



# 单元10.1 平面图的概念

第二编 图论 第十一章 平面图

11.1 平面图的基本概念



北京大学

# 内容提要

## 第十一章 平面图

### 11.1 平面图的基本概念



北京大学

# 四色问题(Four Color Problem)

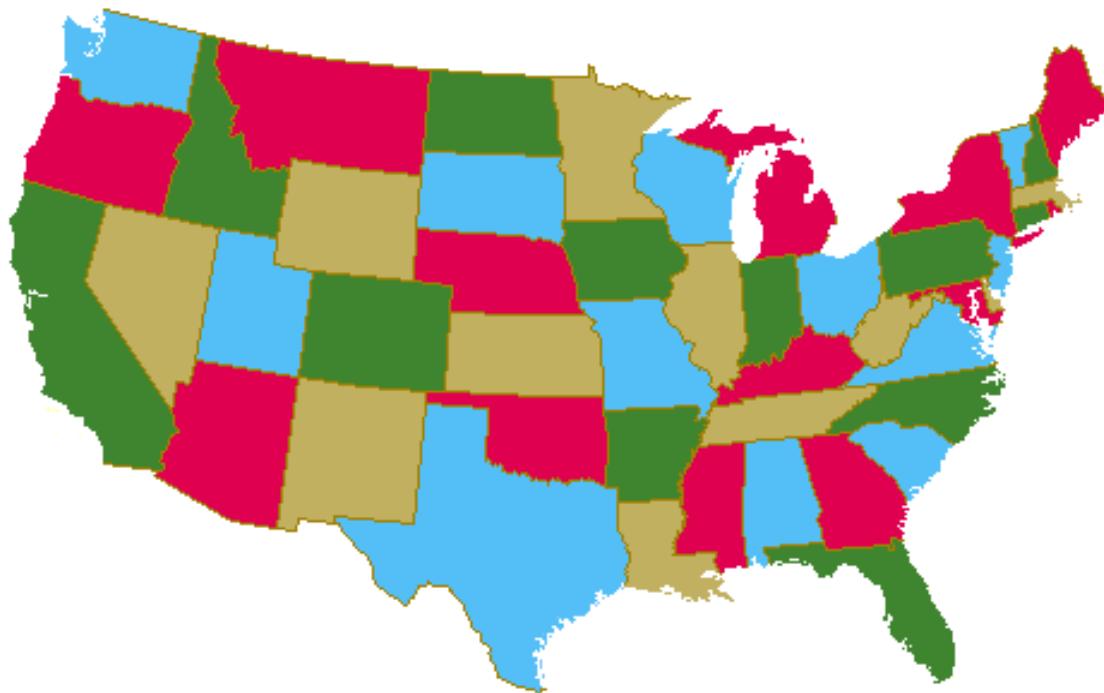
中华人民共和国地图



北京大学



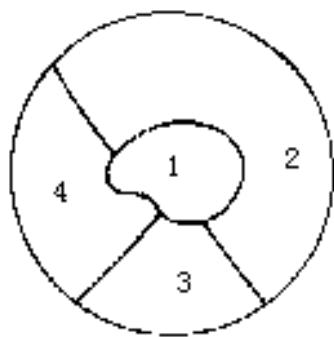
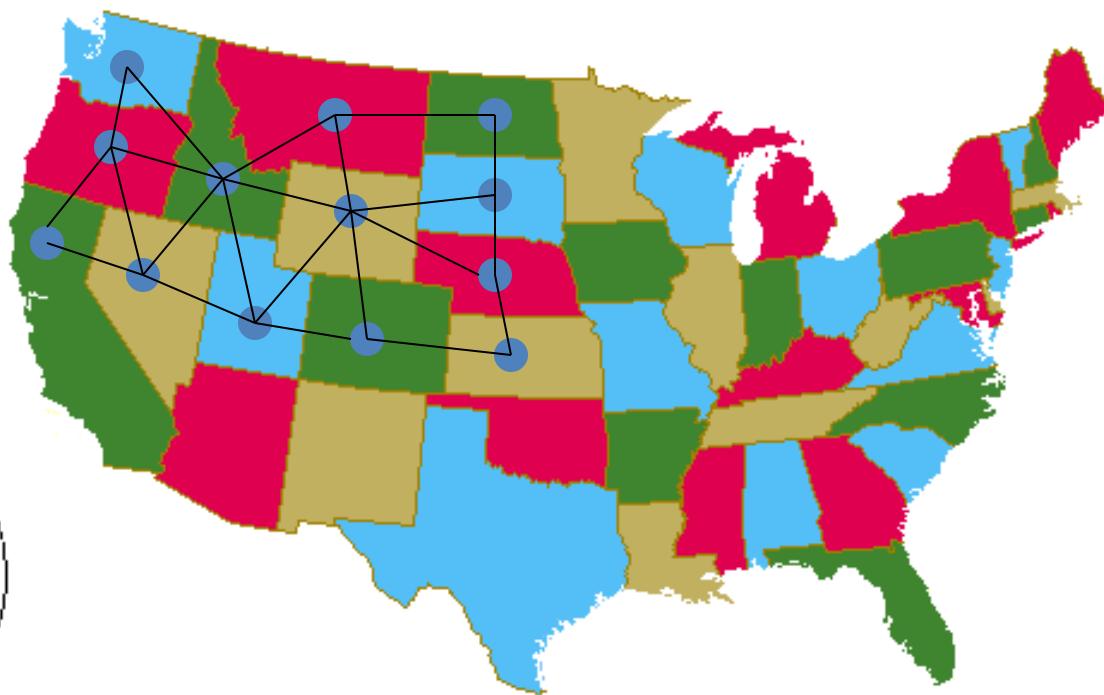
# 四色问题



