单元10.3 对偶图、外平面图

第二编 图论　第十一章 平面图

11.4 平面图的对偶图、11.5 外平面图

内容提要

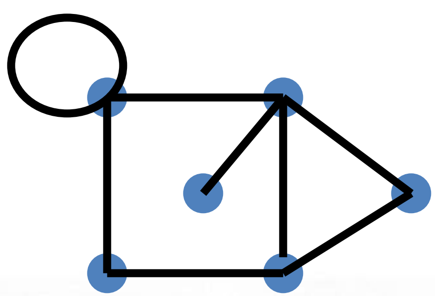
第十一章　平面图

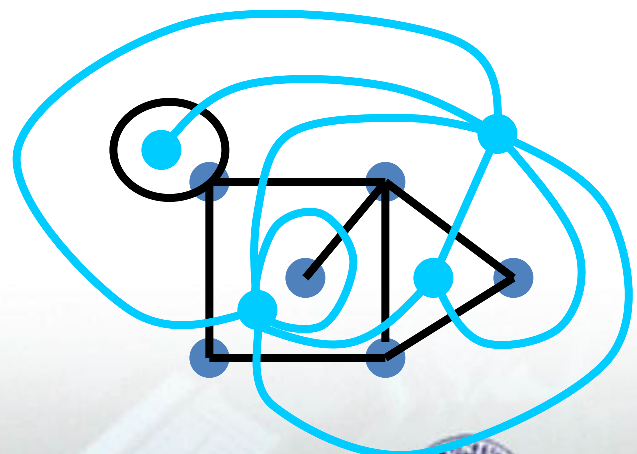
11.4 平面图的对偶图

11.5 外平面图

对偶图(dual graph)

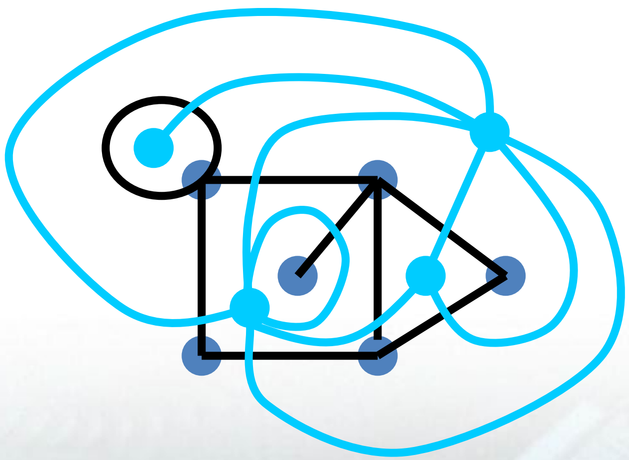
- 平面图G=<V,E>，G的面集合是R
- 对偶图G*=<V*,E*>，G*的面集合是R*，则V*与R, E*与E, 都是一一对应的





