



单元10.2 欧拉公式与 平面图形的判断

第二编 图论 第十一章 平面图

11.2 欧拉公式、11.3 平面图形的判断



北京大學



内容提要

第十一章 平面图

11.2 欧拉公式

11.3 平面图的判断

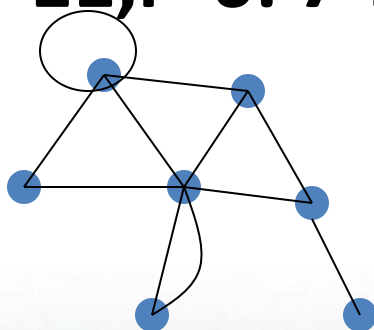
欧拉公式

- 欧拉公式: 设 G 是连通平面图, 则

$$n-m+r=2$$

其中 r 是 G 的面数.

- 例: $n=7, m=11, r=6: 7-11+6=2. \#$



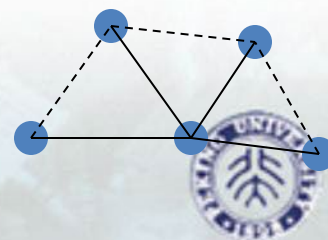
欧拉公式(推广形式)

- 欧拉公式: 设 G 是平面图, 则

$$n-m+r=1+p$$

其中 r 是 G 的面数, p 是 G 的连通分支数

- 证明:(破圈法)任选一个回路,删除回路上1边, $m'=m-1$,这边分隔的2个面合并, $r'=r-1$, 所以 $n-m+r=n-m'+r'$. 到最后无回路时是森林, $m''=n-p$, $r''=1$, 即 $n-m+r=n-m''+r''=1+p$. #





定理11.8

- 设 G 是**连通**平面图, G 的各面的次数至少是 ℓ (≥ 3), 则

$$m \leq (n-2)\ell/(\ell-2)$$

- **证明**: $r=2+m-n$,

$$2m = \sum_{i=1}^r \deg(R_i) \geq \ell \bullet r = \ell \bullet (2+m-n),$$

所以 $m \leq (n-2)\ell/(\ell-2)$. #



定理11.9

- 设平面图G有p个连通分支, G的各面的次数至少是 l (≥ 3), 则

$$m \leq (n - p - 1)l / (l - 2). \quad \#$$



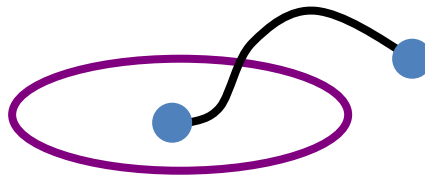
推论

- K_5 和 $K_{3,3}$ 都不是平面图.
- **证明:** (反证) 假设 K_5 和 $K_{3,3}$ 都是平面图.
 - (1) K_5 是简单图, 所以 $l=3$,
 $10=m \leq (n-2)l/(l-2) = (5-2)3/(3-2) = 9$, 矛盾!
 - (2) $K_{3,3}$ 是偶图, 无奇圈, 所以 $l=4$,
 $9=m \leq (n-2)l/(l-2) = (6-2)4/(4-2) = 8$, 矛盾! #



Jordan定理

- Jordan曲线把平面分为2部分, 连接内部与外部点的任意曲线必然与Jordan曲线相交.



- **Jordan曲线**: 自身不相交的封闭曲线



定理11.10

- 设 $n(\geq 3)$ 阶简单平面图 G 有 m 条边,则
$$m \leq 3n-6.$$
- 证明: G 是简单图, 所以 $\ell \geq 3$,
$$m \leq (n-p-1)\ell(\ell-2) \leq (n-2)3 = 3n-6,$$
其中 $p \geq 1$, $\ell(\ell-2)$ 在 $\ell=3$ 时达到最大值. #



定理11.11

- 设 $n(\geq 3)$ 阶简单极大平面图 G 有 m 条边, 则 $m=3n-6$.
- 证明: G 是极大平面图, 所以 $2m=3r$.
 G 一定连通, 所以 $r=2+m-n$. #

