单元10.4 平面哈密顿图

第二编 图论　第十一章 平面图

11.6 平面哈密顿图

内容提要

- 平面图与哈密顿图
  - Tait猜想的反例
  - 平面哈密顿图的充分条件
  - 平面哈密顿图的必要条件

Tait猜想

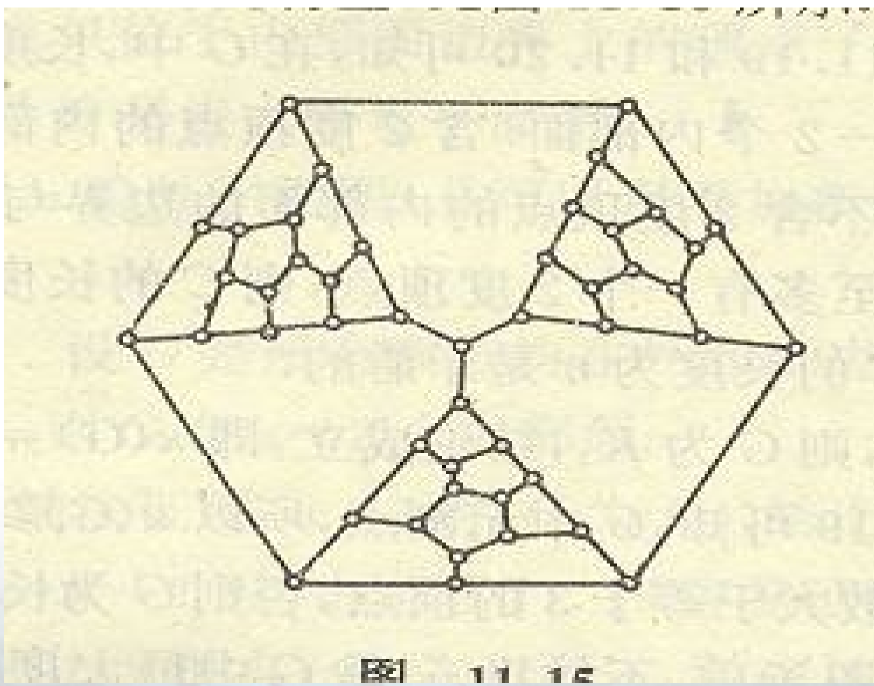
- **Tait猜想(1880):**

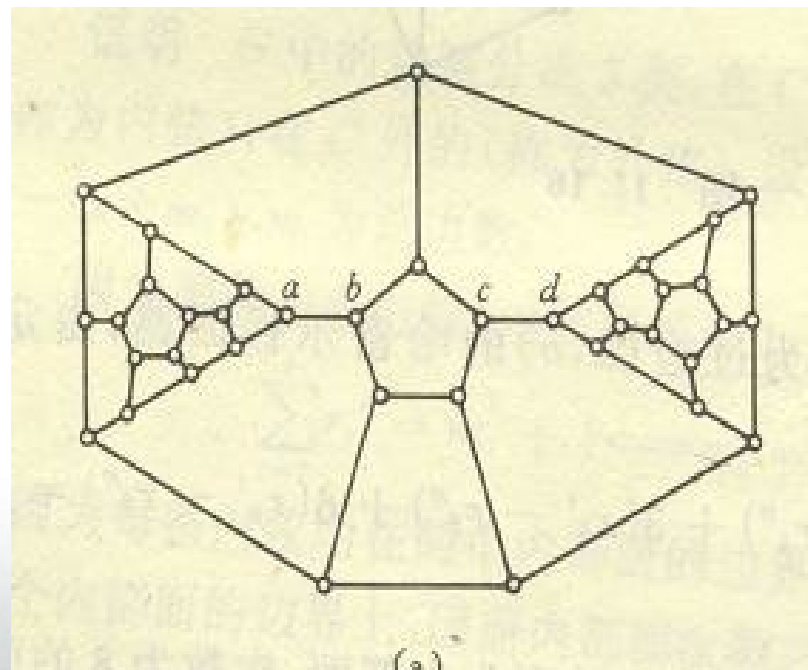
  3连通3正则平面图都是哈密顿图

- **4, 6, 12面体图验证；解决四色猜想**

Tait猜想的反例

- **Tutte图(1946): 46阶反例(左图)**
- **Lederberg图(1967): 38阶反例(右图)**





平面哈密顿图充分条件

- 定理(Tutte,1956):

