第十九章 格与布尔代数

- 格的定义与性质
- 子格、格同态与格的直积
- 特殊的格
- 布尔代数

19.1 格的定义和性质

- 格的定义
- 格的基本性质
  - 对偶原理
  - 格中的基本等式与不等式
  - 格中的基本等价条件
  - 格中的算律
- 格的代数定义
- 格中的不等式

格的定义

格的偏序集定义：

$<S,\preccurlyeq>$, S 的任何二元子集都有最大下界、最小上界.

求最大下界、最小上界构成格中的运算$\wedge,\vee$

格$<L,\preccurlyeq>$与导出的代数系统$<L,\wedge,\vee>$的对应关系

格的实例：

n 的正因子格 S_n

幂集格 $P(B)$

子群格 $L(G)$

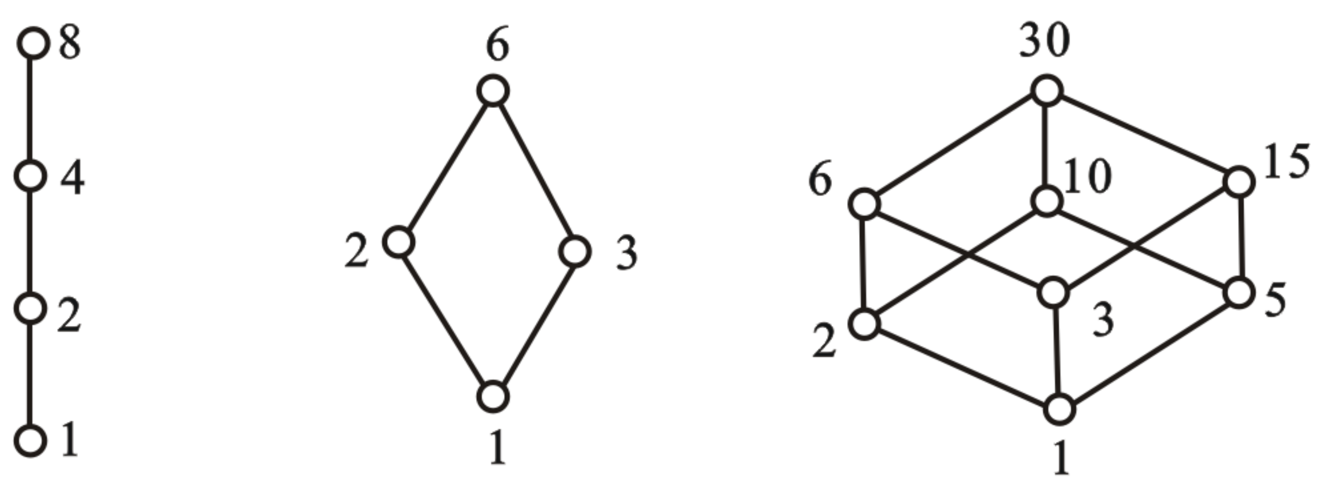
格的实例——正因子格

例1 设n是正整数，S_n 是n的正因子的集合. D为整除关系，则偏序集 $<S_n, D>$ 构成格——正因子格.

$\forall x,y\in S_n$，$x\vee y$ 是 lcm(x,y)，即 x 与 y 的最小公倍数.

$x\wedge y$ 是 gcd(x,y)，即 x 与 y 的最大公约数.

