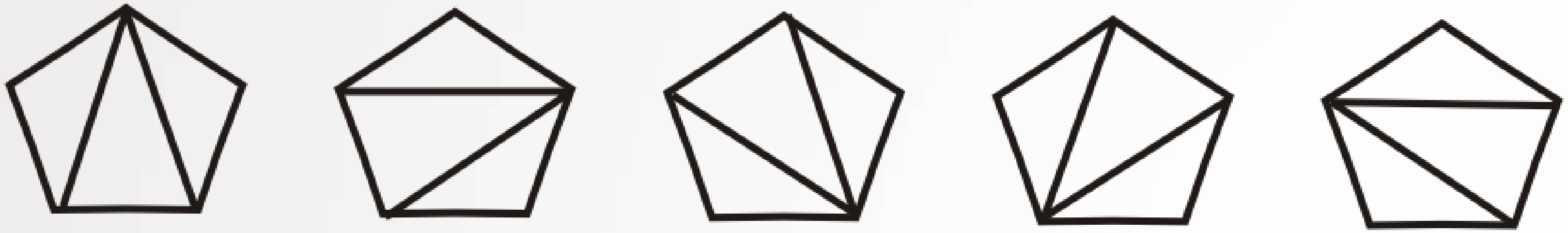
22.6 高级计数

- 高级计数
  - Catalan数
  - 第一类Stirling数
  - 第二类Stirling数
- 讨论要点
  - 定义
  - 递推方程
  - 恒等式
  - 对应的组合问题
  - 生成函数

Catalan数定义

定义 一个凸 $n+1$ 边形，通过不相交于$n+1$边形内部的对角线把 $n+1$边形拆分成的三角形个数，记作 h_n，称为Catalan数.

实例：$h_2=1, h_3=2,$
$h_4=5$



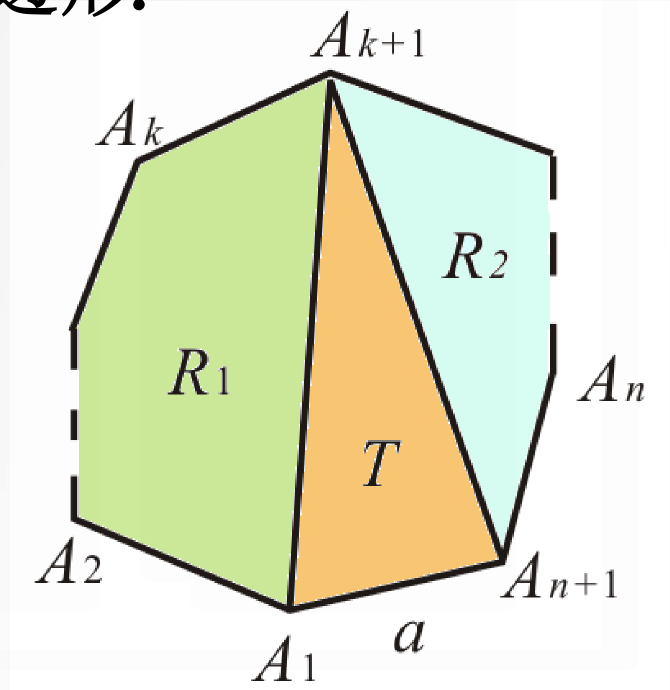
递推方程

考虑 $n+1$ 条边的多边形，端点 A_1, A_{n+1} 的边记为 a, 以 A_{k+1}（$k=1, 2,\ldots, n-1$）A_1 为边，$A_{n+1}A_{k+1}$ 为另一边，构成三角形 T, T 将多边形划分成 R_1 和 R_2 两个部分，分别为 $k+1$ 边形和 $n-k+1$ 边形.

$$h_n = \sum_{k=1}^{n-1} h_k h_{n-k}, \quad n \geq 2$$

$$h_1 = 1$$

$$h_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$$



生成函数及对应的组合问题

$$H(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$$

对应的组合问题

（1） 从(0,0)到(n,n)的除了端点以外不接触对角线的非降路径数 $\frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}$

