



单元-2.2 二元关系

第一编 集合论 第2章二元关系

2.2 二元关系



北京大学



内容提要

- n 元关系
- 二元关系
- A 到 B 的二元关系
- A 上的二元关系
- 一些特殊关系





n元关系

- n元关系: 其元素全是有序n元组的集合.
- 例1: $F_1 = \{ \langle a, b, c, d \rangle, \langle 1, 2, 3, 4 \rangle, \langle \text{物理}, \text{化学}, \text{生物}, \text{数学} \rangle \}$,
 F_1 是4元关系. #
- 例2: $F_2 = \{ \langle a, b, c \rangle, \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle, \langle \text{大李}, \text{小李}, \text{老李} \rangle \}$
 F_2 是3元关系. #





二元关系

- **2元关系(关系)**: 元素全是有序对的集合.
- 例3: $R_1 = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle \alpha, \beta \rangle, \langle a, b \rangle \}$
 R_1 是2元关系. #
- 例4: $R_2 = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle \text{白菜}, \text{小猫} \rangle \}$
 R_2 是2元关系. #
- 例5: $A = \{ \langle a, b \rangle, \langle 1, 2, 3 \rangle, a, \alpha, 1 \}$
当 $a, \alpha, 1$ 不是有序对时, A 不是关系. #





二元关系的记号

- 设 F 是二元关系, 则

$$\langle x, y \rangle \in F \Leftrightarrow x \text{ 与 } y \text{ 具有 } F \text{ 关系} \Leftrightarrow xFy$$

- 对比: xFy (中缀(infix)记号)
 $F(x, y), Fxy$ (前缀(prefix)记号)
 $\langle x, y \rangle \in F, xyF$ (后缀(suffix)记号)
- 例如: $2<15 \Leftrightarrow <(2, 15) \Leftrightarrow \langle 2, 15 \rangle \in <.$





A到B的二元关系

- A到B的二元关系：是 $A \times B$ 的任意子集.

R是A到B的二元关系

$$\Leftrightarrow R \subseteq A \times B \Leftrightarrow R \in P(A \times B)$$

- 若 $|A|=m, |B|=n$, 则 $|A \times B|=mn$, 故

$$|P(A \times B)| = 2^{mn}$$

即A到B不同的二元关系共有 2^{mn} 个





A到B的二元关系举例

- 设 $A=\{a_1, a_2\}$, $B=\{b\}$,

则A到B的二元关系共有4个:

$$R_1=\emptyset, R_2=\{\langle a_1, b \rangle\}, R_3=\{\langle a_2, b \rangle\},$$

$$R_4=\{\langle a_1, b \rangle, \langle a_2, b \rangle\}.$$

B到A的二元关系也有4个:

$$R_5=\emptyset, R_6=\{\langle b, a_1 \rangle\}, R_7=\{\langle b, a_2 \rangle\},$$

$$R_8=\{\langle b, a_1 \rangle, \langle b, a_2 \rangle\}. \quad \#$$





A上的二元关系

- A上的二元关系：是 $A \times A$ 的任意子集
R是A上的二元关系

$$\Leftrightarrow R \subseteq A \times A \Leftrightarrow R \in P(A \times A)$$

- 若 $|A|=m$, 则 $|A \times A|=m^2$, 故

$$|P(A \times A)| = 2^{m^2}$$

即A上不同的二元关系共有 2^{m^2} 个

- $m=3$?





A上的二元关系(例1)

- 例1: 设 $A=\{a_1, a_2\}$,
则A上的二元关系共有16个:

$$R_1 = \emptyset,$$

$$R_2 = \{ \langle a_1, a_1 \rangle \},$$

$$R_3 = \{ \langle a_1, a_2 \rangle \},$$

$$R_4 = \{ \langle a_2, a_1 \rangle \},$$

$$R_5 = \{ \langle a_2, a_2 \rangle \},$$





A上的二元关系(例1)

$$R_6 = \{ \langle a_1, a_1 \rangle, \langle a_1, a_2 \rangle \},$$

$$R_7 = \{ \langle a_1, a_1 \rangle, \langle a_2, a_1 \rangle \},$$

$$R_8 = \{ \langle a_1, a_1 \rangle, \langle a_2, a_2 \rangle \},$$

$$R_9 = \{ \langle a_1, a_2 \rangle, \langle a_2, a_1 \rangle \},$$

$$R_{10} = \{ \langle a_1, a_2 \rangle, \langle a_2, a_2 \rangle \},$$

$$R_{11} = \{ \langle a_2, a_1 \rangle, \langle a_2, a_2 \rangle \},$$



A上的二元关系(例1)

$$R_{12} = \{ \langle a_1, a_1 \rangle, \langle a_1, a_2 \rangle, \langle a_2, a_1 \rangle \}$$