下图给出了格 $<S_8, D>$，$<S_6, D>$ 和 $<S_{30}, D>$



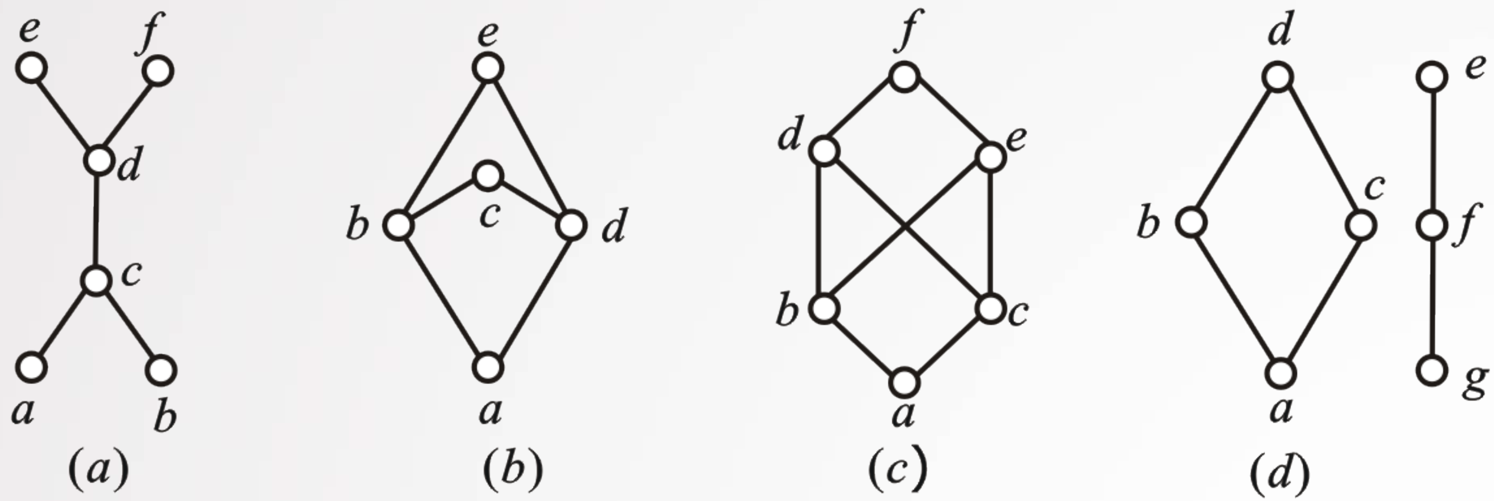
(S_8,D)　　(S_6,D)　　(S_{30},D)

格的实例（续）

例2 判断下列偏序集是否构成格，并说明理由.

(1) <Z, ≤>，其中 Z 是整数集，≤为小于或等于关系.

(2) 偏序集的哈斯图分别在下图给出.



(1) 是格.

(2) 都不是格.