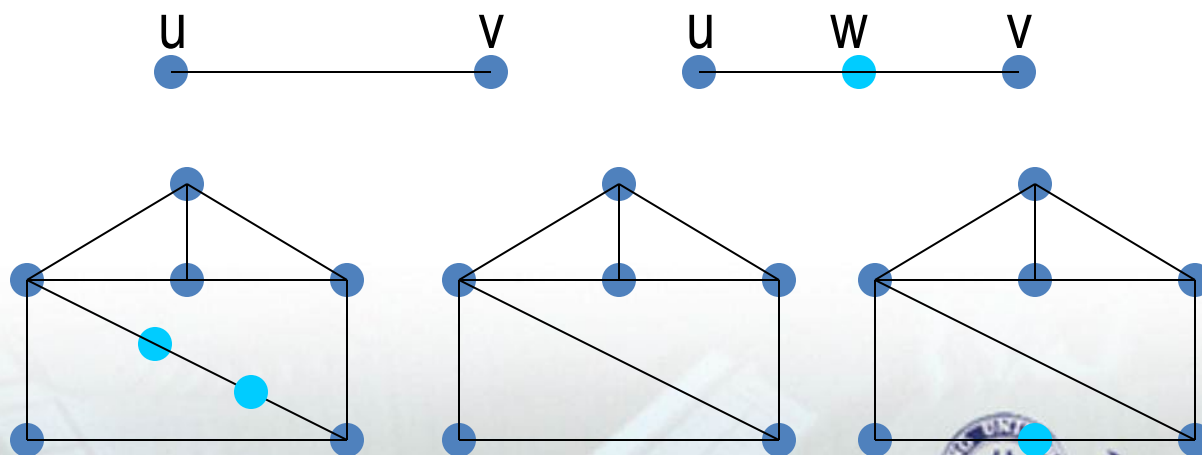


定理11.12

- 设 G 是简单平面图, 则 $\delta(G) \leq 5$.
- 证明: (反证) 设 $n \geq 6$ 并且 $\delta \geq 6$, 则
$$2m = \sum d(v) \geq n\delta \geq 6n \Rightarrow m \geq 3n,$$
与 $m \leq 3n - 6$ 矛盾. #

同胚(homomorphism)

- 插入2度顶点: 把 (u,v) 变成 $(u,w),(w,v)$
- 删除2度顶点: $\deg(w)=2$, 把 $(u,w),(w,v)$ 变成 (u,v)
- 同胚: 反复插入或删除2度顶点后同构



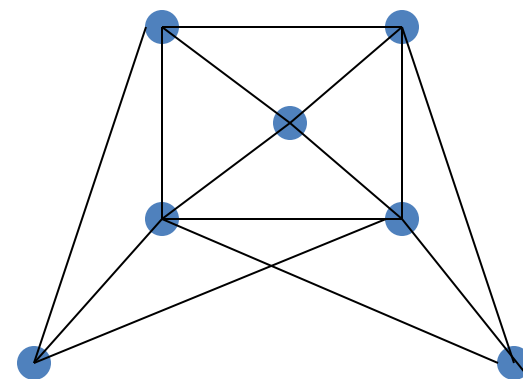
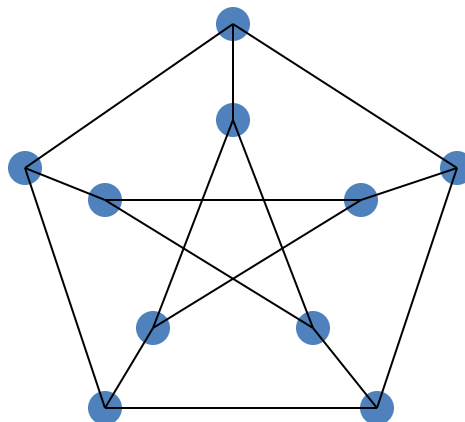
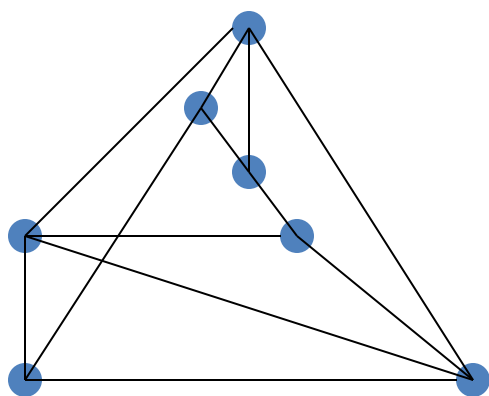


