22.4 生成函数的应用

- 求解递推方程
- 计数多重集的 r 组合数
- 不定方程的解
- 整数拆分

求解递推方程

例 1　$a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 0$，　$a_0=1, a_1=-2$

$$
\begin{array}{rl}
G(x) = & a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots \\
-5x\,G(x) = & -5a_0x - 5a_1x^2 - 5a_2x^3 - \ldots \\
6x^2\,G(x) = & +6a_0x^2 + 6a_1x^3 + \ldots \\
\hline
(1-5x+6x^2)G(x) = & a_0 + (a_1 - 5a_0)x
\end{array}
$$

$$G(x) = \frac{1-7x}{1-5x+6x^2} = \frac{5}{1-2x} - \frac{4}{1-3x}$$

$$= 5\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n - 4\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$$

$$a_n = 5 \cdot 2^n - 4 \cdot 3^n$$

求解递推方程(续)

例2
$$\begin{cases} h_n = \sum_{k=1}^{n-1} h_k h_{n-k}, & n \geq 2 \\ h_1 = 1 \end{cases}$$

解：设$\{h_n\}$的生成函数为 $H(x) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n x^n$

$$H^2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k x^k \bullet \sum_{l=1}^{\infty} h_l x^l$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} x^n \sum_{k=1}^{n-1} h_k h_{n-k} = \sum_{n=2}^{\infty} h_n x^n$$

$$= H(x) - h_1 x = H(x) - x$$

求解递推方程(续)

$$H^2(x) - H(x) + x = 0,$$

$$H(x) = \frac{1-(1-4x)^{\frac{1}{2}}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1-4x)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n2^{2n-1}} \binom{2n-2}{n-1} (-4x)^n]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n2^{2n}} \binom{2n-2}{n-1} (-1)^n 2^{2n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} x^n$$

$$h_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$$ 称为Catalan数

应用：搜索规模的估计

矩阵乘法： 设$A_1, A_2, \ldots, A_n$为矩阵序列，A_i为 $P_{i-1}\times P_i$ 阶矩阵，$i = 1,2,\ldots,n$. 确定乘法顺序使得元素相乘的总次数最少.

输入：向量$P = <P_0, P_1, \ldots, P_n>$

实例： $P = <10, 100, 5, 50>$

A_1: 10 × 100, A_2: 100 × 5, A_3: 5 × 50,

$(A_1 A_2)A_3$: $10 \times 100 \times 5 + 10 \times 5 \times 50 = 7500$

$A_1(A_2 A_3)$: $10 \times 100 \times 50 + 100 \times 5 \times 50 = 75000$

一般算法：n-1次运算加括号方法有 $\frac{1}{n}\binom{2n-1}{n-1}$ 种，

Stirling公式 $n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1+\Theta\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

方法数 $W(n) = \Omega\left(\frac{1}{n}\frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!}\right) = \Omega(2^{2n}/n^{\frac{3}{2}})$

多重集的 r 组合数

$S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2,\ldots, n_k\cdot a_k\}$的 r 组合数就是不定方程

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = r$$

$$x_i \le n_i$$

的非负整数解的个数

生成函数

$$G(y)=(1+y+\ldots+y^{n_1})(1+y+\ldots+y^{n_2})\ldots(1+y+\ldots+y^{n_k})$$

的 y^r 的系数

多重集的 r 组合数(续)

