第二十二章 组合计数方法

- 22.1 递推方程的公式解法
- 22.2 递推方程的其他解法
- 22.3 生成函数的定义及其性质
- 22.4 生成函数的应用
- 22.5 指数生成函数及其应用
- 22.6 高级计数

22.1 递推方程的公式解法

- 递推方程的定义
- 递推方程的实例
- 常系数线性递推方程的求解
  - 常系数线性递推方程定义
  - 公式解法
- 递推方程在计数问题中的应用

递推方程的定义

设序列 $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$, 简记为$\{a_n\}$,

一个把 a_n 与某些个 a_i（$i<n$）联系起来的等式

叫做关于序列 $\{a_n\}$ 的递推方程

当给定递推方程和适当的初值就唯一确定了序列.

例： 阶乘计算数列： 1，2，6，24，5!，...,

递推方程 $F(n) = nF(n-1)$

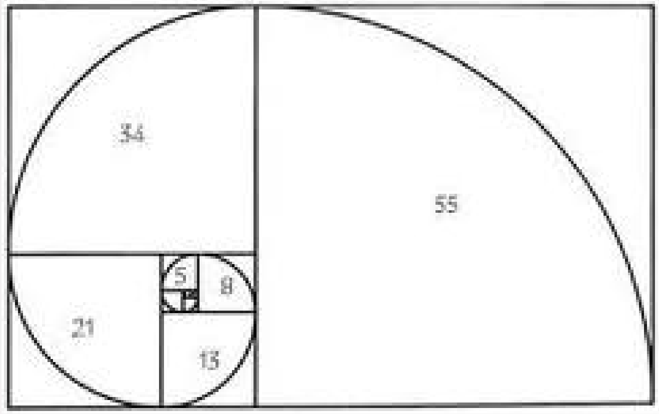
初值 $F(1) = 1$

组合数：Fibnacci数

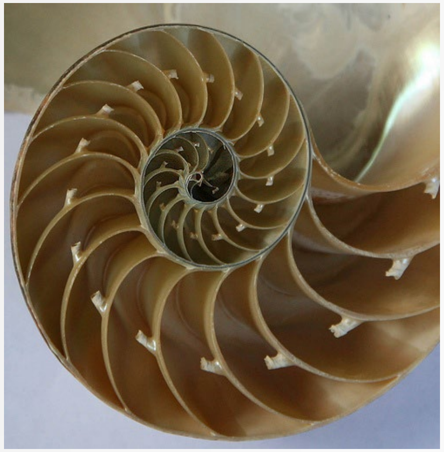
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,…

$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

$f_0 = 1,\ f_1 = 1$



数学家Fibonacci
意大利1170- 1240



递推方程的实例

例 1　一个编码系统用 8 进制数字对信息编码，一个码是有效的当且仅当含有偶数个 7，求 n 位长的有效码字有多少个？

解　设所求有效码字为 a_n 个

$$a_n = 7a_{n-1} + 8^{n-1} - a_{n-1}$$

$$a_n = 6a_{n-1} + 8^{n-1},\quad a_1=7$$

解得　$a_n=(6^n+8^n)/2$

n-1位长的八进制串

x　　x=0,1,2,3,4,5,6

含偶数个7　　a_{n-1}

y　　y=7

含奇数个7　$8^{n-1}-a_{n-1}$

递推方程的实例（续）

例2 Hanoi 塔问题

$$T(n) = 2\,T(n-1) + 1,\quad T(1) = 1,$$

解得 $T(n) = 2^n - 1$

例3 插入排序

$$W(n) = W(n-1) + n - 1$$

$$W(1) = 0$$

解得 $W(n) = O(n^2)$.

