第二十章 组合存在性定理

- 有限偏序集的分解定理

  如最大链长度为n, 则偏序集最少可分解成 n 条不相交的反链

  如最大反链长度为 n，则偏序集最少可分解为 n 条不相交的链

- Ramsey定理

  鸽巢原理的推广

- 相异代表系存在定理

  Hall定理（完备匹配存在条件）的推广

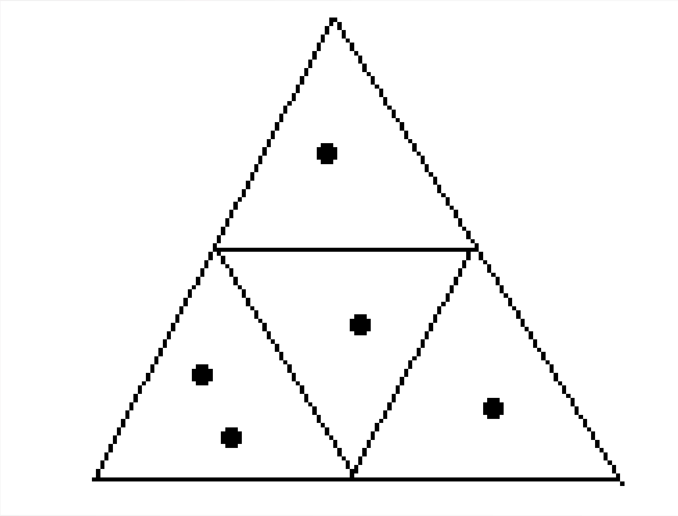
Ramsey定理主要内容

- 鸽巢原理
  - 简单形式
  - 一般形式
- Ramsey定理
  - 简单形式
  - 小Ramsey数的相关结果
  - 一般形式
  - 关于Ramsey数的若干已知结果

鸽巢原理的简单形式

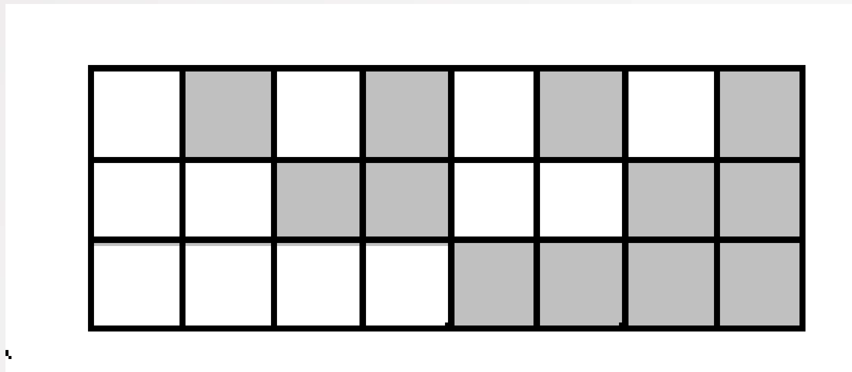
鸽巢原理：$n+1$个物体放到 n 个盒子里，则存在一个盒子至少含有 2 个或者 2 个以上的物体.

例1 边长为2的正三角形中 5个点，则存在2个点距离小于1.



鸽巢原理的简单形式

例2 9×3的方格用黑、白两色涂色，则存在两列涂色方案相同.



例3 空间9个格点，证明所有两点连线的中点中有一个是格点.

证：（x,y,z）与(x',y',z')的奇偶性相同，连线中点为格点. 奇偶模式8种.

应用实例

例4 设有 3 个7 位二进制数

$$A: a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7$$

$$B: b_1b_2b_3b_4b_5b_6b_7$$

$$C: c_1c_2c_3c_4c_5c_6c_7$$

证明存在整数 i 和 j，$1 \le i < j \le 7$, 使得下列之一必然成立：

$$a_i = a_j = b_i = b_j,$$

$$a_i = a_j = c_i = c_j,$$

$$b_i = b_j = c_i = c_j$$

应用实例（续）

$$a_i = a_j = b_i = b_j,$$

$$a_i = a_j = c_i = c_j,$$

$$b_i = b_j = c_i = c_j$$

A	0	1	0	1	×	×	1
B	0	1	×	×	0	1	1
C	×	×	0	1	0	1	×

证 a_i, b_i, c_i 中 必有两个相同，每个同为 0 或 1，有两种选择. 例如 $a_i=b_i=0$，记为 1-2-0，同样 $a_i=c_i=1$，记为 1-3-1，这 6 种选择为：

1-2-0， 1-2-1， 1-3-0， 1-3-1， 2-3-0， 2-3-1

7 列数 6 种选择，由鸽巢原理必有两列相等，这两列中含有一个四角数字相同的矩形. 这四角的方格数字满足要求.

应用实例（续）

例 5 从 1 到 $2n$ 的正整数中，任取 $n+1$ 个数，至少有一对数，其中一个数是另一个数的倍数.

证 $$a_i = 2^{\alpha_i} r_i, \quad i = 1,2,\ldots,n+1$$

r_i 为奇数，1 到 $2n$ 只有 n 个奇数，故存在 r_i, r_j 使得

$r_i = r_j,\ i<j.$

$$a_i = 2^{\alpha_i} r_i, \quad i = 1,2,\ldots,n+1$$

$$a_j = 2^{\alpha_j} r_j, \quad j = 1,2,\ldots,n+1$$

若 $a_i>a_j$，则 a_i 是 a_j 的倍数.

