

组合数学

Combinatorial Mathematics

组合存在定理 基本计数公式

递推方程 生成函数

容斥原理 Polya定理

组合数学主要内容

组合
优化

最短路径、最小生成树、网络优化、...
问题描述，建模，算法，

组合
枚举

生成算法

组合设计

组合
计数

容斥原理

Polya定理

递推方程

生成函数

指数生成函数

选取
方案

不定方
程解

非降
路径

拆分
方案

放球
方案

计数定理

计数方法

计数模型

组合
存在

鸽巢原理

Ramsey定理

组合数学的主要技巧

重要的组合思想

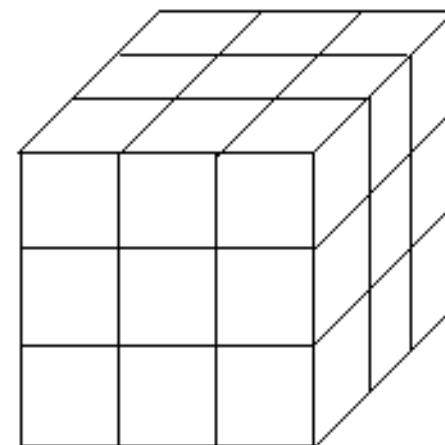
- 一一对应
- 数学归纳法
- 上下界逼近的处理方法

一一对应

例1 $3 \times 3 \times 3$ 的立方体至少需要多少次才能切成27个小立方体？

解：6次

切割 \leftrightarrow 中心立方体的面
次数至少等于面数



例2 n 个选手两人一组比赛决出冠军，需要多少次比赛？

解： $n - 1$ 次， 比赛 \leftrightarrow 淘汰， 比赛次数=淘汰人数

组合计数模型与一一对应

- 计数方法：计数模型与实际问题的对应
- 计数模型：
 - 选取问题
 - 不定方程非负整数解问题
 - 非降路径问题
 - 整数拆分问题
 - 放球问题等等

数学归纳法

- 描述一个与自然数相关的命题 $P(n)$

证明

归纳基础：例如 $P(0)$ 真

归纳步骤：例如 $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