（2） $a_1\times a_2\times \ldots \times a_n$，不改变因子顺序，加括号的方法数 h_n

（3） n 片树叶的有序三度根树个数

（4） $2n$ 个点均匀分布在圆周上，用 n 条不相交的弦配对的方法数

应用：搜索规模的估计

矩阵乘法： 设$A_1, A_2, \ldots, A_n$为矩阵序列，A_i为 $P_{i-1}\times P_i$ 阶矩阵，$i = 1,2,\ldots,n$. 确定乘法顺序使得元素相乘的总次数最少.

输入：向量$P = <P_0, P_1, \ldots, P_n>$

实例： $P = <10, 100, 5, 50>$

A_1: 10 × 100, A_2: 100 × 5, A_3: 5 × 50,

$(A_1 A_2)A_3$: $10 \times 100 \times 5 + 10 \times 5 \times 50 = 7500$

$A_1(A_2 A_3)$: $10 \times 100 \times 50 + 100 \times 5 \times 50 = 75000$

一般算法：n-1次运算加括号方法有 $\frac{1}{n}\binom{2n-1}{n-1}$ 种，

Stirling公式 $n! = \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n(1+\Theta(\frac{1}{n}))$

方法数 $W(n) = \Omega(\frac{1}{n}\frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!}) = \Omega(2^{2n}/n^{\frac{3}{2}})$

应用:栈的输出计数

$1, 2, \ldots, n$ 放入堆栈后的不同的输出个数

分析:

1. 1 进栈;
2. k 个数（k=0,1, … , n-1）进栈并且出栈;
3. 1 出栈;
4. 处理 k+2, … , n 的进栈问题;

步 2：子问题规模 k

步 4：子问题规模 n-k-1

$$\begin{cases} T(n) = \sum_{k=0}^{n-1} T(k)T(n-1-k) \\ T(1) = 1 \end{cases}$$

栈的输出个数(续)

$$\begin{cases} T(n)=\sum_{k=0}^{n-1}T(k)T(n-1-k) \\ T(0)=1,\quad T(1)=1 \end{cases}$$

$$G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}T(n)x^n,$$

$$G^2(x)=(\sum_{k=0}^{\infty}T(k)x^k)(\sum_{l=0}^{\infty}T(l)x^l)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}(\sum_{k=0}^{n-1}T(k)T(n-1-k))$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}T(n)x^{n-1}=\frac{G(x)-1}{x}$$

$$xG^2(x)-G(x)+1=0\Rightarrow 2xG(x)=1\pm\sqrt{1-4x},$$

由于$x\to 0, G(0)\to 0,\quad 2xG(x)=1-\sqrt{1-4x}$

$$G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}x^n$$

第一类Stirling数

定义 多项式 $x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)$的展开式为

$$S_n x^n - S_{n-1}x^{n-1} + S_{n-2}x^{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1}S_1 x$$

将 x^r 的系数的绝对值 S_r 记作 $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$，
称为**第一类 Stirling 数**

实例

$n=2$，$x(x-1)=x^2-x$

$n=3$, $x(x-1)(x-2)=x^3-3x^2+2x$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 0, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 1, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 1$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = 0, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 2, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 3, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 1$$

递推方程

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ r-1 \end{bmatrix} \quad n > r \geq 1$$

$$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 0, \quad \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)!$$

$$x(x-1)\ldots(x-n+2) = \begin{bmatrix} n-1 \\ n-1 \end{bmatrix} x^{n-1} - \begin{bmatrix} n-1 \\ n-2 \end{bmatrix} x^{n-2} + \ldots$$

$$x(x-1)\ldots(x-n+2)(x-n+1)$$

$$= \left(\begin{bmatrix} n-1 \\ n-1 \end{bmatrix} x^{n-1} - \begin{bmatrix} n-1 \\ n-2 \end{bmatrix} x^{n-2} + \ldots \right)(x-n+1)$$

