单元12.2 边覆盖集与匹配

第二编 图论　第十一章 平面图

13.2 边覆盖集与匹配

内容提要

- 边覆盖集
- 匹配
- 匹配，点覆盖，点独立集，边覆盖集之间的关系
- 贝尔热定理
- 托特定理

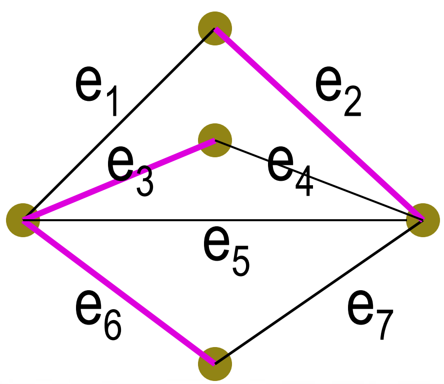
边覆盖

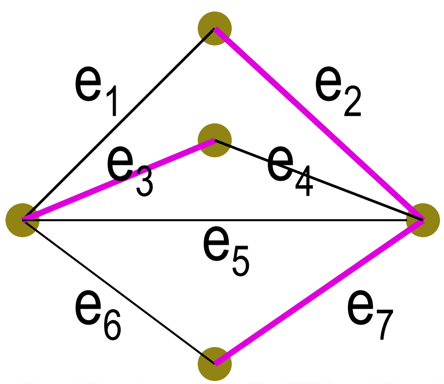
- (无孤立点)无向图G=<V,E>
- 边覆盖(集): $E^* \subseteq E$, $\forall v \in V$, $\exists e \in E^*$, e关联v

- 极小边覆盖: 真子集都非边覆盖的边覆盖
- 最小边覆盖: 边数最少的边覆盖
- 边覆盖数: $\alpha_1(G)$ = 最小边覆盖的边数

边覆盖举例

- $\{e_2,e_3,e_6\}$, $\{e_2,e_3,e_7\}$, $\alpha_1=3$





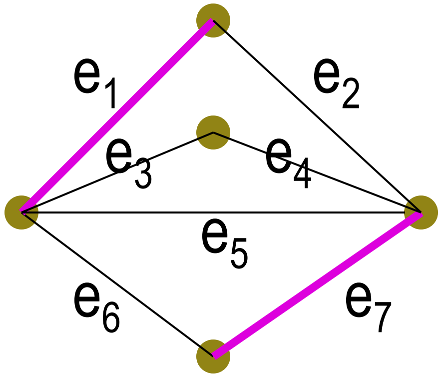
匹配

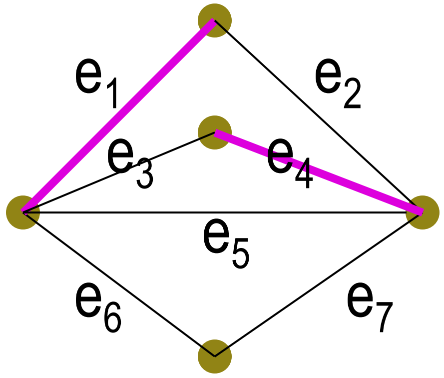
- 无向图G=<V,E>
- 匹配(边独立集): $E^* \subseteq E$,
  $\forall e,f \in E^*$, e,f不相邻

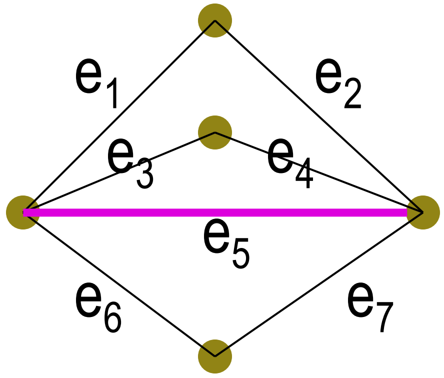
- 极大匹配: 真母集都非匹配的匹配
- 最大匹配: 边数最多的匹配
- 匹配数: $\beta_1(G)$ = 最大匹配的边数

