

## 19.3 特殊的格

- 模格
- 分配格
- 有界格
- 有补格
- 布尔格

# 模格

**定义**  $L$ 为格, 若 $\forall a,b,c \in L$ ,

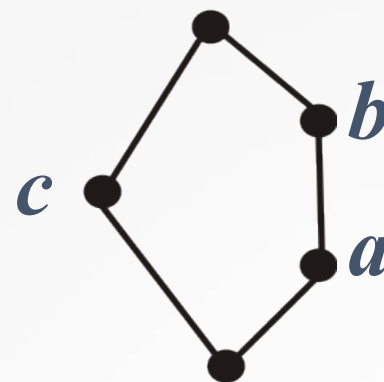
$$a \leq b \Rightarrow a \vee (c \wedge b) = (a \vee c) \wedge b$$

则称  $L$ 为模格.

实例:

钻石格为模格

五角格不是模格



模格---模律:  $a \leq b \Rightarrow a \vee (c \wedge b) = (a \vee c) \wedge b$

格--模不等式:  $a \leq b \Rightarrow a \vee (c \wedge b) \leq (a \vee c) \wedge b$

# 模格判别条件

$L$  为模格当且仅当  $L$  不含有与五角格同构的子格.

充分性：假设  $L$  不是模格，则存在  $a, b, c \in L$ ，使得

$$a \leq b, a \vee (c \wedge b) < (a \vee c) \wedge b,$$

取 5 个元素  $x, y, z, u, v$  如图.

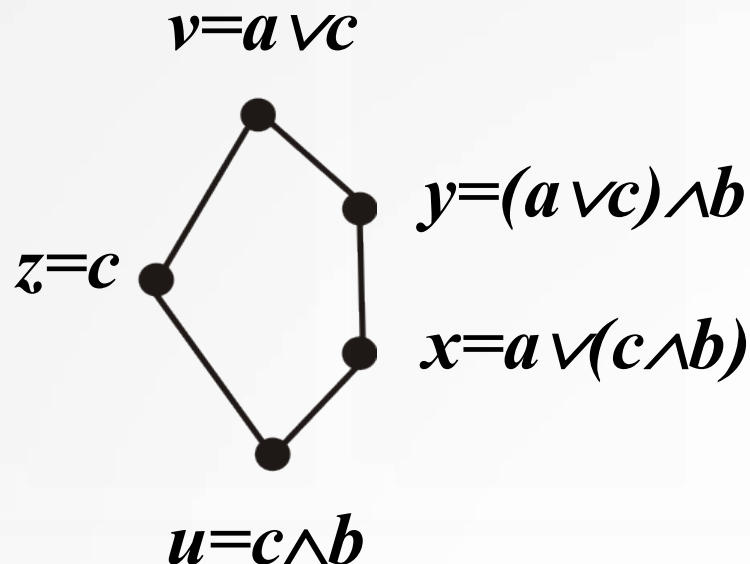
证明思路：

$$u \leq x < y \leq v, \quad u \leq c \leq v$$

$$x \wedge c = y \wedge c = u, \quad x \vee c = y \vee c = v$$

$u, x, y, z, v$  两两不等，

构成  $L$  的 5 元子格



# 模格判别条件（续）

$L$ 为模格当且仅当

$$\forall a, b, c \in L, a \leq b, a \vee c = b \vee c, a \wedge c = b \wedge c \Rightarrow a = b$$

证：

“ $\Leftarrow$ ” 若不是模格，则存在子格与五角格同构，必有  $a, b, c$  构成如图的子格，与条件矛盾。

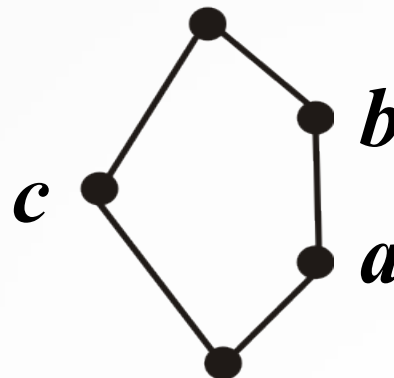
“ $\Rightarrow$ ” 设  $L$  为模格，

$$\forall a, b, c \in L, a \leq b, a \vee c = b \vee c, a \wedge c = b \wedge c$$

$$a = a \vee (\underline{a \wedge c}) = a \vee (\underline{b \wedge c})$$

$$= a \vee (c \wedge b) = (\underline{a \vee c}) \wedge b$$

$$= (\underline{b \vee c}) \wedge b = b$$



# 分配格

**定义** 设 $L$ 为格, 若 $\forall a,b,c \in L$ 有

$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$  或  $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$   
则 $L$ 为**分配格**.