Kuratowski定理

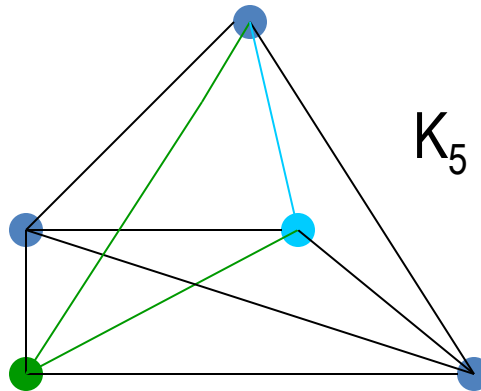
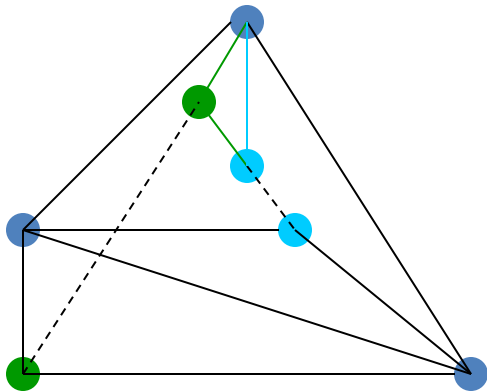
- **定理11.13:** 图 G 是平面图 $\Leftrightarrow G$ 没有与 K_5 或 $K_{3,3}$ 同胚的子图
- **定理11.14:** 图 G 是平面图 $\Leftrightarrow G$ 没有可以边收缩到 K_5 或 $K_{3,3}$ 的子图



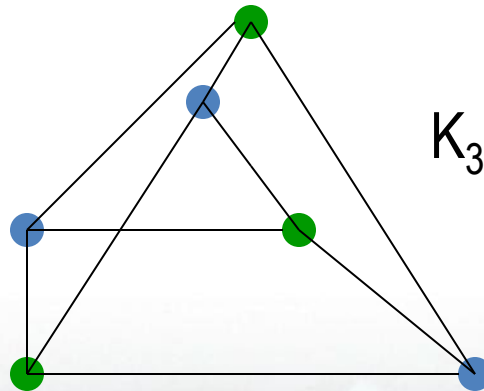
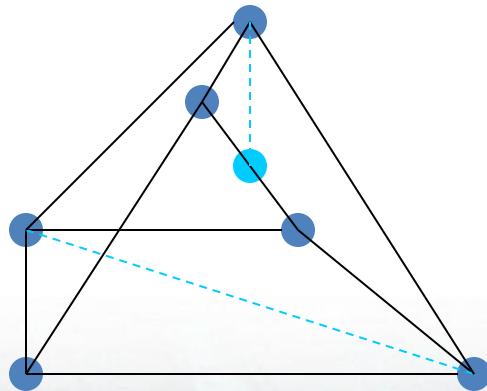
例11.3



例11.3(1)