其中 x^r 的系数 $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ r-1 \end{bmatrix}.$

递推三角形

	$r=1$	$r=2$	$r=3$	$r=4$	$r=5$
$n=1$	1				
$n=2$	1	1			
$n=3$	2	3	1		
$n=4$	6	11	6	1	
$n=5$	24	50	35	10	1

$$\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix} = (5-1)\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}$$

恒等式及生成函数

生成函数　$x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)$

恒等式

(1) $\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1,$

(2) $\begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} = \binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$

(3) $\sum_{r=1}^{n} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = n!$

证：x 的 n 次方系数为 1；

x 的 n-1 次方系数为 $1 + 2 + \ldots + n-1 = n(n-1)/2$

(3)式的证明

n 元对称群 S_n，在表示式中具有 r 个不交轮换的置换个数是 $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$

证明：设这样的置换为 $\left\langle \begin{matrix} n \\ r \end{matrix} \right\rangle$ 个，得到这种置换的方法有两种：

从 $S_{n\text{-}1}$ 的含 r-1 个轮换的置换中加入(n)，方法有 $\left\langle \begin{matrix} n-1 \\ r-1 \end{matrix} \right\rangle$ 种；

从 $S_{n\text{-}1}$ 含有 r 个轮换的置换中加入 n，方法有(n-1)$\left\langle \begin{matrix} n-1 \\ r \end{matrix} \right\rangle$ 种.

$$\left\langle \begin{matrix} n \\ r \end{matrix} \right\rangle = (n-1)\left\langle \begin{matrix} n-1 \\ r \end{matrix} \right\rangle + \left\langle \begin{matrix} n-1 \\ r-1 \end{matrix} \right\rangle$$

$$\left\langle \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\rangle = 0, \quad \left\langle \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\rangle = (n-1)!$$

第二类Stirling数

定义： n 个不同的球恰好放到 r 个相同的盒子里的方法数称为**第二类 Stirling 数**，记作 $\left\{ \begin{matrix} n \\ r \end{matrix} \right\}$

实例： $\left\{ \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right\} = 7$

a,b,c | d	a,c,d | b	
a,b,d | c	b,c,d | a	
a,b | c,d	a,c | b,d	a,d | b,c

递推方程

$$\left\{\begin{matrix} n \\ r \end{matrix}\right\} = r\left\{\begin{matrix} n-1 \\ r \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} n-1 \\ r-1 \end{matrix}\right\}$$

$$\left\{\begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix}\right\} = 0, \quad \left\{\begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix}\right\} = 1$$

证明：取球 a_1，

a_1 单独放一个盒子， $\left\{\begin{matrix} n-1 \\ r-1 \end{matrix}\right\}$

a_1 不单独放一个盒子， $r\left\{\begin{matrix} n-1 \\ r \end{matrix}\right\}$

先放 n-1 个球到 r 个盒子里，插入 a_1 有 r 种方法

r=1 r=2 r=3 r=4 r=5

n=1 1

n=2 1 1

n=3 1 3 1

n=4 1 7 6 1

n=5 1 15 25 10 1

$$\left\{\begin{matrix} 5 \\ 3 \end{matrix}\right\} = 3\left\{\begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix}\right\}$$

恒等式

(1) $\left\{ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right\} = 2^{n-1} - 1$

(2) $\left\{ \begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix} \right\} = \binom{n}{2}$

(3) $\left\{ \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right\} = 1$

(4) $\sum \binom{n}{n_1\ n_2 \ldots n_m} = m! \left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\},$

对满足 $n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n$ 的正整数解求和

(5) $\sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} k! = m^n$

(6) $\left\{ \begin{matrix} n+1 \\ r \end{matrix} \right\} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \left\{ \begin{matrix} i \\ r-1 \end{matrix} \right\}$

恒等式证明

证明：

（1）$\begin{Bmatrix} n \\ 2 \end{Bmatrix} = 2^{n-1} - 1$

a_1 先放在一个盒子里，

剩下的 n-1 个球每个有 2 种选择，

但是全落入 a_1 的盒子的方法不符合要求，减去.