归并排序，不妨设$n = 2^k$.

$$W(n) = 2W(n/2) + n - 1$$

$$W(1) = 0$$

解得 $W(n) = O(n\log n)$

常系数线性齐次递推方程

常系数线性齐次递推方程的定义

$$\begin{cases} H(n)-a_1H(n-1)-a_2H(n-2)-\ldots-a_kH(n-k)=0 \\ H(0)=b_0,H(1)=b_1,H(2)=b_2,\ldots,H(k-1)=b_{k-1} \end{cases}$$

其中a_1, a_2, … , a_k为常数，$a_k \neq 0$,

称为 k 阶常系数线性齐次递推方程,

b_0, b_1, …, b_{k-1}为 k 个初值

公式解法

- 特征方程、特征根
- 递推方程的解与特征根的关系
- 解的线性性质
- 无重根下通解的结构
- 求解实例
- 有重根下通解结构
- 求解实例

特征方程与特征根

$$\begin{cases} H(n) - a_1 H(n-1) - a_2 H(n-2) - \ldots - a_k H(n-k) = 0 \\ H(0) = b_0, H(1) = b_1, H(2) = b_2, \ldots, H(k-1) = b_{k-1} \end{cases}$$

特征方程　$x^k - a_1 x^{k-1} - \ldots - a_k = 0$

特征方程的根称为递推方程的特征根

实例

递推方程　$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

特征方程　$x^2 - x - 1 = 0$

特征根　$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

方程解与特征根的关系

定理 1 q 是非零复数，则 q^n 是递推方程的解

$\Leftrightarrow q$ 是它的特征根

证： q^n 是递推方程的解

$$\Leftrightarrow q^n - a_1 q^{n-1} - a_2 q^{n-2} - \ldots - a_k q^{n-k} = 0$$

$$\Leftrightarrow q^{n-k}(q^k - a_1 q^{k-1} - a_2 q^{k-2} - \ldots - a_k) = 0$$

$$\Leftrightarrow q^k - a_1 q^{k-1} - a_2 q^{k-2} - \ldots - a_k = 0$$

$\Leftrightarrow q$ 是它的特征根

解的线性性质

定理 2 $h_1(n)$和 $h_2(n)$是递推方程的解，

c_1,c_2 为任意常数，

则 $c_1h_1(n)+c_2h_2(n)$是递推方程的解.

证明　将 $c_1h_1(n)+c_2h_2(n)$代入递推方程左边，

化简后等于 0

推论：若 $q_1,q_2,\ldots,q_k$ 是递推方程的特征根，

则 $c_1q_1^n+c_2q_2^n+\ldots+c_kq_k^n$ 是递推方程的解，

其中 $c_1, c_2, \ldots, c_k$ 是任意常数.

无重根下通解的结构

通解定义：

若对递推方程的每个解 $h(n)$都存在一组常数 $c_1', c_2', \ldots, c_k'$ 使得 $h(n)=c_1'q_1^n+c_2'q_2^n+\ldots+c_k'q_k^n$ 成立，则称 $c_1q_1^n+c_2q_2^n+\ldots+c_kq_k^n$ 为通解.

定理 3 设 $q_1, q_2, \ldots, q_k$是递推方程不等的特征根，则 $H(n)= c_1q_1^n+c_2q_2^n+\ldots+c_kq_k^n$ 为通解.

定理的证明

证：　$H(n)$是解.

设 $h(n)$是递推方程的任意解，

$h(0), h(1), \ldots, h(k\text{-}1)$由初值 $b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}$ 唯一确定.

$$\begin{cases} c_1'+c_2'+\ldots+c_k'=b_0 \\ c_1'q_1+c_2'q_2+\ldots+c_k'q_k=b_1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \ldots \\ c_1'q_1^{k-1}+c_2'q_2^{k-1}+\ldots+c_k'q_k^{k-1}=b_{k-1} \end{cases}$$

系数行列式 $\prod_{1\le i<j\le k}(q_i-q_j)\neq 0$ 当 $q_i\neq q_j$时

方程组有唯一解

求解实例

例 4 Fibonnaci 数列，特征根为 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ，

通解为 $f_n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

带入初值 $f_0=1, f_1=1$，得 $\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{cases}$

解得 $c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

有重根下求解中的问题

例 5 $H(n) - 4H(n-1) + 4H(n-2) = 0$

$H(0) = 0, H(1) = 1$

特征方程 $x^2 - 4x + 4 = 0$

通解 $H(n) = c_1 2^n + c_2 2^n = c2^n$

代入方程得:

$c2^n - 4c2^{n-1} + 4c2^{n-2} = 0$

$c - 2c + c = 0$, c 无解.

