



# 课程总结

## 集合论与图论



北京大学



# 内容提要

- 集合论部分的知识结构
- 图论部分的知识结构



北京大学



# 集合论的主要内容

- **研究对象：** 集合、关系、函数、自然数、基数
- **研究思想：**  
以逻辑为基础、以集合为工具、表示和构造各种数学对象
- **研究内容：**
  - 集合的基本概念：集合之间的关系、运算、恒等式
  - 二元关系：表示、性质、函数、等价关系、序关系
  - 自然数：皮亚诺系统、自然数的运算、性质
  - 基数：有穷集与无穷集、基数的比较
  - 序数：良序、超限归纳法



北京大学

# 集合论的主要模块

集合

基本概念

运算、性质

二元关系

表示、性质

等价关系

序关系

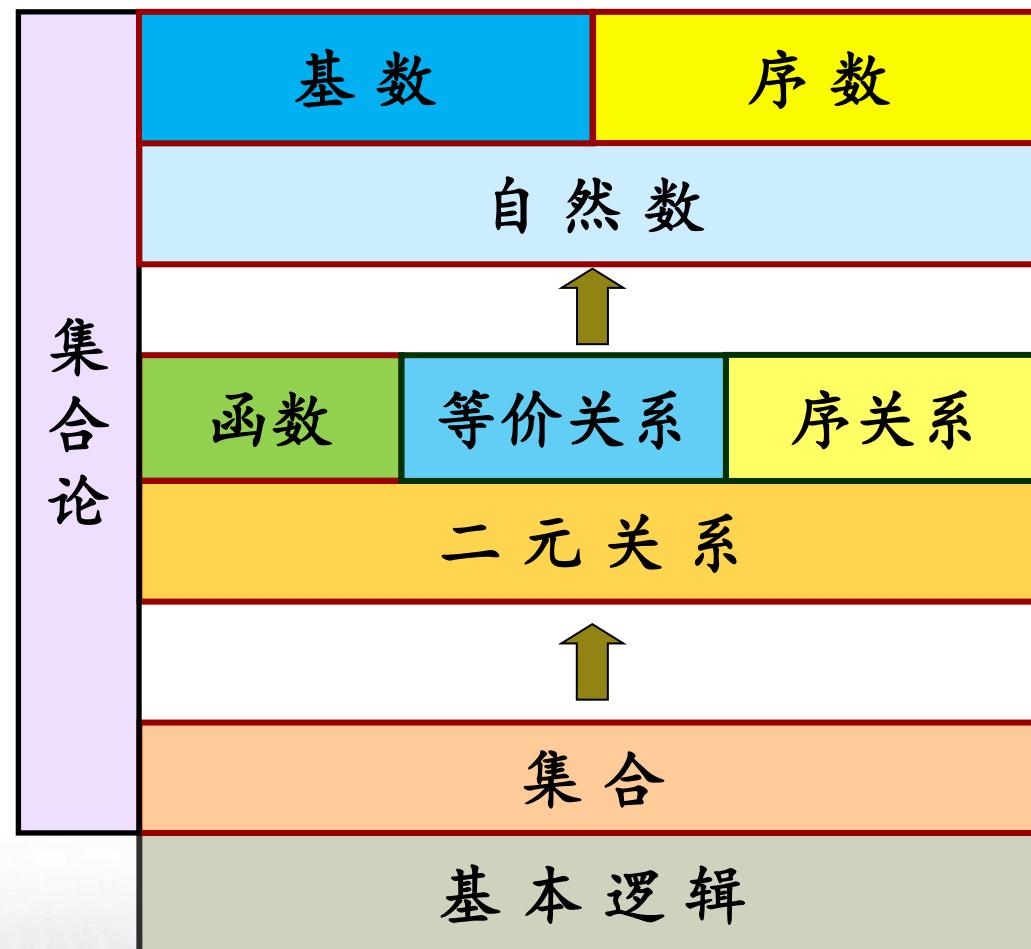
函数

自然数

皮亚诺系统

基数

序数



北京大学



# 集合

- 首先介绍了命题逻辑和一阶谓词逻辑的预备知识，为定义和证明集合之间的各种关系、运算、及其性质做好了准备；随后介绍了列举法、描述法等集合表示方法，定义了集合之间的包含、相等、真包含关系，以及空集、全集、幂集、集合的元素个数、集族、多重集等概念；接着定义了并集、交集、相对补集、对称差、绝对补集、广义并集、广义交集等集合运算以及集合运算的优先级，介绍了文氏图和容斥原理；最后介绍了包括幂等律、交换律、结合律、分配律、吸收律、德\*摩根律、零律、同一律、排中律、矛盾律、余补律、双重否定律、补交转换律在内的基本的集合恒等式，以及从定义出发和利用已知结论的两类半形式化证明方法。