注: 在任何格中两个分配等式是等价的.

例如  $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \Rightarrow a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

证  $(a \vee b) \wedge (a \vee c)$

$$= ((a \vee b) \wedge a) \vee ((a \vee b) \wedge c) \quad (\wedge \text{对} \vee \text{的分配律})$$

$$= a \vee ((a \wedge c) \vee (b \wedge c)) \quad (\text{吸收律, } \wedge \text{对} \vee \text{的分配律})$$

$$= (a \vee (a \wedge c)) \vee (b \wedge c) = a \vee (b \wedge c) \quad (\text{结合律, 吸收律})$$

反之, 同理可证.

# 分配格判别定理

**定理1** 设  $L$  为模格,  $L$  为分配格当且仅当  
若  $\forall a, b, c \in L$  有

$$(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) = (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a)$$

注: 一般格成立不等式

$$(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) \leq (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a)$$

**定理2** 设  $L$  为模格,  $L$  为分配格当且仅当  $L$  不含有与钻石格同构的子格.

# 判别定理一的证明

条件:  $(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) = (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a)$

证: “ $\Leftarrow$ ”  $\forall a, b, c \in L$

$$\begin{aligned} a \wedge (b \vee c) &= a \wedge (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a) && \text{(吸收律)} \\ &= ((a \wedge b) \vee ((b \wedge c) \vee (c \wedge a))) \wedge a && \text{(等式替代)} \\ &= (a \wedge b) \vee ((b \wedge c) \vee (c \wedge a)) \wedge a && \text{(模律 } a \wedge b \leq a \text{)} \\ &= (a \wedge b) \vee ((c \wedge a) \vee (b \wedge c)) \wedge a && \text{(交换律)} \\ &= (a \wedge b) \vee (c \wedge a) \vee (b \wedge c \wedge a) && \text{(模律 } c \wedge a \leq a \text{)} \\ &= (a \wedge b) \vee (a \wedge c) && \text{(交换律, 上界)} \end{aligned}$$

# 判别定理一的证明（续）

“ $\Rightarrow$ ”

$$\underline{(a \wedge b)} \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a)$$

$$= [(\underline{(a \wedge b)} \vee b) \wedge ((a \wedge b) \vee c)] \vee (c \wedge a) \quad (\text{分配律})$$

$$= [\underline{b} \wedge (a \vee c) \wedge \underline{(b \vee c)}] \vee (c \wedge a) \quad (\text{吸收、分配律})$$

$$= (b \wedge \underline{(a \vee c)}) \vee (c \wedge a) \quad (\text{吸收律})$$

$$= (b \vee c) \wedge (b \vee a) \wedge (a \vee c \vee c) \wedge (a \vee c \vee a) \quad (\text{分配律})$$

$$= (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a) \quad (\text{交换、幂等律})$$

# 判别定理二的证明

充分性. 假设模格  $L$  不是分配格, 则  $\exists a, b, c \in L$  使得

$$(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) < (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a)$$

令

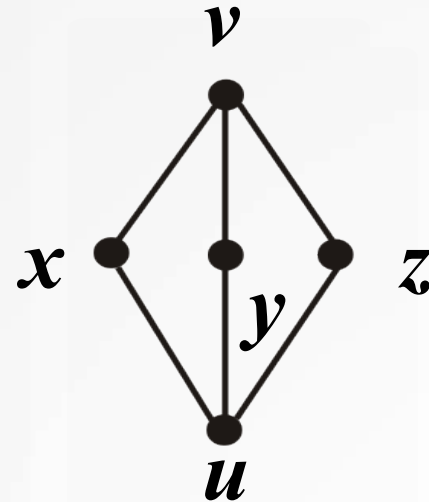
$$u = (a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a)$$

