22.3 生成函数及其性质

- 生成函数的定义
- 牛顿二项式定理
- 生成函数的性质
- 生成函数与序列的对应关系

生成函数的定义

设序列$\{a_n\}$，构造形式幂级数

$$G(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$$

称 $G(x)$为$\{a_n\}$的生成函数.

实例：

$\{C(m,n)\}$的生成函数为

$$G(x)= 1 + C(m,1)x + C(m,2)x^2 + \ldots = (1+x)^m$$

给定正整数 k, $\{k^n\}$的生成函数为

$$G(x) = 1+ kx + k^2x^2 + k^3x^3 + \ldots = \frac{1}{1-kx}$$

牛顿二项式定理

牛顿二项式系数：

$$\binom{r}{n}=\begin{cases}0 & n<0\\ 1 & n=0\\ \dfrac{r(r-1)\ldots(r-n+1)}{n!} & n>0\end{cases}$$

其中 r 为实数，n 为整数

牛顿二项式定理

设α为实数，则对一切 x,y，$|x/y|<1$ 有

$$(x+y)^{\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^{n}y^{\alpha-n}，\quad 其中\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$$

牛顿二项式定理(续)

$$(x+y)^{\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^{n}y^{\alpha-n},$$

其中 $\binom{\alpha}{n}=\dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$

当 $\alpha=m$ 时，变成二项式定理

$$(x+y)^{m}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{m}{n}x^{n}y^{m-n},$$

$$(1+z)^{m}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{m}{n}z^{n},$$

生成函数的性质:线性与乘积

线性性质：

1. $b_n = \alpha a_n$，则 $B(x) = \alpha A(x)$
2. $c_n = a_n + b_n$，则 $C(x) = A(x) + B(x)$

乘积性质：

3. $c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$， 则$C(x) = A(x) \cdot B(x)$

生成函数的性质: 移位

4. $b_n = \begin{cases} 0 & n < l \\ a_{n-l} & n \ge l \end{cases}$，则 $B(x) = x^l A(x)$

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad a_0,\ a_1, \ldots,\ a_n, \ldots \\ \underbrace{0, 0, \ldots, 0,}_{l\text{个}0}\ b_l,\ b_{l+1}, \ldots, b_{l+n}, \ldots \end{array}$$

5. $b_n = a_{n+l}$，则 $B(x) = \dfrac{A(x) - \sum_{n=0}^{l-1} a_n x^n}{x^l}$

$$\begin{array}{l} a_0, a_1, \ldots, a_l, a_{l+1}, \ldots \\ \qquad\qquad b_0, b_1, \ldots \end{array}$$

生成函数的性质: 求和

6. $b_n=\sum_{i=0}^{n}a_i$， 则 $B(x)=\dfrac{A(x)}{1-x}$

$$
\begin{aligned}
b_0 &= a_0\\
b_1x &= a_0x+a_1x\\
&\dots\\
b_nx^n &= a_0x^n+a_1x^n+\dots+a_nx^n\\
&\dots
\end{aligned}
$$

$$B(x)=a_0\frac{1}{1-x}+a_1x\frac{1}{1-x}+\dots+a_nx^n\frac{1}{1-x}+\dots$$

7. $b_n=\sum_{i=n}^{\infty}a_i$， 且 $A(1)=\sum_{n=0}^{\infty}a_i$收敛， 则 $B(x)=\dfrac{A(1)-xA(x)}{1-x}$

生成函数性质: 换元与微积分

换元性质:

8. $b_n=\alpha^n a_n$，则 $B(x)=A(\alpha x)$

求导与积分性质:

9. $b_n=na_n$，则 $B(x)=xA'(x)$

10. $b_n=\dfrac{a_n}{n+1}$，则 $B(x)=\dfrac{1}{x}\int_0^x A(x)dx$

生成函数与序列的对应

1. 给定序列$\{a_n\}$或关于 a_n 的递推方程，求生成函数 $G(x)$

利用级数的性质和下述重要级数

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{k}x^k=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\ldots(\frac{1}{2}-k+1)}{k!}x^k$$

$$=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}1\cdot 3\cdot 5\ldots(2k-3)}{2^k k!}x^k$$

$$=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}(2k-2)!}{2^k k!\cdot 2^{k-1}(k-1)!}x^k=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-1}k}\binom{2k-2}{k-1}x^k$$

实例

例 1 求序列$\{a_n\}$的生成函数

（1）$a_n = 7\cdot 3^n$ （2）$a_n = n(n+1)$

解：（1）$G(x) = 7\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n = 7\sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n = \dfrac{7}{1-3x}$

（2）$\int_0^x G(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1} = x^2 H(x),\quad H(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$

$$\int_0^x H(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x},\quad H(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\int_0^x G(x)dx = \frac{x^2}{(1-x)^2}$$

$$G(x) = \left(\frac{x^2}{(1-x)^2}\right)' = \frac{2x}{(1-x)^3}$$

生成函数与序列的对应(续)

2. 给定序列$\{a_n\}$的生成函数$G(x)$,求a_n

待定系数法

例

$$G(x)=\frac{2}{1-3x+2x^2}=\frac{A}{1-x}+\frac{B}{1-2x}$$

$$\begin{cases} A+B=2 \\ -2A-B=0 \end{cases} \Rightarrow A=-2,\quad B=4$$

$$G(x)=\frac{-2}{1-x}+\frac{4}{1-2x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-2)x^n+\sum_{n=0}^{\infty}4(2x)^n$$

$$a_n=-2+4\cdot 2^n$$