

19.3 特殊的格

- 模格
- 分配格
- 有界格
- 有补格
- 布尔格

模 格

定义 L 为格，若 $\forall a, b, c \in L$,

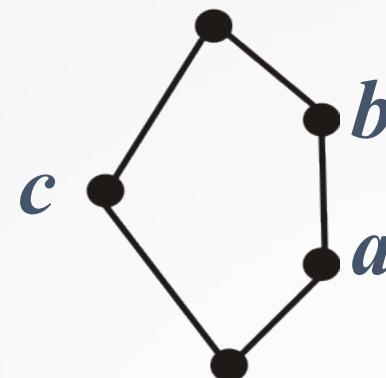
$$a \leq b \Rightarrow a \vee (c \wedge b) = (a \vee c) \wedge b$$

则称 L 为模格.

实例：

钻石格为模格

五角格不是模格



模格---模律： $a \leq b \Rightarrow a \vee (c \wedge b) = (a \vee c) \wedge b$

格--模不等式： $a \leq b \Rightarrow a \vee (c \wedge b) \leq (a \vee c) \wedge b$

模格判别条件

L 为模格当且仅当 L 不含有与五角格同构的子格.

充分性: 假设 L 不是模格, 则存在 $a,b,c \in L$, 使得

$$a \leq b, a \vee (c \wedge b) \prec (a \vee c) \wedge b,$$

取 5 个元素 x, y, z, u, v 如图.

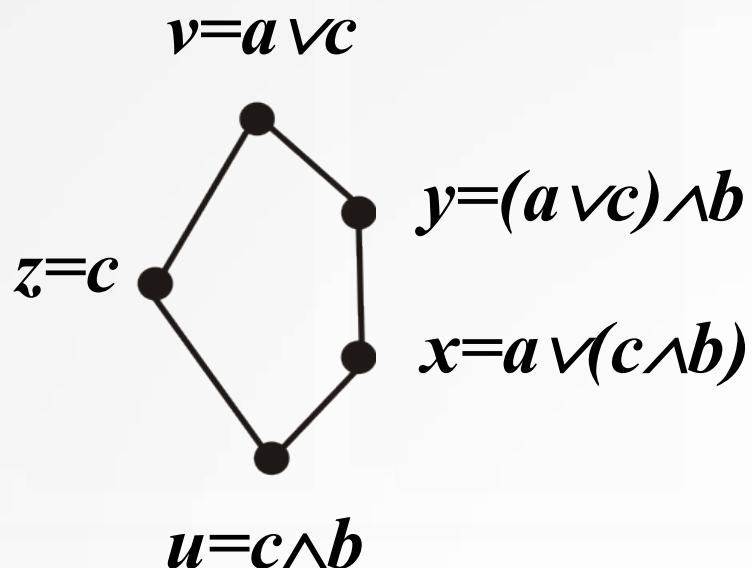
证明思路:

$$u \leq x \prec y \leq v, \quad u \leq c \leq v$$

$$x \wedge c = y \wedge c = u, \quad x \vee c = y \vee c = v$$

u, x, y, z, v 两两不等,

构成 L 的 5 元子格



模格判别条件（续）

L 为模格当且仅当

$$\forall a, b, c \in L, a \leq b, a \vee c = b \vee c, a \wedge c = b \wedge c \Rightarrow a = b$$

证：

“ \Leftarrow ” 若不是模格，则存在子格与五角格同构，必有 a, b, c 构成如图的子格，与条件矛盾。

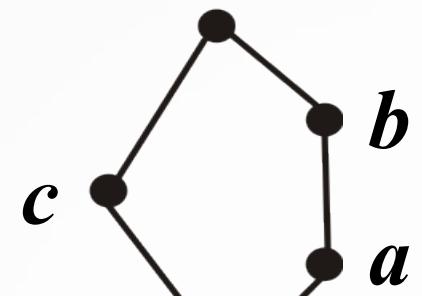
“ \Rightarrow ” 设 L 为模格，

$$\forall a, b, c \in L, a \leq b, a \vee c = b \vee c, a \wedge c = b \wedge c$$

$$a = a \vee (a \wedge c) = a \vee (b \wedge c)$$

$$= a \vee (c \wedge b) = (a \vee c) \wedge b$$

$$= (b \vee c) \wedge b = b$$



分配格

定义 设 L 为格，若 $\forall a,b,c \in L$ 有

$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ 或 $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
则 L 为分配格.

