



单元1.3 谓词逻辑预备知识

第一编 集合论 第一章 集合
1.1 预备知识（下）



北京大学

内容提要

一阶谓词逻辑中的

- 个体、谓词、量词等基本概念
- 几个重要的等值式
- 推理定律



北京大学

个体

将可以独立存在的客体（具体事务或抽象概念）称为个体或个体词，并用 a, b, c, \dots 表示个体常元，用 x, y, z, \dots 表示个体变元。（个体的函数还是个体，例如，设 a, b 是数， $f(a, b)$ 可以表示 a 和 b 的运算结果，如 $a+b$ 、 $a \bullet b$ 等。）

将个体变元的取值范围称为个体域，个体域可以是有穷或无穷集合。人们称由宇宙间一切事务组成的个体域为全总个体域。



北京大学

谓词

将表示个体性质或彼此之间关系的词称为谓词，常用 F, G, H, \dots 表示谓词常元或谓词变元，用 $F(x)$ 表示“ x 具有性质 F ”，用 $F(x,y)$ 表示“ x 和 y 具有关系 F ”。

例如，若 $F(x)$ 表示“ x 是黑色的”， a 表示黑板，则 $F(a)$ 表示“黑板是黑色的”；若 $F(x,y)$ 表示“ x 大于 y ”，则 $F(5,2)$ 表示“5大于2”。



北京大学

量词、全称量词

称表示数量的词为**量词**。

全称量词是自然语言中的“所有的”、“一切的”、“任意的”、“每一个”、“都”等的统称，用符号“ \forall ”表示。

用 $\forall x$ 表示个体域里的所有 x ；

用 $\forall x F(x)$ 表示个体域里所有 x 都有性质 F 。



北京大学

存在量词

存在量词是自然语言中的“有一个”、“至少有一个”、“存在着”、“有的”等的统称，用符号“ \exists ”表示。

用 $\exists x$ 表示存在个体域里的x；

用 $\exists x F(x)$ 表示在个体域里存在x具有性质F。



北京大学

命题符号化

一阶逻辑中**命题符号化**的两个基本公式：

个体域中所有有性质F的个体都有性质G，应符号化为

$\forall x (F(x) \rightarrow G(x))$ ，其中

$F(x)$: x具有性质F， $G(x)$: x具有性质G。

个体域中存在有性质F同时有性质G的个体，应符号化为

$\exists x (F(x) \wedge G(x))$ ，其中

$F(x)$: x具有性质F， $G(x)$: x具有性质G。



北京大学



例

将下面命题符号化

- ① 人都吃饭；
- ② 有人喜欢吃糖；
- ③ 男人都比女人跑得快（这是假命题）。

使用全总个体域。



北京大学

解①②

① 人都吃饭；

令 $F(x)$: x 是人， $G(x)$: x 吃饭。

命题符号化为 $\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$ 。

② 有人喜欢吃糖；

令 $F(x)$: x 是人， $G(x)$: x 喜欢吃糖。

命题符号化为 $\exists x(F(x) \wedge G(x))$ 。



北京大学

解③

③ 男人都比女人跑得快（这是假命题）。

令 $F(x)$: x 是男人, $G(y)$: y 是女人,

$H(x,y)$: x 比 y 跑得快。

命题符号化为

$$\forall x (F(x) \rightarrow \forall y (G(y) \rightarrow H(x,y)))$$

等值形式为

$$\forall x \forall y (F(x) \wedge G(y) \rightarrow H(x,y))$$



北京大学

一阶谓词逻辑公式及其分类

一阶谓词逻辑公式也简称为公式，它的形成规则类似于命题逻辑公式，只需加上一条，即若A是公式，则 $\forall x A$ 及 $\exists x A$ 也都是公式。

在公式 $\forall x A$ 和 $\exists x A$ 中，称x为指导变元，称A为相应量词的辖域。在 $\forall x$ 和 $\exists x$ 的辖域中，x的所有出现都称为是约束出现，A中不是约束出现的变元称为自由出现。



北京大学

例

$$\forall x (\ F(x) \rightarrow \exists y (\ G(y) \wedge H(x,y,z)))$$

$\forall x$ 的辖域为 $(F(x) \rightarrow \exists y (\ G(y) \wedge H(x,y,z)))$,

$\exists y$ 的辖域为 $(G(y) \wedge H(x,y,z))$,

除 z 是自由出现的变元外，其他变元都是约束出现的。

$$\forall x (\ F(x) \rightarrow \exists y (\ G(y) \wedge H(x,y,z)))$$

$$\forall x (\ F(x) \rightarrow \exists y (\ G(y) \wedge H(x,y,z)))$$



北京大学

解释

对于给定的公式A，如果指定A的个体域为已知的D，并用特定的个体常元取代A中的个体常元，用特定函数取代A中的函数变元，用特定的谓词取代A中的谓词变元，则就构成了A的一个解释。

