15.2 代数系统

- 代数系统的定义

  构成成分、公理

- 代数系统的分类

  同类型的代数系统

  同种的代数系统

- 构造代数系统的方法

  子代数

  积代数

代数系统构成：成分+公理

记法一 $V = <A, \Omega, K>$,

A：载体，非空　Ω：运算集，非空，

K：代数常数集，$\varnothing \subseteq K \subseteq A$

$$\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j, \quad \Omega_j = \{o_j \mid o_j \text{为} A \text{上的} j \text{元运算}\}$$

记法二 $V = <A, \Omega>$, 其中

$$\Omega = \bigcup_{j=0}^{\infty} \Omega_j, \quad \Omega_j = \{o_j \mid o_j \text{为} A \text{上的} j \text{元运算}\}$$

记法三 $V = <A, o_1, o_2, \ldots, o_r>$

代数系统的实例

$<\mathrm{Z}, +, \cdot>$, $<\mathrm{Q}, +, \cdot>$, $<\mathrm{R}, +, \cdot>$

$<M_n(\mathrm{R}), +, \cdot>$,

$<P(B), \cap, \cup>$,

$<\{0,1\}, \wedge, \vee>$,

$<\mathrm{Z}_n, \oplus, \otimes>$,

$\mathrm{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n\text{-}1\}$,

$x \oplus y = (x+y) \bmod n$

$x \otimes y = (xy) \bmod n$

$<A^A, \circ>$

Peano 系统$<M, F, e>$

代数系统的分类

同类型的：构成成分相同

同种的：构成成分与公理都相同

构成成份：*运算*个数，对应运算的元数

公理：交换、结合，幂等，吸收，分配，消去律

单位元e, 每个元素可逆，…

实例：

$<A,\circ,*>$：$*$可结合；$*$对$\circ$可分配

$<\mathrm{Z},+,\cdot>$, $<\mathrm{Z}_n,\oplus,\otimes>$, $<M_n(\mathrm{R}),+,\cdot>$ 与 $<A,\circ,*>$ 是同种的

$<S,\circ',*'>$: $\circ'$, $*'$可交换、结合、幂等；$\circ'$, $*'$相互分配、吸收

$<P(B),\cap,\cup>$, $<\{0,1\},\wedge,\vee>$ 与 $<S,\circ',*'>$ 是同种的

$<A,\circ,*>$ 与 $<S,\circ',*'>$ 同类型的

子代数

定义 设$V=<A, o_1, o_2, \ldots, o_r>$是代数系统，$B$是$A$的非空子集. 若 B 对于 V 中的所有运算封闭（含0元运算在内），则称

$$V'=< B, o_1, o_2, \ldots, o_r >$$

为V 的子代数，若 $B\subset A$,子代数V' 称为V 的真子代数.

平凡子代数：V是V 的平凡子代数. 除此之外，若$V=<A, o_1, o_2, \ldots, o_r>$ 的代数常数集合为 K，且 K 对 V 上所有的运算封闭，那么$<K,o_1,o_2,\ldots,o_r>$ 也为 V 的平凡的子代数.

说明：

若公理是二元运算的性质，子代数与原代数是同种的

子代数一定存在（至少存在平凡子代数）

实例

例1　$V=<Z,+,0>$，

公理：+满足结合律，每个元素可逆

子代数为：nZ, $n\in$N，

　n=0 平凡的真子代数

　n=1 平凡子代数

　n>1 非平凡的真子代数

$V=<Z,+>$

公理：+ 满足结合律

子代数为：nZ（$n\in$N），N, Z^+等.

积代数

定义 设$V_1=<A,o_{11},o_{12},\ldots,o_{1r}>$与$V_2=<B,o_{21},o_{22}, \ldots , o_{2r}>$是同类型的代数系统，对于$i=1, 2, \ldots , r$, o_{1i}和 o_{2i}是 k_i元运算，V_1与V_2的积代数是

$$V_1\times V_2=<A\times B, o_1,o_2, \ldots, o_r>$$

其中 o_i是 k_i元运算，$i=1, 2, \ldots, r$, 对于任意的 $<x_1,y_1>$, $<x_2,y_2>, \ldots , <x_{k_i}, y_{k_i}> \in A\times B$,

$$o_i(<x_1,y_1>,\ldots,<x_{k_i},y_{k_i}>) = <o_{1i}(x_1,\ldots,x_{k_i}), o_{2i}(y_1,\ldots,y_{k_i})>$$

V是V_1与V_2的积代数，也称V_1和V_2是V 的因子代数.

