



单元12.1 支配集、点覆盖集、 点独立集

第二编 图论 第十一章 平面图

13.1 支配集、点覆盖集、点独立集



内容提要

- 支配集
- 点独立集
- 点覆盖集
- 团
- 支配数，点独立数，点覆盖数，团数之间的关系



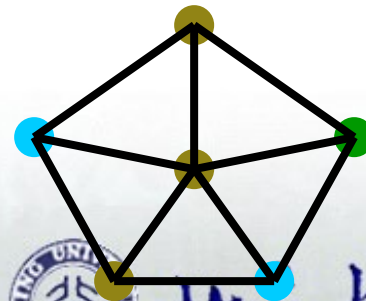
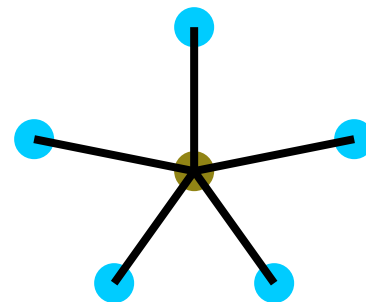
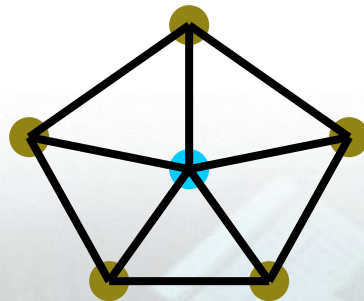
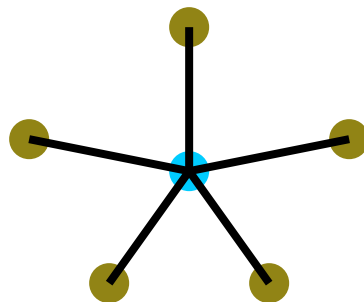
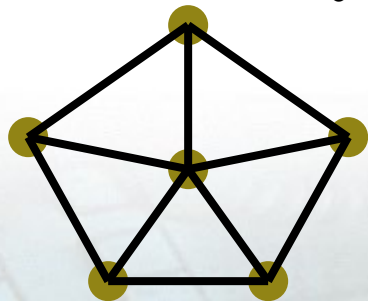
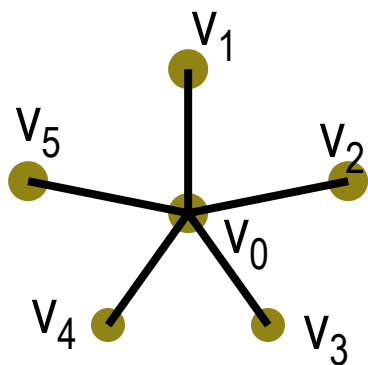


支配集

- $G=\langle V,E\rangle$, $e=(u,v) \Leftrightarrow u$ 支配 $v \Leftrightarrow v$ 支配 u
- 支配集: $V^*\subseteq V$, $\forall v\in V-V^*$, $\exists u\in V^*$, u 支配 v
- 极小支配集: 真子集都非支配集的支配集
- 最小支配集: 顶点数最少的支配集
- 支配数: $\gamma_0(G)$ = 最小支配集的顶点数

支配集举例

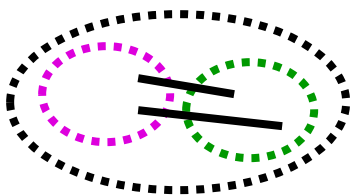
- 星形图 S_n : $\{v_0\}, \{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$, $\gamma_0(S_n)=1$
- 轮图 W_n : $\{v_0\}, \{v_1, v_3, v_5, \dots, v_{n-2}\}$, $\gamma_0(W_n)=1$





定理13.1

- 无向图 G 无孤立点, V_1^* 是极小支配集, 则存在 V_2^* 也是极小支配集, 且 $V_1^* \cap V_2^* = \emptyset$.



- 说明: 支配集要包含所有孤立点

定理13.1证明

• 证:

(1) V_1^* 是极小支配集 $\Rightarrow V - V_1^*$ 也是支配集.

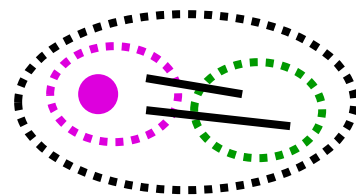
反证: 否则, $\exists u \in V_1^*, \forall v \in V - V_1^*, (u, v) \notin E, V_1^* - \{u\}$ 还是支配集, 与 V_1^* 极小性矛盾.

