Ramsey定理

- Ramsey定理的简单形式
  - 两个简单命题
  - Ramsey定理
  - 小Ramsey数的有关结果
  - Ramsey数的性质
  - Ramsey定理的推广
- Ramsey定理的一般形式
  - Ramsey定理
  - 关于一般Ramsey数的结果
- Ramsey定理的应用

Ramsey定理的简单形式

两个简单的命题

命题1

用红蓝两色涂色 K_6的边，则或有一个红色 K_3, 或有一个蓝色 K_3

$R(3,3)=6$

命题2

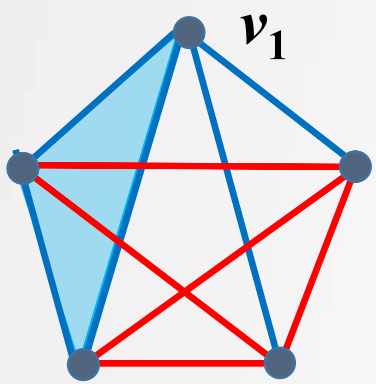
用红蓝两色涂色 K_9的边，则或有一个红色 K_4，或有一个蓝色 K_3.

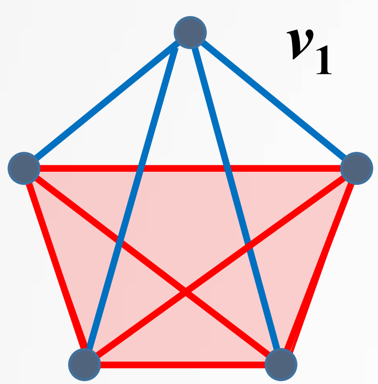
$R(3,4)=9$

命题2的证明

证：存在一个顶点关联 4条蓝边或者 6条红边.
否则蓝边数< 4, 红边数< 6，则蓝边总数至多
$\lfloor(3\times9)/2\rfloor=13$，红边总数至多$\lfloor(5\times9)/2\rfloor=22$,
总共 35 条边，与 K_9 边数为 36 矛盾.

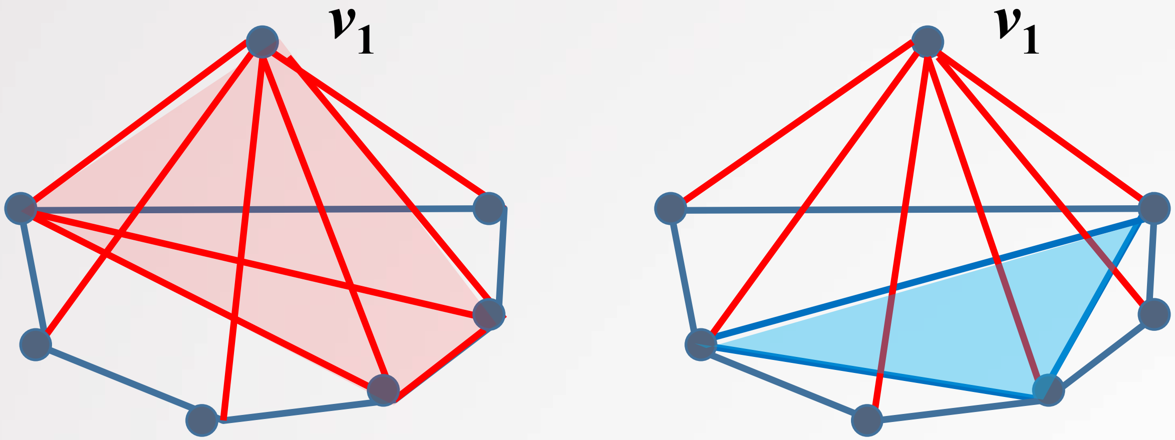
设v_1关联 4 条蓝边，若对应 4 个顶点没有蓝边，
则构成红 K_4；有1条蓝边，则构成兰 K_3 .



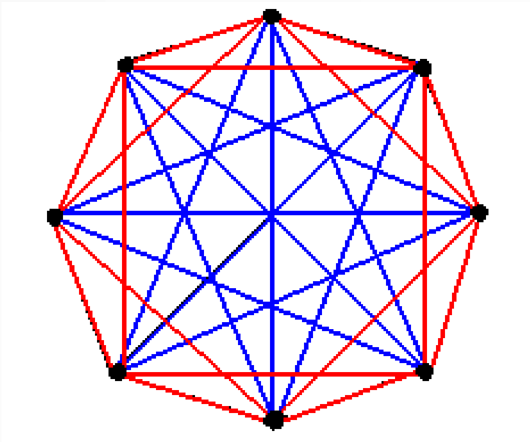


命题2的证明

设v_1关联6条红边，对应6个顶点必有蓝K_3或红K_3.