北京大学



# 四色问题



图一

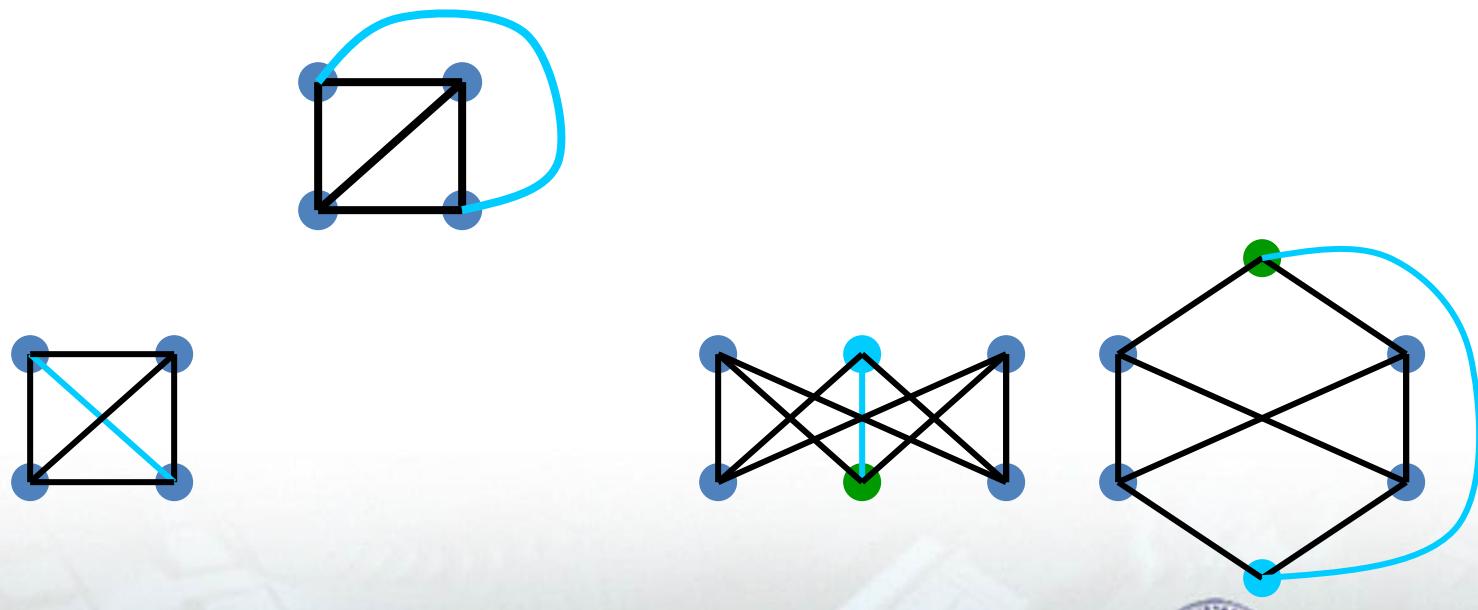


北京大学

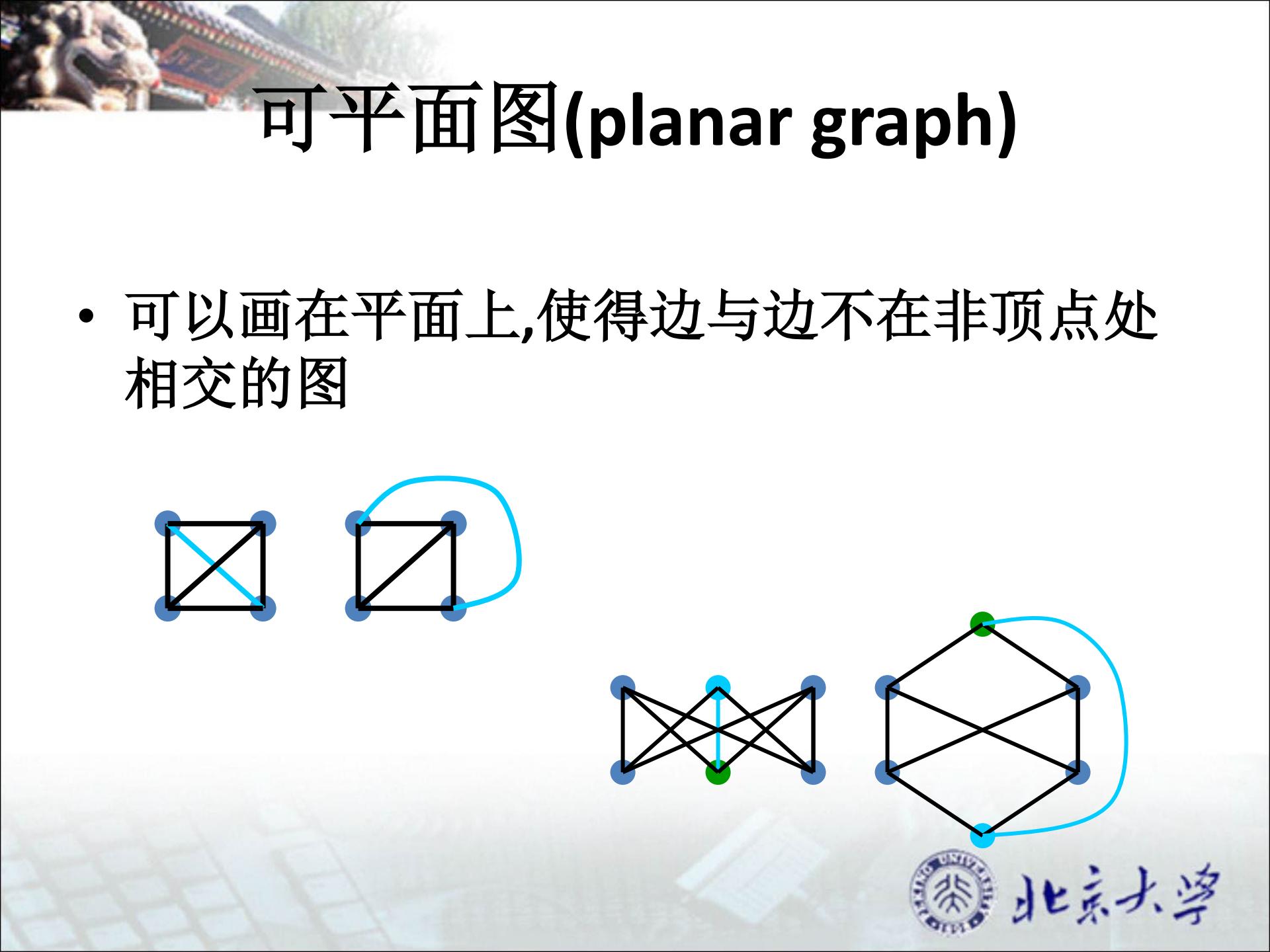