$$v = (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a)$$

$$x = u \vee (a \wedge v)$$

$$y = u \vee (b \wedge v)$$

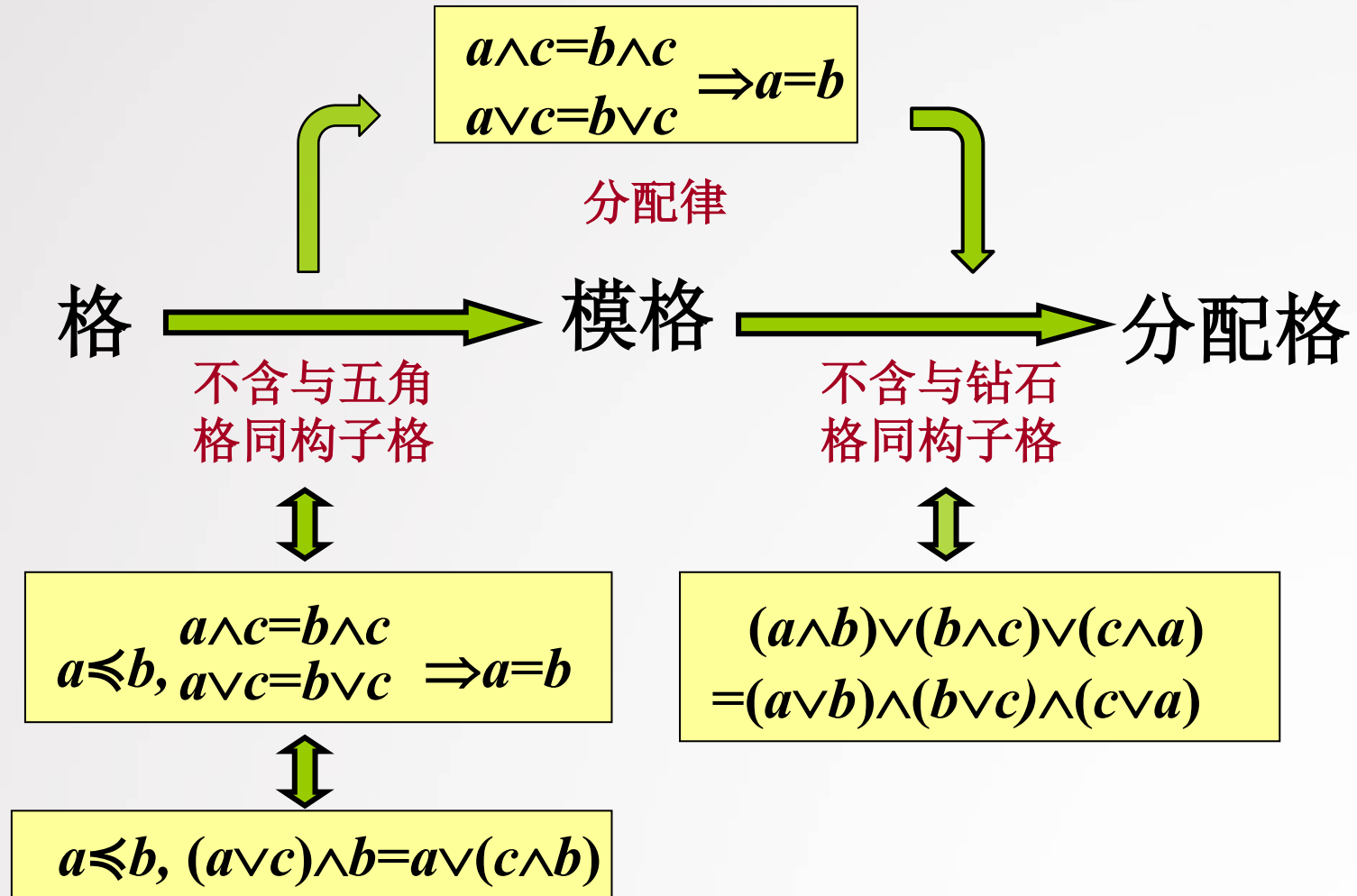
$$z = u \vee (c \wedge v)$$



则可以证明  $u, v, x, y, z$  构成钻石格.