对于K_8，存在一种涂色方案，既没有蓝色三角形，也没有红色完全四边形.



$R(3,4)=9$.

Ramsey定理

定理 设 p, q为正整数，$p, q \geq 2$，则存在最小正整数 $R(p,q)$，使得当 $n \geq R(p,q)$ 时，用红蓝两色涂色 K_n的边，则或存在一个蓝色的 K_p，或存在一个红色的 K_q.

证明思路：归纳法

归纳基础 $R(p, 2) \leq p$, $R(2, q) \leq q$,

归纳步骤 $R(p-1, q)$，$R(q-1, p)$ 存在

$$\Rightarrow R(p,q) \leq R(p-1, q) + R(q-1, p)$$

归纳步骤的证明

假设对正整数 p', q' 命题为真, 其中 $p' \le p$, $q' \le q$, $p'+q' < p+q$,

则 $R(p-1, q)$, $R(p, q-1)$ 存在. 令

$$n \ge R(p-1, q) + R(p, q-1).$$

case1 v_1 关联 $R(p-1, q)$ 条蓝边,

case2 v_1 关联 $R(p, q-1)$ 条红边.

对于case1, 如为蓝色 K_{p-1},构成蓝色 K_p; 如为红色 K_q, 则满足要求. 对于 case2 可以类似分析.

$$R(p, q) \le R(p-1, q) + R(q-1, p)$$

小Ramsey数的值

http://mathworld.wolfram.com/RamseyNumber.html

p \ q	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3	6	9	14	18	23	28	36	40 43	46 51	52 59	59 69	66 78	73 88
4		18	25	35 41	49 61	56 84	73 115	92 149	97 191	128 238	133 291	141 349	153 417
5			43 49	58 87	80 143	101 216	125 316	143 442	159 848	185 848	209 1461	235 1461	265 3059
6				102 165	113 298	127 495	169 780	179 1171	253 2566	262 2566	317 5033	317 5033	401 11627
7					205 540	216 1031	233 1713	289 2826	405 4553	416 6954	511 10581	511 15263	511 22116
8						282 1870	317 3583	377 6090	377 10630	377 16944	817 27490	817 41526	861 63620
9							565 6588	580 12677	22325	39025	64871	89203	
10								798 23556		81200			1265

Ramsey数的性质

(1) $R(a,b) = R(b,a), \quad R(a,2) = R(2,a) = a$

(2) $R(a,b) \leq R(a-1,b) + R(a,b-1)$

性质 (2) 给出上界

$$9 = R(3,4) \leq R(2,4) + R(3,3) = 4 + 6 = 10$$

$$18 = R(4,4) \leq R(3,4) + R(4,3) = 9 + 9 = 18$$

$$25 = R(4,5) \leq R(3,5) + R(4,4) = 14 + 18 = 32$$

$$R(3,10) \leq R(2,10) + R(3,9) = 10 + 36 = 46$$

$$R(3,10) \leq 43$$

Ramsey定理的推广

(1) $R(p,q)$的图表示	$R(p,q)$的集合表述:
K_n 的顶点集 V	集合 S
K_n 的边集 E	S 的 2 元子集的集合 T
用 2 色涂色 K_n 的边	将 T 划分成 E_1,E_2
存在蓝色完全 p 边形	存在 S 的 p 子集其所有 2 元子集$\in E_1$
存在红色完全 q 边形	存在 S 的 q 子集其所有 2 元子集$\in E_2$

集合表述具有更强的表达能力.

(2) 将2元子集推广到 r 元子集

(3) 将 T 划分成 $E_1, E_2, \ldots, E_k$

推广的Ramsey定理

定理 2

对于任意给定的正整数 p,q,r, $(p,q \geq r)$ 存在一个最小的正整数 $R(p,q;r)$ 使得当集合 S 的元素数大于等于 $R(p,q;r)$ 时，将 S 的 r 子集族任意划分成 E_1, E_2，则或者 S 有 p子集 A，A 的所有 r 元子集属于E_1, 或者存在 q子集 B，B 的所有 r 元子集属于E_2.