（2）$\begin{Bmatrix} n \\ n-1 \end{Bmatrix} = \binom{n}{2}$

n 个球放到 n-1 个盒子，必有一个盒子含 2 个球，

其余每个盒子 1 个球.选择两个球有 $C(n,2)$种方法.

恒等式证明(续)

（4） $$\sum\binom{n}{n_1\ n_2 \ldots n_m}=m!\left\{\begin{matrix} n \\ m \end{matrix}\right\},$$

对满足 $n_1+n_2+\ldots+n_m=n$ 的正整数解求和

对应 n 个不同的球恰好放到 m 个不同盒子的方法数（无空盒）

（5） $$\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}\left\{\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right\}k!=m^n$$

按照含球的盒子数分类，对应了允许存在空盒的方法

（6） $$\left\{\begin{matrix} n+1 \\ r \end{matrix}\right\}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left\{\begin{matrix} k \\ r-1 \end{matrix}\right\}$$

至多 n 个不同的球放到 r-1 个相同的盒子不存在空盒的方法

按照球数分类

生成函数

近似指数生成函数

$$(e^x - 1)^m = (x + \frac{x^2}{2!} + \ldots)^m = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$$

$$a_n = \sum \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_m!}$$

$$= \sum \binom{n}{n_1 n_2 \ldots n_m} = m! \left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\},$$

其中求和是对一切满足方程

$n_1+n_2+\ldots+n_m=n$ 的非负整数解进行

对应的组合问题—放球

n 个球放到 m 个盒子里的方法数.

球标号	盒标号	允空盒	放球方法数	对应的组合问题
否	否	否	$P_m(n)-P_{m-1}(n)$	将 n 恰好无序拆分成 m 部分
	否	是	$P_m(n)$	将 n 无序拆分成 t 个部分($t\le m$)
	是	否	$C(n-1,m-1)$	$x_1+x_2+\ldots+x_m=n$ 的正整数解
	是	是	$C(n+m-1,n)$	$x_1+x_2+\ldots+x_m=n$ 的非负整数解

对应的组合问题—放球

球标号	盒标号	允空盒	放球方法数	对应的组合问题
是	否	否	$\begin{Bmatrix} n \\ m \end{Bmatrix}$	第二类Stirling数
	否	是	$\sum_{k=1}^{m}\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$	第二类Sirling数性质
	是	否	$m!\begin{Bmatrix} n \\ m \end{Bmatrix}$ $m^n=\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}k!$	第二类Stirling数性质
	是	是		乘法法则

对应组合问题:函数关系计数

（2）函数计数

$|A| = n, |B|=m$，计数结果：

A 到 B 的关系：2^{mn}

A 到 B 的函数：m^n

A 到 B 的单射函数：$P(m,n) = m(m-1) \ldots (m-n+1)$

A 到 B 的满射函数：$m!\left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\}$

A 到 B 的双射函数：$m = n, P(n,n) = n!\left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\} = n!$

（3）等价关系计数 $\sum_{m=1}^{n} \left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\}$

小结

- 鸽巢原理的一般形式及应用
- 加法法则与乘法法则，分类处理与分步处理
- 递推方程的求解方法（公式法、迭代归纳法、生成函数法）及应用
- 生成函数、指数生成函数及应用
- 组合计数模型
  - 选取模型、非降路径、方程非负整数解、整数拆分、放球
- 组合数
  - 一般计数：$P(n, k)$、$C(n, k)$、多项式系数
  - Fibonacci数 f_n、错位排列数 D_n
  - Catalan数、两类 Stirling数
  - 以上计数的定义、组合含义、恒等式证明方法