(2) $V - V_1^*$ 是支配集 \Rightarrow

$V - V_1^*$ 中有子集是极小支配集, 设为 V_2^* .

显然 $V_1^* \cap V_2^* = \emptyset$.

#



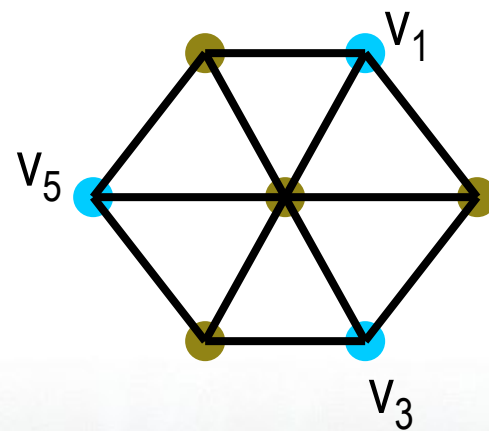
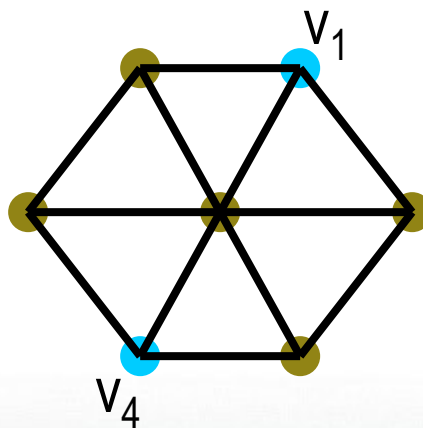
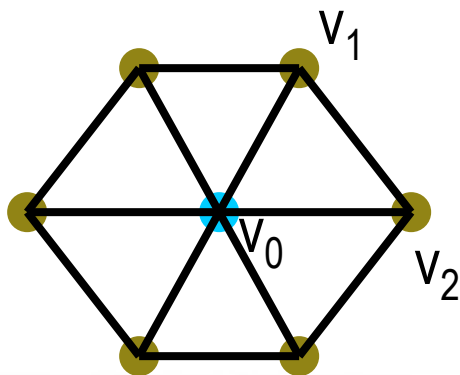


独立集

- 无向图 $G = \langle V, E \rangle$
- 独立集: $V^* \subseteq V, \forall u, v \in V^*, u$ 与 v 不相邻
- 极大独立集: 真母集都非独立集的独立集
- 最大独立集: 顶点数最多的独立集
- 点独立数: $\beta_0(G) =$ 最大独立集的顶点数

独立集举例

- $\{v_0\}, \{v_1, v_4\}, \{v_1, v_3, v_5\}$, $\beta_0=3$





定理13.2

- 无向图 G (~~无孤立点~~),

V^* 是极大独立集 $\Rightarrow V^*$ 是极小支配集

- 说明: 极大独立集要包含所有孤立点
“~~无孤立点~~”的条件可以去掉

定理13.2证明

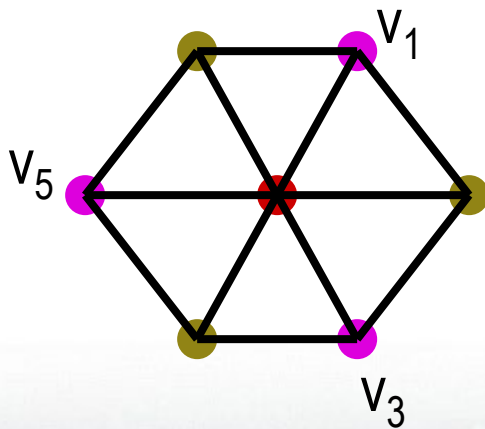
- 证: (1) V^* 是极大独立集 $\Rightarrow V^*$ 也是支配集.
(反证) 否则, $\exists v \in V - V^*, \forall u \in V^*, (u, v) \notin E, V^* \cup \{v\}$ 还是独立集, 与 V^* 极大性相矛盾.
- (2) V^* 是极小支配集.
(反证) 否则, $\exists u \in V^*, V^* - \{u\}$ 是支配集, 则 $\exists v \in V^*, (u, v) \in E$, 与 V^* 是独立集相矛盾. #