推广的Ramsey定理

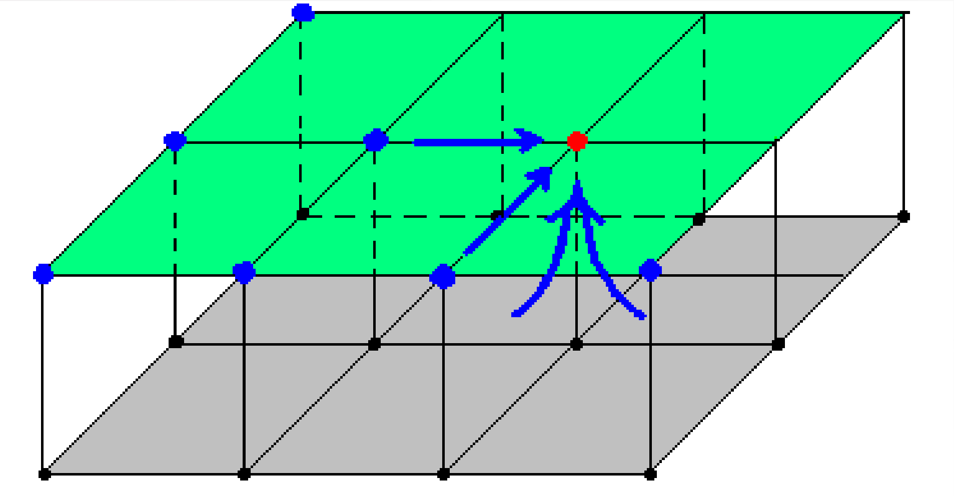
定理 3

设 $r, k \geq 1$, $q_i \geq r$, $i=1, 2, \ldots, k$, 是给定正整数，则存在一个最小的正整数 $R(q_1, q_2, \ldots, q_k; r)$，使得当 $n \geq R(q_1,q_2,\ldots,q_k;r)$ 时, 当 n元集 S 的所有r 元子集划分成 k 个子集族 $T_1, T_2, \ldots, T_k$，那么存在 S 的 q_1元子集 A_1, 其所有的 r 元子集属于T_1, 或者在 S 的 q_2元子集 A_2，A_2的所有r 元子集属于T_2, $\ldots$, 或者存在 S 的 q_k 元子集 A_k, 其所有的 r 元子集属于T_k.

$R(p,q;r)$的存在性证明

证明 $R(p,q;r)$ 存在：多重归纳法

（1）证明归纳基础



$R(p,r;r) = p$，

$R(r,q;r) = q$，

$R(p,q;1) = p+q-1$.