  4连通平面图是哈密顿图. #

平面哈密顿图必要条件

- 定理11.23(Grinberg,1968):

  n阶简单平面哈密顿图, 哈密顿回路内(外)部次数为i的面数为$r_i'(r_i'')$ $\Rightarrow$

$$\sum_{i=3}^{n}(i-2)(r_i'-r_i'')=0.$$

定理11.23证明

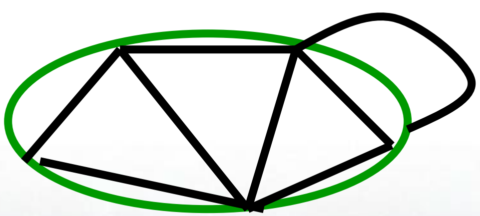
- $\Sigma^n_{i=3}(i-2)(r_i'-r_i'')=0.$
- 证: 设哈密顿回路C内有m_1条边, 则

  $\Sigma^n_{i=3}r_i' = m_1+1.$

  $\Sigma_{内部面}deg(R_j) = \Sigma^n_{i=3}ir_i' = 2m_1+n,$

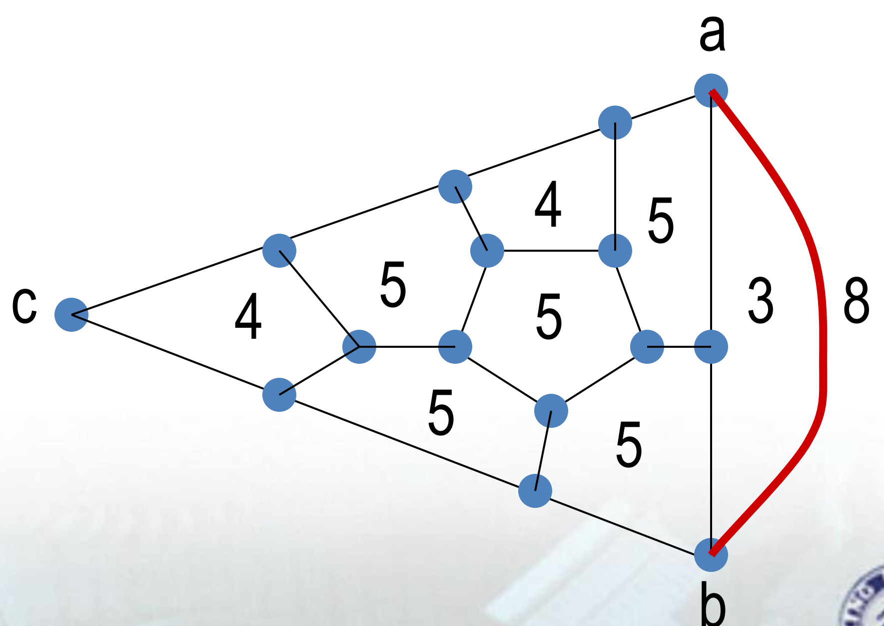
所以, $\Sigma^n_{i=3}(i-2)r_i'=n-2.$

同理 $\Sigma^n_{i=3}(i-2)r_i''=n-2.$ #