北京大学



# 二元关系

- 首先定义了有序对、有序3元组、有序n元组、卡氏积的概念；接着定义了二元关系、 $A$ 到 $B$ 的二元关系、 $A$ 上的二元关系，介绍了空关系、恒等关系、全域关系、关系定义域、关系值域、关系域、关系逆、关系合成、关系限制、关系象、单根关系、单值关系等概念；随后介绍了关系矩阵、关系图等关系表示法，以及自反性、反自反性、对称性、反对称性、传递性等关系性质；又定义了关系的n次幂、关系的自反闭包、对称闭包、传递闭包等关系运算；最后分别介绍了等价关系和序关系，包括等价关系、等价类、商集、同余关系、划分、划分的块、划分的加细、Stirling子集数、偏序关系、偏序集、可比、覆盖、哈斯图、全序关系、全序集、拟序关系、拟序集、三歧性、拟全序关系、拟全序序集、良序、良序集、最大元、最小元、极大元、极小元、上界、下界、上确界、下确界、链、反链等概念。





# 函数

- 先定义了函数、偏函数、全函数、真偏函数等概念，再介绍了单射、满射、双射等函数性质，以及象、原象的概念和常数函数、恒等函数、特征函数、单调函数、自然映射等特殊函数，最后介绍了函数合成、反函数、单边逆等概念。



北京大学



# 自然数

- 先介绍了集合 $A$ 在函数 $F$ 下封闭的概念和皮亚诺系统的五条公设，接着介绍了从空集出发利用后继运算构造归纳集、自然数、自然数集的方法以及数学归纳法原理；最后介绍了传递集的概念，加 $m$ 函数、二元加法、乘 $m$ 函数、二元加法的递归定义，以及自然数集上的序。



北京大学



# 基数

- 先定义了集合的等势、有穷集、无穷集等概念和对角化证明方法；然后介绍了集合的基数，以及优势、劣势、绝对优势、绝对劣势等基数的比较，最后介绍了可数集、有穷可数集、无穷可数集，以及基数运算。