注：在任何格中两个分配等式是等价的.

例如 $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \Rightarrow a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

证 $(a \vee b) \wedge (a \vee c)$

$$\begin{aligned} &= ((a \vee b) \wedge a) \vee ((a \vee b) \wedge c) \quad (\wedge \text{对} \vee \text{的分配律}) \\ &= a \vee ((a \wedge c) \vee (b \wedge c)) \quad (\text{吸收律}, \wedge \text{对} \vee \text{的分配律}) \\ &= (a \vee (a \wedge c)) \vee (b \wedge c) = a \vee (b \wedge c) \quad (\text{结合律}, \text{吸收律}) \end{aligned}$$

反之，同理可证.

分配格判别定理

定理1 设 L 为模格, L 为分配格当且仅当

若 $\forall a, b, c \in L$ 有

$$(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) = (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a)$$

注: 一般格成立不等式

$$(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) \leq (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a)$$

定理2 设 L 为模格, L 为分配格当且仅当 L 不含有与钻石格同构的子格.

判别定理一的证明

条件: $(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) = (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a)$

证: “ \Leftarrow ” $\forall a, b, c \in L$

$$\begin{aligned} a \wedge (b \vee c) &= a \wedge (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a) && (\text{吸收律}) \\ &= (\underline{(a \wedge b)} \vee ((b \wedge c) \vee (c \wedge a))) \wedge a && (\text{等式替代}) \\ &= (a \wedge b) \vee (((\underline{b \wedge c}) \vee (\underline{c \wedge a})) \wedge a) && (\text{模律 } a \wedge b \leq a) \\ &= (a \wedge b) \vee (((\underline{c \wedge a}) \vee (b \wedge c)) \wedge a) && (\text{交换律}) \\ &= (a \wedge b) \vee (c \wedge a) \vee (\underline{b \wedge c \wedge a}) && (\text{模律 } c \wedge a \leq a) \\ &= (a \wedge b) \vee (a \wedge c) && (\text{交换律, 上界}) \end{aligned}$$

判别定理一的证明（续）

“ \Rightarrow ”

$$\begin{aligned}& \underline{(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a)} \\&= [(\underline{(a \wedge b) \vee b}) \wedge ((a \wedge b) \vee c)] \vee (c \wedge a) \quad (\text{分配律}) \\&= [b \wedge (a \vee c) \wedge \underline{(b \vee c)}] \vee (c \wedge a) \quad (\text{吸收、分配律}) \\&= (b \wedge \underline{(a \vee c)}) \vee (c \wedge a) \quad (\text{吸收律}) \\&= (b \vee c) \wedge (b \vee a) \wedge (a \vee c \vee c) \wedge (a \vee c \vee a) \quad (\text{分配律}) \\&= (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a) \quad (\text{交换、幂等律})\end{aligned}$$

判别定理二的证明

充分性. 假设模格 L 不是分配格, 则 $\exists a,b,c \in L$ 使得

$$(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) < (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a)$$

令

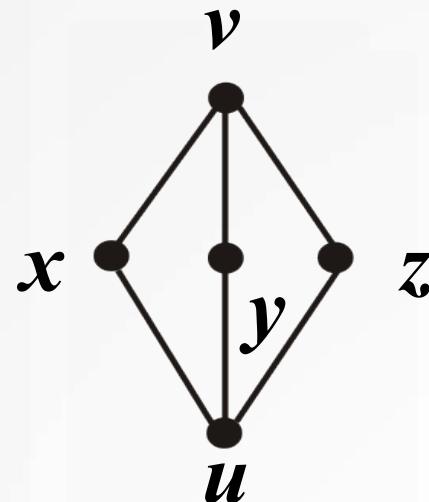
$$u = (a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a)$$