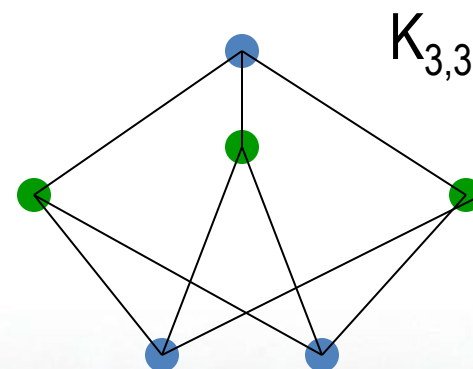
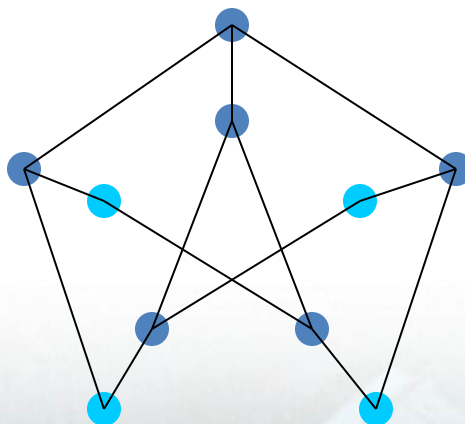
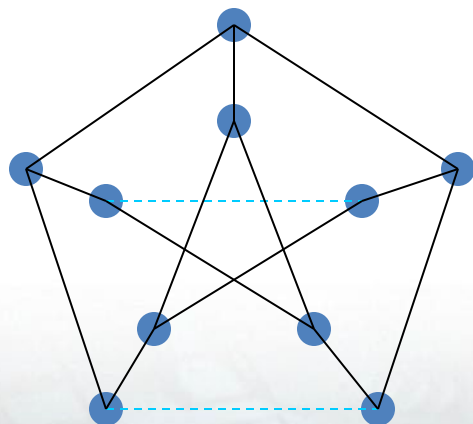
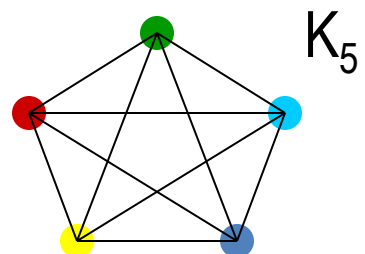
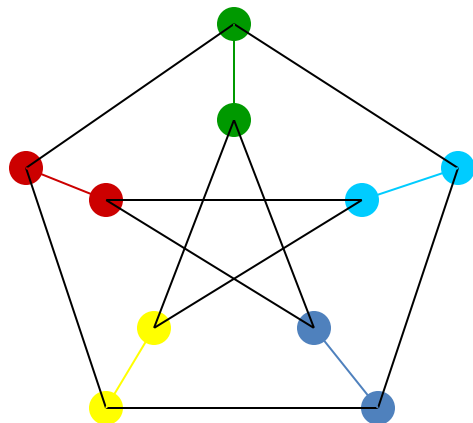