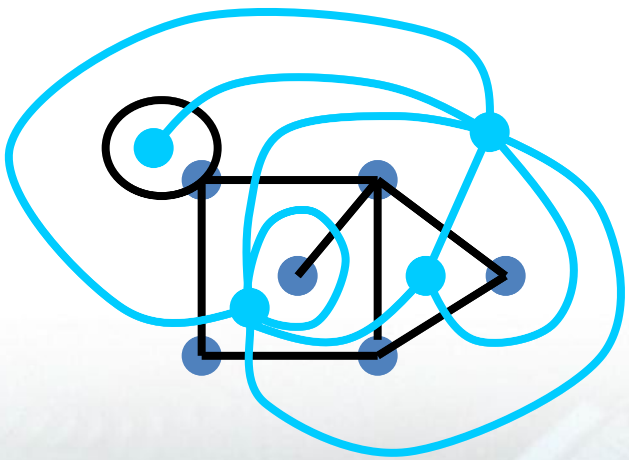
对偶图的性质

- 对偶图是**连通平面图**
- **环**与**桥**互相对偶
- **平行边**对偶于2个面之间的多条边界



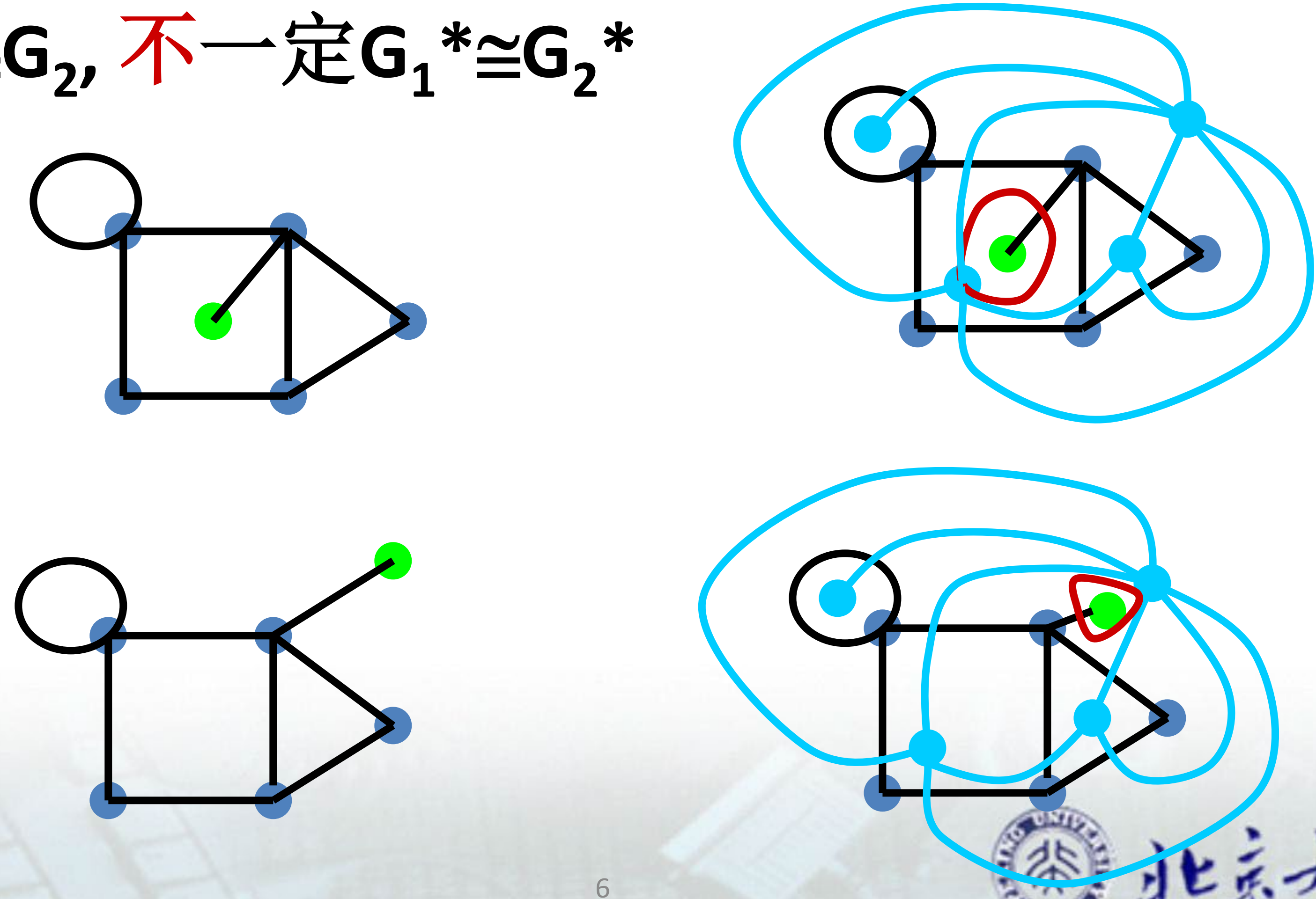
对偶图的性质

- $n^*=r,\ m^*=m$
- $r^*=n-p+1$ $(n-m+r=1+p,\ n^*-m^*+r^*=2)$
- $d_{G^*}(v_i^*)=deg_G(R_i)$