$$v = (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a)$$

$$x = u \vee (a \wedge v)$$

$$y = u \vee (b \wedge v)$$

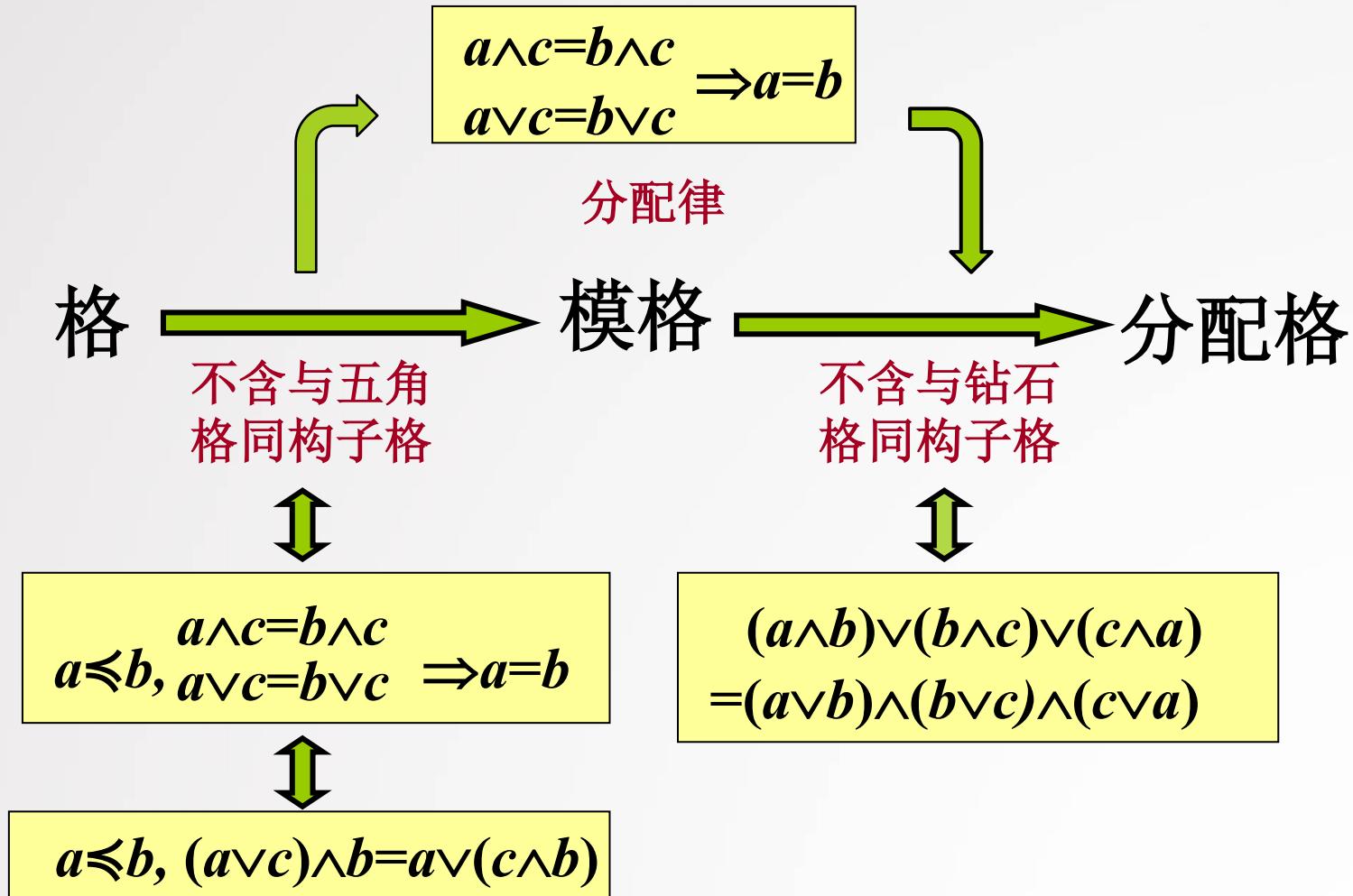
$$z = u \vee (c \wedge v)$$



则可以证明 u, v, x, y, z 构成钻石格.