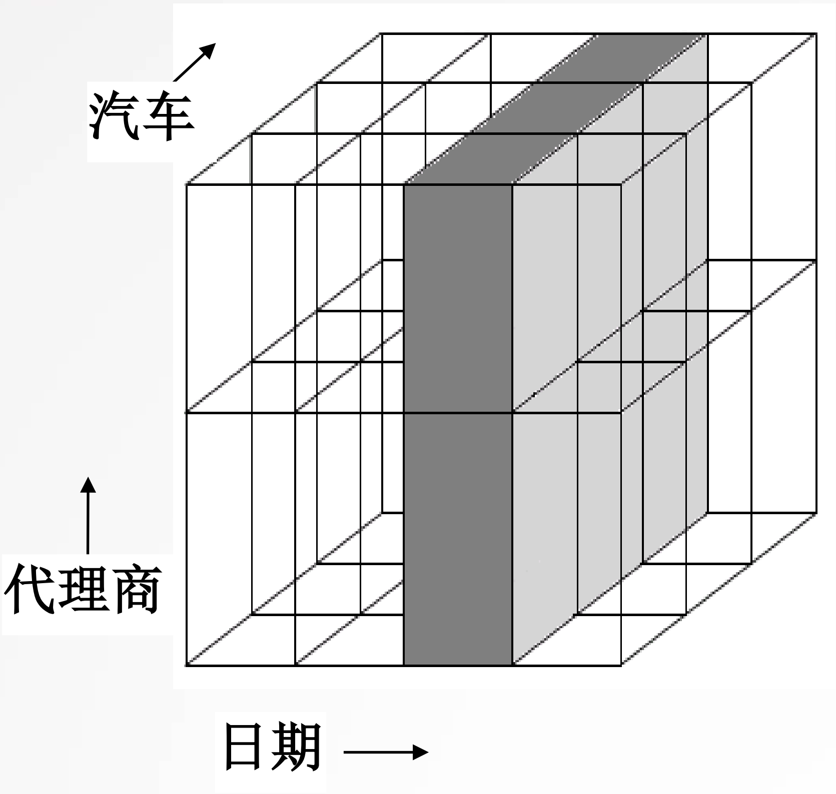
数据仓库的视图格

数据仓库的数据空间可看成多维“立方体”

查询：2005年1月1号后

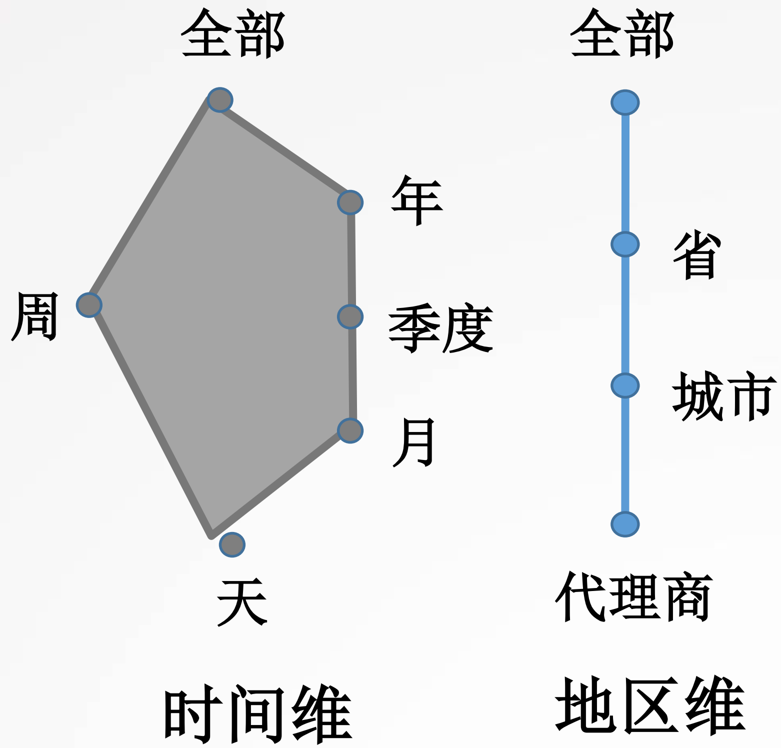
各城市汽车平均销售价格.

```
SELECT city, AVG (prices)
  FROM Sales, Dealers
  WHERE Sales.dealer
   = Dealers.name AND
  Data>='2005-01-01'
  GROUP BY city;
```