匹配举例

- $\{e_1,e_7\}$, $\{e_1,e_4\}$, $\{e_5\}$, $\beta_1=2$

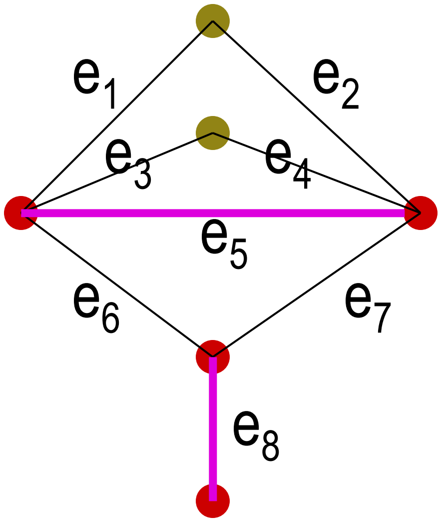






饱和点

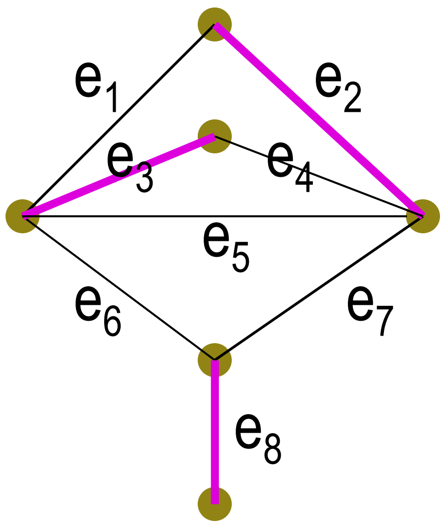
- 匹配中边所关联的顶点

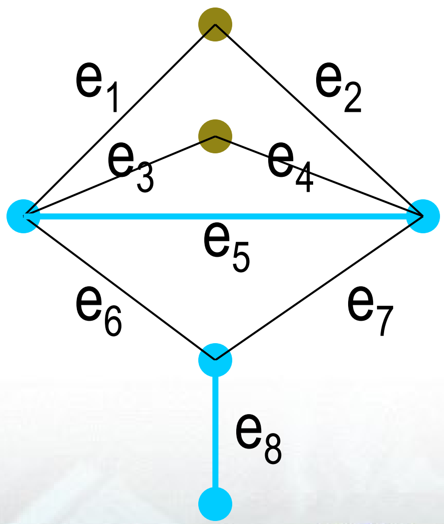


- 非饱和点：不与匹配中边关联的顶点

完美匹配

- 没有非饱和点的匹配





定理13.5

- 无向图G无孤立点,

(1) 设M是最大匹配, ∀非饱和点v, 取v关联的一边, 组成边集N, 则W=M∪N是最小边覆盖

(2) 设W_1是最小边覆盖, 若W_1中有相邻边, 就删除其中一边, 直到无相邻边为止,设删除的边组成边集N_1, 则$M_1=W_1-N_1$是最大匹配

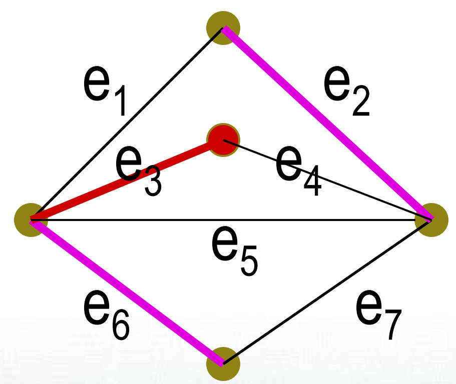
(3) $\alpha_1+\beta_1=n$

定理13.5证明(1)

