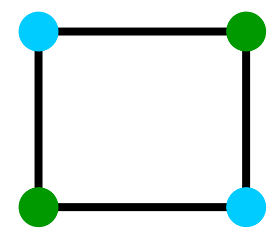


- $\chi(K_n)=n$
- $\chi(G)=2 \Leftrightarrow$ G是非零图二部图

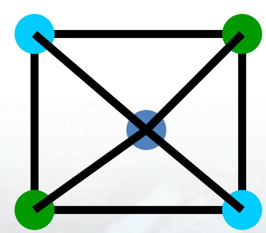


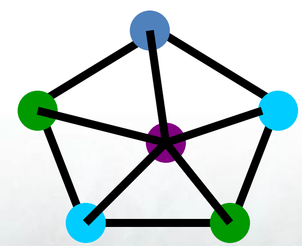
- G可2-着色 $\Leftrightarrow$ G是二部图 $\Leftrightarrow$ G无奇圈
- $\chi(C_n)=\begin{cases} 2, & n\text{偶数} \\ 3, & n\text{奇数} \end{cases}$





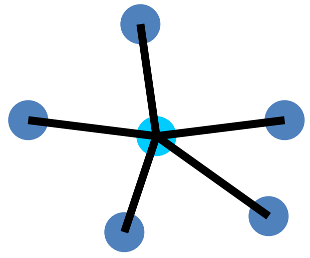
- $\chi(W_n)=\begin{cases} 4, & n\text{偶数} \\ 3, & n\text{奇数} \end{cases}$





$\chi(G)$上界

- 定理12.5: $\chi(G) \leq \Delta(G)+1$



- 证: $\forall v \in V(G)$,

$\Gamma_G(v)=\{ u \mid (u,v) \in E(G) \}$, $|\Gamma_G(v)| \leq \Delta(G)$,

给$\Gamma_G(v)$中顶点着色至多需要$\Delta(G)$种颜色,

所以至少还剩一种颜色可用来给v着色. #

Brooks定理

- 定理12.6(Brooks):

  n 阶($n \geq 3$)连通非完全图G非奇圈 $\Rightarrow$

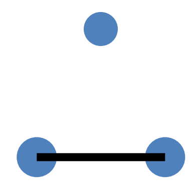
  $$\chi(G) \leq \Delta(G).$$ #

说明: $\chi(K_1)=1 > \Delta(K_1)=0$

$\chi(K_2)=2 > \Delta(K_2)= 1$

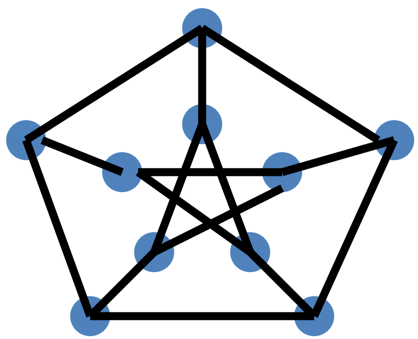
$\chi(K_n)=n > \Delta(K_n)=n-1$

$\chi(C_{2k+1})=3 > \Delta(C_{2k+1})=2$

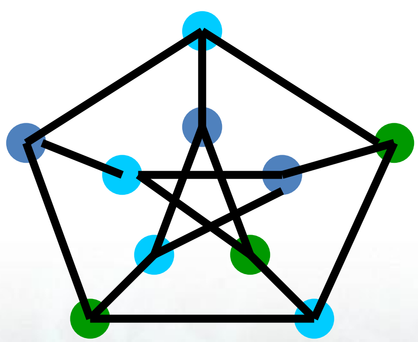


例12.1

- **Petersen图, χ=3.**



- **解1: 由Brooks定理, $\chi \le \Delta = 3$.**
  又图中有奇圈, $\chi \ge 3$.
  所以$\chi = 3$. #
- **解2: 存在如下3-着色, $\chi \le \Delta = 3$.**
  又图中有奇圈, $\chi \ge 3$.
  所以$\chi = 3$. #



定理12.7

- 对图G进行$\chi(G)$-着色, 设

$$V_i = \{v \mid v \in V(G) \wedge v\text{着颜色}i\},$$

$$i=1,2,\ldots,\chi(G),$$

则$\Pi=\{V_1,V_2,\ldots,V_{\chi(G)}\}$是$V(G)$的划分. #

- 说明: V_i中的点构成"独立集"

定理12.7’

- 对图G进行$\chi(G)$-着色, 设

$$R = \{ (u,v) \mid u,v \in V(G) \wedge u,v\text{着同色} \},$$

则R是V(G)上等价关系. #

色多项式

- 不同的着色: 至少有一个顶点的着色不同

- 色多项式

  $f(G,k)$=图G的不同的k-着色的总数

- 递推公式

  $f(G,k)=f(G-e,k)-f(G\backslash e,k)$, e是边

色多项式的性质

- 色多项式 $f(G,k)$=图G的不同的k-着色的总数
  - 完全图 $f(K_n,k)=k(k-1)\ldots(k-n+1)$
  - 零图 $f(N_n,k)=k^n$
- 性质:
  - 是n次多项式,系数正负号交替
  - k^n系数为1, k^{n-1}系数为-m, m为边数, 常数项为0
  - 最低非零项为k^p, p为连通分支数
  - 不同连通分支相乘

小结

- 点色数$\chi(G)$

- $\chi(G)$上界 $\chi\le\Delta+1$
- (Brooks定理) 连通非完全($n\ge3$)非奇圈 $\chi\le\Delta$