

第二十三章 组合计数定理

- **23.1** 包含排斥原理
- **23.2** 对称筛公式及其应用
- **23.3** Burnside引理
- **23.4** Polay定理

23.1 包含排斥原理

- 包含排斥原理的基本形式及其推论
- 应用实例
- 有穷集的 r 组合数
- 有限制条件的集合计数
- 恒等式证明

包含排斥原理的基本形式

定理 设 S 为有穷集, P_1, P_2, \dots, P_m 是 m 种性质, A_i 是 S 中具有性质 P_i 的元素构成的子集, $i=1, 2, \dots, m$. 则 S 中不具有性质 P_1, P_2, \dots, P_m 的元素数为

$$\begin{aligned} & |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_m}| \\ &= |S| - \sum_{i=1}^m |A_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq m} |A_i \cap A_j| - \sum_{1 \leq i < j < k \leq m} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\ & \quad + \dots + (-1)^m |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m| \end{aligned}$$

推论

推论： S 中至少具有一条性质的元素数为

$$\begin{aligned} & |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m| \\ &= \sum_{i=1}^m |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq m} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq m} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\ &\quad + \dots + (-1)^{m-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m| \end{aligned}$$

证明

$$\begin{aligned} \text{右边} = & |S| - \sum_{i=1}^m |A_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq m} |A_i \cap A_j| \\ & - \sum_{1 \leq i < j < k \leq m} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots + (-1)^m |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m| \end{aligned}$$

证明 数学归纳法、组合分析

若 x 不具有任何性质，则对等式右边贡献为：

$$1 - 0 + 0 - 0 + \dots + (-1)^m \cdot 0 = 1$$

若 x 具有 n 条性质， $1 \leq n \leq m$ ，则对等式右边的贡献为：

$$1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^m \binom{n}{m} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

应用

计数多重集的 r 组合数

例 1 $B = \{ 3 \cdot a, 4 \cdot b, 5 \cdot c \}$ 的 10-组合数

$$S = \{ x \mid x \text{ 是 } a, b, c \text{ 任意重复的 10-组合} \}$$

$$A_1 = \{ x \mid x \in S, x \text{ 中至少含 4 个 } a \}$$

$$= \{ x \mid x \text{ 是 } a, b, c \text{ 的任意 6 组合} \}$$

$$A_2 = \{ x \mid x \in S, x \text{ 中至少含 5 个 } b \}$$

$$= \{ x \mid x \text{ 是 } a, b, c \text{ 的任意 5 组合} \}$$

$$A_3 = \{ x \mid x \in S, x \text{ 中至少含 6 个 } c \}$$

$$= \{ x \mid x \text{ 是 } a, b, c \text{ 的任意 4 组合} \}$$

计数多重集 r 组合数(续)

$$|S| = \binom{3+10-1}{10} = \binom{12}{2} = 66, \quad |A_1| = \binom{3+6-1}{6} = \binom{8}{2} = 28$$

$$|A_2| = \binom{3+5-1}{5} = \binom{7}{2} = 21, \quad |A_3| = \binom{3+4-1}{4} = \binom{6}{2} = 15$$

$$|A_1 \cap A_2| = \binom{3+1-1}{1} = 3, \quad |A_1 \cap A_3| = \binom{3+0-1}{0} = 1,$$

$$|A_2 \cap A_3| = |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$$

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = 66 - (28 + 21 + 15) + (3 + 1 + 0) - 0 = 6$$

注意：性质的确定与要求条件相反

性质彼此独立，具有不同性质元素计数互不影响

计数限制条件元素数

例2 求不超过120的素数个数

解： $11^2 = 121$,

不超过120的合数的素因子可能是2, 3, 5, 7,

$$S = \{ x \mid x \in \mathbb{Z}, 1 \leq x \leq 120 \}, |S| = 120$$

被 2, 3, 5, 7 整除的集合分别为 A_1, A_2, A_3, A_4 :

所求的元素数

$$N = |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}| + 3$$

+3的理由是:

2, 3, 5, 7 能被 2, 3, 5 或 7 整除, 但它们是素数

1 不能被 2, 3, 5 或 7 整除, 但 1 不是素数.