- 证: M是最大匹配, $|M|=\beta_1$, $|N|=n-2\beta_1$,

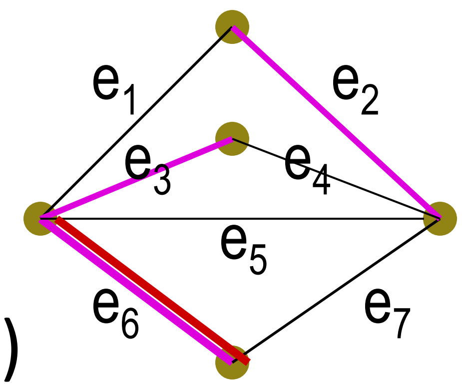
  $\alpha_1 \le |W| = |M|+|N| = n-\beta_1$ (*)

  (上式是等式 $\Rightarrow \beta_1 \le \alpha_1$)



定理13.5证明(2)

- 证: W_1是最小边覆盖, $|W_1|=\alpha_1$,
  删除1相邻边恰产生1个非饱和点,
  $|N_1| = |W_1|-|M_1|$
  = "删除边数"
  = "M_1的非饱和点数"
  $= n-2|M_1|$,
  $\alpha_1 = |W_1| = n-|M_1| \geq n-\beta_1$ (**)



定理13.5证明(3)

- 证:

  (3) 由(*)(**), $n \le \alpha_1+\beta_1 \le n$, 所以 $\alpha_1+\beta_1=n$.

  (1) 由(*), $|W|=\alpha_1$, W是最小边覆盖.

  (2) 由(**), $|M_1|=\beta_1$, M_1是最大匹配. #

定理13.5推论

- 无向图G无孤立点, M是匹配, W是边覆盖, 则

$$|M| \le |W|$$

等号成立时,

M是完美匹配, W是最小边覆盖.

定理13.5推论证明

- 证: 由定理13.5证明(1)可知 $\beta_1 \le \alpha_1$, 于是

$$|M| \le \beta_1 \le \alpha_1 \le |W|,$$

当 $|M|=|W|$ 时, 得

$$|M| = \beta_1 = \alpha_1 = |W|,$$

因而M是最大匹配, W是最小边覆盖, 再由定理13.5(3)可知 $\alpha_1+\beta_1 = 2\beta_1 = n$, 所以M是完美匹配. #

定理13.6

- 无向图G无孤立点, M是匹配, N是点覆盖, Y是独立集, W是边覆盖, 则
  - (1) $|M| \le |N|$,
  - (2) $|Y| \le |W|$,
  - (3) 等号成立时,
    M是最大匹配, N是最小点覆盖,
    Y是最大独立集, W是最小边覆盖.
- 说明: 此所谓 "最小-最大(min-max)"关系

定理13.6证明

- 证:

(1) M中边不相邻,

至少需要|M|个点才能覆盖M.

(2) Y中顶点不相邻,

至少需要|Y|条边才能覆盖Y.

(3) |M|=|N|说明|M|达到最大值, |N|达到最小值.

|Y|=|W|类似. #

推论

- 无向图G无孤立点, 则

$$\beta_1 \le \alpha_0,\ \ \beta_0 \le \alpha_1.\quad \#$$

- 等号可能成立:
  - 对于$K_{r,s}$: $\beta_1=\alpha_0=\min\{r,s\}$ (定理13.14)

    $\beta_0=\alpha_1=\max\{r,s\}$

$\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \nu_0, \alpha_1, \beta_1$之间关系

- 无向图G无孤立点,

$\gamma_0 \le \alpha_0, \beta_0$ (补充定理,定理13.2补充推论)

$n = \alpha_0 + \beta_0$ (定理13.3推论)

$\nu_0(\overline{G}) = \beta_0 \le \alpha_1$ (定理13.4推论,13.6推论)