$$R_{13} = \{ \langle a_1, a_1 \rangle, \langle a_1, a_2 \rangle, \langle a_2, a_2 \rangle \}$$

$$R_{14} = \{ \langle a_1, a_1 \rangle, \langle a_2, a_1 \rangle, \langle a_2, a_2 \rangle \}$$

$$R_{15} = \{ \langle a_1, a_2 \rangle, \langle a_2, a_1 \rangle, \langle a_2, a_2 \rangle \}$$

$$R_{16} = \{ \langle a_1, a_1 \rangle, \langle a_1, a_2 \rangle, \langle a_2, a_1 \rangle, \langle a_2, a_2 \rangle \}. \#$$





A上的二元关系(例2)

- 例2: 设 $B=\{b\}$,
则B上的二元关系共有2个:
 $R_1=\emptyset$, $R_2=\{<b,b>\}$. #





一些特殊关系

- 空关系
- 恒等关系
- 全域关系
- 整除关系
- 小于等于关系,...
- 包含关系,
- 真包含关系





特殊关系

设 A 是任意集合,则可以定义 A 上的:

- 空关系: \emptyset
- 恒等关系: $I_A = \{ \langle x, x \rangle \mid x \in A \}$
- 全域关系:

$$E_A = A \times A = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in A \wedge y \in A \}$$





特殊关系

设 $A \subseteq \mathbb{Z}$, 则可以定义 A 上的:

- 整除关系:

$$D_A = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in A \wedge y \in A \wedge x|y \}$$

- 例: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 则

$$D_A = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \\ \langle 1, 5 \rangle, \langle 1, 6 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 2, 6 \rangle, \\ \langle 3, 3 \rangle, \langle 3, 6 \rangle, \langle 4, 4 \rangle, \langle 5, 5 \rangle, \langle 6, 6 \rangle \}.$$





特殊关系

设 $A \subseteq R$, 则可以定义 A 上的:

- 小于等于 (less than or equal to) 关系:

$$LE_A = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in A \wedge y \in A \wedge x \leq y \}$$

- 小于 (less than) 关系,

$$L_A = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in A \wedge y \in A \wedge x < y \}$$

- 大于等于 (greater than or equal to) 关系
- 大于 (greater than) 关系, ...





特殊关系

设 A 为任意集合,则可以定义 $P(A)$ 上的:

- 包含关系:

$$\subseteq_A = \{ \langle x, y \rangle \mid x \subseteq A \wedge y \subseteq A \wedge x \subseteq y \}$$

- 真包含关系:

$$\subset_A = \{ \langle x, y \rangle \mid x \subseteq A \wedge y \subseteq A \wedge x \subset y \}$$





与二元关系有关的概念

- 定义域, 值域, 域
- 逆, 合成(复合)
- 限制, 象
- 单根, 单值





定义域,值域,域

对任意集合R, 可以定义:

- 定义域(domain):

$$\text{dom } R = \{ x \mid \exists y(xRy) \}$$

- 值域(range):

$$\text{ran } R = \{ y \mid \exists x(xRy) \}$$

- 域(field):

$$\text{fld } R = \text{dom } R \cup \text{ran } R$$





例

- $R_1=\{a,b\}$, $R_2=\{a,b,<c,d>,<e,f>\}$,
 $R_3=\{<1,2>,<3,4>,<5,6>\}$.

当 a,b 不是有序对时, R_1 和 R_2 不是关系.

$\text{dom } R_1=\emptyset$, $\text{ran } R_1=\emptyset$, $\text{fld } R_1=\emptyset$

$\text{dom } R_2=\{c,e\}$, $\text{ran } R_2=\{d,f\}$, $\text{fld } R_2=\{c,d,e,f\}$

$\text{dom } R_3=\{1,3,5\}$, $\text{ran } R_3=\{2,4,6\}$,

$\text{fld } R_3=\{1,2,3,4,5,6\}$. #



逆, 合成(复合)

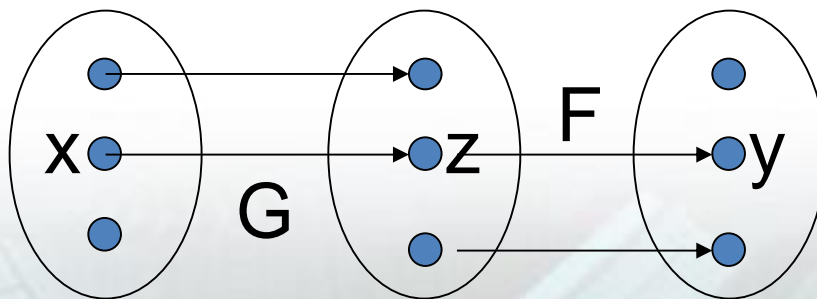
对任意集合F,G, 可以定义:

- 逆(inverse):

$$F^{-1} = \{ \langle x, y \rangle \mid yFx \}$$

- 合成(复合)(composite):

$$F \circ G = \{ \langle x, y \rangle \mid \exists z (xGz \wedge zFy) \}$$





关于合成

- 顺序合成(右合成):

$$\mathbf{FoG} = \{ \langle x, y \rangle \mid \exists z (xFz \wedge zGy) \}$$

- 逆序合成(左合成):

$$\mathbf{FoG} = \{ \langle x, y \rangle \mid \exists z (xGz \wedge zFy) \}$$





限制、象

对任意集合 F, A , 可以定义:

- 限制(restriction):

$$F \upharpoonright A = \{ \langle x, y \rangle \mid x F y \wedge x \in A \}$$

- 象(image):

$$F[A] = \text{ran}(F \upharpoonright A)$$

$$F[A] = \{ y \mid \exists x (x \in A \wedge x F y) \}$$





单根

一个y对应一个唯一的x就是单根

对任意集合F, 可以定义:

- 单根(single rooted): F是单根的 \Leftrightarrow

$$\forall y(y \in \text{ran } F \rightarrow \exists! x(x \in \text{dom } F \wedge xFy))$$

$$\Leftrightarrow (\forall y \in \text{ran } F)(\exists! x \in \text{dom } F)(xFy)$$

- $\exists!$ 表示“存在唯一的”
- $\forall x(x \in A \rightarrow B(x))$ 缩写为 $(\forall x \in A)B(x)$
- $\exists x(x \in A \wedge B(x))$ 缩写为 $(\exists x \in A)B(x)$





单值

一个x对应一个唯一的y就是单值

对任意集合F, 可以定义:

- 单值(single valued): F是单值的 \Leftrightarrow

$$\forall x(x \in \text{dom } F \rightarrow \exists! y(y \in \text{ran } F \wedge xFy))$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in \text{dom } F)(\exists! y \in \text{ran } F)(xFy)$$





例2.2

- 设 $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{a,b,<c,d>\}$,
 $R=\{<a,b>, <c,d>\}$,
 $F=\{<a,b>, <a,\{a\}>, <\{a\},\{a,\{a\}\}>\}$,
 $G=\{<b,e>,<d,c>\}$.

求: (1) A^{-1} , B^{-1} , R^{-1} .

(2) $B \circ R^{-1}$, $G \circ B$, $G \circ R$, $R \circ G$.

(3) $F \uparrow \{a\}$, $F \uparrow \{\{a\}\}$, $F \uparrow \{a,\{a\}\}$, $F^{-1} \uparrow \{\{a\}\}$.

(4) $F[\{a\}]$, $F[\{a,\{a\}\}]$, $F^{-1}[\{a\}]$, $F^{-1}[\{\{a\}\}]$.





例2.2(1)

- $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{a,b,<c,d>\}$,
 $R=\{<a,b>, <c,d>\}$,

求: (1) A^{-1} , B^{-1} , R^{-1} .

解: (1) $A^{-1} = \emptyset$,

$$B^{-1} = \{<d,c>\},$$

$$R^{-1} = \{<b,a>, <d,c>\}.$$





例2.2(2)

• $B=\{a,b,<c,d>\}$, $R=\{<a,b>,<c,d>\}$, $G=\{<b,e>,<d,c>\}$.

求: (2) BoR^{-1} , GoB , GoR , RoG .

解: (2) $BoR^{-1}=\{<d,d>\}$,

$GoB=\{<c,c>\}$,

$GoR=\{<a,e>,<c,c>\}$,

$RoG=\{<d,d>\}$.





例2.2(3)

• $F = \{ \langle a, b \rangle, \langle a, \{a\} \rangle, \langle \{a\}, \{a, \{a\}\} \rangle \}$,

求: (3) $F \uparrow \{a\}$, $F \uparrow \{\{a\}\}$, $F \uparrow \{a, \{a\}\}$,

$F^{-1} \uparrow \{\{a\}\}$.

解: (3) $F \uparrow \{a\} = \{ \langle a, b \rangle, \langle a, \{a\} \rangle \}$,

$F \uparrow \{\{a\}\} = \{ \langle \{a\}, \{a, \{a\}\} \rangle \}$,

$F \uparrow \{a, \{a\}\} = F$,

$F^{-1} \uparrow \{\{a\}\} = \{ \langle \{a\}, a \rangle \}$.





例2.2(4)

• $F = \{ \langle a, b \rangle, \langle a, \{a\} \rangle, \langle \{a\}, \{a, \{a\}\} \rangle \}$,

求: (4) $F[\{a\}]$, $F[\{a, \{a\}\}]$, $F^{-1}[\{a\}]$,
 $F^{-1}[\{\{a\}\}]$.