应用实例（续）

例6 n+1个小于等于2n的正整数中，必有两个数互素.

证 相邻的数互素，若不然，p是 k 与 k+1的公因子，且$1< p < k$. 那么 $k = pq_i$, $k+1 = pq_j$, 因此

$$pq_i + 1 = pq_j \Rightarrow p(q_j - q_i) = 1,$$

矛盾.

构造 n 个组：{1,2}, {3,4}, … , {2n-1, 2n}
n+1个数必有2个取自同一个组.

应用实例（续）

例7 设$a_1, a_2, \ldots, a_m$是正整数序列，则至少存在整数 k 和 l 使得$1 \le k < l \le m$, 使得和 $a_k + a_{k+1} + \ldots + a_l$ 是 m 的倍数.

证 设

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$\ldots$$

$$S_m = a_1 + a_2 \ldots + a_m$$

S_i除以 m 的余数为 r_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, 若存在 r_j=0，则命题得证；否则由鸽巢原理有 $r_i = r_j$, $i < j$. 因此 $S_j - S_i$ 被 m 整除。取$k = i+1$，$l = j$, 命题得证.

应用实例（续）

例 8 设 4, 44, …, 44…4, 是 1997 个数的序列，证明存在一个数被 1996 整除.

证 设这 1997 个数分别为 $a_1, a_2, \ldots, a_{1997}$, 除以 1996 的余数依次为 $i_1, i_2, \ldots, i_{1997}$. 由鸽巢原理，必有 $i_k = i_j$, $k<j$. 于是，$a_j - a_k$ 被 1996 整除，且

$$a_j - a_k = 44\ldots400\ldots0 = a_{j-k} \times 10^k.$$

其中含 $j-k$ 个 4，k 个 0.

$$1996 = 4\times499$$

499 为素数，必有 a_{j-k} 被 499 整除，而同时 a_{j-k} 被 4 整除. 因此 a_{j-k} 被 1996 整除.

鸽巢原理的一般形式

鸽巢原理 设 $q_1, q_2, \ldots, q_n$ 是给定正整数，若把 $q_1+q_2+\ldots+q_n-n+1$ 个物体放入 n 个盒子里，则或第一个盒子至少包含了q_1个物体，或者第二个盒子至少包含了q_2个物体，…，或者第n个盒子至少包含了q_n个物体.

说明：

- 证明用反证法
- 这是存在这种配置的最小个数
- 令$q_1=q_2=\ldots=q_n=2$, 则变成简单形式

推论 若 $n(r-1)+1$个物体放到 n 个盒子里，则存在一个盒子至少包含了r 个物体. 令 $q_1=q_2=\ldots=q_n=r$ 即可.

鸽巢原理的算术平均形式

设$m_1, m_2, \ldots, m_n$ 是n个正整数，如果它们的算术平均

$$\frac{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}{n} > r - 1$$

则存在 $m_i \geq r$

证：令$m_1, m_2, \ldots, m_n$ 是放入盒子的物体数，则

$$(m_1 + m_2 + \ldots + m_n) > (r-1)n$$

$$\Leftrightarrow m_1 + m_2 + \ldots + m_n \geq (r-1)n+1$$

满足鸽巢原理条件

顶函数与底函数

顶函数（Ceiling fuction），底函数（Floor fuction）

定义 对于实数 x，

顶函数 $\lceil x \rceil$：大于或等于 x 的最小整数

底函数 $\lfloor x \rfloor$：小于或等于 x 的最大整数

有时将底函数记作 $[x]$

性质 (1) $x-1<\lfloor x \rfloor \le x \le \lceil x \rceil < x+1$

(2) $\lfloor x+m \rfloor = \lfloor x \rfloor + m$, $\lceil x+m \rceil = \lceil x \rceil + m$ ， m 为整数

(3) $\lceil m/2 \rceil + \lfloor m/2 \rfloor = m$, m 为整数

鸽巢原理的函数形式

设 $f:A\to B$, $|A|=m$, $|B|=n$, 若$m>n$, 则存在至少$\lceil m/n \rceil$个元素$a_1, a_2, \ldots, a_{\lceil m/n \rceil}$使得

$$f(a_1)=f(a_2)=\ldots=f(a_{\lceil m/n \rceil})$$

证：令$B=\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, m_i表示函数值为y_i的自变量个数，i=1, 2, … , n.

$$\frac{m_1+m_2+\ldots+m_n}{n}=\frac{m}{n}>\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil-1$$

必存在某个$m_i \geq \lceil m/n \rceil$.

鸽巢原理应用

例9 $a_1,a_2,\ldots,a_{n^2+1}$ 是实数序列，证明可以选出 $n+1$个数的子序列 $a_{k_1},a_{k_2},\ldots,a_{k_{n+1}}$使得其为递增子序列或递减子序列

证 假设没有长为 $n+1$的递增子序列，设 m_k 表示从 a_k 开始的最长递增子序列长度，则

$$1\le m_k \le n, \quad m_1,m_2,\ldots,m_{n^2+1}$$

必存在$\lceil (n^2+1)/n \rceil = n+1$个$m_k$取值相等，都等于$l$

$$m_{k_1} = m_{k_2} = \ldots = m_{k_{n+1}} = l$$

若 $a_{k_i} < a_{k_{i+1}}$ ，则从前者开始的递增子序列长度为$l+1$, 矛盾.

$a_{k_1} > a_{k_2} > \ldots > a_{k_{n+1}}$ 是长为 $n+1$的递减子序列.