例 3　$S=\{3\cdot a, 4\cdot b, 5\cdot c\}$的 10 组合数

解：生成函数 $G(y)$

$= (1+y+y^2+y^3)(1+y+y^2+y^3+y^4)(1+y+y^2+y^3+y^4+y^5)$

$= (1+2y+3y^2+4y^3+4y^4+3y^5+2y^6+y^7)(1+y+y^2+y^3+y^4+y^5)$

$= (1 + \ldots +3y^{10}+2y^{10}+y^{10} + \ldots)$

$N = 6$

$\{a,a,a,b,b,b,b,c,c,c\}$, $\{a,a,a,b,b,b,c,c,c,c\}$,

$\{a,a,a,b,b,c,c,c,c,c\}$, $\{a,a,b,b,b,b,c,c,c,c\}$,

$\{a,a,b,b,b,c,c,c,c,c\}$, $\{a,b,b,b,b,c,c,c,c,c\}$

不定方程解的个数

基本模型

$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = r$

x_i 为自然数

$$G(y) = (1 + y + \ldots)^k = \frac{1}{(1-y)^k}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-k)(-k-1)\ldots(-k-r+1)}{r!}(-y)^r$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r k(k+1)\ldots(k+r-1)}{r!}(-1)^r y^r = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{k+r-1}{r} y^r$$

$$N = \binom{k+r-1}{r}$$

不定方程解的个数(续)

带限制条件

$x_1 + x_2 + \dots + x_k = r$， $l_i \le x_i \le n_i$

生成函数

$$G(y) = (y^{l_1} + y^{l_1+1} + \dots + y^{n_1})(y^{l_2} + y^{l_2+1} + \dots + y^{n_2})$$
$$\dots (y^{l_n} + y^{l_n+1} + \dots + y^{n_k})$$

带系数

$p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_kx_k = r$， $x_i \in N$

生成函数

$$G(y) = (1 + y^{p_1} + y^{2p_1} + \dots)(1 + y^{p_2} + y^{2p_2} + \dots)$$
$$\dots (1 + y^{p_k} + y^{2p_k} + \dots)$$

不定方程解的个数(续)

例 4 1 克砝码 2 个，2 克砝码 1 个，4 克砝码 2 个，问能称出哪些重量，方案有多少？

解： $x_1 + 2x_2 + 4x_3 = r$

$0 \le x_1 \le 2,\quad 0 \le x_2 \le 1,\quad 0 \le x_3 \le 2$

$G(y) = (1+y+y^2)(1+y^2)(1+y^4+y^8)$

$= 1+y+2y^2+y^3+2y^4+y^5+2y^6+y^7+2y^8+y^9+2y^{10}+y^{11}+y^{12}$

重量	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
方案	1	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	1

不定方程解的个数(续)

如果重物放右边，允许砝码放在天平两边（同种砝码放一侧），则

$$G(y)=(y^{-2}+y^{-1}+1+y+y^{2})(y^{-2}+1+y^{2})(y^{-8}+y^{-4}+1+y^{4}+y^{8})$$

$$=5+3y+4y^{2}+3y^{3}+5y^{4}+3y^{5}+4y^{6}+3y^{7}+4y^{8}+2y^{9}+2y^{10}+y^{11}+y^{12}$$

称 0 克： | 　 1,1 | 2 　 1,1,2 | 4

4 | 1,1,2 　 2 | 1,1

称 1 克： 1 | 1 　 2 | 1,1 　 4 | 1,2,1

称 2 克： 1,1 | 2 　 2 | 2 　 4 | 1,1,2 　 4 | 2,2

正整数的拆分

- 拆分的定义与分类
- 无序拆分
- 有序拆分

拆分的定义与分类

	有序	无序
不重复	4 = 4 4 = 1+3 4 = 3+1	4 = 4 4 = 1+3
重复	4 = 4 4 = 1+3 4 = 3+1 4 = 2+2 4 = 2+1+1 4 = 1+2+1 4 = 1+1+2 4 = 1+1+1+1	4 = 4 4 = 1+3 4 = 2+2 4 = 2+1+1 4 = 1+1+1+1

无序拆分

基本模型：

将 N 无序拆分成正整数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = N$$

不允许重复 $G(y) = (1 + y^{a_1})(1 + y^{a_2})\ldots(1 + y^{a_n})$

允许重复

$$G(y) = (1 + y^{a_1} + y^{2a_1} + \ldots)(1 + y^{a_2} + y^{2a_2} + \ldots)$$

$$\ldots(1 + y^{a_n} + y^{2a_n} + \ldots)$$

$$= \frac{1}{(1 - y^{a_1})(1 - y^{a_2})\ldots(1 - y^{a_n})}$$

实例

例 5 证明任何正整数都可以唯一表示成 2 进制数.