北京大学



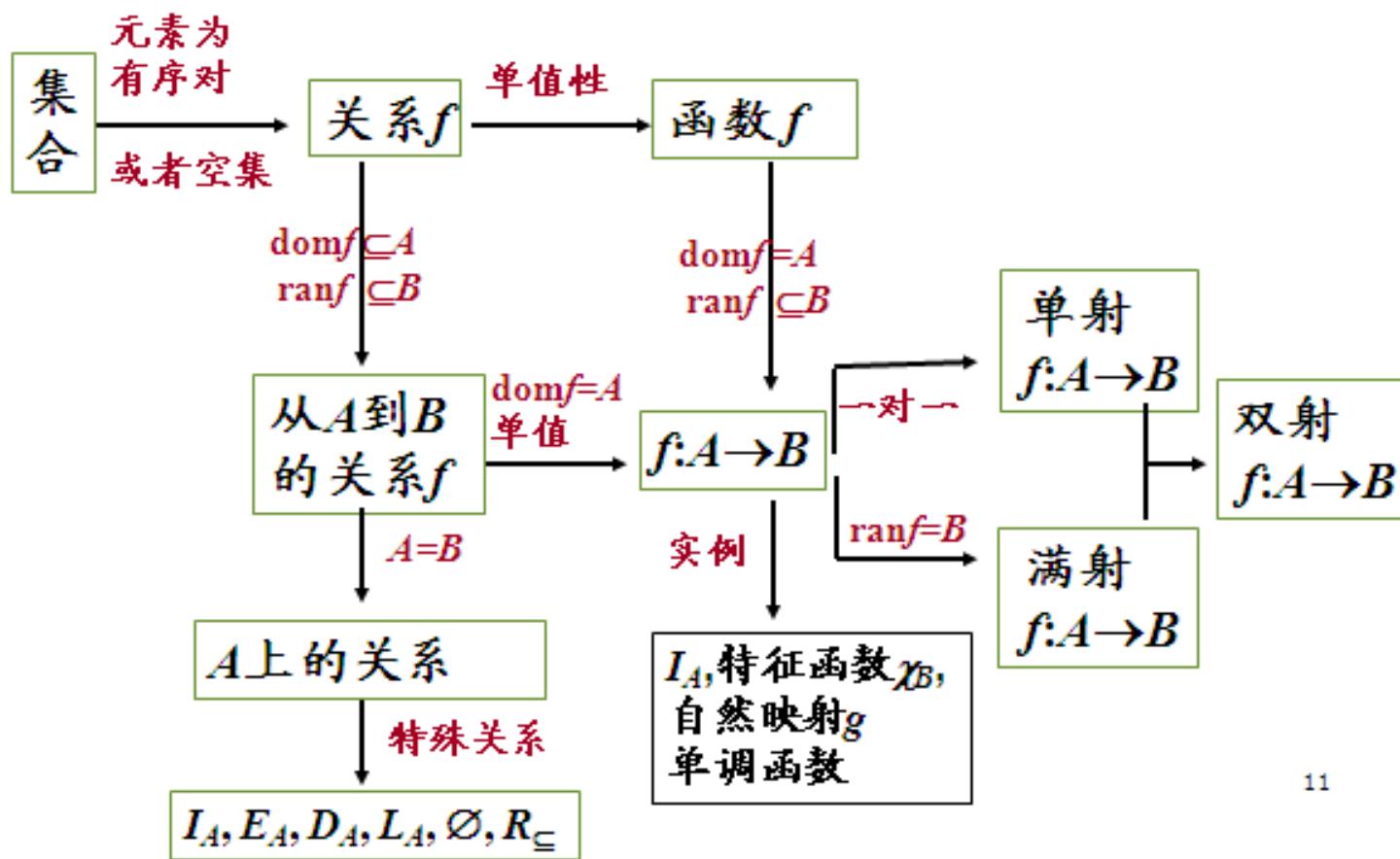
# 图论的主要内容

- **研究对象：**由顶点和边构成的图
- **研究思想：**  
以集合论为基础、以图为工具、为各种二元关系建立模型
- **研究内容：**
  - 图的基本概念：连通性、矩阵表示、带权图
  - 欧拉图、哈密顿图：边和顶点的遍历
  - 树：表示层级组织关系
  - 平面图：判定、表示、性质
  - 图的着色：各种调度问题的模型
  - 独立集、支配集、覆盖集、匹配：各种应用问题