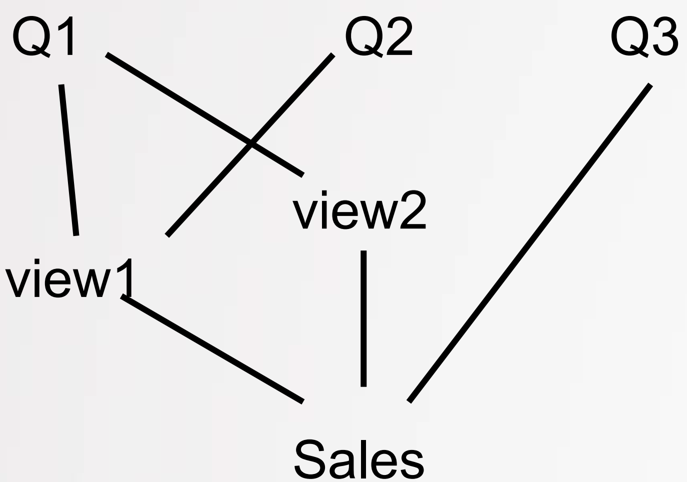
维上的格结构

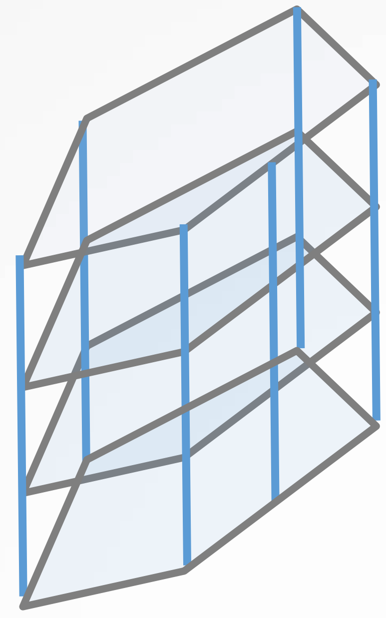
- 建立物化视图，占用较小空间，尽可能满足更多查询. 物化视图的结构——格
- 在联机分析处理（OLAP）中，为了加快查询速度，可以将数据按照维进行聚集
- 每维上的数据构成集合，对它的一种分组就是对这个集合的划分.如果把维上的所有分组的集合记作 *X*，*X* 关于加细关系构成格.



视图格：维格的笛卡儿积

- 在每个维的格基础上，可为数据立方体的所有可能的物化视图定义一个格——视图格.
- 如果V_1和V_2是两个物化视图，$V_1 \preccurlyeq V_2$就意味着：在每一维上V_1对应的划分都是V_2对应划分的加细.
- 上述数据仓库中物化视图构成格





视图格

格的性质——对偶原理

对偶命题：设 P 是由格中元素,$\preccurlyeq$, $\succcurlyeq$, $=$, $\wedge$, $\vee$ 等表示的命题，若将 P 中的 $\preccurlyeq$, $\succcurlyeq$, $\wedge$, $\vee$ 分别替换成 $\succcurlyeq$, $\preccurlyeq$, $\vee$, $\wedge$ 得到的命题称为 P 的对偶命题，记作 P^*.

对偶原理：如果 P 对于一切格为真，则 P^*也对一切格为真.

实例 P: $a \wedge b = b \wedge a$

P^*：$a \vee b = b \vee a$

性质：$(P^*)^* = P$

格的性质（续）

格中的基本不等式和等式

$$\left.\begin{array}{l} a \preccurlyeq a \\ a \preccurlyeq b,\ b \preccurlyeq c \Rightarrow a \preccurlyeq c \end{array}\right\}$$ 自反，传递

$$\left.\begin{array}{l} a \wedge b \preccurlyeq a,\quad a \wedge b \preccurlyeq b \\ a \preccurlyeq a \vee b,\quad b \preccurlyeq a \vee b \end{array}\right\}$$ 下界，上界

$$\left.\begin{array}{l} a \preccurlyeq b,\ a \preccurlyeq c \Rightarrow a \preccurlyeq b \wedge c \\ a \succcurlyeq b,\ a \succcurlyeq c \Rightarrow a \succcurlyeq b \vee c \end{array}\right\}$$ 最大下界，最小上界

$$a \preccurlyeq b,\ b \preccurlyeq a \Rightarrow a = b$$ 反对称性

格的性质（续）

格中的基本等价条件

$$a \preccurlyeq b \Leftrightarrow a \wedge b = a \Leftrightarrow a \vee b = b$$

①　②　③

证：① ⇒ ②

$$\left.\begin{array}{l} a \preccurlyeq a,\, a \preccurlyeq b \Rightarrow a \preccurlyeq a \wedge b \\ a \wedge b \preccurlyeq a \end{array}\right\} \Rightarrow a \wedge b = a$$

② ⇒ ③

$$\left.\begin{array}{l} b \preccurlyeq a \vee b \\ a = a \wedge b \preccurlyeq b,\, b \preccurlyeq b \Rightarrow a \vee b \preccurlyeq b \end{array}\right\} \Rightarrow a \vee b = b$$

