



单元10.1 平面图的概念

第二编 图论 第十一章 平面图

11.1 平面图的基本概念



北京大學



内容提要

第十一章 平面图

11.1 平面图的基本概念



北京大学

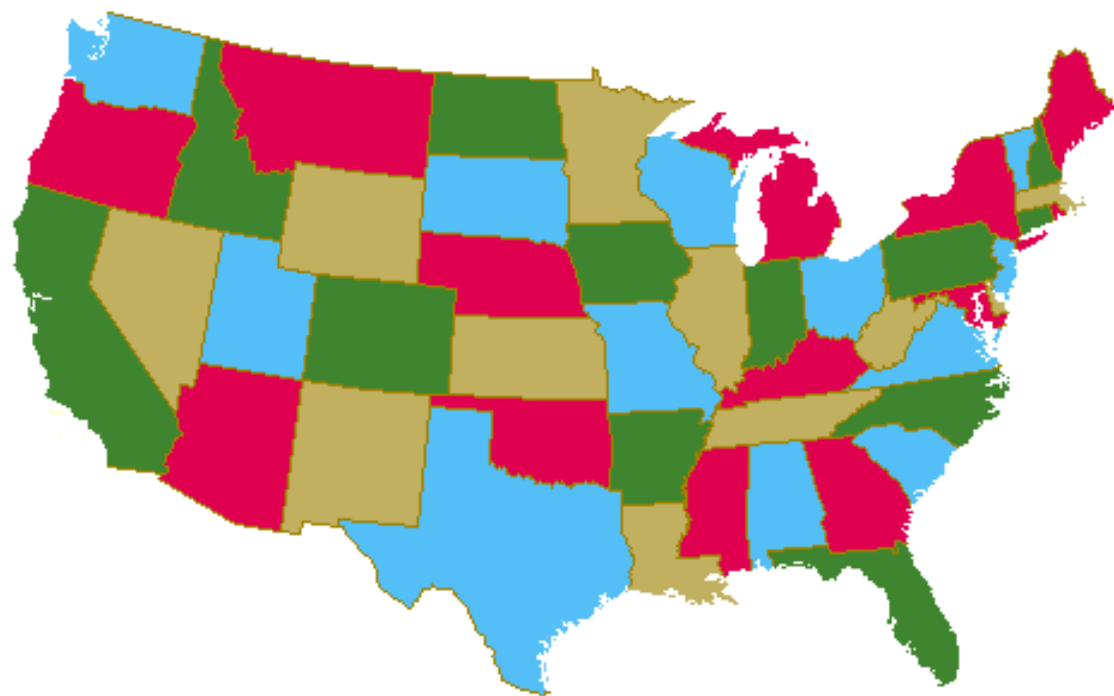
四色问题(Four Color Problem)

中华人民共和国地图





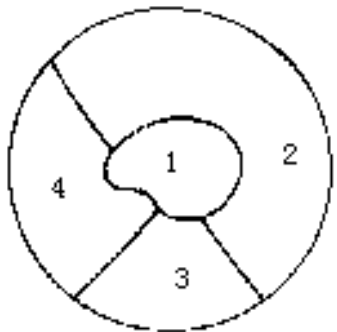
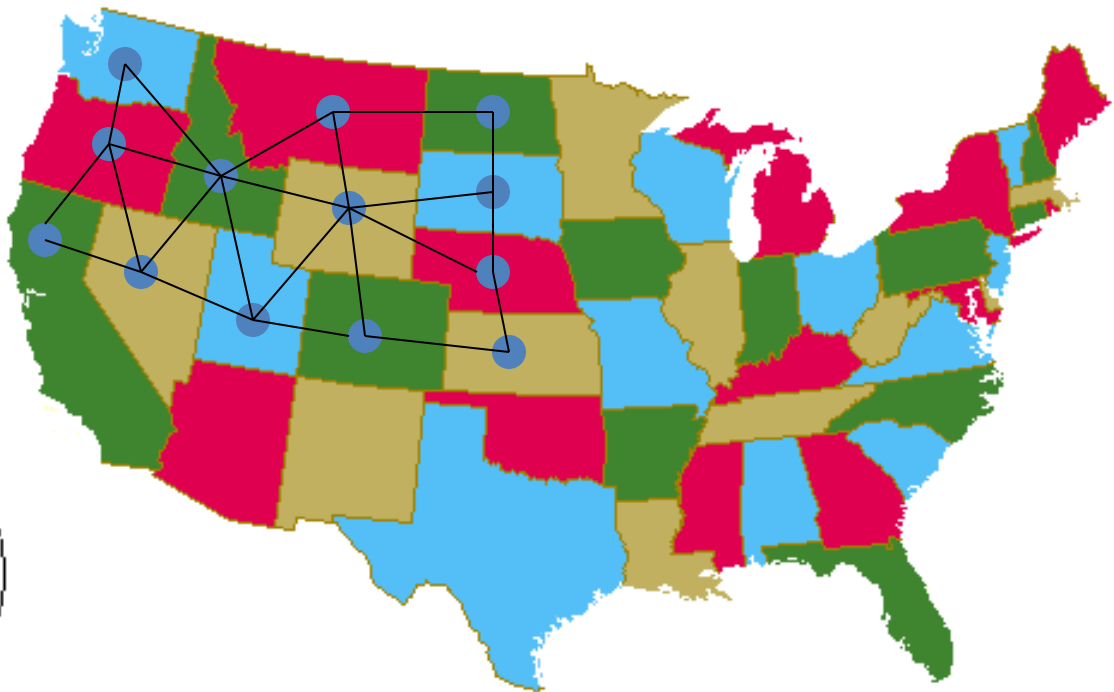
四色问题