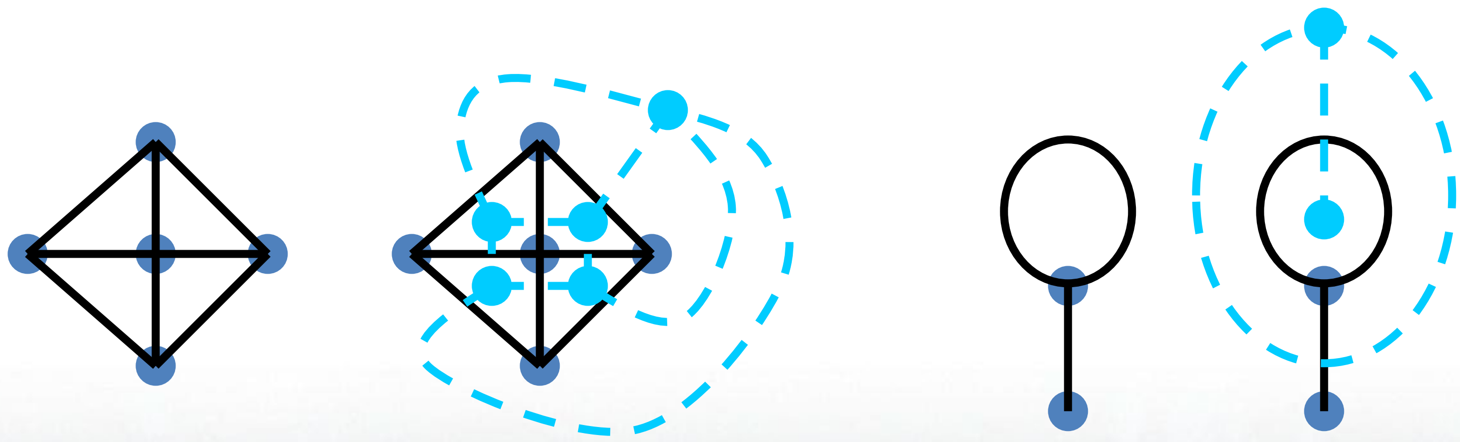
对偶图的性质

- $G_1 \cong G_2$, 不一定$G_1^* \cong G_2^*$



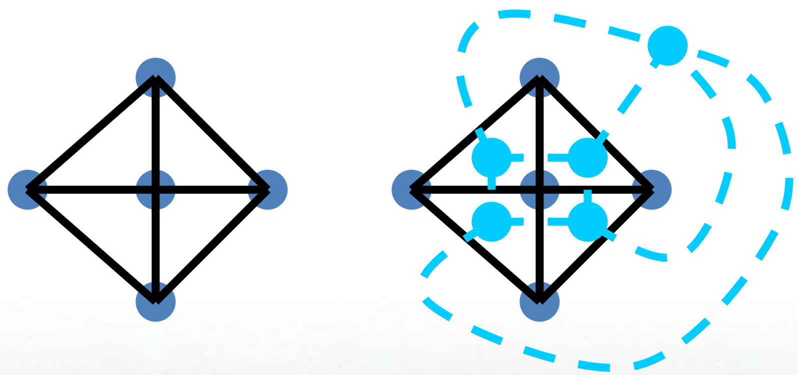
对偶图的性质

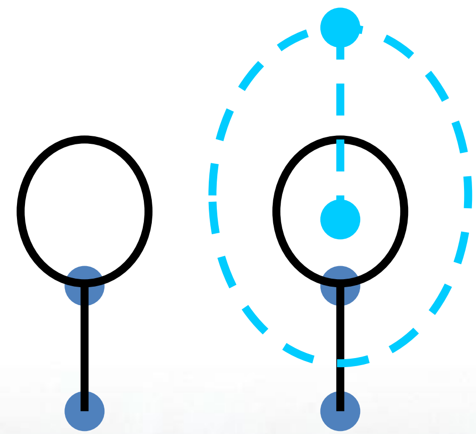
- G连通 ⇔ G≅G**(要求G*不改变形状)



自对偶(self-dual)图

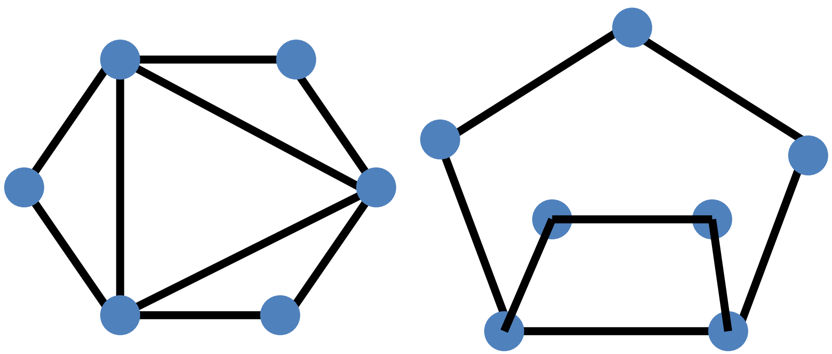
- 自对偶图: $G \cong G^*$.
- $n \geq 4$时, 轮图W_n是自对偶图