计数限制条件元素数

$$|A_1| = 60, |A_2| = 40, |A_3| = 24, |A_4| = 17$$

$$|A_1 \cap A_2| = 20, |A_1 \cap A_3| = 12, |A_1 \cap A_4| = 8,$$

$$|A_2 \cap A_3| = 8, |A_2 \cap A_4| = 5, |A_3 \cap A_4| = 3$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 4, |A_1 \cap A_2 \cap A_4| = 2, |A_1 \cap A_3 \cap A_4| = 1,$$

$$|A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 1, |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 0$$

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}|$$

$$= 120 - (60 + 40 + 24 + 17) + (20 + 12 + 8 + 8 + 5 + 3)$$

$$- (4 + 2 + 1 + 1) + 0$$

$$= 120 - 141 + 56 - 8 = 27$$

$$N = 30$$

欧拉函数的值

例3 欧拉函数 $\phi(n)$: 小于 n 的且与 n 互素的数的个数

设 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$

为 n 的素因子分解式

$$A_i = \{x \mid 1 \leq x < n, \text{ 且 } p_i \text{ 整除 } x\},$$

$$|A_i| = n / p_i, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

$$|A_i \cap A_j| = n / p_i p_j, \quad 1 \leq i < j \leq k$$

...

$$\phi(n) = |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_k}|$$

$$= n - \left(\frac{n}{p_1} + \frac{n}{p_2} + \dots + \frac{n}{p_k} \right) + \left(\frac{n}{p_1 p_2} + \frac{n}{p_1 p_3} + \dots + \frac{n}{p_{k-1} p_k} \right) - \dots + (-1)^k \frac{n}{p_1 p_2 \dots p_k}$$

$$= n \left(1 - \frac{1}{p_1} \right) \left(1 - \frac{1}{p_2} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k} \right)$$

证明交错和的恒等式

例 4 证明 $\binom{n-m}{r-m} = \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} \binom{n-i}{r}, \quad m \leq r \leq n$

证：令 $S = \{1, 2, \dots, n\}$, $A = \{1, 2, \dots, m\}$, 计数 S 中包含 A 的 r 子集.

P_j : 在 S 的 r 子集中不包含 j , $j = 1, 2, \dots, m$

$$|A_j| = \binom{n-1}{r}, \quad 1 \leq j \leq m, \quad |A_i \cap A_j| = \binom{n-2}{r}, \quad 1 \leq i < j \leq m$$

$$\dots, \quad |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m| = \binom{n-m}{r}$$

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_m}|$$

$$= \binom{n}{r} - \binom{m}{1} \binom{n-1}{r} + \binom{m}{2} \binom{n-2}{r} - \dots + (-1)^m \binom{m}{m} \binom{n-m}{r}$$

23.2 对称筛公式及其应用

- 对称筛公式
- 错位排列
- 棋盘多项式
- 有禁区的排列

对称筛公式

$$N_k = |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}|,$$

$$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq m, \quad k = 1, 2, \dots, m$$

$$|S| = N,$$

$$\begin{aligned} N_0 &= N - \binom{m}{1} N_1 + \binom{m}{2} N_2 - \dots + (-1)^m \binom{m}{m} N_m \\ &= N + \sum_{t=1}^m (-1)^t \binom{m}{t} N_t \end{aligned}$$

使用条件：不同性质对计数的影响对称。
各性质计数是独立的。

应用：错位排列计数

错位排列数记作 D_n ,

设 S 为 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的排列的集合,

P_i 是其中 i 在第 i 位的性质, $i=1, 2, \dots, n$.

$$N = n!, \quad N_1 = (n-1)!, \quad N_2 = (n-2)!$$

...

$$N_k = (n-k)!, \quad \dots, \quad N_n = 0!$$

$$\begin{aligned} D_n &= n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} 0! \\ &= n! \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right] \end{aligned}$$

错位排列实例

例1 8 个字母 A, B, C, D, E, F, G, H 的全排列中，
使得 4 个元素不在原来位置的排列数。

解：4 个元素的错排数为

$$\begin{aligned} D_4 &= 4! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \right) \\ &= 24 \left(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} \right) = 12 - 4 + 1 = 9 \end{aligned}$$

$$N = C(8,4) \cdot 9 = 630$$

棋盘多项式与有禁区的排列

n 个元素的排列与 n 个棋子在 $n \times n$ 棋盘的布棋方案（其中不允许两个棋子布在同行、同列）是一一对应的排列 $i_1 i_2 \dots i_n$ 表示：第一行放在第 i_1 列，第二行放在第 i_2 列， \dots ，第 n 行放在第 i_n 列。