（2）归纳步骤

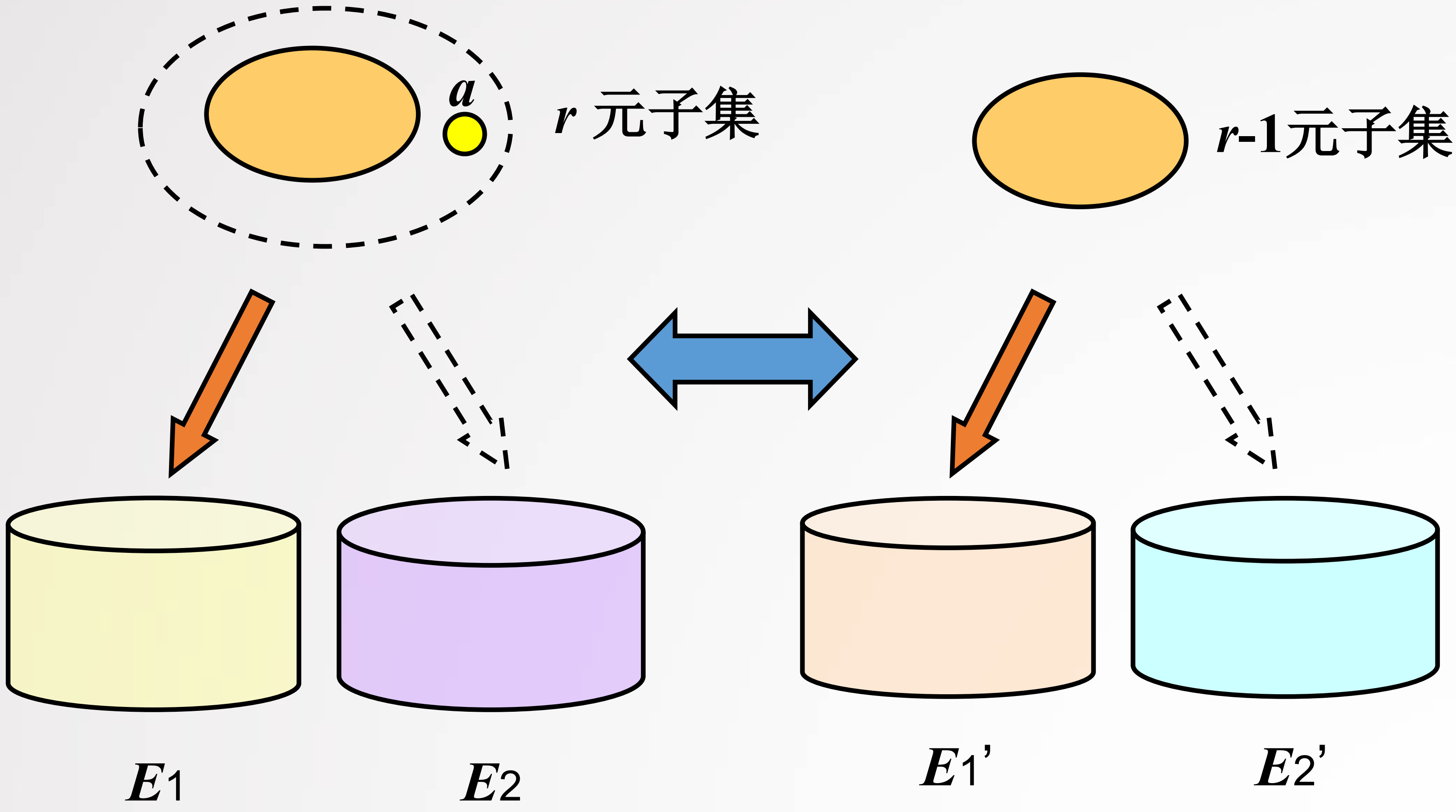
假设 $R(p',q';r')$存在，其中

$r' = r-1, p', q'$任意；　$r'= r$，$p'< p$ 或 $q'< q$.

$p_1= R(p-1,q;r)$，$q_1= R(p,q-1;r)$，

令 $n = R(p_1,q_1;r-1)+1 = R(R(p-1,q;r), R(p,q-1,r);r-1)+1$

*r*元子集划分到*r*-1元子集划分



关于一般Ramsey数的说明

$R(q_1, q_2, \ldots, q_k; r)$

(1) 条件：$r, k \geq 1$, $q_i \geq r$, $i = 1, 2, \ldots, k$, 都是给定正整数

(2) 当 $r = 2$时，可以简记为 $R(q_1, q_2, \ldots, q_k)$

(3) Ramsey定理断定Ramsey数的存在性.

Ramsey数的确定是一个很困难的问题.

(4) $r = 1$, 是鸽巢原理，

$$R(q_1, q_2, \ldots, q_k; 1) = q_1 + q_2 + \ldots + q_k - k + 1$$

$r = 2$, $k = 2$, 是简单的Ramsey定理.

结果：9个Ramsey数的精确值，部分上界、下界

$r = 2$, $k = 3$,只有一个精确值 $R(3,3,3)=17$

一般Ramsey数的上下界

$51 \le R(3,3,3,3) \le 62$	$65 \to 62$
$162 \le R(3,3,3,3,3) \le 307$	$322 \to 307$
$538 \le R(3,3,3,3,3,3) \le 1838$	$500 \to 538$
$30 \le R(3,3,4) \le 31$	$32 \to 31$
$45 \le R(3,3,5) \le 57$	$59 \to 57$
$55 \le R(3,4,4) \le 79$	$81 \to 79$
$93 \le R(3,3,3,4) \le 153$	$84 \to 93,\ 159 \to 153$
$128 \le R(4,4,4) \le 236$	$242 \to 236$