定理13.2补充推论

- 无向图G, 则

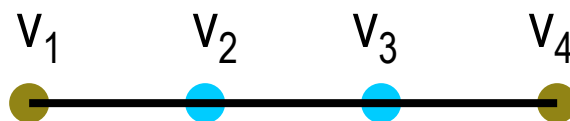
$$\gamma_0 \leq \beta_0$$

#



定理13.2逆命题反例

- 极小支配集不一定是(极大)独立集
 - $\{v_2, v_3\}$ 是极小支配集
 - $\{v_2, v_3\}$ 不是独立集, 当然不是极大独立集





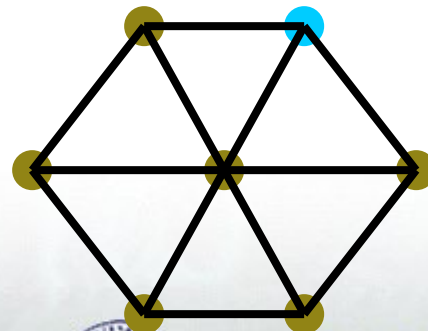
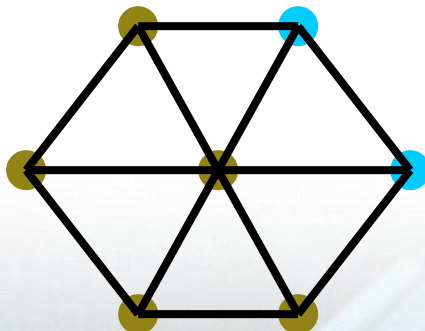
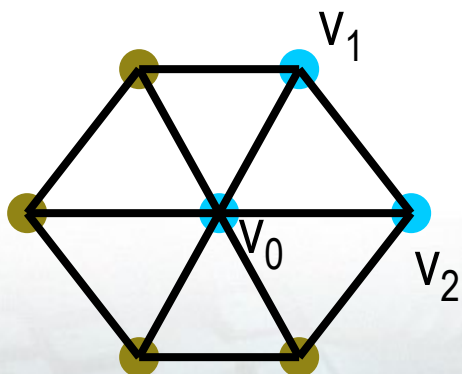
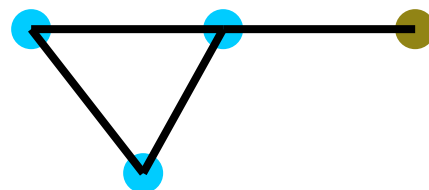
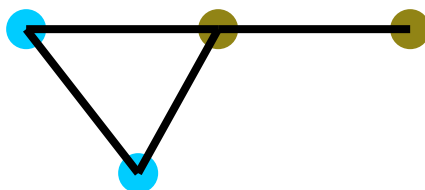
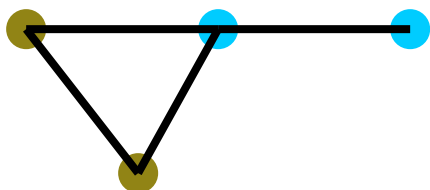
团

- 无向图 $G = \langle V, E \rangle$
- 团: $V^* \subseteq V$, $G[V^*]$ 是完全子图
- 极大团: 真母集都不是团的团
- 最大团: 顶点数最多的团
- 团数: $\nu_0(G) =$ 最大团的顶点数



团举例

- $\{v_0, v_1, v_2\}, \{v_1, v_2\}, \{v_1\}, v_0=3$





定理13.4

- 无向图 G ,
 V^* 是 G 的团 $\Leftrightarrow V^*$ 是 \overline{G} 的独立集. #
- 推论: 无向图 G ,
 - (1) $\alpha_0(G) = \beta_0(\overline{G})$
 - (2) V^* 是 G 的极(最)大团
 $\Leftrightarrow V^*$ 是 \overline{G} 的极(最)大独立集. #