③ ⇒ ①

$$a \preccurlyeq a \vee b = b$$

格的性质（续）

格中交换律、结合律、幂等律、吸收律

证 (1) $a \wedge b$ 是 $\{a,b\}$ 的最大下界，

$b \wedge a$ 是 $\{b,a\}$ 的最大下界，

$\{a,b\}=\{b,a\} \Rightarrow a \wedge b = b \wedge a$

(2) $(a \wedge b) \wedge c \preccurlyeq a \wedge b \preccurlyeq a$

$(a \wedge b) \wedge c \preccurlyeq a \wedge b \preccurlyeq b$

$(a \wedge b) \wedge c \preccurlyeq c$

$(a \wedge b) \wedge c \preccurlyeq b \wedge c$

$(a \wedge b) \wedge c \preccurlyeq a \wedge (b \wedge c)$

同理，$a \wedge (b \wedge c) \preccurlyeq (a \wedge b) \wedge c$

所以，$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$

格的代数定义

引理 $<S, *, \circ>$是具有两个二元运算的代数系统. 如果 $*, \circ$ 运算满足交换、结合、吸收律，

则 (1) $*, \circ$ 满足幂等律

(2) $a * b = a \Leftrightarrow a \circ b = b$

证 (1) $a * a = a * (a \circ (a * a)) = a$

同理， $a \circ a = a$

(2) "$\Leftarrow$" $a * b = a * (a \circ b) = a$

"$\Rightarrow$" $a \circ b = (a * b) \circ b = b$

格的代数定义（续）

定理 设 $<S,*,\circ>$ 是具有两个二元运算的代数系统，

若 $*$ 和 $\circ$ 运算满足交换、结合、吸收律，

则可以适当定义 S 上偏序 $\preccurlyeq$，使得 $<S,\preccurlyeq>$ 构成格，

且 $<S,\preccurlyeq>$ 导出的代数系统就是 $<S,*,\circ>$.

证明思路

利用运算 $\circ$ 或 $*$ 定义 S 上的二元关系 R

证明 R 为 S 上的偏序

证明对于 S 中任意两个元素 x, y

$$x \vee y = x \circ y,\ x \wedge y = x * y$$

$< S, \wedge, \vee >$ 构成格

定理的证明

证 (1) 定义二元关系 R, $aRb \Leftrightarrow a \circ b = b$,

(2) R 为偏序:

$$a \circ a = a \Rightarrow aRa$$

$$aRb, bRa \Rightarrow a \circ b = b, b \circ a = a \Rightarrow a = b$$

$$aRb, bRc \Rightarrow a \circ b = b, b \circ c = c$$

$$\Rightarrow a \circ c = a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c = b \circ c = c$$

将 R 记作$\preccurlyeq$,

定理的证明（续）

(3) $a \circ b$ 为 $\{a,b\}$ 的上界

$$a \circ (a \circ b) = (a \circ a) \circ b = a \circ b \quad \Rightarrow \quad a \preccurlyeq a \circ b$$

$$b \circ (a \circ b) = a \circ (b \circ b) = a \circ b \qquad b \preccurlyeq a \circ b$$

$a \circ b$ 为 $\{a,b\}$ 的最小上界, 假设 c 为上界

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) = a \circ c = c \quad \Rightarrow \quad a \circ b \preccurlyeq c$$

同理，$a * b$ 是 $\{a,b\}$ 的最大下界

格的代数定义

等价定义

设 $<L,\wedge,\vee>$ 是具有两个二元运算的代数系统，

如果 $\wedge$, $\vee$ 满足交换、结合、吸收律，则称 $<L,\wedge,\vee>$ 是格.