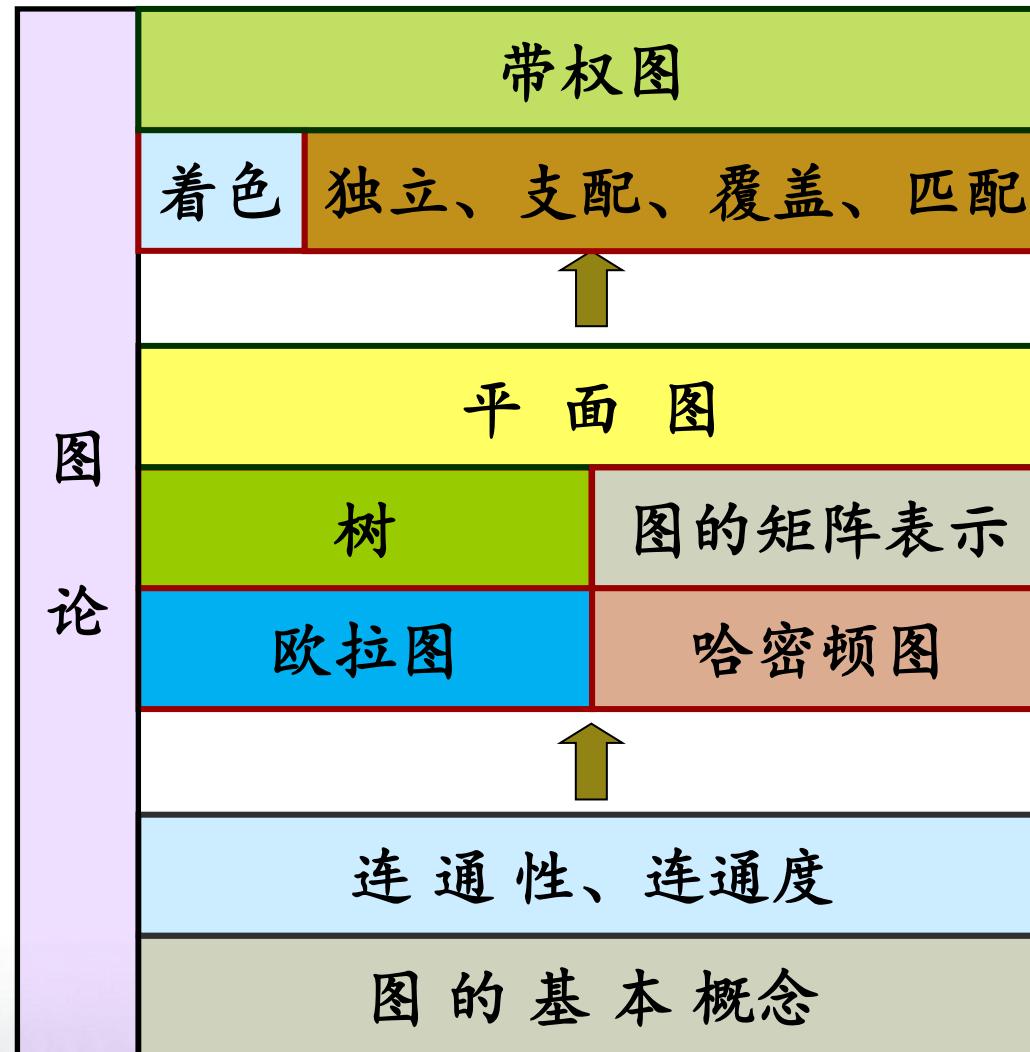
北京大学

# 内容之间的关联



# 图论的主要模块

图  
基本概念  
连通性  
欧拉图、哈密顿图  
树  
图的矩阵表示  
平面图  
着色  
独立支配覆盖匹配  
带权图