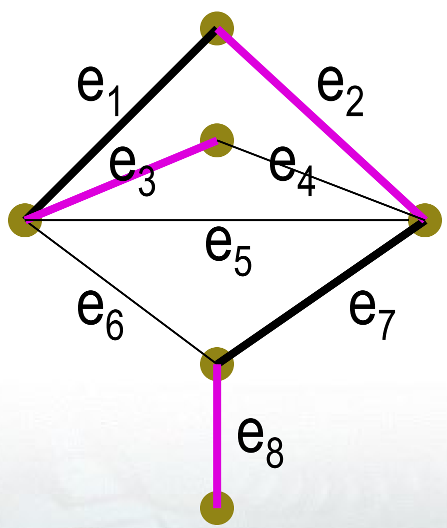
$n = \alpha_1 + \beta_1$ (定理13.5)

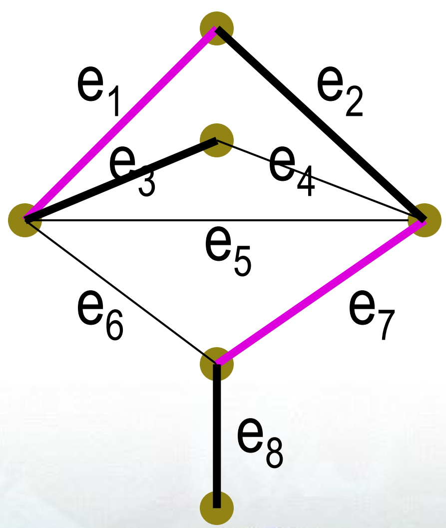
$\beta_1 \le \alpha_1, \alpha_0$ (定理13.5, 定理13.6推论)

- α_1, β_1是容易计算的(tractable, easy)

交错路径

- 在匹配中和在匹配外交替取边的路径
- 例：$e_3\, e_1\, e_2\, e_7\, e_8$,　　　　$e_3\, e_1\, e_2\, e_7\, e_8$





定理13.7

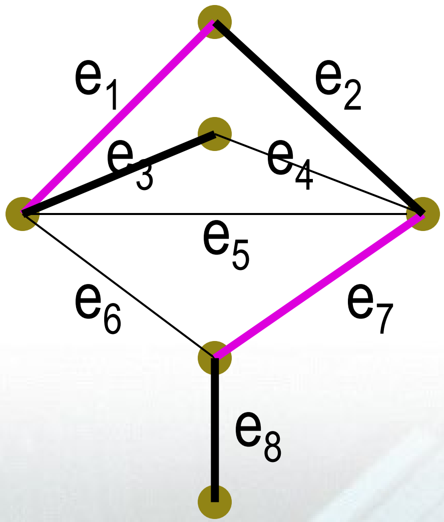
- 设M_1,M_2是G中2个不同匹配, 则$G[M_1 \oplus M_2]$的每个连通分支是M_1和M_2中的边组成的交错圈或交错路径

定理13.7证明

- 证：设G_1是$G[M_1 \oplus M_2]$的1个连通分支，
  $\forall v \in V(G_1)$,
  $$0 < d_{G1}(v) = d_{G[M1 \oplus M2]}(v) \leq 2,$$
  即 $\quad d_{G1}(v) = 1$ 或 2,
  所以G_1是交错圈或交错路径. #