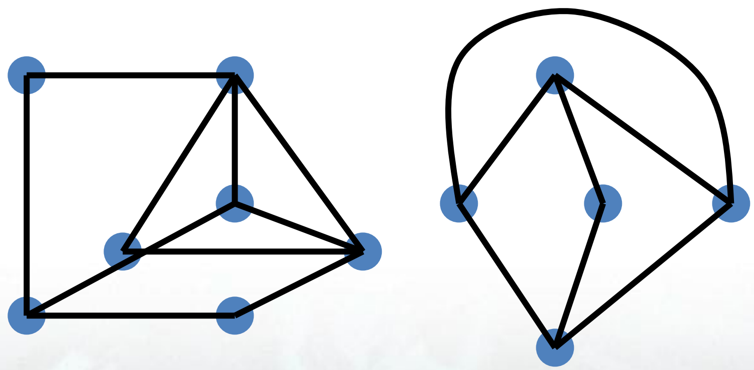




外(可)平面图

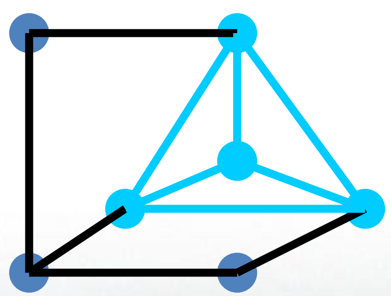
- 平面图的所有顶点可都在一个面的边界上

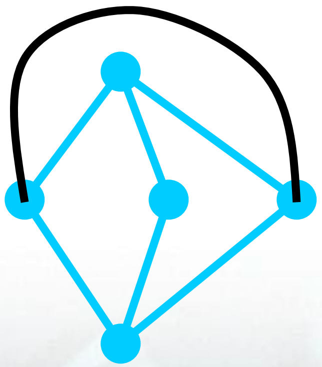




外平面图充要条件

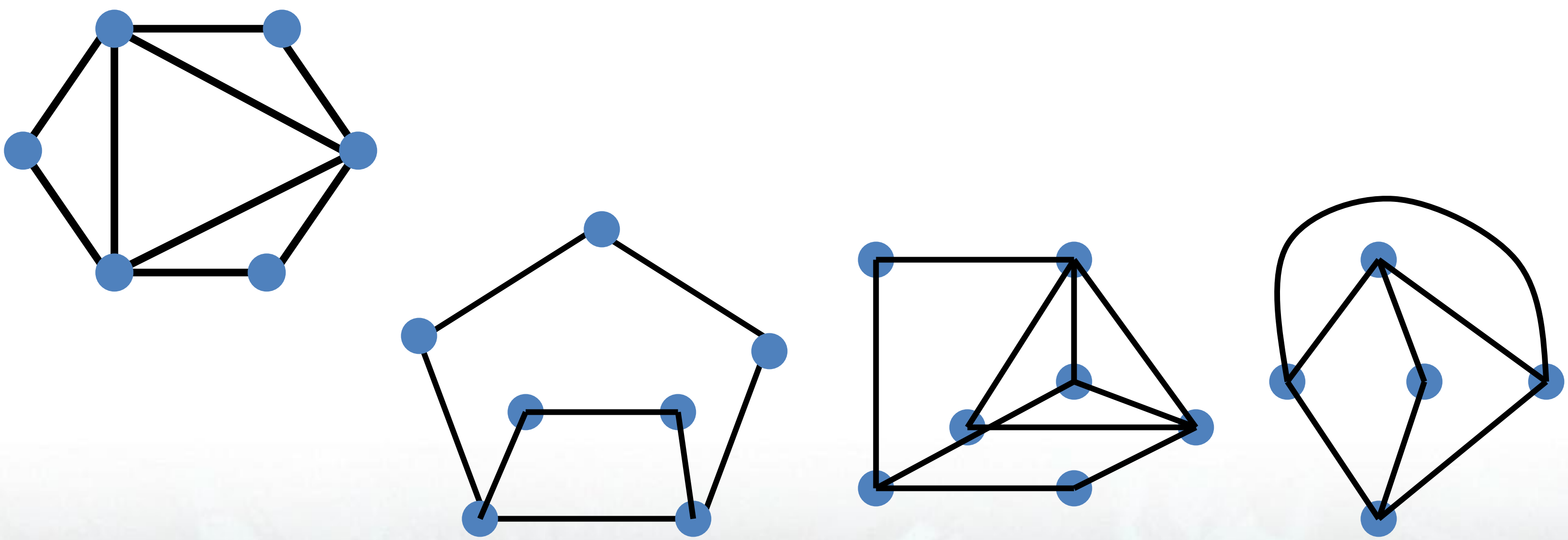
- G是外平面图 ⇔ G不含与K_4或$K_{2,3}$同胚子图 #
- (G是平面图 ⇔ G不含与K_5或$K_{3,3}$同胚子图)