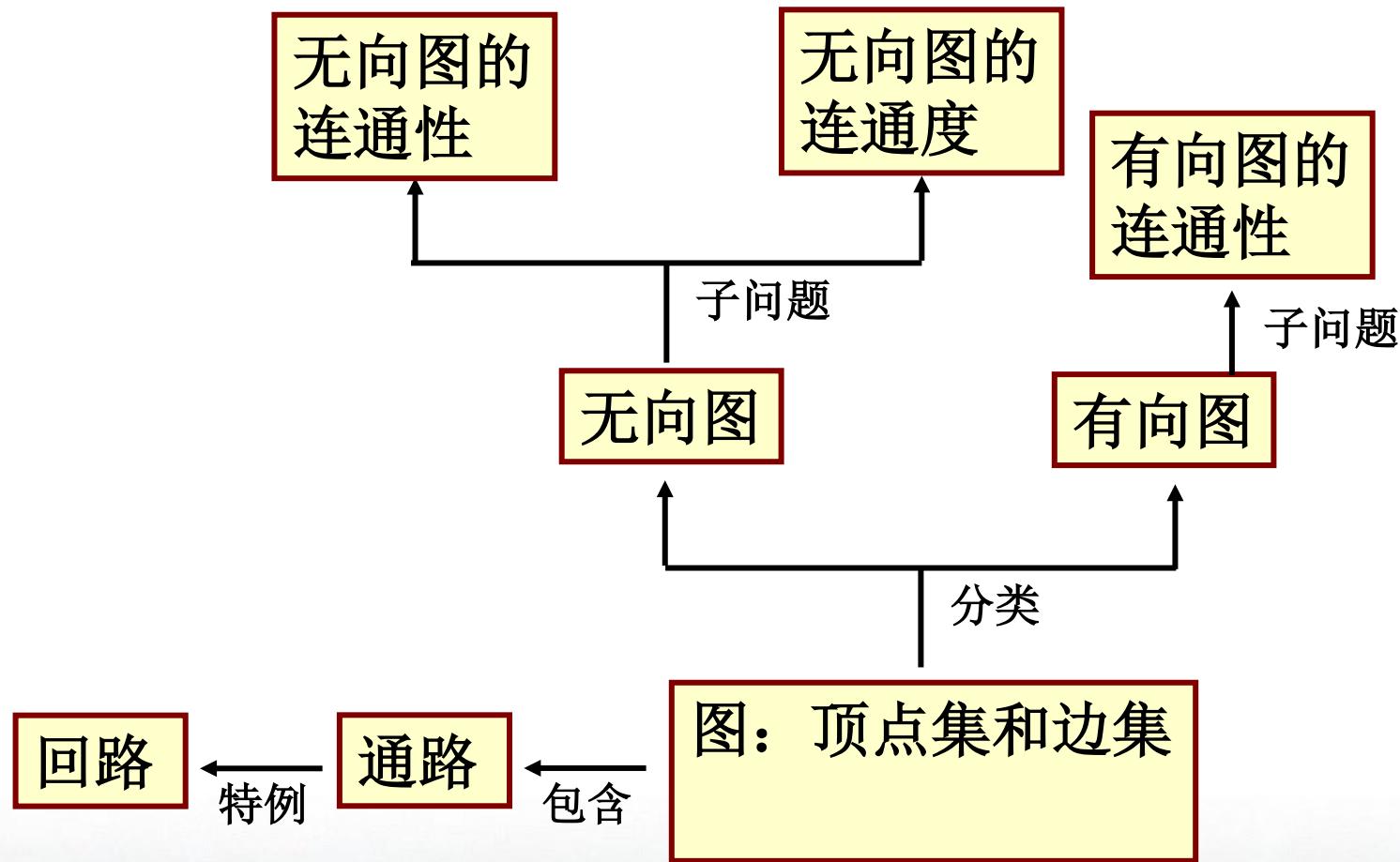
# 图的基本概念

- 图的基本概念：
  - 顶点集，边集，相邻，度数，同构
  - 有向图与无向图
- 特殊图：空图，零图，简单图，竞赛图，完全图
- 通路与回路：极大路径法
- 图的连通性
  - 有向图的连通性，无向图的连通性
  - 连通分支，割集