实例：$<S_n, \gcd, \mathrm{lcm}>$

$\forall x, y \in S_n$, $\gcd(x, y) = \gcd(y, x)$, $\mathrm{lcm}(x, y) = \mathrm{lcm}(y, x)$

$\gcd(x, \gcd(y, z)) = \gcd(\gcd(x, y), z)$

$\mathrm{lcm}(x, \mathrm{lcm}(y, z)) = \mathrm{lcm}(\mathrm{lcm}(x, y), z)$

$\gcd(x, \mathrm{lcm}(x, y)) = x$, $\mathrm{lcm}(x, \gcd(x, y)) = x$

$x \mid y \Leftrightarrow \mathrm{lcm}(x, y) = y$，$<S_n, |>$ 与 $<S_n, \gcd, \mathrm{lcm}>$是同一个格

格的性质（续）

格的不等式

（1）保序不等式

$$a \preccurlyeq b, c \preccurlyeq d \Rightarrow a \wedge c \preccurlyeq b \wedge d,\ \ a \vee c \preccurlyeq b \vee d$$

（2）分配不等式

$$a \vee (b \wedge c) \preccurlyeq (a \vee b) \wedge (a \vee c),$$

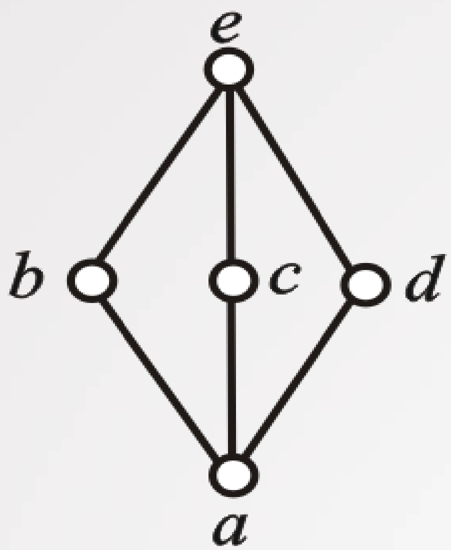
$$a \wedge (b \vee c) \succcurlyeq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

（3）模不等式

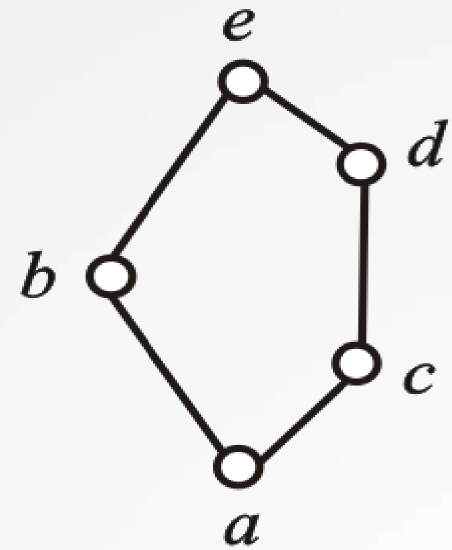
$$a \preccurlyeq b \Leftrightarrow a \vee (c \wedge b) \preccurlyeq (a \vee c) \wedge b$$

思考：如何证明以上不等式？

不满足分配律的格



钻石格



五角格

钻石格： $b \vee (c \wedge d) = b \vee a = b$

$(b \vee c) \wedge (b \vee d) = e \wedge e = e$

思考：指出五角格不满足分配律的元素

钻石格是模格，五角格不是

19.2 子格、格同态格的直积

- 子格
  - 子格定义
  - 子格判别
- 格的同态与同构
  - 格同态定义
  - 格同态的性质
  - 完备格
- 格的直积

格的子格

L的子格：L的非空子集 S，且 S 关于 L 中$\wedge$ 和$\vee$ 运算封闭.

注意：子格元素在原格中求最大下界, 最小上界.