注: 所有的链为分配格, 4 元以下的格为分配格.

模格、分配格之间关系



有界格与有补格

全下界 0 和全上界 1

全上界是格的最大元，全下界是格的最小元

有界格

有界格的定义：存在全上界及全下界的格

有界格的表示： $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$

有限格一定有界，无限格不一定（幂集格有界）

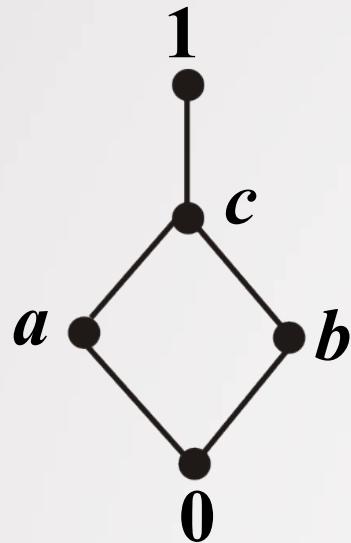
有界格的性质：

$$(1) a \wedge 1 = a, a \vee 0 = a, a \vee 1 = 1, a \wedge 0 = 0,$$

(2) 对偶命题：如果有 0,1，则 0 与 1 互换。

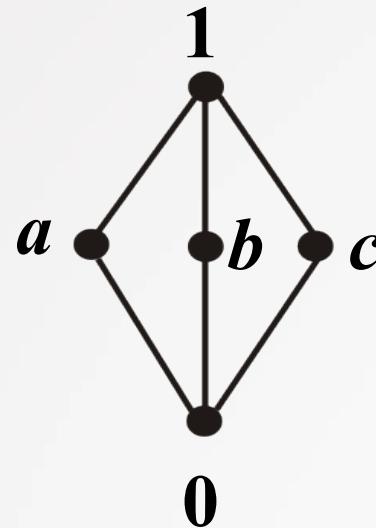
补元与有补格

$a \wedge b = 0, a \vee b = 1$, 则 a 与 b 互为补元.



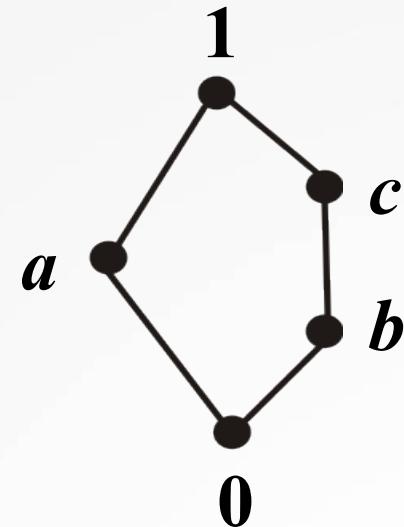
0与1互补

a, b, c 没补元



0与1互补

a, b, c 中任两个元素都互补



0与1互补

a 与 b, c 互补

有补格

补元性质：

有界分配格中元素 x 如果存在补元，则是唯一的

有补格定义：每个元素都有补元的有界格

思考：

求补是否为有补格上的一元运算？

求补是否为分配格上的一元运算？

19.4 布尔代数

- 布尔代数定义
- 布尔代数性质
- 布尔代数的同态
- 有限布尔代数的结构

布尔代数的定义

定义 有补分配格称为**布尔格**（布尔代数）

实例：幂集格

定理 设 $\langle B, *, \circ, \Delta, a, b \rangle$ 是代数系统，其中 $*, \circ$ 为二元运算， Δ 为一元运算， a, b 为0元运算。如果满足以下算律：

