第二十一章 基本计数公式

- 21.1 加法法则与乘法法则
- 21.2 排列组合
- 21.3 二项式定理与组合恒等式
- 21.4 多项式定理

21.1 加法法则与乘法法则

- 加法法则
- 乘法法则
- 应用实例

加法法则

加法法则：事件A有 m 种产生方式，事件 B 有 n 种产生方式，则 “事件A 或 B ” 有 $m+n$ 种产生方式.

使用条件：事件 A 与 B 产生方式不重叠

适用问题：分类选取

推广：事件 A_1 有n_1 种产生方式，事件A_2 有 n_2 种产生方式，…, 事件 A_k 有 n_k 种产生的方式，则 “事件 A_1 或 A_2或 … A_k” 有 $n_1+n_2+\ldots+n_k$ 种产生的方式.

乘法法则

乘法法则：事件A有 m 种产生方式，事件B 有 n 种产生方式，则 “事件 A与B ” 有 mn 种产生方式.

使用条件：事件 A 与 B 的产生方式相互独立

适用问题：分步选取

推广：事件A_1有 n_1 种产生方式，事件 A_2有 n_2种产生方式，…, 事件A_k有 n_k种产生的方式，则 “事件 A_1与A_2与… A_k” 有 $n_1n_2\ldots n_k$ 种产生的方式.

应用实例

例1 设A,B,C是3个城市，从A到B有3条道路，从B到C有2条道路，从A直接到C有4条道路，问从A到C有多少种不同的方式?

$$N=3\times 2+4 = 10$$

例2 求1400的不同的正因子个数

$$1400=2^3\ 5^2\ 7$$

正因子为：$2^i\ 5^j\ 7^k$，其中$0\le i\le 3,\ 0\le j\le 2,\ 0\le k\le 1$

$$N=(3+1)(2+1)(1+1)=24$$

21.2 排列组合

- 选取问题
- 集合的排列与组合
- 基本计数公式的应用
- 多重集排列与组合

选取问题 --组合计数模型1

设 n 元集合 S，从 S 中选取 r 个元素.

根据是否有序，是否允许重复可以将该问题分为四个子类型

	不重复	重复
有序	集合排列 $P(n,r)$	多重集排列
无序	集合组合 $C(n,r)$	多重集组合

集合的排列

1．从 n元集 S 中有序、不重复选取的 r 个元素称为 S 的一个r 排列，S 的所有r 排列的数目记作 $P(n,r)$

$$P(n,r)=\begin{cases}\dfrac{n!}{(n-r)!} & n\geq r\\ 0 & n<r\end{cases}$$

2．环排列

S 的 r 环排列数 $=\dfrac{P(n,r)}{r}$

集合的组合

3．从 n元集 S 中无序、不重复选取的 r 个元素称为S 的一个r 组合，S 的所有r 组合的数目记作$C(n,r)$

$$C(n,r)=\begin{cases}\dfrac{P(n,r)}{r!} & n\geq r\\ 0 & n<r\end{cases}$$

4． $C(n,r) = C(n,n-r)$

证明方法:

公式代入

组合证明（一一对应）

基本计数公式的应用

例1 从1—300中任取3个数使得其和能被3整除有多少种方法?

解 $A=\{1, 4, \ldots, 298\}$

$B=\{2, 5, \ldots, 299\}$

$C=\{3, 6, \ldots, 300\}$

分类:

分别取自 A, B, C: 各 $C(100,3)$

A, B, C 各取1个: $C(100,1)^3$

$$N= 3C(100,3) + 100^3 = 1485100$$

基本计数公式应用(续)

例2 求1000！的末尾有多少个0？

解：　$1000! = 1000 \times 999 \times 998 \times \ldots \times 2 \times 1$

将每个因子分解，若分解式中共有 i 个5, j 个2，那么 $\min\{ i, j \}$ 就是0的个数.

1, … ,1000中有

500 个是 2 的倍数，$j > 500$;

200 个是 5 的倍数，

40 个是 25 的倍数（多加40个5），

8 个是 125 的倍数（再多加8个5），

1 个是 625 的倍数（再多加1个5）

$i = 200+40+8+1 = 249$. $\min\{ i, j \}=249$.

多重集的排列

多重集的表示　$S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2, \ldots, n_k\cdot a_k\}$，　$0 < n_i \le +\infty$

r 排列的计数结果

(1) 全排列 $r = n$,　$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$

$$N = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

证明：分步选取.

$$N = C(n,n_1)C(n-n_1,n_2)\ldots C(n-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1},n_k)$$

$$= \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

(2) 若$r \le n_i$时，每个位置都有k 种选法，得 k^r.

多重集的组合

多重集 $S=\{ n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2, \ldots, n_k\cdot a_k \}$的组合数为

$$N = C(k+r-1,r), \text{当} r \le n_i$$

证明 一个r 组合为

$$\{ x_1\cdot a_1, x_2\cdot a_2, \ldots , x_k\cdot a_k \},$$

其中 $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = r$, x_i为非负整数

这个不定方程的非负整数解对应于下述排列

$$\underbrace{1\ldots1}_{x_1\text{个}}\ 0\ \underbrace{1\ldots1}_{x_2\text{个}}\ 0\ \underbrace{1\ldots1}_{x_3\text{个}}\ 0\ \ldots\ldots\ 0\ \underbrace{1\ldots1}_{x_k\text{个}}$$

r个1，$k-1$个0的全排列数为

$$N = \frac{(r+k-1)!}{r!(k-1)!} = C(k+r-1,r)$$

实例

例3 r 个相同的球放到 n个不同的盒子里，每个盒子球数不限，求放球方法数.

解： 设盒子的球数依次记为 $x_1, x_2, \ldots, x_n$, 则满足

$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = r$， $x_1, x_2, \ldots, x_n$为非负整数

$$N = C(n+r-1, r)$$

例4 排列 26个字母，使得 a 与 b 之间恰有7个字母，求方法数.

解： 固定a 和 b中间选7个字母，有2 $P(24,7)$种方法，将它看作大字母与其余17个全排列有18！种，因此

$$N = 2\,P(24,7)\,18!$$

实例（续）

例5 (1) 10个男孩，5个女孩站成一排，若没有女孩相邻，有多少种方法？

(2) 如果站成一个圆圈，有多少种方法？

解：(1) $P(10,10)\ P(11,5)$

(2) $P(10,10)\ P(10,5)/10$

例6 把 $2n$ 个人分成 n 组，每组2人，有多少分法？

解：相当于 $2n$ 不同的球放到 n 个相同的盒子，每个盒子2个，放法为

$$N=\frac{(2n)!}{(2!)^n\,n!}=\frac{(2n)!}{2^n\,n!}$$

实例（续）

例7 9本不同的书，其中4本红皮，5本白皮，

(1) 9本书的排列方式数有多少？

(2) 若白皮书必须放在一起，那么有多少方法？

(3) 若白皮书必须放在一起，红皮书也必须放在一起，那么有多少方法？

(4) 若白皮和红皮书必须相间，有多少方法？

解：(1) 9!

(2) 5！ 5!

(3) 5！ 4！ 2!

(4) 5！ 4!