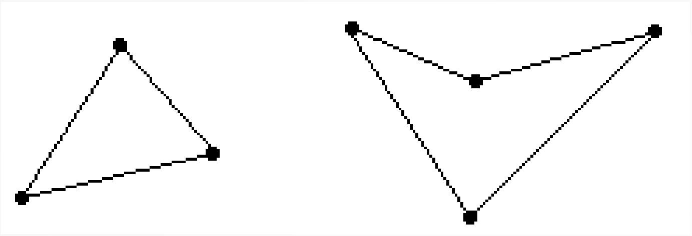
Ramsey定理的应用

例 10 对于任意 $m \geq 3, m \in Z^+$, 存在正整数 $N(m)$，使得当 $n \geq N(m)$ 时，若平面的 n 个点没有三点共线，其中总有 m个点构成一个凸 m 边形的顶点

实例： $m=3, N(m)=N(3)=3,$

$m=4, N(m)=N(4)=5,$

$N(m) \leq R(5, m; 4)$



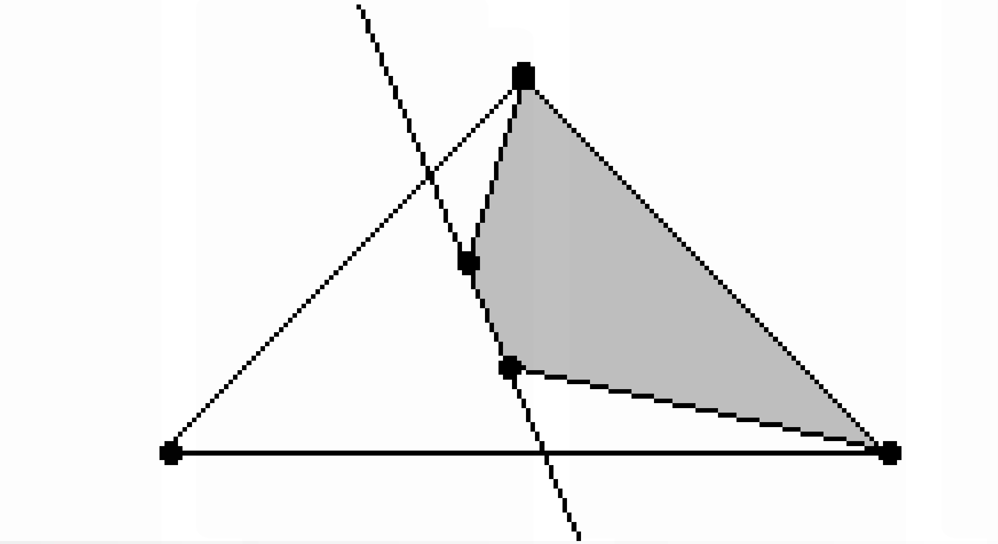
引理1 平面上任给5点, 没有3点共线, 则必有4点是凸4边形的顶点.

引理2 平面上m个点，若没有3点共线且任4点都是凸4边形的顶点，则这 m 个点构成凸 m 边形的顶点

引理1的证明

引理 1 平面上任给 5 点，没有 3 点共线，则必有 4 点是凸 4 边形的顶点.

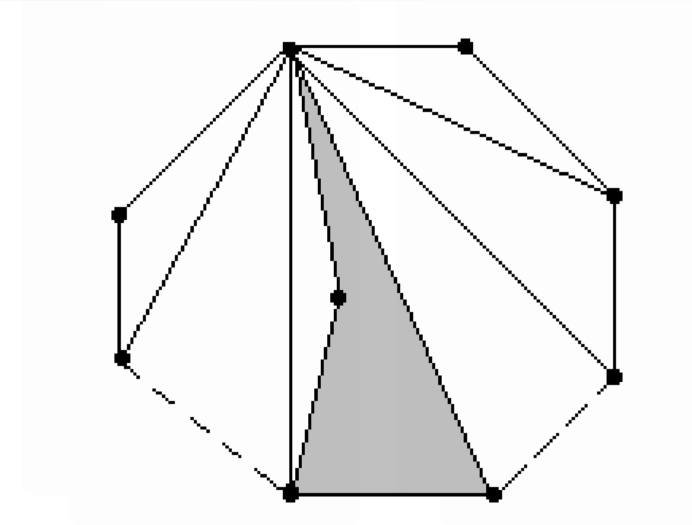
证　做最大的凸多边形 T. 如果 T 是 4 边形或 5 边形，则命题为真. 如果为 3 边形，则 3 边形内存在 2 点，与过这 2 点的直线一侧的另外 2 点构成凸 4 边形.



引理2的证明

引理 2 平面上 m 个点，若没有 3 点共线且任 4 点都是凸 4 边形的顶点，则这 m 个点构成凸 m 边形的顶点.