# 平面图(plane graph)

- 在平面上边与边不在非顶点处相交的图

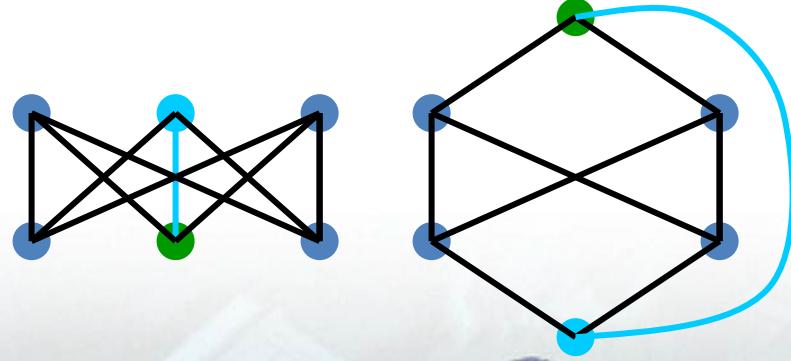
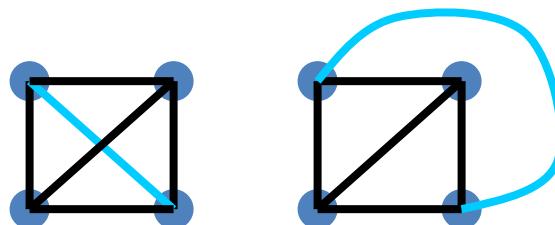