实例：子群格 $L(G)$是格，但一定不是 $P(G)$ 的子格.
例如 Klein 四元群 $G = \{e, a, b, c\}$,

$$L(G) = \{ \langle e\rangle,\langle a\rangle,\langle b\rangle,\langle c\rangle,G \}$$

$$P(G) = \{ \varnothing,\langle e\rangle,\{a\},\{b\},\{c\},\langle a\rangle,\langle b\rangle,\langle c\rangle,\{a,b\},$$
$$\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\},\{a,b,e\},\{a,c,e\},\{b,c,e\},G \}$$

格的同态

定义 设 L_1 和 L_2 是格，$f: L_1 \to L_2$, $\forall x, y \in L_1$，有

$$f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y),\ f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$$

则称 f 为 L_1 到 L_2 的同态.

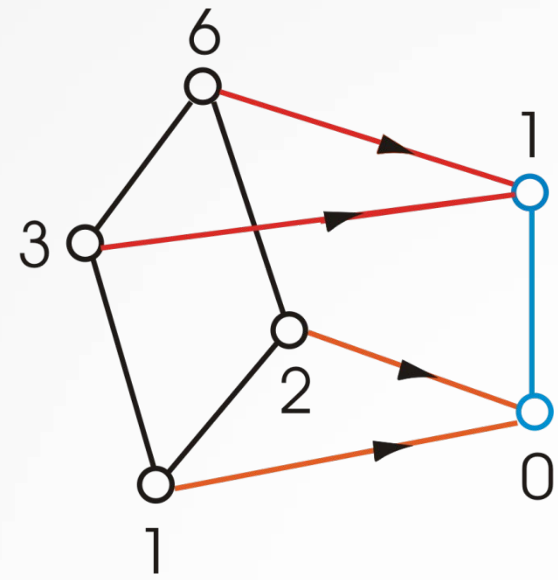
实例：$L_1 = <\{1,2,3,6\}, |>$,

$L_2 = <\{0,1\}, \le>$

$f(1) = f(2) = 0$,

$f(3) = f(6) = 1$

f 为 L_1 到 L_2 的同态.



格同态的性质

格同态具有保序性

定理1 f是格 L_1 到 L_2 的同态，则 $\forall a, b\in L_1$,

$$a \preccurlyeq b \Rightarrow f(a) \preccurlyeq f(b)$$

证： $a \preccurlyeq b \Rightarrow a \wedge b = a$

$$\Rightarrow f(a \wedge b) = f(a)$$

$$\Rightarrow f(a) \wedge f(b) = f(a)$$

$$\Rightarrow f(a) \preccurlyeq f(b)$$

注意：$f(a) \preccurlyeq f(b)$不一定推出$a \preccurlyeq b$. 思考反例

格同态的性质（续）

定理2 f 为双射，f 为 L_1 到 L_2 的同构当且仅当

$$\forall a, b \in L_1,\ a \preccurlyeq b \Leftrightarrow f(a) \preccurlyeq f(b)$$

证明同构的思路：

(1) 由保序性证明 $\underline{f(a) \vee f(b) \preccurlyeq f(a \vee b)}$

(2) 由满射性存在 d 使得 $f(a) \vee f(b) = f(d)$

由 $f(a) \preccurlyeq f(d)$ 推出 $a \preccurlyeq d$, 同理 $b \preccurlyeq d$

(3) $a \vee b \preccurlyeq d$ 推出 $\underline{f(a \vee b) \preccurlyeq f(a) \vee f(b)}$

(4) 由 (1) 和 (3) 得 $f(a) \vee f(b) = f(a \vee b)$

(5) 同理 $f(a) \wedge f(b) = f(a \wedge b)$

完备格

定义 设 L是格，若对 L的任何子集 S，S 的最大下界$\wedge S$, 最小上界 $\vee S$ 存在，则 L 是完备格.

注意：S 可以是空集

x 是 $\varnothing$ 的下界 $\Leftrightarrow \forall a\,(a\in\varnothing \rightarrow x \preccurlyeq a)$

x 是 $\varnothing$ 的上界 $\Leftrightarrow \forall a\,(a\in\varnothing \rightarrow a \preccurlyeq x)$

前件为假，L 中任何元素都是 $\varnothing$ 的上界和下界，

取 L 最大元为 $\wedge\varnothing$，最小元为 $\vee\varnothing$

条件：L为偏序集，任意子集 $S \subseteq L$, $\vee S$ (或 $\wedge S$) 存在.