问题：两个解线性相关.

观察：$n2^n$ 是解，且与 2^n 线性无关

有重根下的通解结构

定理 4 若 q 是递推方程的 e 重特征根，则 $q^n, nq^n, \ldots, n^{e-1}q^n$ 是递推方程的线性无关的解

定理 5 设 $q_1, q_2, \ldots, q_t$ 是递推方程的不相等的特征根，且 q_i 的重数为 e_i，令

$$H_i(n) = (c_{i1} + c_{i2}n + \ldots + c_{ie_i}n^{e_i-1})q_i^n$$

那么通解 $H(n) = \sum_{i=1}^{t} H_i(n)$

证明：请阅读教材

求解实例

例 6 $H(n)+H(n-1)-3H(n-2)-5H(n-3)-2H(n-4)=0$

$H(0)=1, H(1)=0, H(2)=1, H(3)=2$

特征方程 $x^4+x^3-3x^2-5x-2=0$，特征根$-1,-1,-1,2$,

通解为 $H(n)=(c_1+c_2n+c_3n^2)(-1)^n+c_4 2^n$

$$\begin{cases} c_1+c_4=1 \\ -c_1-c_2-c_3+2c_4=0 \\ c_1+2c_2+4c_3+4c_4=1 \\ -c_1-3c_2-9c_3+8c_4=2 \end{cases}$$

解得 $c_1=\frac{7}{9}, c_2=-\frac{1}{3}, c_3=0, c_4=\frac{2}{9}$

解为 $H(n)=\frac{7}{9}(-1)^n-\frac{1}{3}n(-1)^n+\frac{2}{9}2^n$

常系数线性非齐次递推方程求解

- 递推方程的标准型
- 通解结构
- 特解的求法
  - 多项式函数
  - 指数函数
  - 组合形式

递推方程的标准型及通解

$$H(n)-a_1H(n-1)-...-a_kH(n-k)=f(n),\quad n\geq k, a_k\neq 0, f(n)\neq 0.$$

定理 6 设 $\overline{H(n)}$ 是对应齐次方程的通解，$H^*(n)$是一个特解，则

$$H(n)=\overline{H(n)}+H^*(n)$$

是递推方程的通解.

证（1）$H(n)$是解，代入验证.

（2）设 $h(n)$是解，证明 $h(n)$为一个齐次解与特解 $H^*(n)$之和.

①$\boldsymbol{h}(n)-a_1\boldsymbol{h}(n-1)-\cdots-a_k\boldsymbol{h}(n-k)=f(n)$

②$H*(n)-a_1H*(n-1)-\cdots-a_kH*(n-k)=f(n)$

用①式 - ②式，即得：

$$[\boldsymbol{h}(n)-H^*(n)]-a_1[\boldsymbol{h}(n-1)-H^*(n-1)]-\ldots-a_k[\boldsymbol{h}(n-k)-H^*(n-k)]=0$$

$h(n)-H^*(n)$是齐次解，即 $h(n)$是一个齐次解与 $H^*(n)$之和.