解: (4) $F[\{a\}] = \{ b, \{a\} \}$,

$F[\{a, \{a\}\}] = \{ b, \{a\}, \{a, \{a\}\} \}$,

$F^{-1}[\{a\}] = \emptyset$,

$F^{-1}[\{\{a\}\}] = \{ a \}. \quad \#$





例2.3

• 设 $R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in \mathbb{Z} \wedge y = |x| \}$,

$A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{0, -1, -2\}$

求: (1) $R[A \cap B]$ 和 $R[A] \cap R[B]$;

(2) $R[A] - R[B]$ 和 $R[A - B]$.

解: (1) $R[A \cap B] = R[\{0\}] = \{0\}$,

$R[A] \cap R[B] = \{0, 1, 2\} \cap \{0, 1, 2\} = \{0, 1, 2\}$;

(2) $R[A] - R[B] = \{0, 1, 2\} - \{0, 1, 2\} = \emptyset$,

$R[A - B] = R[\{1, 2\}] = \{1, 2\}$. #



定理2.5(合成运算结合律)

- 设 R_1, R_2, R_3 为集合, 则

$$(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$$

证明: $\forall \langle x, y \rangle, \langle x, y \rangle \in (R_1 \circ R_2) \circ R_3$

$$\Leftrightarrow \exists z (x R_3 z \wedge z (R_1 \circ R_2) y)$$

$$\Leftrightarrow \exists z (x R_3 z \wedge \exists t (z R_2 t \wedge t R_1 y))$$

$$\Leftrightarrow \exists z \exists t (x R_3 z \wedge (z R_2 t \wedge t R_1 y))$$

$$\Leftrightarrow \exists t \exists z (x R_3 z \wedge z R_2 t \wedge t R_1 y)$$



定理2.5证明

$$\Leftrightarrow \exists t \exists z (xR_3z \wedge zR_2t \wedge tR_1y)$$

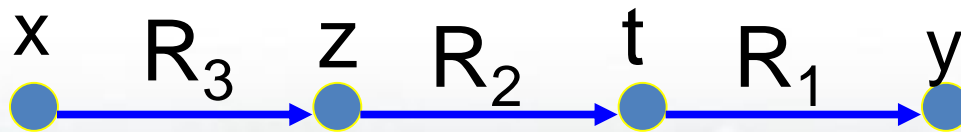
$$\Leftrightarrow \exists t (\exists z (xR_3z \wedge zR_2t) \wedge tR_1y)$$

$$\Leftrightarrow \exists t (x(R_2 \circ R_3)t \wedge tR_1y)$$

$$\Leftrightarrow xR_1 \circ (R_2 \circ R_3)y$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$$

$$\therefore (R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3). \quad \#$$



定理2.7

定理2.7 设 F, G 为二集合, 则 $(FoG)^{-1} = G^{-1}oF^{-1}$

证明 $\forall \langle x, y \rangle,$

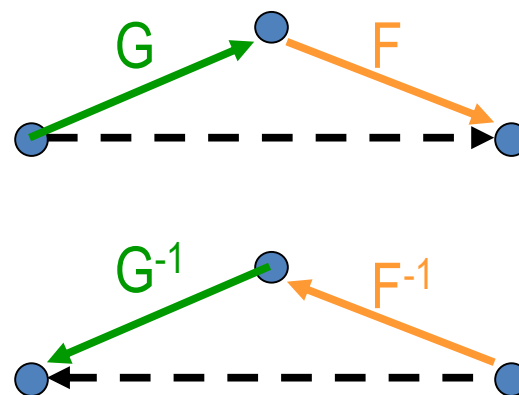
$$\langle x, y \rangle \in (FoG)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in (FoG)$$

$$\Leftrightarrow \exists z (yGz \wedge zFx)$$

$$\Leftrightarrow \exists z (zG^{-1}y \wedge xF^{-1}z)$$

$$\Leftrightarrow \exists z (xF^{-1}z \wedge zG^{-1}y) \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in G^{-1}oF^{-1}. \quad \#$$



小结

R是A到B的二元关系

A自己到自己的二元关系

- $R \subseteq A \times B, R \subseteq A \times A; xRy$ \rightarrow x的有序对在R里
- $\emptyset, I_A, E_A;$ \rightarrow A上的任何两个元素都没有关系
 \rightarrow A上的任意两个元素都有关系
 \rightarrow A上的每个元素只和自己有关系
- $\text{dom}(R), \text{ran}(R), \text{fld}(R);$ 定义域, 值域, 域

$R \uparrow A, R[A];$

R^{-1}, RoS