给定的一个公式A可以有多种解释。



北京大学

例

给定公式A为 $\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$ ，有多种解释。

解释①：取个体域为实数集合，

$F(x)$: x 是有理数， $G(x)$: x 能表示成分数，

A解释为“有理数都能表示成分数”，这是真命题。

解释②：取个体域为全总个体域，

$F(x)$: x 是人， $G(x)$: x 长着黑头发，

A解释为“人都长着黑头发”，这是假命题。



北京大学

永真、永假、可满足、等值式

若 A 在任何解释下都为真，则称 A 为**永真式**。

若 A 在任何解释下都为假，则称 A 为**永假式**。

若 A 至少存在一个成真的解释，则称 A 为**可满足式**。

若 $A \leftrightarrow B$ 是永真式，则称 A 与 B 是**等值的**，记为 $A \Leftrightarrow B$ ，并称 $A \Leftrightarrow B$ 为**等值式**。



北京大学

基本等值式①②

① 在有限个体域 $D=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 中消去量词等值式：

$$(1) \forall x A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \dots \wedge A(a_n)$$

$$(2) \exists x A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \vee A(a_2) \vee \dots \vee A(a_n)$$

② 量词否定等值式：

$$(1) \neg \forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$$

$$(2) \neg \exists x A(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$$



北京大学

基本等值式③

③量词辖域收缩与扩张等值式(**B中不含x**):

- (1) $\forall x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \vee B$, (2) $\forall x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \wedge B$
- (3) $\forall x(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \rightarrow B$, (4) $\forall x(B \rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B \rightarrow \forall x A(x)$
- (5) $\exists x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \vee B$, (6) $\exists x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \wedge B$
- (7) $\exists x(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \rightarrow B$, (8) $\exists x(B \rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B \rightarrow \exists x A(x)$



北京大学

基本等值式④

④ 量词分配等值式

$$(1) \forall x(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$$

说明：全称量词对“ \wedge ”有分配律，但
全称量词对“ \vee ”不适合分配律。

$$(2) \exists x(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$$

说明：存在量词对“ \vee ”有分配律，但
存在量词对“ \wedge ”不适合分配律。



北京大学

前束范式

若公式 A 具有形式 $Q_1x_1Q_2x_2\dots Q_kx_kB$ ，则称 A 为前束范式，其中 Q_i ($1 \leq i \leq k$) 为 \forall 或 \exists ， B 中不含量词。

求前束范式时用基本等值式和换名规则。

换名规则：将公式 A 中某量词辖域中出现的某个约束出现的个体变元及相应的指导变元 x_i ，都改成公式 A 中没有出现过的 x_j ，所得公式 $A' \Leftrightarrow A$ 。



北京大学



例

$$\forall x F(x) \vee \neg \exists x G(x, y)$$

$$\Leftrightarrow \forall x F(x) \vee \forall x \neg G(x, y) \quad (\text{量词否定等值式})$$

$$\Leftrightarrow \forall x F(x) \vee \forall z \neg G(z, y) \quad (\text{换名规则})$$

$$\Leftrightarrow \forall x (F(x) \vee \forall z \neg G(z, y)) \quad (\text{辖域扩张等值式})$$

$$\Leftrightarrow \forall x \forall z (F(x) \vee \neg G(z, y)) \quad (\text{辖域扩张等值式})$$

$$\Leftrightarrow \forall x \forall z (G(z, y) \rightarrow F(x)) \quad (\text{蕴涵等值式})$$



北京大学

重要的推理定律

$$(1) \forall x A(x) \vee \forall x B(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \vee B(x))$$

$$(2) \exists x(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$$

$$(3) \forall x(A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \rightarrow \forall x B(x)$$

$$(4) \forall x(A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \rightarrow \exists x B(x)$$

说明：在使用以上4条推理定律时，千万注意，别将它们当成等值式用，这样会犯错误的。



北京大学

小结

逻辑符号：个体词 a, b, c, \dots 、谓词 $F(x), G(x, y), H(x, y, z), \dots$ 、

量词 $\forall \exists$

逻辑概念：公式、解释、永真式、永假式、可满足式、
等值式、等值演算、推理定律、前束范式

逻辑规则：换名规则



北京大学