特解的求法

$f(n)$为 n 的 t 次多项式，一般 $H^*(n)$也为 n 的 t 次多项式

例 7　$a_n + 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 3n^2$

设　$a_n^* = P_1n^2 + P_2n + P_3$，代入得

$$P_1n^2+P_2n+P_3+5[P_1(n-1)^2+P_2(n-1)+P_3]+6[P_1(n-2)^2+P_2(n-2)+P_3]=3n^2$$

$$\begin{cases} 12P_1 = 3 \\ -34P_1 + 12P_2 = 0 \\ 29P_1 - 17P_2 + 12P_3 = 0 \end{cases}$$

$$P_1 = \frac{1}{4},\quad P_2 = \frac{17}{24},\quad P_3 = \frac{115}{288},$$

$$a_n^* = \frac{1}{4}n^2 + \frac{17}{24}n + \frac{115}{288}$$

通解为 $a_n = c_1(-2)^n + c_2(-3)^n + \frac{1}{4}n^2 + \frac{17}{24}n + \frac{115}{288}$

实例

例 8 Hanoi 塔

$$T(n) = 2\,T(n-1)+1$$

$$T^*(n) = P$$

$$P = 2\,P + 1\ ,\ P = -1$$

$T(n) = c\,2^n-1$，代入初值 $T(1)=1$，得 $c=1$，

解为 $T(n) = 2^n-1$.

例 9 $H(n)-H(n-1) = 7n$

设特解 P_1n+P_2 不行，应设 n^2 次项，因为特征根是 1.

设 $H^*(n) = P_1n^2 + P_2n$，代入 解得 $P_1 = P_2 = 7/2$，

通解为 $H(n) = c\cdot 1^n + \dfrac{7}{2}\,n(n+1) = c + \dfrac{7}{2}\,n(n+1)$

特解的求法（续）

$f(n)$为指数函数 β^n，若β不是特征根，则特解为

$H^*(n) = P\beta^n$

例 10　通信编码问题

$a_n = 6a_{n-1} + 8^{n-1}$，　$a_1=7$

$a^*_n = P\,8^{n-1}$，代入得 $P = 4$

通解　$a_n=c\cdot 6^n + 4\cdot 8^{n-1}$

代入初值得　$a_n=(6^n+8^n)/2$

特解的求法（续）

若 β 是 e 重特征根，则特解为 $Pn^e\beta^n$

例 11　$H(n) - 5H(n-1) + 6H(n-2) = 2^n$,

$H^*(n) = Pn2^n$,

代入得

$Pn2^n - 5P(n-1)2^{n-1} + 6P(n-2)2^{n-2} = 2^n$

解得　$P = -2$

$H^*(n) = -n2^{n+1}$

特解的求法（续）

例 12　组合形式

$$a_n - 2a_{n-1} = n + 3^n$$

$$a_0 = 0$$

设特解为 $a_n^* = P_1 n + P_2 + P_3 3^n$，代入

$$(P_1 n + P_2 + P_3 3^n) - 2[P_1(n-1) + P_2 + P_3 3^{n-1}] = n + 3^n$$

$$-P_1 n + (2P_1 - P_2) + P_3 3^{n-1} = n + 3^n$$

$$P_1 = -1,\ P_2 = -2,\ P_3 = 3$$

$$a_n = c2^n - n - 2 + 3^{n+1}$$

解得 $c = -1$，$a_n = -2^n - n - 2 + 3^{n+1}$

计数排列L的逆序, $n=2^k$

算法：基于二分归并排序的算法

1. *count*←0; 将L划分成L_1与L_2； /*$L_1[1..n/2]$, $L_2[n/2+1..n]$

2. 递归处理L_1与L_2;

3. while *p.next*≠null and *q.next* ≠null do

4. if *p.key*> *q.key* then /**p,q*分别指向L_1与L_2首元素

5. *count*←*count*+*num*(L_1) /**num*为当前L_1元素数

6. 移走*q*指向的元素； *q*←*q.next*

7. else 移走*p*指向的元素； *p*←*p.next*

8. if *p.next*=null then 将L_2的剩下的全体元素接在后面

9. else 将L_1的剩下的全体元素接在后面

10. 将排好序的全体元素放回到 L中

$$T(n)=2T(n/2)+n-1，T(n)=O(n\log n)$$