证：假设最大的凸多边形是 p 边形，$p<m$. 则必有点落入这个多边形内部. 将这个多边形划分成三角形，必有点落入某个三角形，这个三角形的顶点与内部的点构成凹 4 边形. 与已知矛盾.



证明命题$N(m) \le R(5, m; 4)$

证 不妨设m>3，令$n \ge R(5, m;4)$，S为n个点的集合. 将S的所有的4元子集划分成两个子集族. 如果构成凹4边形，放到T_1, 如果构成凸4边形，则放到T_2.

根据Ramsey数定义，或有5个点，其所有4元子集都构成凹4边形；或有m个点，其所有的4子集都构成凸4边形.

若为前者，与引理1矛盾. 若为后者，根据引理2，这m个点构成凸m边形的顶点.

组合存在性定理的应用

例11 最少连接缆线问题

条件：15 台工作站和 10 台服务器.
每个工作站可以用一条电缆直接连到某个服务器.
同一时刻每个服务器只能接受一个工作站的访问.

目标：任何时刻,任意选一组工作站W_1, W_2, … , W_k, k≤10.
保证这组工作站可以同时访问不同的服务器.

问题：达到这个目标需要的最少缆线数目N是多少？

方案1：每个工作站都连到每个服务器，需要

$$10\times15=150$$

缆线数$N \le 150$.

例11的解决方案

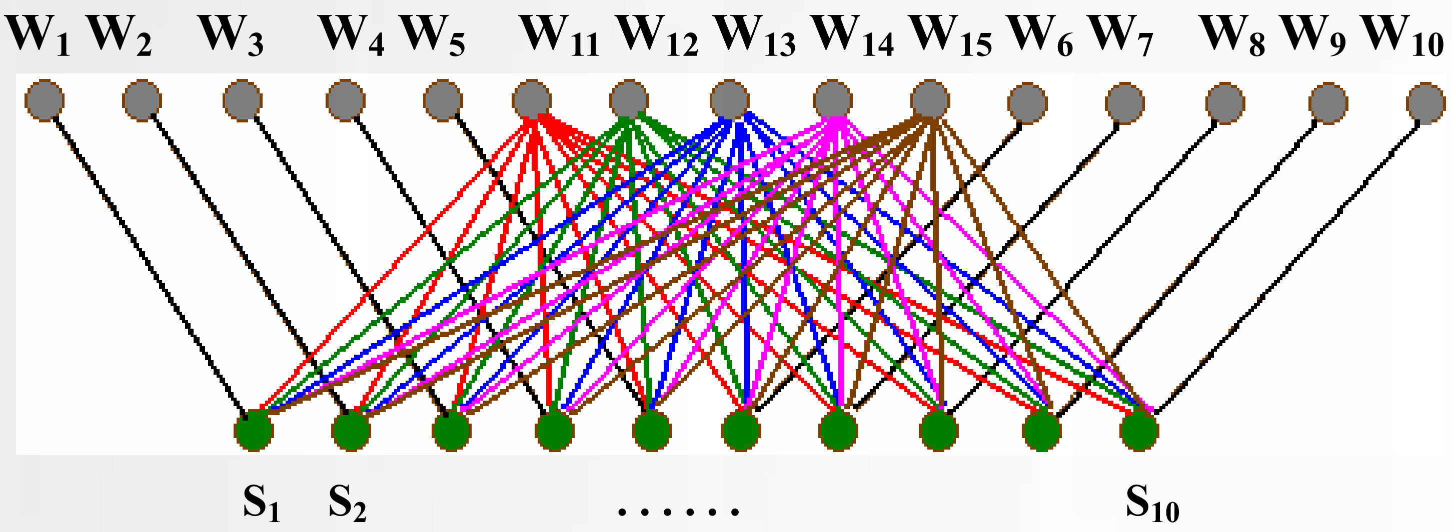
方案 2　将工作站标记为 $W_1, W_2, \ldots, W_{15}$,

服务器标记为 $S_1, S_2, \ldots, S_{10}$.

对于 k=1,2,…,10，连接 W_k 到 S_k,

剩下 5 个工作站的每一个都连接到 10 个服务器

总共 60 条直接连线.



方案的最优性

满足目标要求：

任取10个工作站. 如果恰好为$W_1, W_2, \ldots, W_{10}$，W_i访问S_i, i=1,…10, 满足要求; 如果W_1-W_{10}中只选中k个工作站，不妨设为W_1--W_k, 剩下的10–k个选自W_{11}-W_{15}. 那么W_i访问S_i, i=1,…,k. 还剩下10–k个服务器空闲，恰好分配给10–k个工作站.