极大外平面图

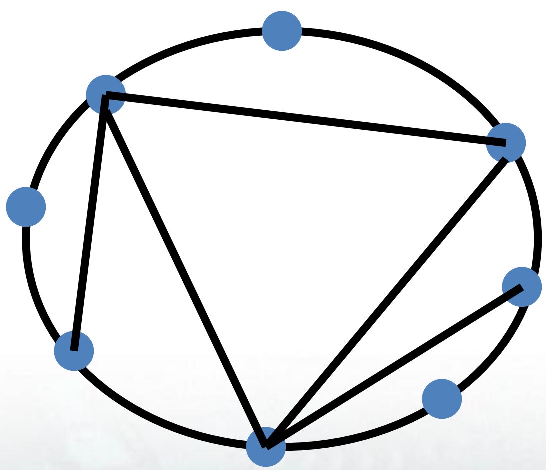
- 本身是简单外平面图, 但是在任意不相邻顶点之间加边就不是外平面图了

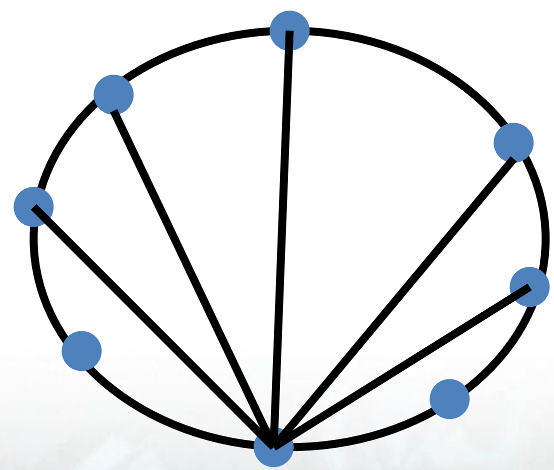


极大外平面图充要条件

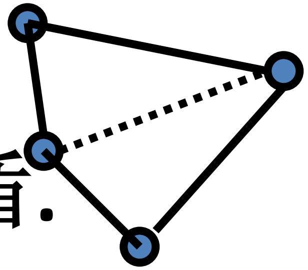
- 设G是n(≥3)阶外平面图，所有顶点在外部面边界上, 则 G 是极大外平面图 ⇔

G外部面边界是**n-圈**, 所有内部面边界是**3-圈**.





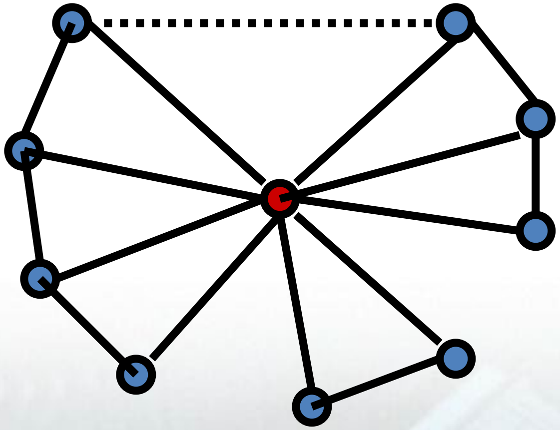
定理11.19证明(⇒)



- (⇒) 反证, 分情形讨论.

(1)有4次以上内部面 ⇒ 可加边, 矛盾.

(2)外部面边界不是圈 ⇒ 有割点 ⇒ 可加边, 矛盾.