北京大学



四色问题



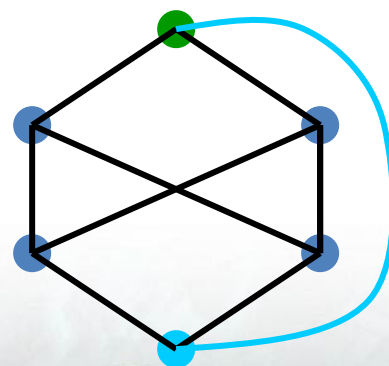
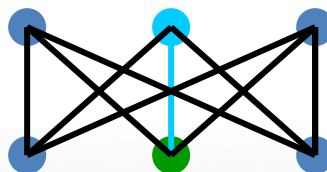
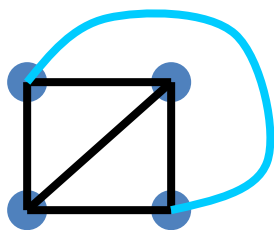
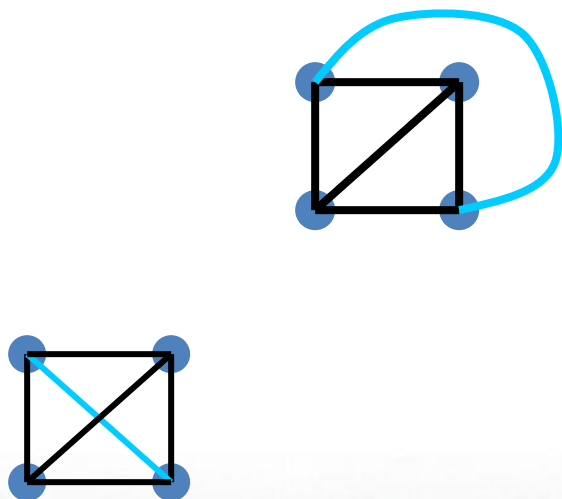
图一



北京大学

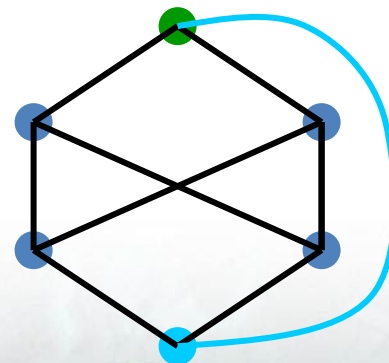
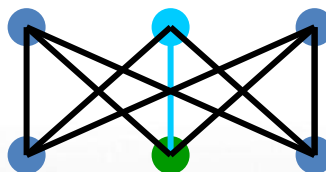
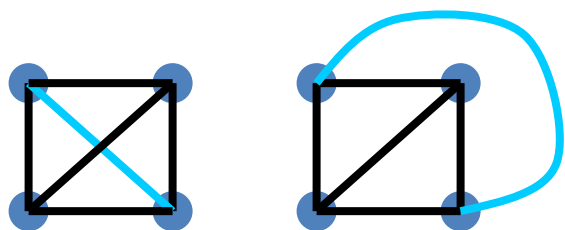
平面图(plane graph)

- 在平面上边与边不在非顶点处相交的图



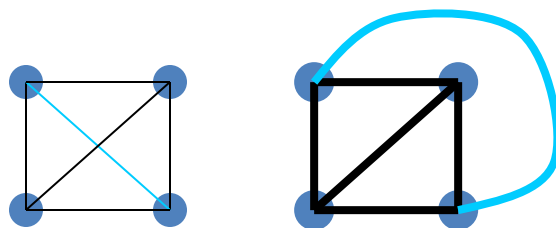
可平面图(planar graph)