可增广(交错)路径

- 两端都是非饱和点的交错路径
- 例： e_3 e_1 e_2 e_7 e_8

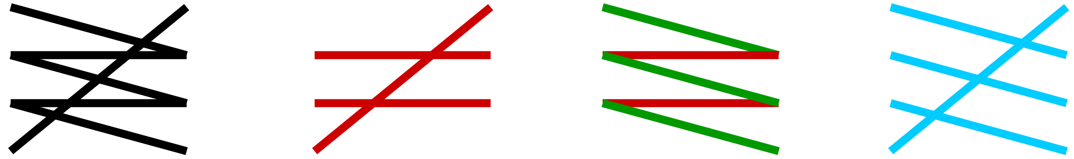


定理13.8

- 设M是G中匹配, Γ是M的可增广路径, 则

$$M' = M \oplus E(\Gamma)$$

也是G中匹配, 且 $|M'| = |M|+1$



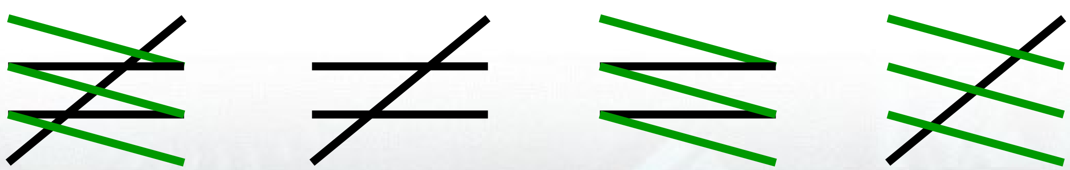
定理13.8证明

- 证: 显然M是匹配.

$|M'| = |M \oplus E(\Gamma)|$

$= |M - E(\Gamma)| + |E(\Gamma) - M|$

$= |M| + 1.$ #



贝尔热定理

- 定理13.9(Berge, 1957):

  M是G中最大匹配 $\Leftrightarrow$ G中无M可增广路径

贝尔热定理证明

- 证: (⇒) (反证) 定理13.8.

(⇐) 设M_1是G的最大匹配. 设$H=G[M_1 \oplus M]$.

若$H=\varnothing$, 则 $M=M_1$, M是最大匹配.

若$H\neq\varnothing$, 则H的连通分支是交错圈或交错路径.

在交错圈和交错路径上M和M_1都边数相等

(M和M_1都无可增广路径), 故 $|M|=|M_1|$. #

求最大匹配是易解的

- 有多项式时间算法求最大匹配
- 求最小边覆盖, 求完美匹配 也是易解的

托特定理

- 定理13.10(Tutte,1947):

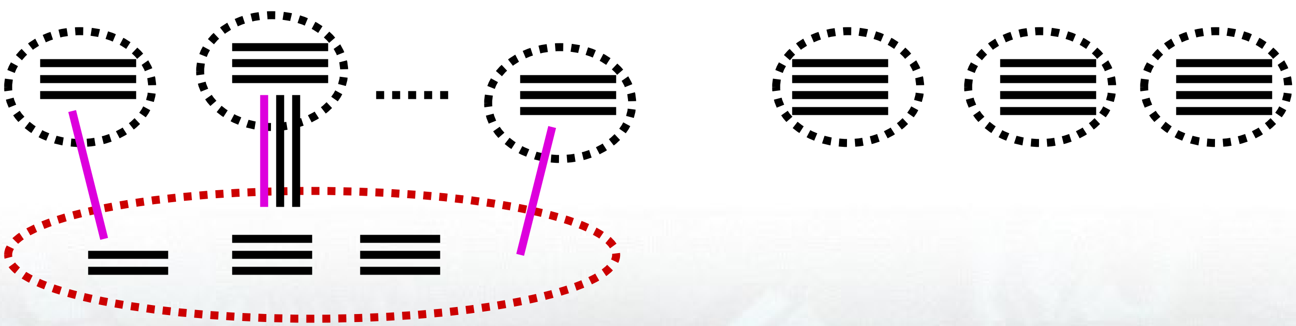
  G有完美匹配 $\Leftrightarrow$

  $\forall V' \subset V(G),\ p_{奇}(G-V') \le |V'|$.

- 说明: $p_{奇}$是奇数阶连通分支数

托特定理证明(⇒)

- 证: (⇒) 设M是G的完美匹配, $V' \subset V$,
  设G_1是G-V'的奇阶连通分支,
  则 $\exists u_1 \in V(G_1)$, $\exists v_1 \in V'$, $(u_1,v_1) \in M$,
  所以 $p_{奇}(G-V') \le |V'|$.



托特定理证明(⇐)

- 证: (⇐) (对G阶数归纳)

由于$\forall V'$, $p_{奇}(G-V')\le|V'|$,

取$V'=\varnothing$, 得G是偶阶,

取$V'=\{u\}$, 得$G-\{u\}$恰有1个奇阶连通分支.