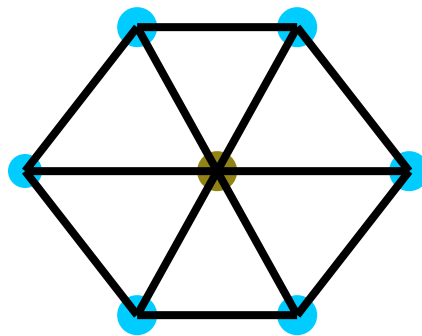
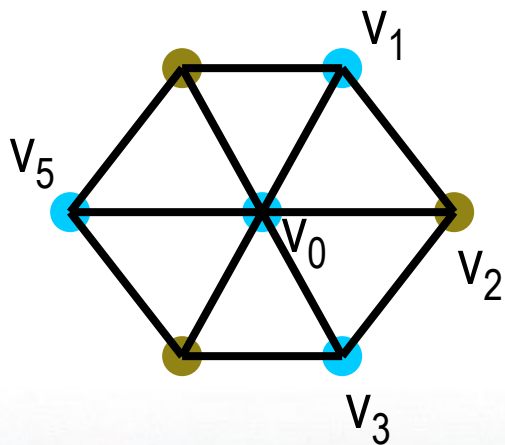


点覆盖

- 无向图 $G = \langle V, E \rangle$
- 点覆盖: $V^* \subseteq V, \forall e \in E, \exists v \in V^*, v \text{ 关联 } e$
 - 说明: 点覆盖要含所有带环点
- 极小点覆盖: 真子集都非点覆盖的点覆盖
 - 说明: 极小点覆盖不含任何孤立点
- 最小点覆盖: 顶点数最少的点覆盖
- 点覆盖数: $\alpha_0(G) =$ 最小点覆盖的顶点数

点覆盖举例

- $\{v_0, v_1, v_3, v_5\}, \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}, \alpha_0=4$

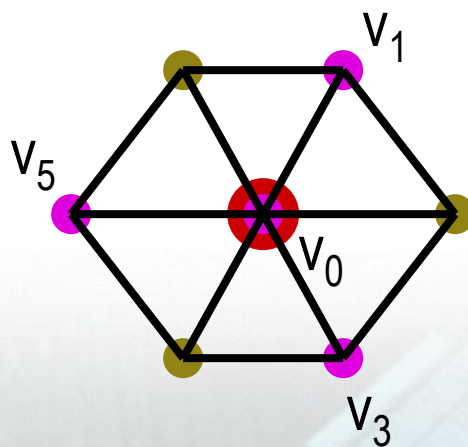


补充定理

- 无孤立点(~~连通~~)图中, 点覆盖是支配集

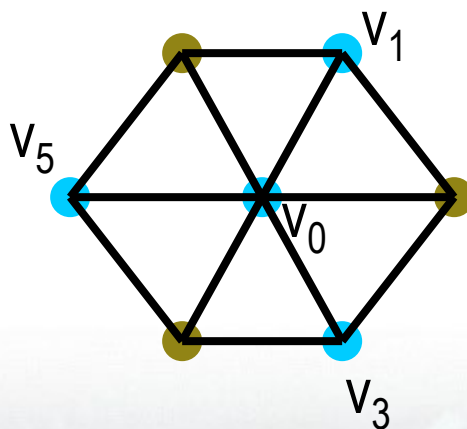
$$\gamma_0 \leq \alpha_0$$

- 点覆盖加所有孤立点是支配集



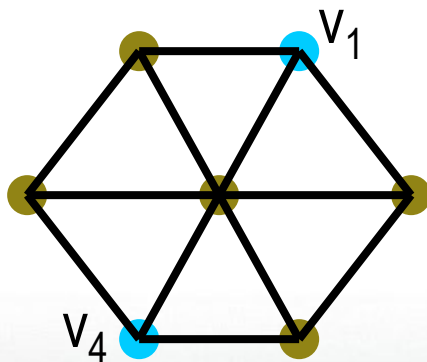
反例

- 极小点覆盖不一定是极小支配集
 - $\{v_0, v_1, v_3, v_5\}$ 是极小点覆盖
 - $\{v_1, v_3, v_5\}$ 是极小支配集



反例

- 支配集不一定是点覆盖
 - $\{v_1, v_4\}$ 是支配集
 - $\{v_1, v_4\}$ 不是点覆盖





定理13.3

- 无向图 G 无孤立点, $V^* \subset V$,

V^* 是点覆盖 $\Leftrightarrow V - V^*$ 是独立集.



定理13.3证明

• 证: (\Rightarrow)

(反证) 否则, $\exists u, v \in V - V^*, (u, v) \in E$,
则 V^* 不是点覆盖, 矛盾.