北京大学

# 知识模块结构



北京大学



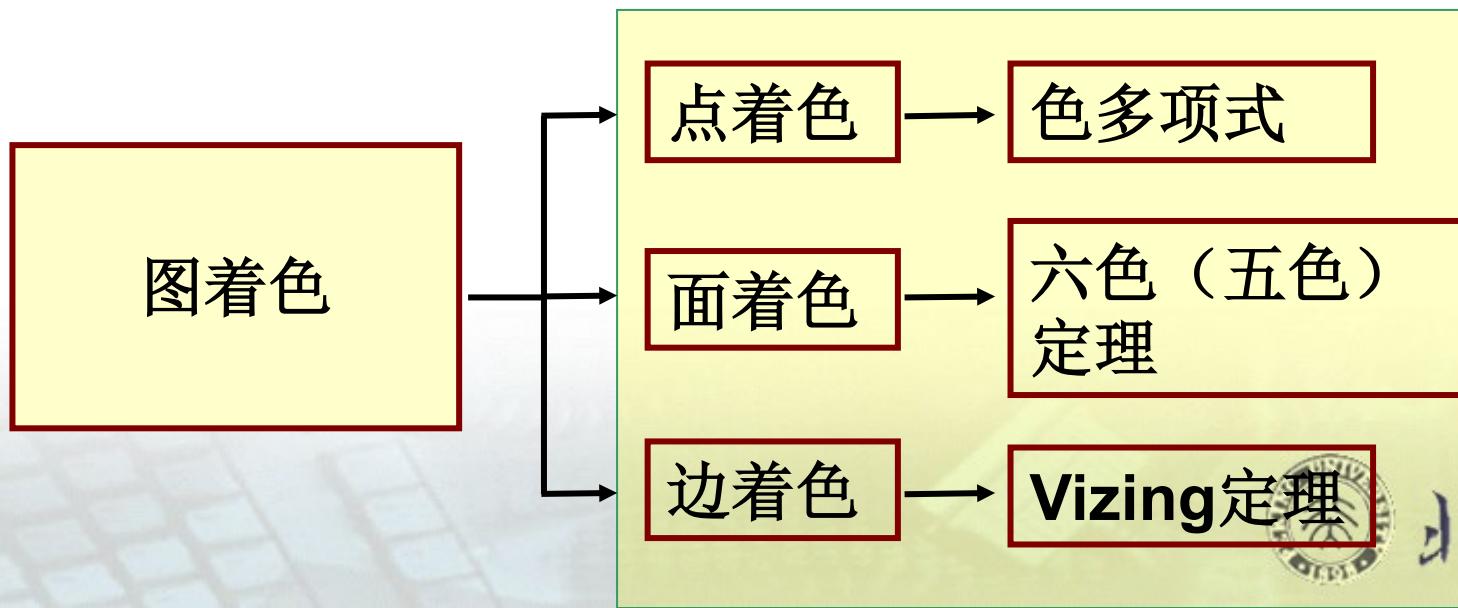
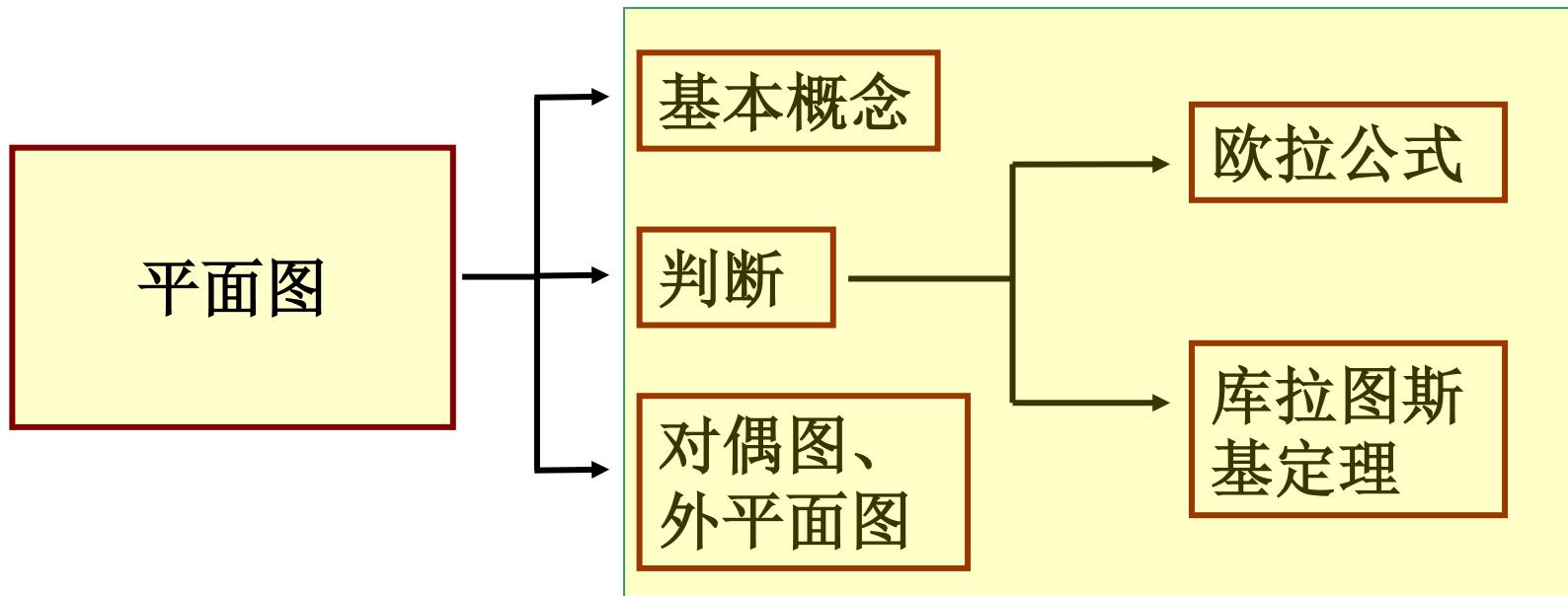
# 平面图和图的着色

- 平面图的基本概念
- 欧拉公式和库拉图斯基定理
- 对偶图，外平面图，平面哈密顿图
- 图着色
  - 点着色，色多项式
  - 面着色，六色（五色）定理
  - 边着色，Vizing 定理