设 $S_0\subset V$ 是使$p_{奇}(G-S_0)=|S_0|=s$的最大集合,

$C_1,C_2,\ldots, C_s$ 是 $G-S_0$ 所有奇阶连通分支,

$D_1,D_2,\ldots, D_t$ 是 $G-S_0$ 所有偶阶连通分支.

托特定理证明(⇐)(1)

- (1) 每个D_i内部有完美匹配.

$\forall S \subseteq V(D_i)$,

$p_{奇}(G-S_0) + p_{奇}(D_i-S)$

$= p_{奇}(G-(S_0 \cup S)) \leq |S_0 \cup S|$

$= |S_0| + |S|$,

所以 $p_{奇}(D_i-S) \leq |S|$.

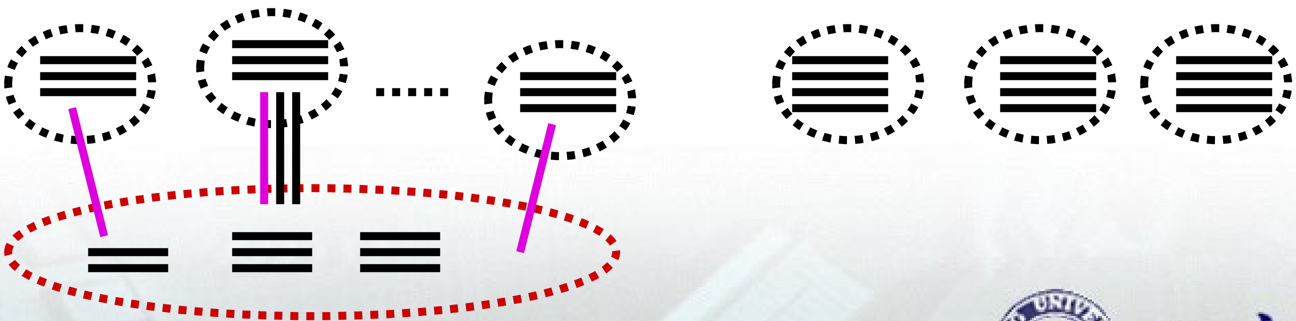
由归纳假设, D_i内部有完美匹配.

托特定理证明($\Leftarrow$)(2)

- (2) 每个C_i-$\{c_i\}$内部有完美匹配, 其中$c_i \in C_i$.
  (反证) 若$\exists S \subseteq V(C_i-\{c_i\})$, $p_{奇}(C_i-\{c_i\}-S)) > |S|$,
  因两端同奇偶, 故 $p_{奇}(C_i-\{c_i\}-S)) \geq |S|+2$.
  $|S_0|+1+|S| = |S_0 \cup \{c_i\} \cup S|$
  $\geq p_{奇}(G-(S_0 \cup \{c_i\} \cup S))$
  $= p_{奇}(G-S_0) - 1 + p_{奇}(C_i-\{c_i\}-S))$
  $\geq |S_0|+1+|S|$, 这与S_0的最大性矛盾.

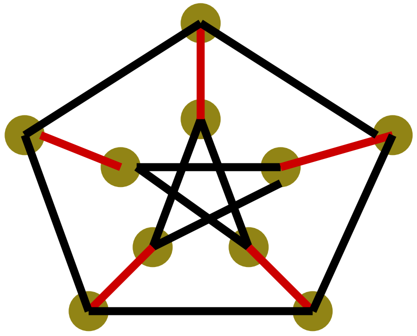
托特定理证明($\Leftarrow$)(3)

- (3)二部图$H=G[\{C_1,C_2,\ldots,C_s\},S_0]$有完美匹配.
  $\forall A\subseteq\{C_1,C_2,\ldots,C_s\}$, 令 $B=\Gamma_H(A)$,
  则 $|A| \le p_{奇}(G-B) \le |B|$,
  即H满足Hall-条件, 所以H有完备(美)匹配.
  G的完美匹配由(3)(2)(1)三部分构成. #



托特定理推论

- 无桥 3-正则图有完美匹配



托特定理推论证明

- 证: 对任意V_1, 设$G-V_1$的奇阶连通分支是G_i,

$i=1,2,\ldots,r$, $|V(G_i)|=n_i$(奇数), $|[V(G_i),V_1]|=m_i$.