北京大学



# 可平面图(planar graph)

- 可以画在平面上,使得边与边不在非顶点处相交的图

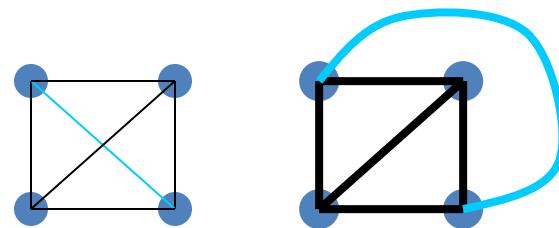


北京大学



# 平面嵌入(imbedding)

- 画在平面上使得边与边不在非顶点处相交

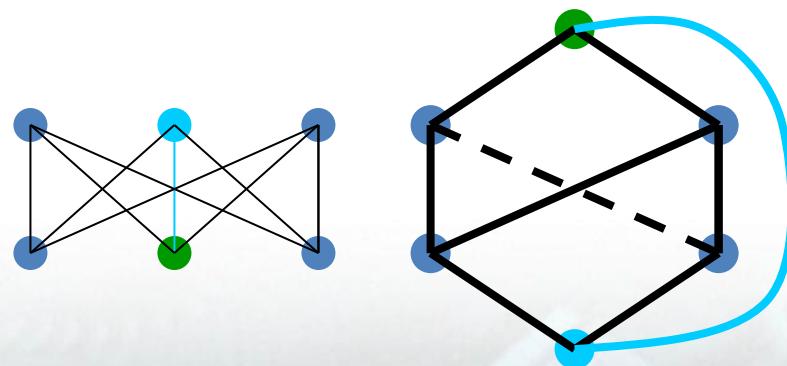


北京大学



# 球面嵌入, 曲面嵌入

- **球面嵌入**: 画在球面上使得边与边不在非顶点处相交
- **曲面嵌入**: 画在曲面上使得边与边不在非顶点处相交, 如环面嵌入

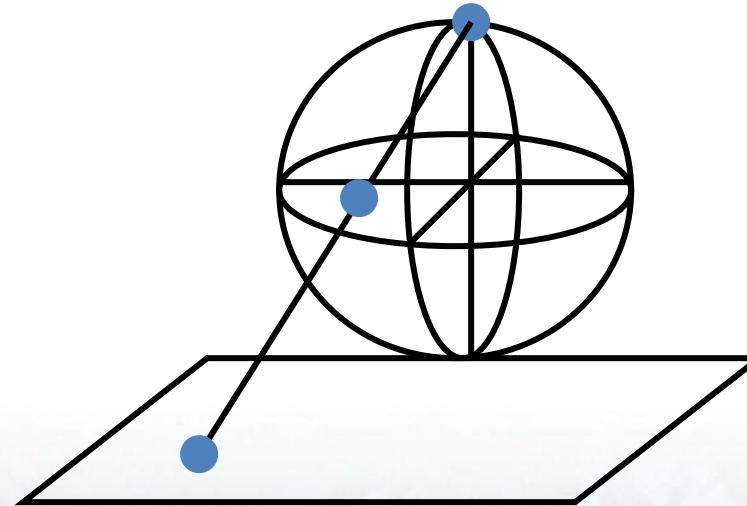
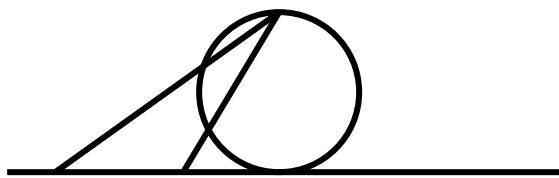


北京大学



# 定理11.1

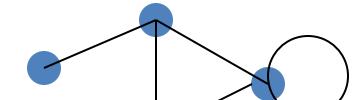
- 可平面嵌入  $\Leftrightarrow$  可球面嵌入
- 证明：连续球极投影. #



北京大学

# 面

- 区域(**region**):不含顶点与边的极大连通曲面,  
 $R$
- 外部区域(**exterior region**): 面积无限的区域,  
 $R_0$
- 区域边界(**boundary of region**): 与 $R$ 关联的边  
和顶点构成的子图,       $\partial R$
- 面(**face**): 区域及其边界
- 面的次数(**degree**):  $\deg(R) =$ 边界长度