结论：$N \le 60$.

证明 $N \ge 60$.

假设在工作站和服务器之间缆线至多59条. 那么某个服务器将至多连接$\lfloor 59/10 \rfloor = 5$工作站. 如果选择剩下的10个工作站作为一组，那么只有9个空闲的服务器，必有2个工作站连接同一服务器. 与题目要求矛盾.

例12 电路板排列问题

电路板集合: $B=\{1, 2, \ldots, n\}$

连接块集合: $L=\{N_1, N_2, \ldots, N_m\}$

$N_j \subseteq B$，N_j 中所有电路板用一根导线连接

排列: $X= <x_1, x_2, \ldots, x_n>$

排列密度 density(X):

跨越相邻电路板插槽的最大连线数

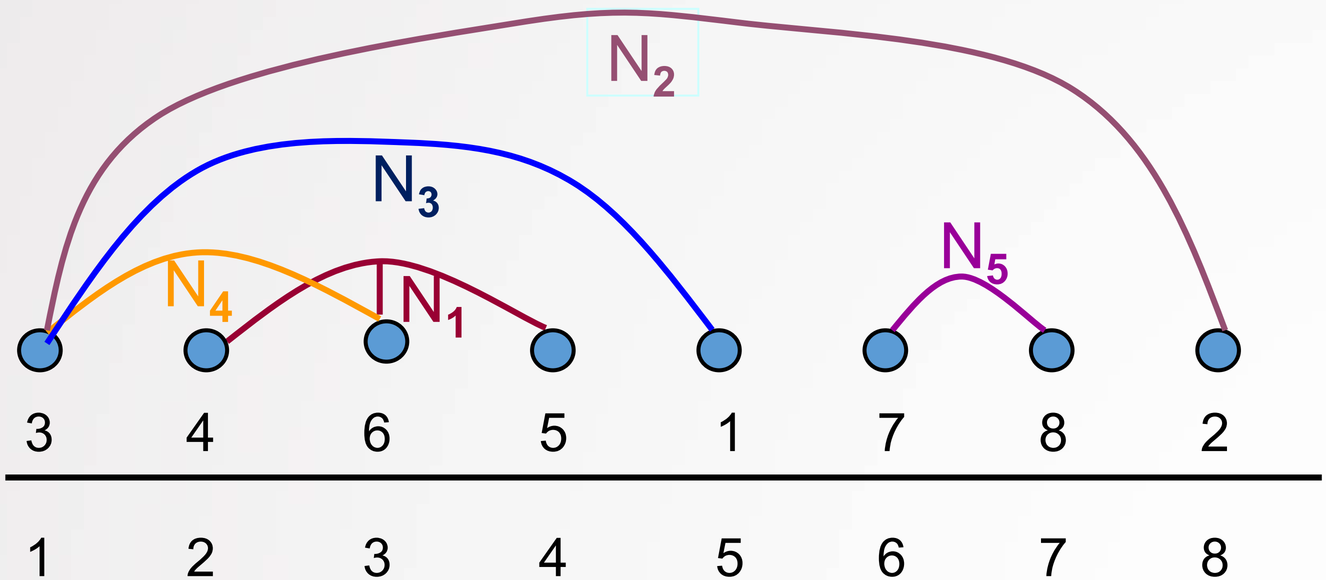
求具有最小排列密度 density(X) 的排列.