注: 所有的链为分配格, 4 元以下的格为分配格.

# 模格、分配格之间关系



# 有界格与有补格

## 全下界 0 和全上界 1

全上界是格的最大元，全下界是格的最小元

## 有界格

有界格的定义：存在全上界及全下界的格

有界格的表示： $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$

有限格一定有界，无限格不一定（幂集格有界）

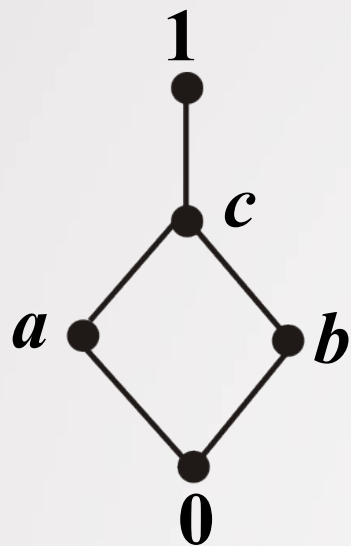
有界格的性质：

(1)  $a \wedge 1 = a, a \vee 0 = a, a \vee 1 = 1, a \wedge 0 = 0,$

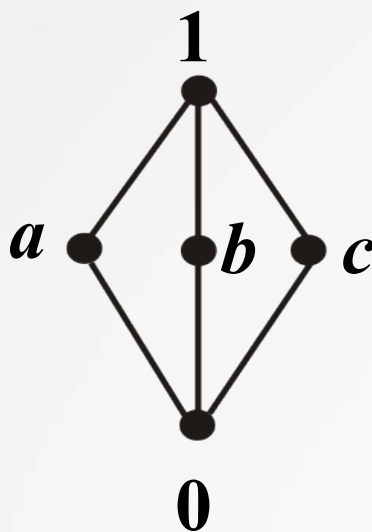
(2) 对偶命题：如果有 0,1，则 0 与 1 互换.

# 补元与有补格

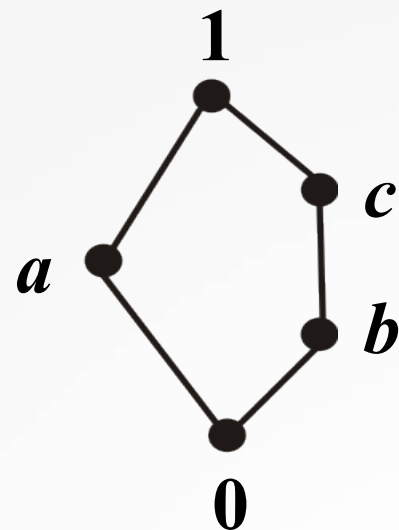
$a \wedge b = 0, a \vee b = 1$ , 则  $a$  与  $b$  互为补元.



0与1互补  
 $a, b, c$  没补元



0与1互补  
 $a, b, c$ 中任两个元素都互补



0与1互补  
 $a$ 与 $b, c$ 互补

# 有补格

补元性质：

有界分配格中元素  $x$  如果存在补元，则是唯一的

**有补格**定义：每个元素都有补元的有界格

思考：

求补是否为有补格上的一元运算？

求补是否为分配格上的一元运算？

# 19.4 布尔代数

- 布尔代数定义
- 布尔代数性质
- 布尔代数的同态
- 有限布尔代数的结构

# 布尔代数的定义

**定义** 有补分配格称为**布尔格**（**布尔代数**）

实例：幂集格

**定理** 设 $\langle B, *, \circ, \Delta, a, b \rangle$ 是代数系统，其中 $*, \circ$ 为二元运算， $\Delta$ 为一元运算， $a, b$ 为0元运算. 如果满足以下算律：

交换律  $x * y = y * x, x \circ y = y \circ x$

分配律  $x * (y \circ z) = (x * y) \circ (x * z)$

$x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z)$

同一律  $x * b = x, x \circ a = x$

补元律  $x * \Delta x = a, x \circ \Delta x = b$

则  $\langle B, *, \circ, \Delta, a, b \rangle$  构成布尔格.