对应于将任何正整数 N 拆分成 2 的幂,

$$2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \ldots,$$

且不允许重复.

$$G(y) = (1+y)(1+y^2)(1+y^4)(1+y^8)\ldots$$

$$= \frac{1-y^2}{1-y}\frac{1-y^4}{1-y^2}\frac{1-y^8}{1-y^4}\ldots$$

$$= \frac{1}{1-y} = \sum_{n=0}^{\infty} y^n$$

对于所有的 n, $a_n = 1$，这就证明唯一的表法.

有限制条件的无序拆分

将N无序拆分成正整数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = N$$

限制条件：$l_i \le x_i \le t_i$,

转变为方程非负整数解的问题

有限制条件的无序拆分

例 6　给定 r,求 N 允许重复无序拆分成 k 个数（$k\le r$）的方法数

解　N 允许重复无序拆分成 k 个数（$k\le r$）的方案

$\Leftrightarrow$ N 允许重复无序拆分成正整数 k（$k\le r$）的方案

做下述 Ferrers 图

将图以 $y=x$ 对角线翻转 180 度,

得到共轭的 Ferrers 图,

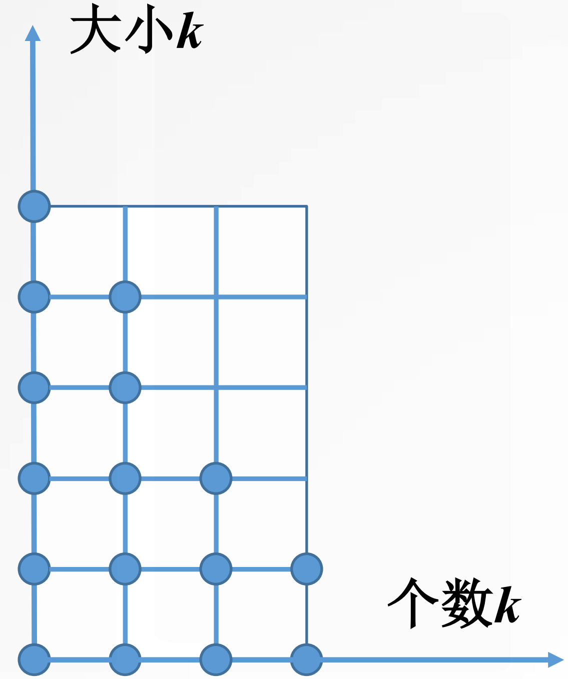
$$16 = 6+5+3+2 \quad (k \le 4)$$

对应每个数不超过 4 的拆分.

$$16 = 4+4+3+2+2+1$$

这种拆分数的生成函数为

$$G(y) = \frac{1}{(1-y)(1-y^2)\ldots(1-y^r)}$$



有序拆分

(1) 将 N 允许重复地有序拆分成 r 个部分的方案数为 $C(N\text{-}1,r\text{-}1)$

方法一：一一对应.

设 $N= a_1+a_2+\ldots+a_r$ 是满足条件的拆分，则令

$$S_i = \sum_{k=1}^{i} a_i, \quad i = 1,2,\ldots r$$

$$0 < S_1 < S_2 < \ldots < S_r = N$$

r-1 个 S_i 取值为 1,2,…,N-1，方法数为 $C(N\text{-}1,r\text{-}1)$.

推论：对 N 做任意重复的有序拆分，方案数为

$$\sum_{r=1}^{N} \binom{N-1}{r-1} = 2^{N-1}$$

有序拆分(续)

方法二：生成函数.