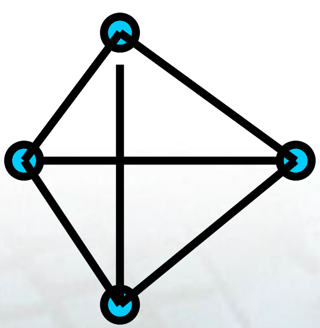
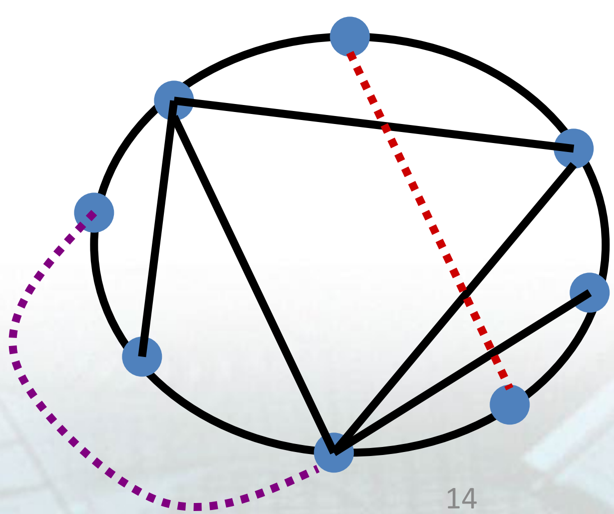
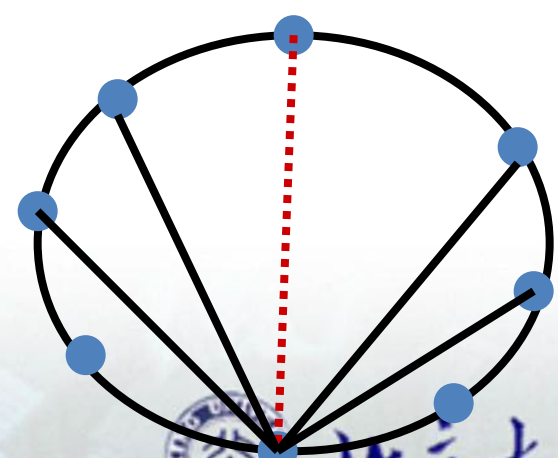


定理11.19证明(⇐)

- (⇐) 分情形讨论

(1) 只有一个内部面 ⇒ K_3 ⇒ 是极大外平面图

(2) 至少有两个内部面. 加边e=(u,v) ⇒ 其余顶点分两侧 ⇒ 有边连接两侧顶点 ⇒ 子图同胚K_4. #

极大外平面图必要条件

- n(≥3)阶极大外平面图G所有顶点在外部面边界上

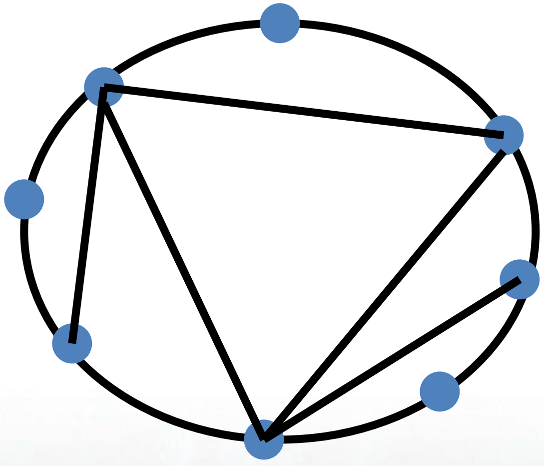
⇒ G有n-2个内部面

⇒ m=2n-3

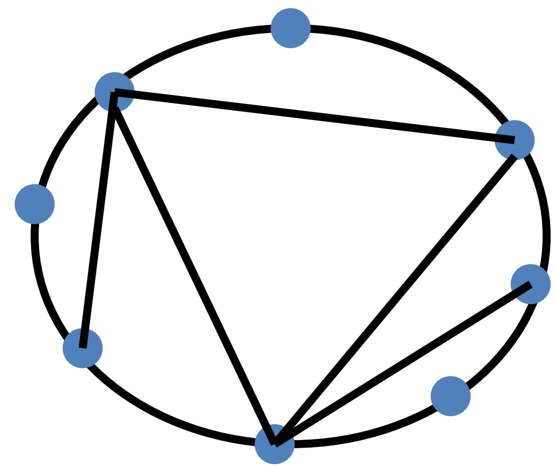
⇒ 至少有3个顶点度数≤3

⇒ 至少有2个顶点度数=2

⇒ κ=2.



定理11.20-21证明(要点)



- n(≥3)阶极大外平面图G

  所有顶点在外部面边界上

⇒ G有n-2个内部面 (归纳法)

⇒ m=2n-3 (面的握手定理)

⇒ 至少3个顶点度≤3 (m=2n-3,握手定理)

⇒ 至少2个顶点度=2 (内部面提供0,1,2边界)

⇒ κ=2 (K_3; 圈⇒无割点; 2度点⇒有2点割集)

小结

- 对偶图,自对偶图
- 外平面图, 极大外平面图