交换律 $x * y = y * x, x \circ y = y \circ x$

分配律 $x * (y \circ z) = (x * y) \circ (x * z)$

$x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z)$

同一律 $x * b = x, x \circ a = x$

补元律 $x * \Delta x = a, x \circ \Delta x = b$

则 $\langle B, *, \circ, \Delta, a, b \rangle$ 构成布尔格。

定理证明

证明思路：由 b, a 分别为 * 和 \circ 运算的单位元，证 b 和 a 恰为 \circ 和 * 运算的零元；再证吸收律、结合律

证：(1) $x \circ b = (x \circ b) * b = (x \circ b) * (x \circ \Delta x)$

$$= x \circ (\Delta x * b) = x \circ \Delta x = b$$

$$x * a = (x * a) \circ a = (x * a) \circ (x * \Delta x)$$

$$= x * (\Delta x \circ a) = x * \Delta x = a$$

(2) 证吸收律

$$x \circ (x * y) = (x * b) \circ (x * y) = x * (b \circ y) = x * b = x$$

$$x * (x \circ y) = (x \circ a) * (x \circ y) = x \circ (a * y) = x \circ a = x$$

定理证明（续）

(3) 证结合律 命题 $x \circ y = x \circ z, \Delta x \circ y = \Delta x \circ z \Rightarrow y = z$

$$(x \circ y) * (\Delta x \circ y) = (x \circ z) * (\Delta x \circ z)$$

$$\Rightarrow (x * \Delta x) \circ y = (x * \Delta x) \circ z \Rightarrow a \circ y = a \circ z \Rightarrow y = z$$

$$x \circ (x * (y * z)) = x,$$

$$x \circ ((x * y) * z) = (x \circ (x * y)) * (x \circ z) = x,$$

$$x \circ (x * (y * z)) = x \circ ((x * y) * z)$$

$$\Delta x \circ (x * (y * z)) = (\Delta x \circ x) * (\Delta x \circ (y * z)) = \Delta x \circ (y * z)$$

$$\Delta x \circ ((x * y) * z) = (\Delta x \circ (x * y)) * (\Delta x \circ z) = \Delta x \circ (y * z)$$

$$\Delta x \circ (x * (y * z)) = \Delta x \circ ((x * y) * z)$$

于是, $x * (y * z) = (x * y) * z$

定理的证明（续）

$\langle B, *, \circ \rangle$ 构成分配格，

可定义偏序使得 $*$, \circ 分别表示求下界和上界运算.

由同一律知道 a 为全下界, b 为全上界.

由补元律知道 Δx 就是 x 的补元.

因此 B 构成布尔格.

布尔代数的性质

双重否定律

D.M律

$$\begin{aligned}\text{等价条件1 } a \leq b &\Leftrightarrow a \wedge b = a \Leftrightarrow a \vee b = b \\ &\Leftrightarrow a \wedge \bar{b} = 0 \Leftrightarrow \bar{a} \vee b = 1\end{aligned}$$

$$\text{等价条件2 } a \leq b \Leftrightarrow \bar{b} \leq \bar{a}$$

布尔代数的同态

定义 B_1, B_2 为布尔代数, $f: B_1 \rightarrow B_2$, 若

$$f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$$

$$f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$$

$$f(\bar{x}) = \overline{f(x)}$$

则称 f 为 B_1 到 B_2 的同态

同态判定:

三个等式仅需要两个, 其中等式 1 和 2 不独立.

命题的证明

证明

$$\begin{aligned} f(x \wedge y) &= f(x) \wedge f(y), \quad f(\bar{x}) = \overline{f(x)} \\ \Rightarrow f(x \vee y) &= f(x) \vee f(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x \vee y) &= f(\overline{\overline{x} \vee \overline{y}}) \\ &= f(\overline{\overline{x} \wedge \overline{y}}) = \overline{f(\overline{x} \wedge \overline{y})} \\ &= \overline{f(\bar{x}) \wedge f(\bar{y})} = \overline{\overline{f(x)} \wedge \overline{f(y)}} \\ &= f(x) \vee f(y) \end{aligned}$$

有限布尔代数的结构

有限布尔代数的表示定理

设 B 是有限布尔代数， A 是 B 的全体原子的集合，则 B 与 $P(A)$ 同构。

证明思路：小于 b 的原子为 a_1, a_2, \dots, a_k ,

那么 $b = a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_k$

映射 f 满足： $f(b) = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$

可以证明 $f: B \rightarrow P(A)$ 为同构映射

任何有限布尔代数元素数为 2^n .