实例

例2 $V_1=\langle Z,+\rangle$， $V_2=\langle M_2(R),\times\rangle$，

积代数$V_1\times V_2=\langle Z\times M_2(R),\circ\rangle$

$$\forall < x,\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}>,< y,\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}>\in Z\times M_2(R)$$

$$< x,\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}>\circ< y,\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}>$$

$$=< x+y,\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}>$$

$$< 2,\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}>\circ< -1,\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}>=< 1,\begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}>$$

积代数的性质

定理1 设V_1=<$A, o_{11}, o_{12}, \ldots, o_{1r}$>与$V_2$=<$B, o_{21}, o_{22}, \ldots, o_{2r}$>是同类型的代数系统，$V_1$与$V_2$的积代数是

$$V_1 \times V_2 = <A \times B, o_1, o_2, \ldots, o_r>,$$

(1) 若o_{1i}, o_{2i}分别在V_1与V_2中可交换（可结合或幂等），则o_i在V中也可交换（可结合或幂等）；

(2) 若o_{1i}对o_{1j}, o_{2i}对o_{2j}在V_1与V_2中分别适合分配律，则o_i对o_j在V中也适合分配律；

(3) 若o_{1i}, o_{1j}与o_{2i}, o_{2j}在V_1与V_2中分别适合吸收律，则o_i与o_j在V中也适合吸收律；

积代数的性质（续）

(4) 若e_{1i}（θ_{1i}），e_{2i}（θ_{2i}）分别为V_1与V_2中关于o_{1i}和 o_{2i}运算的单位元（零元），则$<e_{1i},e_{2i}>$（$<\theta_{1i},\theta_{2i}>$）为$V$中关于$o_i$运算的单位元（零元）

(5) 若o_{1i}和 o_{2i}分别为 V_1与 V_2中含单位元的运算，$a\in A$, $b\in B$ 分别关于 o_{1i}和 o_{2i}运算存在逆元 a^{-1} 和 b^{-1}, 则 $<a^{-1},b^{-1}>$ 是V 中$<a, b>$关于o_i运算的逆元

性质证明

(4) 若o_{1i} 对o_{1j} , o_{2i}对 o_{2j}在V_1与V_2中分别适合分配律，则 o_i对 o_j在V 中也适合分配律.

$\forall <a_1, b_1>,<a_2, b_2>,<a_3, b_3>\in A\times B$,

$<a_1, b_1>\ o_i\ (<a_2, b_2>\ o_j\ <a_3, b_3>)$

$=<a_1, b_1>\ o_i <a_2\ o_{1j}\ a_3, b_2\ o_{2j}\ b_3>$

$=<a_1\ o_{1i}\ (a_2\ o_{1j}\ a_3), b_1\ o_{2i}\ (b_2\ o_{2j}\ b_3)>$

$=<(a_1\ o_{1i}\ a_2)\ o_{1j}\ (a_1\ o_{1i}\ a_3), (b_1\ o_{2i}\ b_2)\ o_{2j}\ (b_1\ o_{2i}\ b_3)>$

$=<(a_1\ o_{1i}\ a_2), (b_1\ o_{2i}\ b_2)>\ o_j <(a_1\ o_{1i}\ a_3), (b_1\ o_{2i}\ b_3)>$

$=(<a_1,b_1>\ o_i <a_2, b_2>)\ o_j\ (<a_1, b_1>\ o_i <a_3, b_3>)$

积代数的性质小结

(1) 积代数能够保持因子代数的如下性质：

算律：交换律, 结合律, 幂等律, 分配律, 吸收律

特异元素：单位元, 零元, 幂等元, 可逆元素及其逆元

消去律不一定能够保持，反例：

$$V_1=<Z_2,\otimes_2>,\ V_2=<Z_3,\otimes_3>$$

(2) 积代数与因子代数是同类型的

系统公理不含消去律，积代数与因子代数同种；

系统公理含消去律，不保证积代数与因子代数同种.

(3) 积代数可以推广到有限多个同类型的代数系统

(4) 直积分解是研究代数结构的有效手段

(5) 笛卡儿积是构造同种离散结构的有效手段