# 定理证明

证明思路：由  $b, a$  分别为  $*$  和  $\circ$  运算的单位元，证  $b$  和  $a$  恰为  $\circ$  和  $*$  运算的零元；再证吸收律、结合律

证：(1)  $x \circ b = (x \circ b) * b = (x \circ b) * (x \circ \Delta x)$

$$= x \circ (\Delta x * b) = x \circ \Delta x = b$$

$$x * a = (x * a) \circ a = (x * a) \circ (x * \Delta x)$$

$$= x * (\Delta x \circ a) = x * \Delta x = a$$

(2) 证吸收律

$$x \circ (x * y) = (x * b) \circ (x * y) = x * (b \circ y) = x * b = x$$

$$x * (x \circ y) = (x \circ a) * (x \circ y) = x \circ (a * y) = x \circ a = x$$

# 定理证明（续）

(3) 证结合律 命题  $x \circ y = x \circ z, \Delta x \circ y = \Delta x \circ z \Rightarrow y = z$

$$(x \circ y) * (\Delta x \circ y) = (x \circ z) * (\Delta x \circ z)$$

$$\Rightarrow (x * \Delta x) \circ y = (x * \Delta x) \circ z \Rightarrow a \circ y = a \circ z \Rightarrow y = z$$

$$x \circ (\underline{x * (y * z)}) = x,$$

$$x \circ ((\underline{x * y}) * z) = (x \circ (x * y)) * (x \circ z) = x,$$

$$x \circ (\underline{x * (y * z)}) = x \circ ((\underline{x * y}) * z)$$

$$\Delta x \circ (x * (y * z)) = (\Delta x \circ x) * (\Delta x \circ (y * z)) = \Delta x \circ (y * z)$$

$$\Delta x \circ ((\underline{x * y}) * z) = (\Delta x \circ (x * y)) * (\Delta x \circ z) = \Delta x \circ (y * z)$$

$$\Delta x \circ (\underline{x * (y * z)}) = \Delta x \circ ((\underline{x * y}) * z)$$

于是,  $x * (y * z) = (x * y) * z$

# 定理的证明（续）

$\langle B, *, \circ \rangle$  构成分配格，

可定义偏序使得  $*$ ， $\circ$  分别表示求下界和上界运算。

由同一律知道  $a$  为全下界， $b$  为全上界。

由补元律知道  $\Delta x$  就是  $x$  的补元。

因此  $B$  构成布尔格。

# 布尔代数的性质

双重否定律

D.M律

等价条件1  $a \leq b \Leftrightarrow a \wedge b = a \Leftrightarrow a \vee b = b$   
 $\Leftrightarrow a \wedge \bar{b} = 0 \Leftrightarrow \bar{a} \vee b = 1$

等价条件2  $a \leq b \Leftrightarrow \bar{b} \leq \bar{a}$

# 布尔代数的同态

**定义**  $B_1, B_2$  为布尔代数,  $f: B_1 \rightarrow B_2$ , 若

$$f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$$

$$f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$$

$$f(\overline{x}) = \overline{f(x)}$$

则称  $f$  为  $B_1$  到  $B_2$  的同态  
同态判定:

三个等式仅需要两个, 其中等式 1 和 2 不独立.

# 命题的证明

证明

$$f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y), f(\bar{x}) = \overline{f(x)} \\ \Rightarrow f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$$

$$\begin{aligned} f(x \vee y) &= \overline{\overline{f(x \vee y)}} \\ &= \overline{\overline{f(\bar{x} \wedge \bar{y})}} = \overline{f(\bar{x} \wedge \bar{y})} \\ &= \overline{f(\bar{x}) \wedge f(\bar{y})} = \overline{f(x) \wedge f(y)} \\ &= f(x) \vee f(y) \end{aligned}$$

# 有限布尔代数的结构

## 有限布尔代数的表示定理

设 $B$ 是有限布尔代数， $A$ 是 $B$ 的全体原子的集合，则 $B$ 与 $P(A)$ 同构.

证明思路：小于 $b$ 的原子为 $a_1, a_2, \dots, a_k$ ,

那么 $b = a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_k$

映射 $f$ 满足： $f(b) = \{ a_1, a_2, \dots, a_k \}$

可以证明 $f: B \rightarrow P(A)$ 为同构映射

任何有限布尔代数元素数为 $2^n$ .