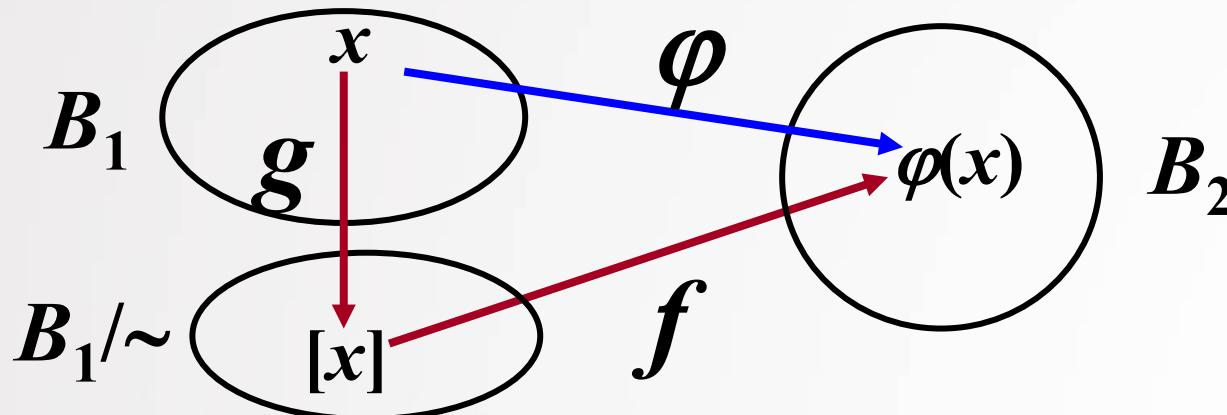
任何有限布尔代数都同构于 $\{0,1\}^n$.

例 题

例1 设 φ 是布尔代数 B_1 到 B_2 的满同态映射，
 \sim 是 φ 导出的 B_1 上的同余关系. $g: B_1 \rightarrow B_1/\sim$ 是自然
映射， $\forall x \in B_1$,

$$g(x) = [x] = \{ y \mid y, x \in B_1 \text{ 且 } \varphi(y) = \varphi(x) \}.$$

证明存在唯一的同构映射 $f: B_1/\sim \rightarrow B_2$ 使得 $f \circ g = \varphi$.



同构 f 的存在性

证：令 $f: B_1/\sim \rightarrow B_2, f([x]) = \varphi(x)$, 则

$$[x] = [y] \Leftrightarrow x \sim y \Leftrightarrow \varphi(x) = \varphi(y)$$

于是 f 为良定义的，且为单射。

对于 $y \in B_2$, 由于 φ 为满射, $\exists x \in B_1$, 使得 $\varphi(x) = y$, 从而有

$f([x]) = \varphi(x) = y$. 于是 f 为满射。

下面证明 f 为同态映射. $\forall [x], [y] \in B_1/\sim$,

$$f([x] \wedge [y]) = f([x \wedge y]) = \varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \wedge \varphi(y) = f([x]) \wedge f([y])$$

$$f(\overline{[x]}) = f(\overline{[x]}) = \varphi(\overline{x}) = \overline{\varphi(x)} = \overline{f([x])}$$

综合上述有 $B_1/\sim \cong B_2$.

同构 f 的性质

下面证明 $f \circ g = \varphi$. $\forall x \in B_1$,

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f([x]) = \varphi(x)$$

于是 $f \circ g = \varphi$.

再证明满足这一条件的 f 是唯一的. 假设存在 f_1 ,
 f_2 使得 $f_1 \circ g = \varphi$, $f_2 \circ g = \varphi$. 那么 $\forall x \in B_1$,

$$f_1 \circ g(x) = f_2 \circ g(x).$$

于是

$$f_1(g(x)) = f_2(g(x)) \Rightarrow f_1([x]) = f_2([x])$$

由于 x 的任意性, 必有 $f_1 = f_2$.