北京大学



# 定理11.2

$$\sum_{i=1}^r \deg(R_i) = 2m. \quad \#$$



北京大学

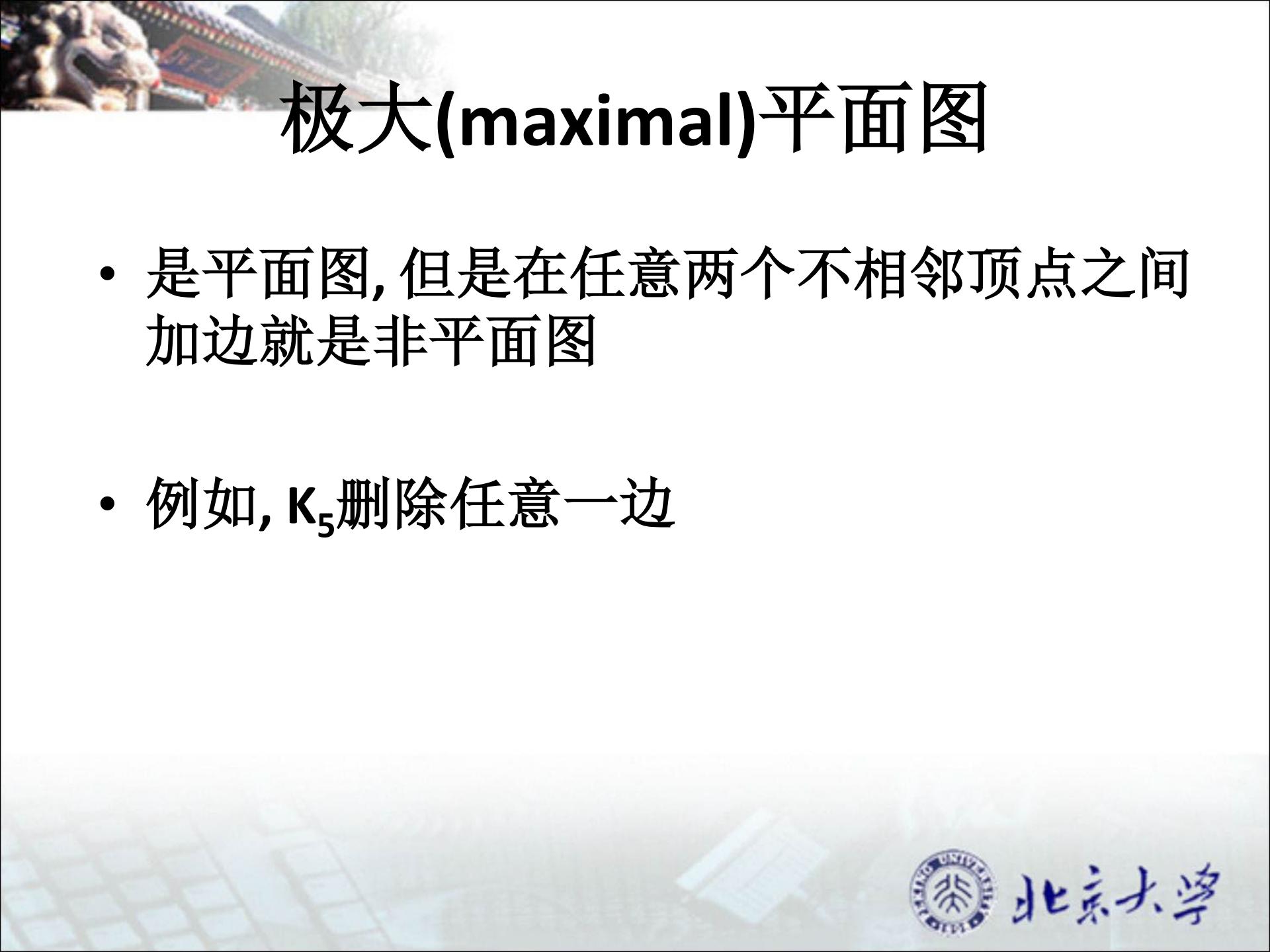


# 定理11.3

- 任何平面嵌入的内部面都可以在另一种平面嵌入下成为外部面
- 证明: 平面嵌入 → 球面嵌入 → 把该面旋转到北极 → 平面嵌入.      #



北京大学



# 极大(maximal)平面图

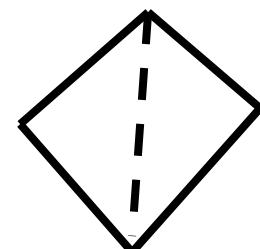
- 是平面图,但是在任意两个不相邻顶点之间加边就是非平面图
- 例如,  $K_5$  删除任意一边