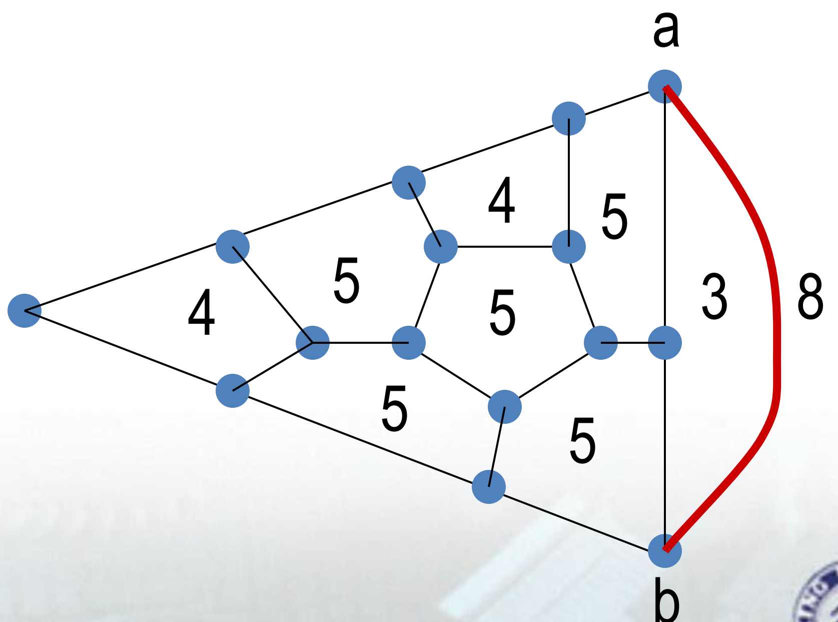
例11.5

- 下图中不存在过边(a,b)的哈密顿回路. (由此可证Tutte图和Lederberg图不是哈密顿图.) #



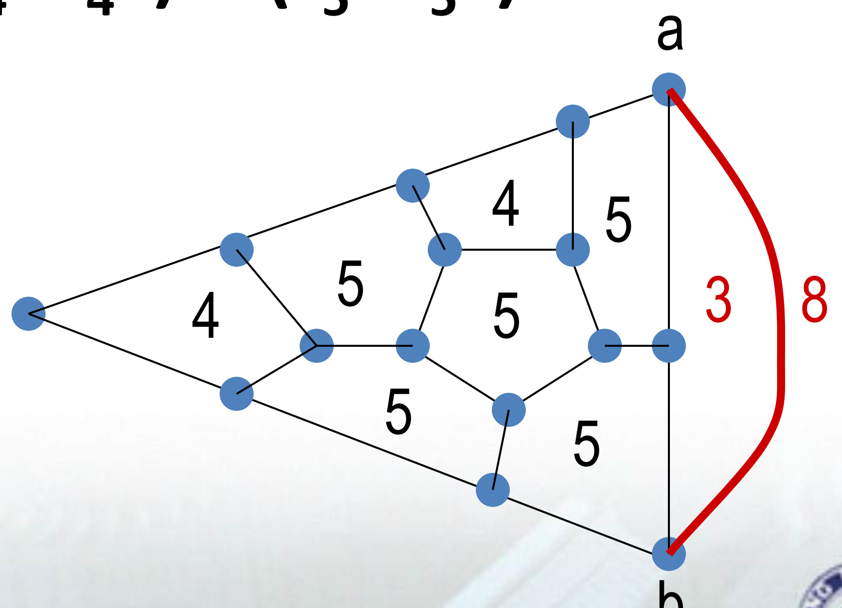
例11.5

- $\Sigma^{n}_{i=3}(i-2)(r_i'-r_i'')=0$ (定理11.23)
- $(r_3'-r_3'')+2(r_4'-r_4'')+3(r_5'-r_5'')+6(r_8'-r_8'')=0$



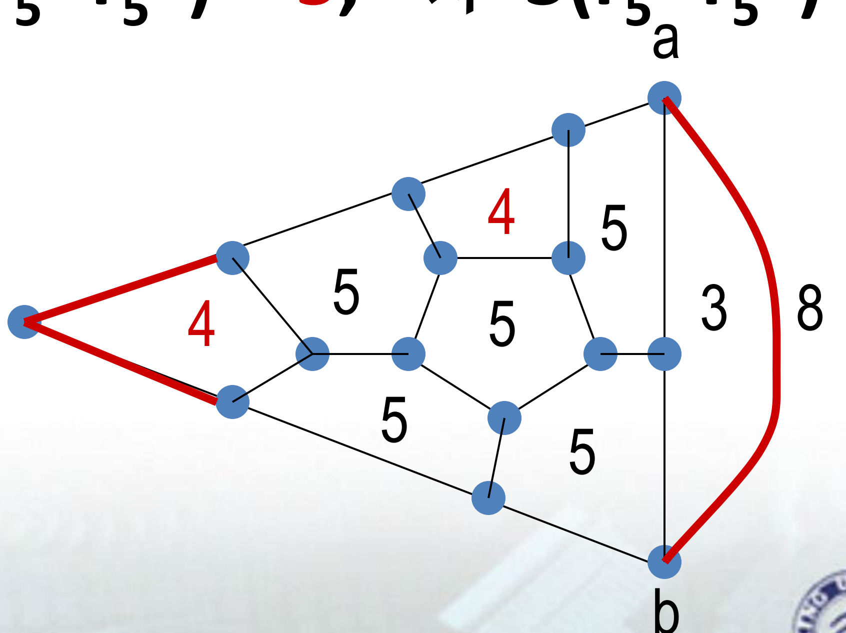
例11.5

- $(r_3'-r_3'')+2(r_4'-r_4'')+3(r_5'-r_5'')+6(r_8'-r_8'')=0$
- $(1-0)+2(r_4'-r_4'')+3(r_5'-r_5'')+6(0-1)=0$
- $2(r_4'-r_4'')+3(r_5'-r_5'') = 5$