$G(y) = (y+y^2+y^3+\ldots)^r$ 中 y^N 项的系数.

$$G(y) = (y + y^2 + \ldots)^r = \frac{y^r}{(1-y)^r}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n-r+r-1}{n-r} y^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n-1}{n-r} y^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n-1}{r-1} y^n$$

所求的方法数为 $\binom{N-1}{r-1}$

(2) 不允许重复有序拆分：不允许重复无序拆分 + 全排列

22.5 指数生成函数

定义 设$\{a_n\}$为序列，称

$$G_e(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{x^n}{n!}$$

为$\{a_n\}$的**指数生成函数**.

例 1 给定正整数 m, $a_n=P(m,n)$, $\{a_n\}$的指数生成函数为

$$G_e(x)=\sum_{n=0}^{\infty}P(m,n)\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{m!}{n!(m-n)!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{m}{n}x^n=(1+x)^m$$

例 2 b_n=1，则$\{b_n\}$的指数生成函数为

$$G_e(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$$

指数生成函数的性质

设数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$的指数生成函数分别为 $A_e(x)$和 $B_e(x)$，则

$$A_e(x)\cdot B_e(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\frac{x^n}{n!}\quad ,\text{其中}\ c_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_kb_{n-k}$$

证：

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n\frac{x^n}{n!}=A_e(x)\cdot B_e(x)=(\sum_{k=0}^{\infty}a_k\frac{x^k}{k!})\cdot(\sum_{l=0}^{\infty}b_l\frac{x^l}{l!})$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{k!}\cdot\frac{b_{n-k}}{(n-k)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{k!}\cdot\frac{n!b_{n-k}}{(n-k)!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_kb_{n-k}$$

应用-多重集排列计数

设 $S=\{ n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2, \ldots , n_k\cdot a_k \}$为多重集，

则 S 的 r 排列数$\{ a_r \}$的指数生成函数为

$$G_e(x) = f_{n_1}(x) f_{n_2}(x) \ldots f_{n_k}(x)$$

$$f_{n_i}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n_i}}{n_i!} \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

证明：

考察指数生成函数展开式中 x^r 的项，

$$\frac{x^{m_1}}{m_1!}\frac{x^{m_2}}{m_2!}\cdots\frac{x^{m_k}}{m_k!},$$

其中 $m_1+m_2+\ldots+m_k=r$

$0\le m_i\le n_i,\quad i=1,2,\ldots,k$ （*）

即 $$\frac{x^{m_1+m_2+\ldots+m_k}}{m_1!m_2!\ldots m_k!}=\frac{x^r}{r!}\frac{r!}{m_1!m_2!\ldots m_k!},\quad a_r=\sum\frac{r!}{m_1!m_2!\ldots m_k!}$$

其中求和是对满足方程（*）的一切非负整数解来求.

一个非负整数解对应了$\{m_1\cdot a_1, m_2\cdot a_2, \ldots, m_k\cdot a_k\}$，即 S 的 r 组合

而该组合的全排列数是 $\dfrac{r!}{m_1!m_2!\ldots m_k!}$，因此 a_r 代表了 S 的 r 排列数.

实例

例 3 由 1,2,3,4 组成的五位数中，要求

1 出现不超过 2 次，但不能不出现，2 出现不超过 1 次，

3 出现可达 3 次，4 出现偶数次.求这样的五位数个数.

解:

$$G_e(x)=(x+\frac{x^2}{2!})(1+x)(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!})(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!})$$

$$=x+5\frac{x^2}{2!}+18\frac{x^3}{3!}+64\frac{x^4}{4!}+215\frac{x^5}{5!}+\ldots$$

$$N=215$$

应用(生成函数求法)

例 4 红、白、兰涂色 $1\times n$ 的方格，要求偶数个为白色，问有多少方案？

解 设方案数为 a_n

$$G_e(x)=(1+\frac{x^2}{2!}+\ldots)(1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots)^2$$

$$=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})\,e^{2x}=\frac{1}{2}e^{3x}+\frac{1}{2}e^x$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}3^n\frac{x^n}{n!}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n+1}{2}\frac{x^n}{n!}$$

$$a_n=\frac{3^n+1}{2}$$