$r_k(C)$ 表示 k 个棋子在棋盘 C 上布棋方案数，则生成函数

$$R(C) = \sum_{k=0}^n r_k(C) x^k$$

称为 C 的棋盘多项式。

棋盘多项式的性质

C_i : 去掉某个给定方格所在的行和列之后剩余棋盘

C_l : 去掉某个给定方格之后剩余棋盘

C_1 和 C_2 表示两个分离的棋盘

则不难证明:

$$r_k(C) = r_{k-1}(C_i) + r_k(C_l)$$

$$r_k(C) = \sum_{i=0}^k r_i(C_1) r_{k-i}(C_2)$$

$$R(C) = xR(C_i) + R(C_l)$$

$$R(C) = R(C_1)R(C_2)$$

简单棋盘多项式的结果

$$R(\begin{array}{|c|c|}\hline\Box & \Box \\ \hline\end{array}) = R(\begin{array}{|c|} \hline \Box \\ \hline\end{array}) = 1+2x$$

$$R(\begin{array}{|c|} \hline \Box \\ \hline \Box \\ \hline\end{array}) = 1+2x+x^2$$

$$\begin{aligned} R(\begin{array}{|c|c|} \hline \color{orange}\Box & \Box \\ \hline \Box & \Box \\ \hline \Box & \Box \\ \hline\end{array}) &= xR(\begin{array}{|c|} \hline \Box \\ \hline\end{array}) + R(\begin{array}{|c|c|} \hline \color{orange}\Box & \color{orange}\Box \\ \hline \Box & \Box \\ \hline\end{array}) \\ &= x(1+2x) + x(1+x) + R(\begin{array}{|c|} \hline \Box \\ \hline \color{orange}\Box \\ \hline\end{array}) \\ &= 2x+3x^2+1+3x+x^2 = 1+5x+4x^2 \end{aligned}$$

有禁区的排列

有禁区的排列：

限制某些数字不能出现在某些位置的排列，这些位置对应于棋盘的禁区。

定理： C 是 $n \times n$ 的具有给定禁区的棋盘，禁区对应于 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的元素在排列中不允许出现的位置，则这种有禁区的排列数为

$$n! - r_1(n-1)! + r_2(n-2)! - \dots + (-1)^n r_n$$

其中 r_i 是 i 个棋子布置到禁区的方案数

定理证明

不考虑禁区限制，不带编号棋子的布棋方案数为 $n!$ ，
考虑棋子编号，布棋方案数为 $n! n!$

P_j : 第 j 个棋子落入禁区的性质， $j=1, 2, \dots, n$

给定的1个棋子落入禁区的方案数： $N_1 = r_1 (n-1)! (n-1)!$

给定的2个棋子落入禁区的方案数： $N_2 = 2! r_2 (n-2)! (n-2)!$

...

给定的 k 个棋子落入禁区的方案数： $N_k = k! r_k (n-k)! (n-k)!$

...

n 个棋子落入禁区的方案数： $N_n = n! r_n 0! 0!$

定理证明(续)

带编号的棋子不落入禁区的方案数

$$\begin{aligned} N_0 &= n!n! - \binom{n}{1} r_1 (n-1)!(n-1)! + \binom{n}{2} 2! r_2 (n-2)!(n-2)! \\ &\quad - \dots + (-1)^k \binom{n}{k} k! r_k (n-k)!(n-k)! + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} n! r_n \\ &= n!n! - r_1 n!(n-1)! + r_2 n!(n-2)! - \dots \\ &\quad + (-1)^k r_k n!(n-k)! + \dots + (-1)^n r_n n! \end{aligned}$$

$$N = n! - r_1 (n-1)! + r_2 (n-2)! - \dots + (-1)^k r_k (n-k)! + \dots + (-1)^n r_n$$

适用条件：棋盘为 $n \times n$, 小禁区

应用

例2 G, L, W, Y 4位工作人员, A, B, C, D 为4项工作, 每个人不能从事的工作如图所示. 每个人1项工作, 求分配方案数.

解 禁区的棋盘多项式为

$$1 + 6x + 10x^2 + 4x^3$$

$$r_1 = 6, r_2 = 10, r_3 = 4$$

	A	B	C	D
G				
L				
W				
Y				

$$N = 4! - r_1(4-1)! + r_2(4-2)! - r_3(4-3)!$$

$$= 4! - 6 \cdot 3! + 10 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 24 - 36 + 20 - 4 = 4$$

应用—错排问题

$$R(C) = R(\begin{array}{c} \square \\ \square \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \square \end{array}) = (1+x)^n$$

$$R(C) = 1 + C(n,1)x + C(n,2)x^2 + \dots + C(n,n)x^n$$

$$D_n = n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} 0!$$

$$= n! - n! + \frac{1}{2!}n! - \frac{1}{3!}n! + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!}n!$$

$$= n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right)$$