K_5

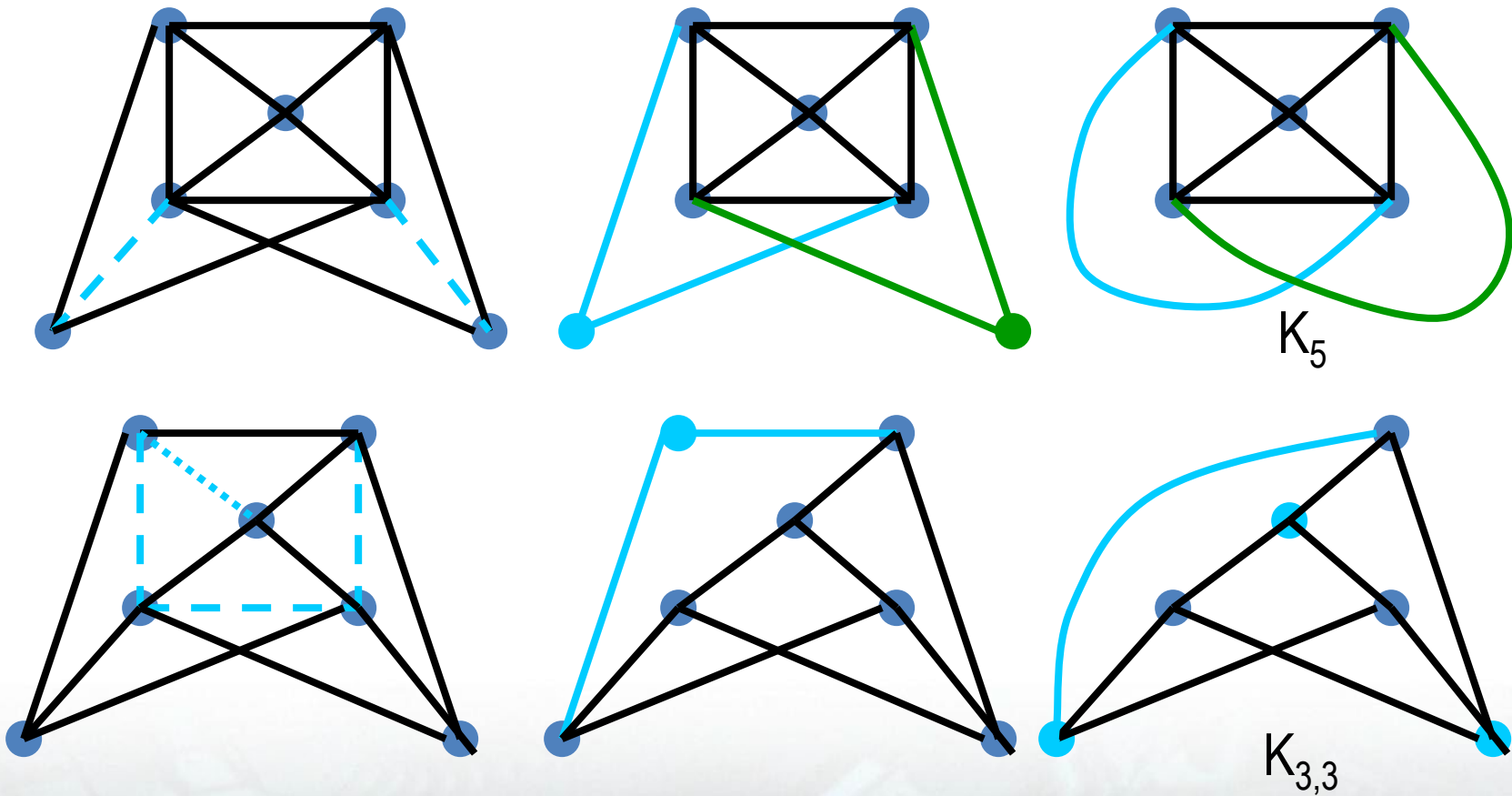


$K_{3,3}$

例11.3(2)

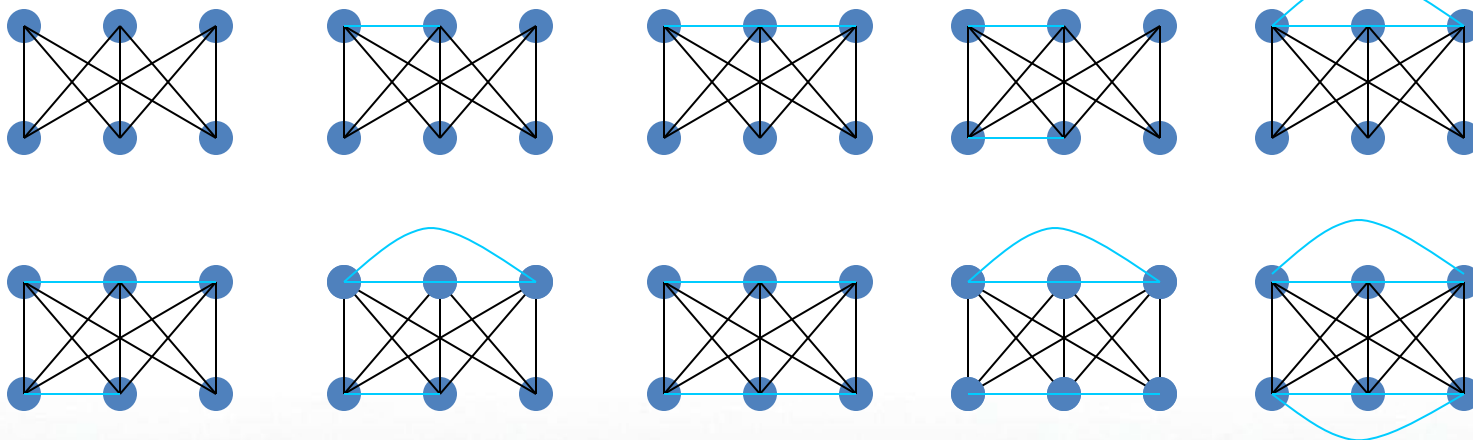



例11.3(3)



例11.6

- K_6 的含 $K_{3,3}$ 的非同构子图有哪些?
- **解:** K_6 有15条边, $K_{3,3}$ 有9条边, 分别给 $K_{3,3}$ 加0,1,2,3,4,5,6条边: 共10种. #





小结

- 欧拉公式
- Kuratowski定理