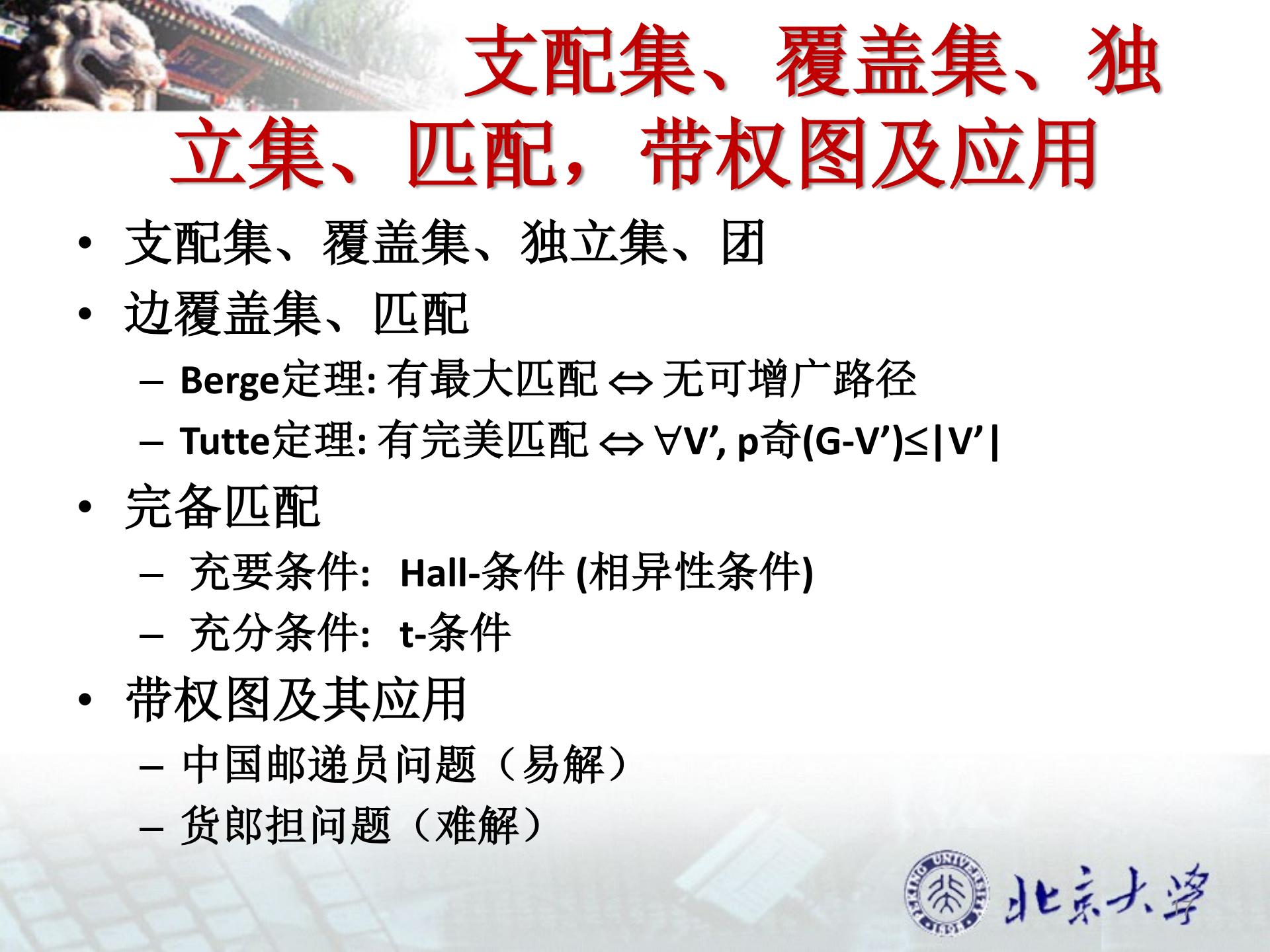


北京大学

# 知识模块结构



北京大学



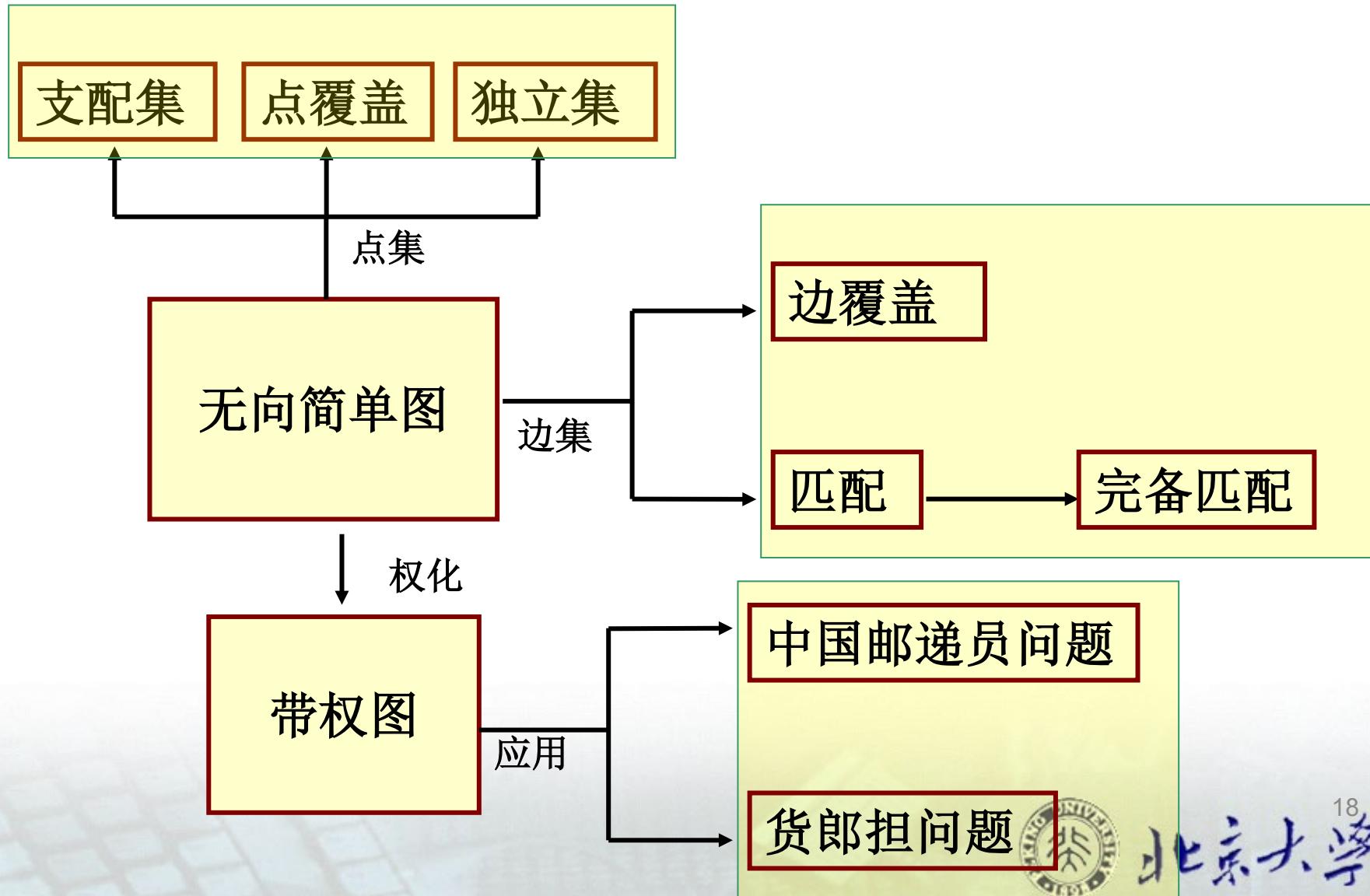
# 支配集、覆盖集、独立集、匹配，带权图及应用

- 支配集、覆盖集、独立集、团
- 边覆盖集、匹配
  - Berge定理: 有最大匹配  $\Leftrightarrow$  无可增广路径
  - Tutte定理: 有完美匹配  $\Leftrightarrow \forall V', p_{\text{奇}}(G-V') \leq |V'|$
- 完备匹配
  - 充要条件: Hall-条件 (相异性条件)
  - 充分条件: t-条件
- 带权图及其应用
  - 中国邮递员问题 (易解)
  - 货郎担问题 (难解)



北京大学

# 知识模块结构





谢谢!



北京大学