北京大学

# 定理11.4

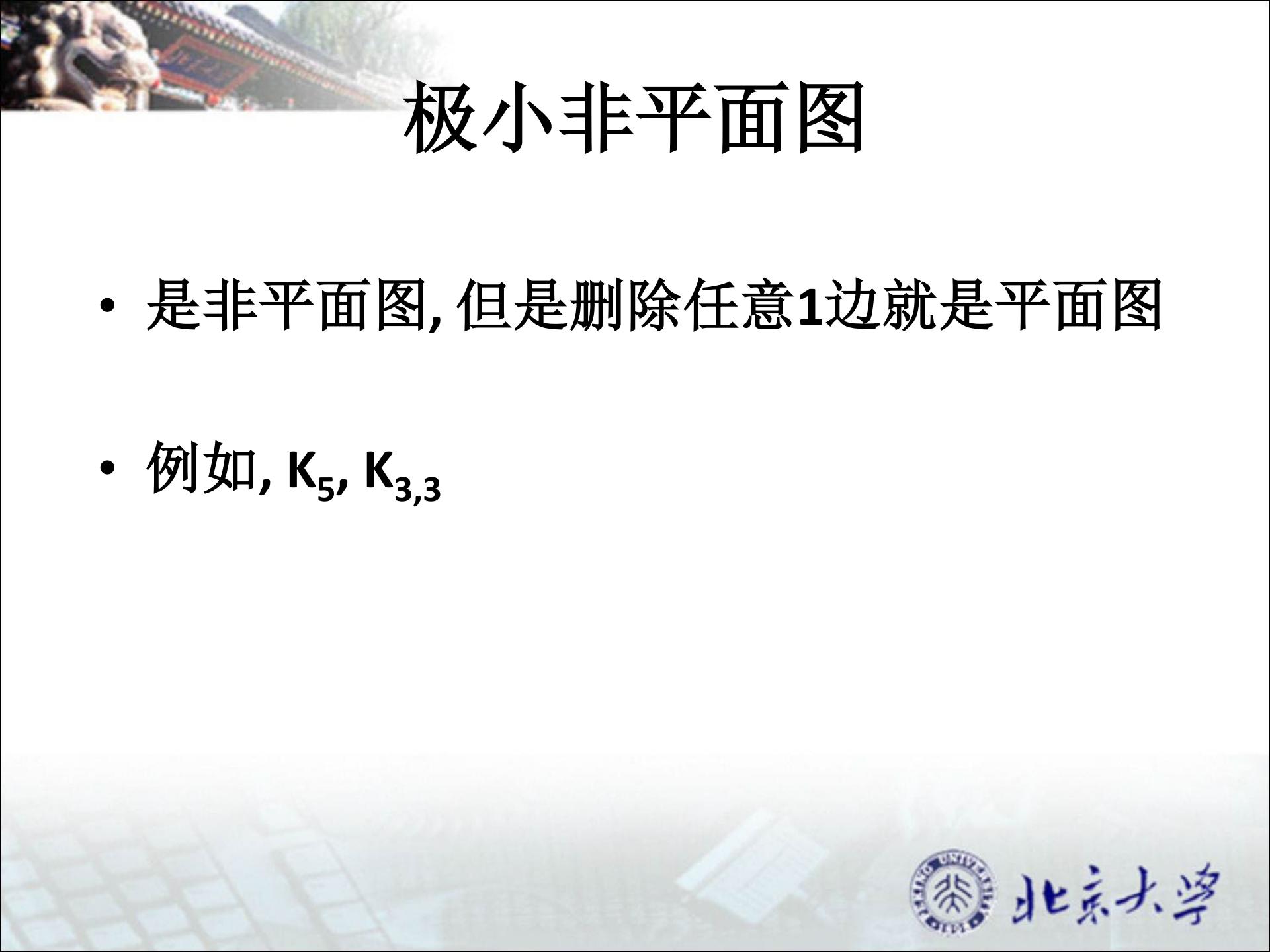
- $n(\geq 3)$ 阶简单连通平面图是极大平面图  
 $\Leftrightarrow \forall R, \deg(R) = 3$



- 证明: ( $\Rightarrow$ ) 简单图  $\Rightarrow \deg(R) \geq 3$ ,  
极大平面图  $\Rightarrow \deg(R) \leq 3$   
( $\Leftarrow$ )  $\forall R, \deg(R) = 3 \Rightarrow$  不能加边而不交叉. #



北京大学



# 极小非平面图

- 是非平面图, 但是删除任意1边就是平面图
- 例如,  $K_5$ ,  $K_{3,3}$



北京大学



# 小结

- 平面图
- 极小非平面图
- 极大平面图



北京大学