(\Leftarrow) $V - V^*$ 是独立集, $\forall (u, v) \in E$,

$(u, v) \in E \Rightarrow \neg (u \in V - V^* \wedge v \in V - V^*)$

$\Leftrightarrow u \in V^* \vee v \in V^* \Rightarrow V^*$ 是点覆盖. #



定理13.3推论

- 无向图G无孤立点,

V^* 是极(最)小点覆盖 $\Leftrightarrow V-V^*$ 是极(最)大独立集

$$\alpha_0 + \beta_0 = n \quad \#$$



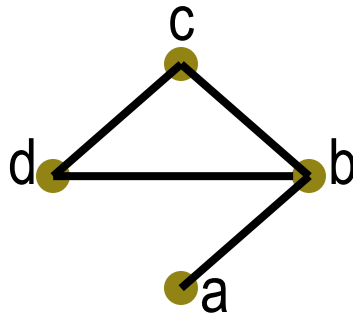
$\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \nu_0$ 之间关系

- $\alpha_0 + \beta_0 = n$ (无孤立点, 定理13.3推论).
- $\gamma_0 \leq \beta_0$ (定理13.2补充推论)
- $\gamma_0 \leq \alpha_0$ (无孤立点, 补充定理)
- $\nu_0(\mathbf{G}) = \beta_0(\overline{\mathbf{G}})$ (定理13.4推论)
- α_0, β_0, ν_0 都是难解的(intractable, hard)
 - 目前都没有多项式时间算法
 - 与哈密顿回路问题, 着色问题等 “一样难”



例13.1

- 求全体极小支配集, 极小点覆盖, 极大独立集

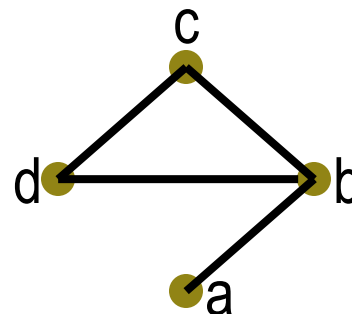


例13.1: 全体极小支配集

- $$\begin{aligned} & \prod_{v \in V} (v + \sum_{u \in \Gamma(v)} u) \\ &= (a+b)(b+a+c+d)(c+b+d)(d+c+b) \\ &= ac+ad+b. \end{aligned}$$

(幂等: $a+a=a$, $a \bullet a=a$, 逻辑加乘)

- $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b\}$ 是全体极小支配集.
- $\gamma_0=1$.

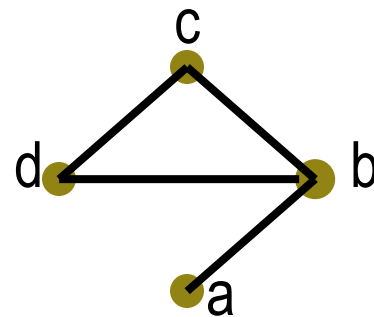


例13.1: 极小点覆盖

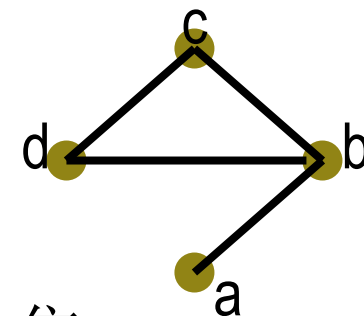
- $$\begin{aligned} & \prod_{(u,v) \in E} (u+v) \\ &= (a+b)(b+c)(b+d)(c+d) \\ &= bc+bd+acd. \end{aligned}$$

(幂等: $a+a=a$, $a \bullet a=a$, 逻辑加乘)

- $\{b,c\}$, $\{b,d\}$, $\{a,c,d\}$ 是全体极小点覆盖.
- $\alpha_0=2$.



例13.1: 极大独立集



- G 无孤立点,
 V^* 是极小点覆盖 $\Leftrightarrow V-V^*$ 是极大独立集.
- $\{b,c\}, \{b,d\}, \{a,c,d\}$ 是全体极小点覆盖,
- $\{a,d\}, \{a,c\}, \{b\}$ 是全体极大独立集.
- $\beta_0=2.$ #



小结

- 支配集, 支配数 γ_0
- 点独立集, 点独立数 β_0
- 点覆盖集, 点覆盖数 α_0
- 团, 团数 ν_0
- $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \nu_0$ 之间关系