21.4 多项式定理

定理 设n为正整数，x_i为实数，i=1, 2, … , t.

$$(x_1+x_2+\ldots+x_t)^n$$

$$=\sum_{\substack{\text{满足}n_1+\ldots+n_t=n\\ \text{的非负整数解}}}\binom{n}{n_1 n_2\ldots n_t}x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_t^{n_t}$$

推论1 不同的项数为方程

$$n_1+n_2+\ldots+n_t=n$$

的非负整数解个数 $C(n+t-1, n)$

推论2

$$\sum\binom{n}{n_1 n_2\ldots n_t}=t^n$$

定理证明

证：选 n_1 个因式贡献 x_1,

从 $n-n_1$ 个因式选 n_2 个因式贡献 x_2,

…

从 $n-n_1-n_2-\ldots-n_{t-1}$ 个因式中选 n_t 个因式贡献 x_t.

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-\ldots-n_{t-1}}{n_t}$$

$$=\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_t!}=\binom{n}{n_1 n_2 \ldots n_t}$$

多项式系数

组合意义

多项式系数 $\binom{n}{n_1 n_2 \ldots n_t}$

多重集的全排列数

n 个不同的球放到 t 个不同的盒子使得第一个盒子含 n_1 个球，第二个盒子含 n_2 个球，…，第 t 个盒子含 n_t 个球的方案数

多项式系数（续）

恒等式

- $$\sum\binom{n}{n_1 n_2 \ldots n_t}=t^n$$
- $$\binom{n}{n_1 n_2 \ldots n_t}=\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_t!}$$
- $$\binom{n}{n_1 n_2 \ldots n_t}=\binom{n-1}{n_1-1 \quad n_2 \ldots n_t}+\binom{n-1}{n_1 \; n_2-1 \ldots n_t}+\ldots+\binom{n-1}{n_1 n_2 \ldots n_t-1}$$

基本计数的应用

证明整除

命题 1：k 个连续正整数乘积可以被 $k!$整除（书上例 21.13）

命题 2　设 p 为素数，$p\neq 2$，证明当 $C(2p,p)$被 p 除时余数是 2.

证　$$\binom{2p}{p}=\binom{p}{0}^2+\binom{p}{1}^2+\ldots+\binom{p}{p}^2$$

由命题 1：$k!\mid p(p-1)\ldots(p-k+1)$

因此 $k!\mid (p-1)(p-2)\ldots(p-k+1)$，$p$ 为素数，$0<k<p$,

$$p\mid\binom{p}{k},\ 0<k<p,$$ $C(2p,p)$被 p 除余数为 $$\binom{p}{0}^2+\binom{p}{p}^2=2$$

基本计数的应用（续）

例 证明**Fermat小定理**：p为素数，则 $p|(n^p-n)$

证 （1）证明 若$\binom{p}{k_1k_2\ldots k_n}\neq 1$ 则 $p\left|\binom{p}{k_1k_2\ldots k_n}\right.$

$\binom{p}{k_1k_2\ldots k_n}=1$ 当且仅当存在 $k_j=p$，其他 $k_i=0$， $i\neq j$.

$\binom{p}{k_1k_2\ldots k_n}\neq 1$， $k_1!k_2!\ldots k_n!$ 中不含p，

从而 $k_1!k_2!\ldots k_n!$ 整除 $(p-1)!$

证明Fermat小定理（续）

（2）证明Fermat小定理

$$(x_1+x_2+\ldots+x_n)^p$$

$$=\sum_{\sum k_i=p}\binom{p}{k_1k_2\ldots k_n}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n}$$

令x_i=1， $n^p=\sum_{\sum k_i=p}\binom{p}{k_1k_2\ldots k_n}$

$\binom{p}{k_1k_2\ldots k_n}\neq 1$，则 $p\mid\binom{p}{k_1k_2\ldots k_n}$

右边恰有 n 项的值等于1，其余各项之和为 n^p-n

p 整除其余的每一项，因此 $p|(n^p-n)$

基本计数的应用（续）

Ipv4协议网址计数

32位地址　网络标识+主机标识

A类：最大网络；B类：中等网络；C：最小网络；

D：多路广播；　E：备用

限制条件：1111111　在A类中的 netid 部分无效

hostid 部分不允许全0或全1

A	0	netid（7位）	hostid　(24位)				
B	1	0	netid　（14位）	hostid（16位）			
C	1	1	0	netid　（21位）	hostid（8位）		
D	1	1	1	0	（28位）		
E	1	1	1	1	0	（27位）	

基本计数的应用（续）

	netid	hostid
A 类：	0+7 位，	24 位
B 类：	10+14 位，	16 位
C 类：	110+21 位，	8 位

限制条件：1111111 在 A 类中的 netid 部分无效

hostid 部分不允许全 0 或全 1

A 类：netid 2^7-1, hostid $2^{24}-2$，

地址数：$127\cdot16777214=2130706178$

B 类：netid 2^{14}, hostid $2^{16}-2$，

地址数：$16384\cdot65534=1073709056$

C 类：netid 2^{21}, hostid 2^8-2,

地址数：$2097152\cdot254=532676608$

$|A|+|B|+|C|=3737091842$. Ipv6 改为 128 位

本章小结

基本计数

计数法则：加法法则、乘法法则

计数模型：

选取问题：有序不重复、有序可重复（部分公式）

无序不重复、无序可重复（部分公式）

非降路径问题：基本公式

有限制条件的情况

方程的非负整数解问题子类型

放球问题子类型（球没区别）

处理方法：分类处理、分步处理、一一对应思想

本章小结（续）

组合恒等式 基本公式、证明方法、应用

求和 基本和式、求和方法、应用

计数符号

组合数或二项式系数 $C(m,n)$

排列数 $P(m,n)$

多项式系数 $\binom{n}{n_1 n_2 \ldots n_t}$

定义、基本公式、恒等式、对应的组合计数问题