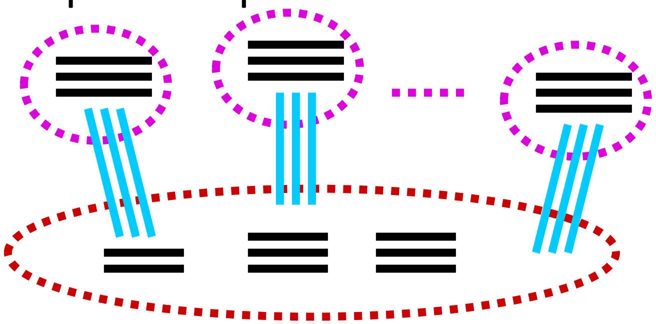
$\Sigma_{v\in V(Gi)} d_G(v) = 3n_i = 2|E(G_i)|+m_i \Rightarrow m_i$是奇数.

无桥 $\Rightarrow m_i \geq 3$.

$p_{奇}(G-V_1) = r$

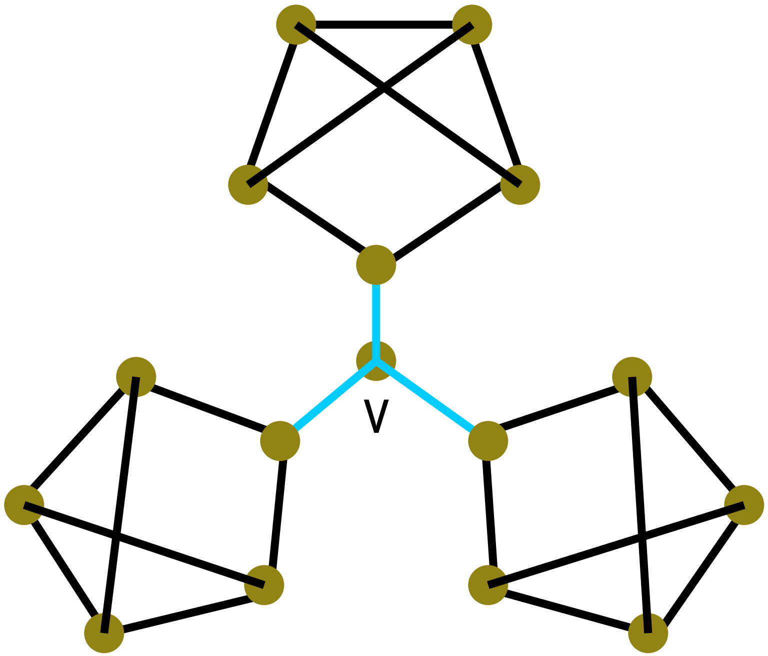
$\leq (\Sigma^r_{i=1} m_i)/3$

$\leq (\Sigma_{v\in V1} d_G(v))/3 = |V_1|$, 再用托特定理. #



无桥条件不能去掉

- 反例:



- $p_{奇}(G-\{v\}) = 3 > |\{v\}| = 1$, 无完美匹配

小结

- 边覆盖，极小（最小）边覆盖(易解)
- 匹配，极大（最大）匹配，完美匹配 (易解)
- 饱和点，非饱和点，交错路径
- $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \nu_0, \alpha_1, \beta_1$之间关系
- 匹配存在的充要条件
  - Berge定理: 有最大匹配 $\Leftrightarrow$ 无可增广路径
  - Tutte定理: 有完美匹配 $\Leftrightarrow$ $\forall V', p_{奇}(G-V')\leq|V'|$