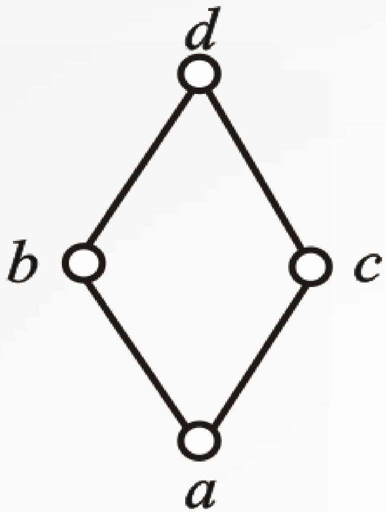
实例：有限格、幂集格、格的理想格完备

格的理想

I 是格 L 的非空子集，如果满足下述条件则称为理想.

$$\forall a,b \in I,\ a \vee b \in I,$$

$$\forall a \in I,\ \forall x \in L,\ x \preccurlyeq a \Rightarrow x \in I$$



子格： $\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},$

$\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,d\},\{c,d\},$

$\{a,b,d\},\{a,c,d\},\{a,b,c,d\}$

理想： $\{a\},$

$\{a,b\},\{a,c\},$

$\{a,b,c,d\}$

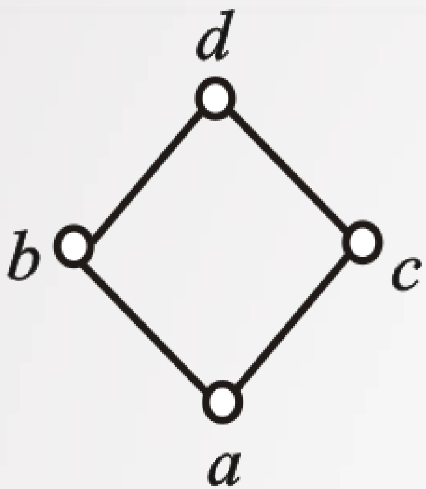
注意：理想是子格，但是子格不一定是理想.

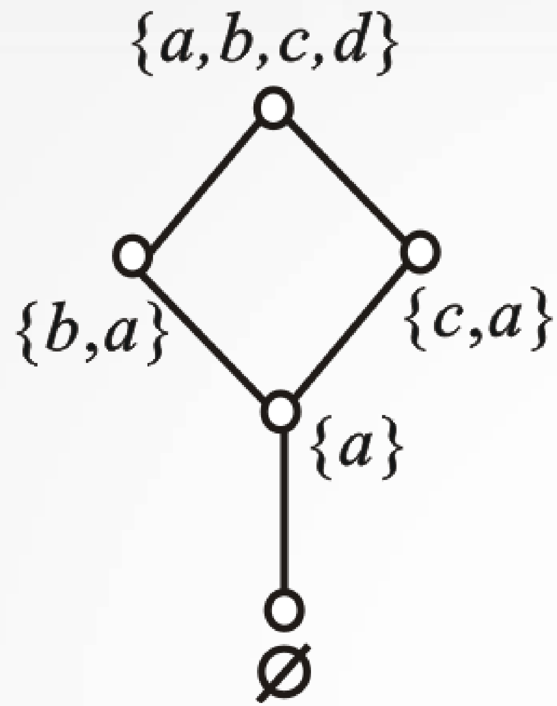
格对完备格的可嵌入性

理想格 $I(L)$：L 的所有理想的集合关于包含关系构成格

$I_0(L)=I(L)\cup\{\varnothing\}$，理想格不一定完备，但是 $I_0(L)$是完备格.

任何格 L 都可嵌入完备格 $I_0(L)$，即与 $I_0(L)$的子格同构.





思考：格 $<\mathbb{Z},\leq>$ 如何嵌入？