实例：方案1

B={ 1, 2, … , 8 }, L={ N_1, N_2, … ,N_5 },

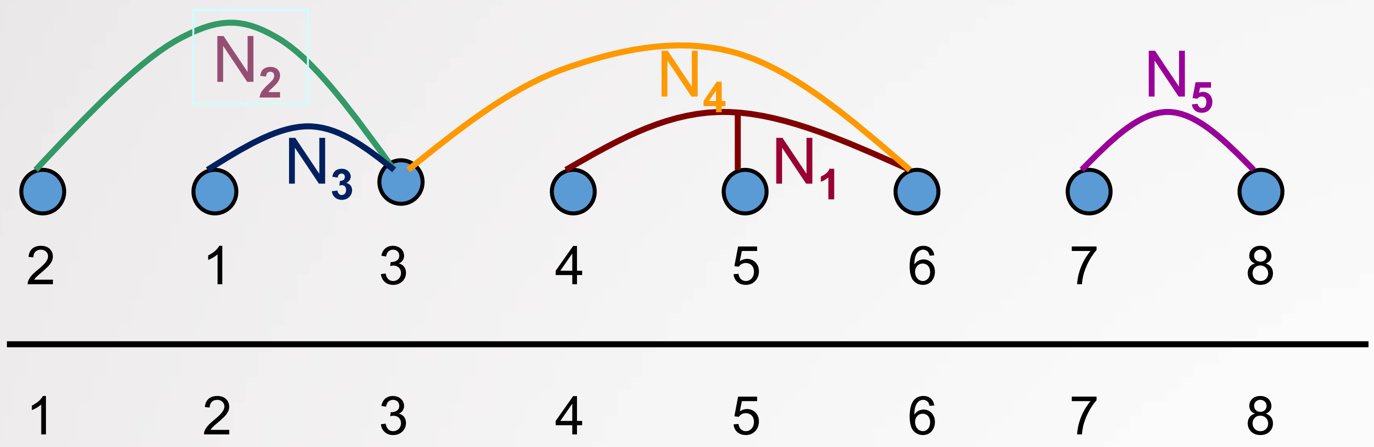
N_1={4,5,6}, N_2={2,3}, N_3={1,3}, N_4={3,6}, N_5={7,8}

排列 $X_2 = \langle 3, 4, 6, 5, 1, 7, 8, 2 \rangle$， density($X_2$) = 4



方案2

排列 $X_1 = <2, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8>$， density($X_1$) = 2



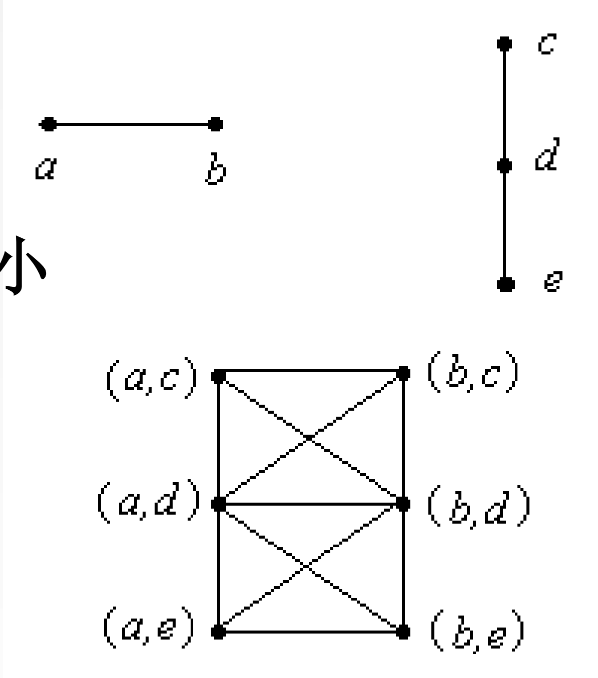
因为 3 出现在3个连接块中，以横跨电路板 2-3 为一边, 3-4 为另一边。根据鸽巢原理，无论怎样排列，都存在某一边至少有2条线，因此 density(X) ≥ 2，这是一个最优方案。

例13 通信抗噪音编码问题

混淆图$G=<V,E>$，V为有穷字符集，

$\{u,v\}\in E \Leftrightarrow u$和$v$易混淆.

$\beta_0(G)$：点独立数，最大不混淆字符集大小



编码是字符串的集合

xy与uv混淆 $\Leftrightarrow$ x与u混淆且y与v混淆

$\vee\, x=u$且y与v混淆

$\vee\, x$与u混淆且$y=v$

$V_1\times V_2$的混淆图是两个混淆图 G与H 的正规积$G\cdot H$

定理 $\beta_0(G\cdot H)\le R(\beta_0(G)+1,\beta_0(H)+1)-1$

实例：$|G|=5$, $\beta_0(G)=3$, $\beta_0(G\cdot G)\le R(\beta_0(G)+1,\beta_0(G)+1)-1$

$= R(4,4)-1=17$

Ramsey定理的应用推广

- 应用及推广
  - 数论、代数、几何、拓扑学、集合论、逻辑等；
  - 信息论、理论计算机科学
- 参考资料

Vera Rosta, Dept of Math, McGill University, Canada，Ramsey Theory Applications， 2004