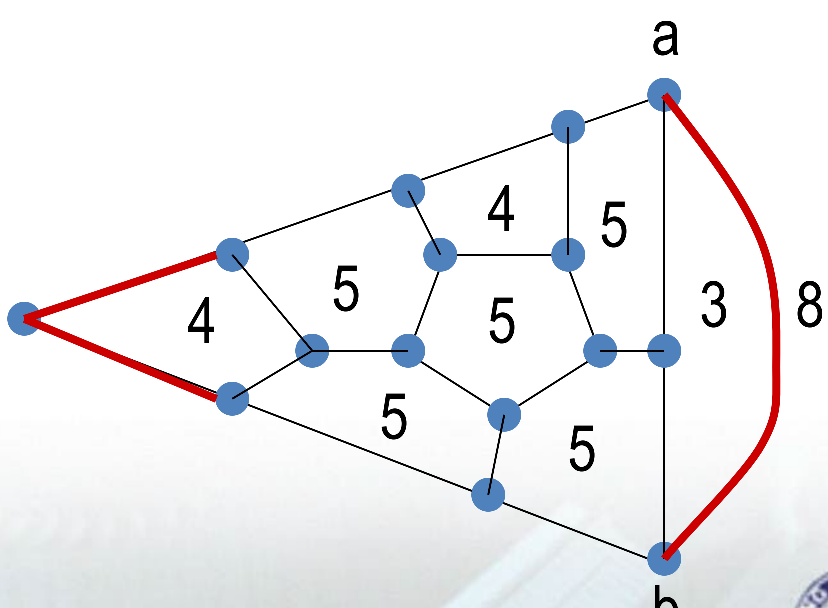
例11.5

- $2(r_4'-r_4'')+3(r_5'-r_5'') = 5$
- $2(1 - 1)+3(r_5'-r_5'') = 5$， 即 $3(r_5'-r_5'') = 5$
- $2(2 - 0)+3(r_5'-r_5'') = 5$， 即 $3(r_5'-r_5'') = 1$



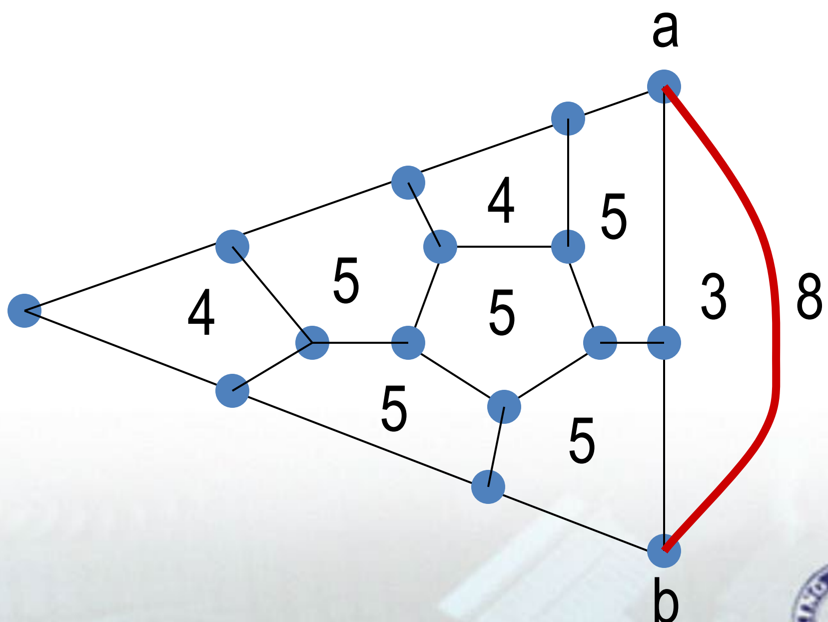
例11.5

- $3(r_5'-r_5'') = 5$ 或 1
- 上式不可能成立, 因为$(r_5'-r_5'')$是整数. #



Gadget 设计

- 有没有更小的gadget(小配件)?
- 注意是3-正则平面图



总结

- **平面哈密顿图**
  - Tait猜想的反例
  - 平面哈密顿图的充分条件
  - 平面哈密顿图的必要条件