- 第一数学归纳法：

$n=0$ 为真

假设对 n 为真，证对 $n+1$ 为真

- 第二数学归纳法：

$n=0$ 为真

假设对一切小于 n 的 k 为真，证明对 n 为真

数学归纳法的推广

- 证明命题 $P(m, n)$

针对 m, n 两个自然数

任意给定 m (或 n) 对 n (或 m) 归纳

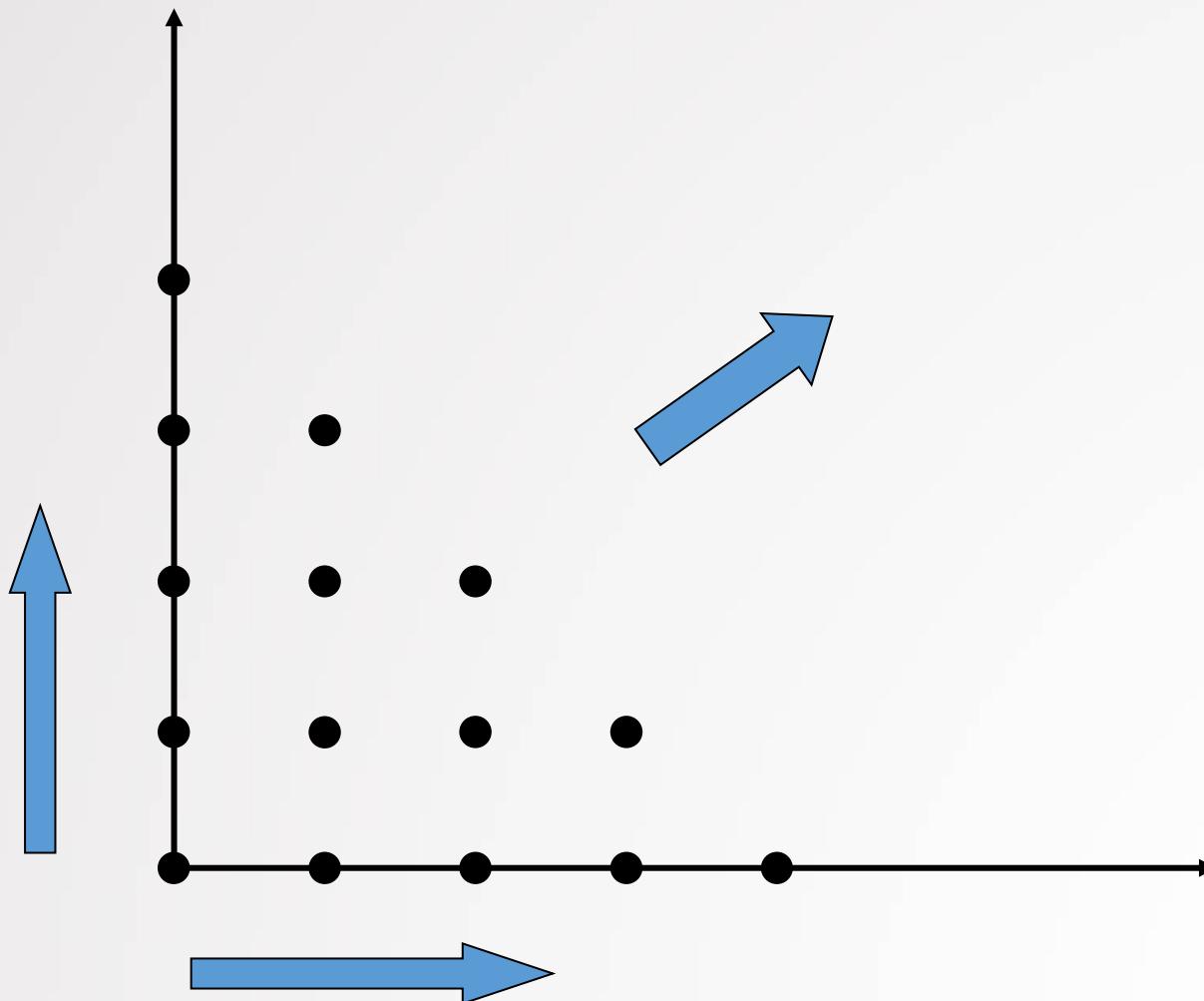
- 多重归纳

归纳基础 $\langle 0, n' \rangle$ 为真, $\langle m', 0 \rangle$ 为真

归纳步骤

假设 $\langle m-1, n \rangle, \langle m, n-1 \rangle$ 为真, 证 $\langle m, n \rangle$ 为真

多重归纳



上下界逼近

确定某个值（或阶）

步骤

证明这个值的上界

证明这个值的下界

如果上界与下界相等，则结束

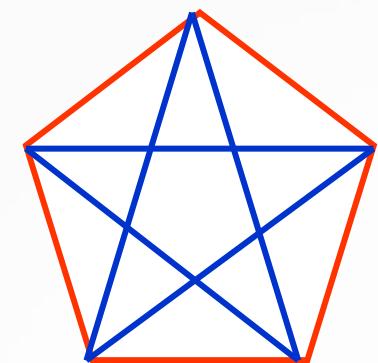
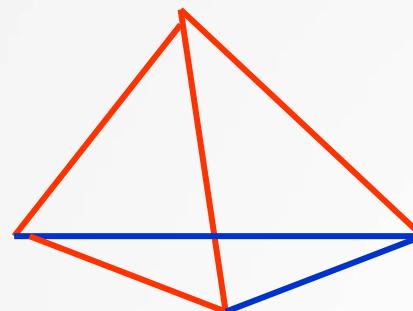
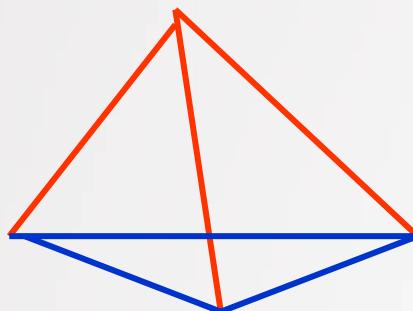
否则改进上界或者下界，使得它们逐渐逼近

实例

用红、蓝两色任意对 K_n 的边涂色， n 至少是多少才能出现一个红色三角形，或一个蓝色的三角形？

证明

- 上界 $n \leq 6$. 某顶点关联的边至少有3条同色



- 下界 $n > 5$. $n=5$ 不可能做到.
- $n=6$.

反例