- 可以画在平面上,使得边与边不在非顶点处相交的图



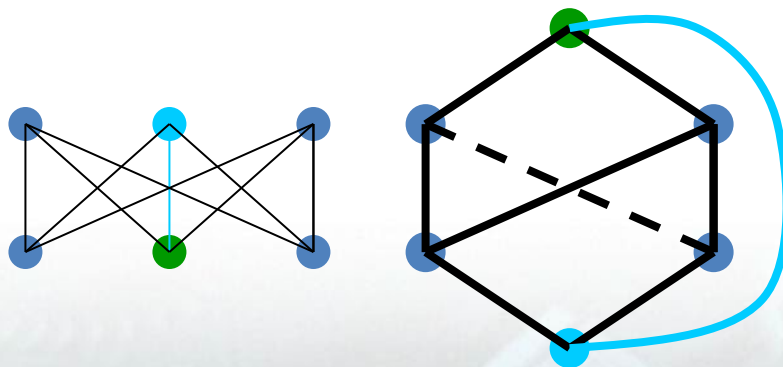
平面嵌入(imbedding)

- 画在平面上使得边与边不在非顶点处相交



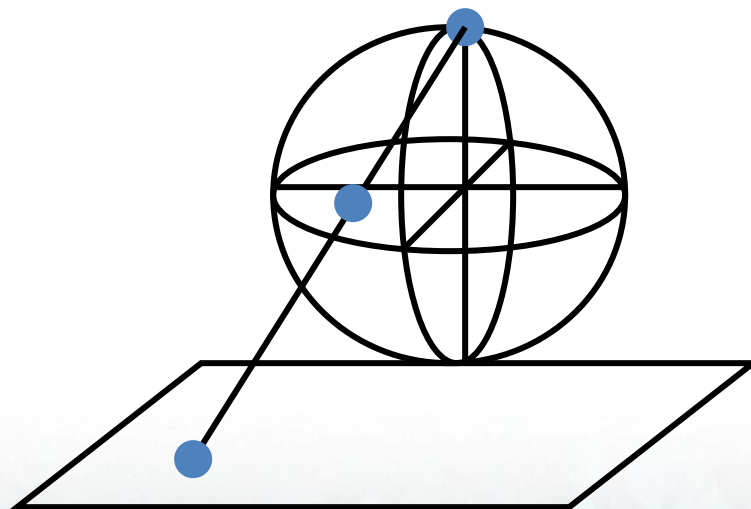
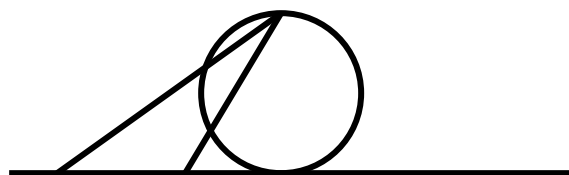
球面嵌入, 曲面嵌入

- **球面嵌入**: 画在球面上使得边与边不在非顶点处相交
- **曲面嵌入**: 画在曲面上使得边与边不在非顶点处相交, 如环面嵌入



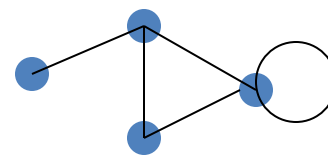
定理11.1

- 可平面嵌入 \Leftrightarrow 可球面嵌入
- 证明：连续球极投影. #



面

- **区域(region)**: 不含顶点与边的极大连通曲面,
 R
- **外部区域(exterior region)**: 面积无限的区域,
 R_0
- **区域边界(boundary of region)**: 与 R 关联的边和顶点构成的子图, ∂R
- **面(face)**: 区域及其边界
- **面的次数(degree)**: $\deg(R) = \text{边界长度}$





定理11.2

$$\sum_{i=1}^r \deg(R_i) = 2m. \quad \#$$



北京大學



定理11.3

- 任何平面嵌入的内部面都可以在另一种平面嵌入下成为外部面
- **证明:** 平面嵌入 \rightarrow 球面嵌入 \rightarrow 把该面旋转到北极 \rightarrow 平面嵌入. #





极大(maximal)平面图

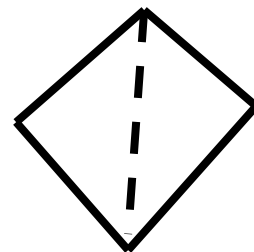
- 是平面图,但是在任意两个不相邻顶点之间加边就是非平面图
- 例如, K_5 删除任意一边



定理11.4

- $n(\geq 3)$ 阶简单连通平面图是极大平面图

$$\Leftrightarrow \forall R, \deg(R)=3$$



- 证明: (\Rightarrow) 简单图 $\Rightarrow \deg(R) \geq 3$,

极大平面图 $\Rightarrow \deg(R) \leq 3$

$(\Leftarrow) \forall R, \deg(R)=3 \Rightarrow$ 不能加边而不交叉. #





极小非平面图

- 是非平面图, 但是删除任意1边就是平面图
- 例如, K_5 , $K_{3,3}$





小结

- 平面图
- 极小非平面图
- 极大平面图