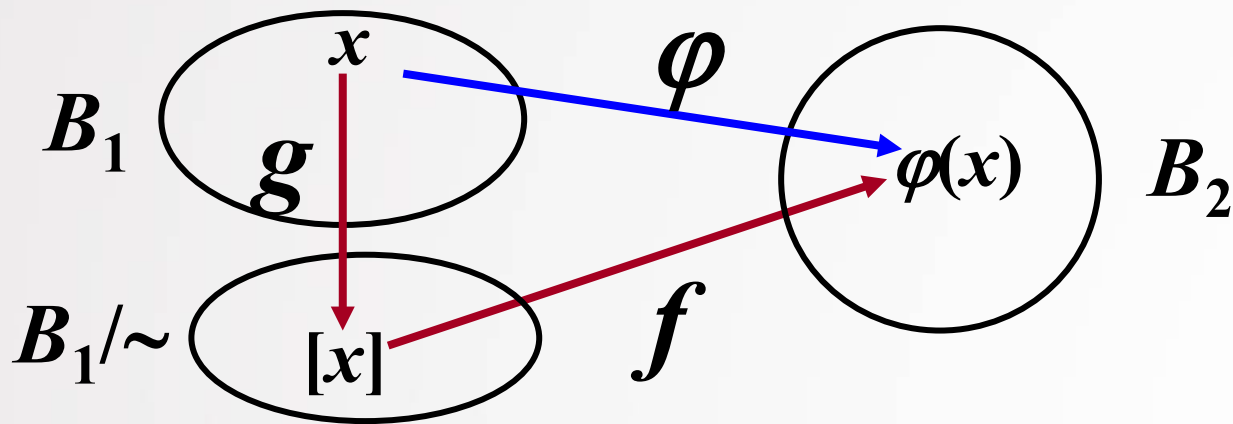
任何有限布尔代数都同构于 $\{0,1\}^n$ .

# 例题

例1 设 $\varphi$ 是布尔代数 $B_1$ 到 $B_2$ 的满同态映射,  
 $\sim$ 是 $\varphi$ 导出的 $B_1$ 上的同余关系. $g: B_1 \rightarrow B_1/\sim$ 是自然  
映射,  $\forall x \in B_1$ ,

$$g(x) = [x] = \{ y \mid y, x \in B_1 \text{ 且 } \varphi(y) = \varphi(x) \}.$$

证明存在唯一的同构映射 $f: B_1/\sim \rightarrow B_2$ 使得 $f \circ g = \varphi$ .



# 同构 $f$ 的存在性

证：令  $f: B_1/\sim \rightarrow B_2$ ,  $f([x]) = \varphi(x)$ , 则

$$[x] = [y] \Leftrightarrow x \sim y \Leftrightarrow \varphi(x) = \varphi(y)$$

于是  $f$  为良定义的, 且为单射.

对于  $y \in B_2$ , 由于  $\varphi$  为满射,  $\exists x \in B_1$ , 使得  $\varphi(x) = y$ , 从而有

$$f([x]) = \varphi(x) = y. \text{ 于是 } f \text{ 为满射.}$$

下面证明  $f$  为同态映射.  $\forall [x], [y] \in B_1/\sim$ ,

$$f([x] \wedge [y]) = f([x \wedge y]) = \varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \wedge \varphi(y) = f([x]) \wedge f([y])$$

$$f(\overline{[x]}) = \overline{f([x])} = \overline{\varphi(x)} = \overline{\varphi(x)} = \overline{f([x])}$$

综合上述有  $B_1/\sim \cong B_2$ .

# 同构 $f$ 的性质

下面证明  $f \circ g = \varphi. \forall x \in B_1,$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f([x]) = \varphi(x)$$

于是  $f \circ g = \varphi.$

再证明满足这一条件的  $f$  是唯一的. 假设存在  $f_1,$

$f_2$  使得  $f_1 \circ g = \varphi, f_2 \circ g = \varphi.$  那么  $\forall x \in B_1,$

$$f_1 \circ g(x) = f_2 \circ g(x).$$

于是

$$f_1(g(x)) = f_2(g(x)) \Rightarrow f_1([x]) = f_2([x])$$

由于  $x$  的任意性, 必有  $f_1 = f_2.$