21.3 二项式定理与组合恒等式

- 二项式定理
- 组合恒等式
  - 递推式
  - 变下项求和
  - 变系数和
  - 变上项求和
  - 积
  - 积和
- 证明方法小结

二项式定理

二项式定理：设 n 是正整数，对一切 x 和 y

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

说明：

证明使用归纳法

常用形式

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

组合恒等式（递推式）

1. $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$

2. $\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$

3. $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$

证明方法：公式代入、组合分析

应用：

1 式用于化简，

2 式用于求和时消去变系数，

3 式用于求和时拆项（两项之和或者差），然后合并

组合恒等式（变下项求和）

简单和、交错和

4. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$

5. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0$

证明方法：二项式定理、组合分析

应用：序列求和

恒等式求和（变下项求和）

变系数和

6. $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$

7. $\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}$

证明方法：

二项式定理 + 求导

已知恒等式代入，消去变系数

应用：序列求和

证明（二项式定理+求导）

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k=1+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^k$$

$$n(1+x)^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}x^{k-1}\qquad\text{求导}$$

$$n2^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}\qquad\text{令}x=1$$

$$=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}$$

证明（已知恒等式代入）

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k^2 \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} \quad \text{消去变系数}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} kn \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{k=1}^{n} [(k-1)+1] \binom{n-1}{k-1} \quad \text{常量外提}$$

$$= n \sum_{k=1}^{n} (k-1) \binom{n-1}{k-1} + n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}$$

$$= n \sum_{k=0}^{n-1} k \binom{n-1}{k} + n2^{n-1} \quad \text{变限}$$

$$= n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n(n+1)2^{n-2}$$

恒等式（变上项求和）

8. $\sum_{l=0}^{n}\binom{l}{k}=\binom{n+1}{k+1},\quad n,k\in N$

证明方法：组合分析

$S=\{a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}\}$ 的 $k+1$ 子集数

含 a_1: $\binom{n}{k}$

不含 a_1，含 a_2: $\binom{n-1}{k}$

…

不含 $a_1, a_2, \ldots, a_n$, 含 a_{n+1} $\binom{0}{k}$

应用：求和

恒等式（积）

9. $\binom{n}{r}\binom{r}{k}=\binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}$

证明方法：组合分析.

n 元集中选取 r 个元素，然后在这 r 个元素中再选 k 个元素. 不同的 r 元子集可能选出相同的 k 子集，其重复度为 $\binom{n-k}{r-k}$.

$\{a, b, c, d, e\} \to \{a, b, c, d\} \to \{b, c, d\}$

$\{b, c, d, e\} \to \{b, c, d\}$

应用：将变下限 r 变成常数 k，求和时提到和号外面.

恒等式（积之和）

10. $$\sum_{k=0}^{r}\binom{m}{k}\binom{n}{r-k}=\binom{m+n}{r} \quad r=\min\{m,n\}$$

11. $$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n}{k}=\binom{m+n}{m}$$

证明方法：

组合分析、二项式定理

11式是10式的特例

应用：求和

组合恒等式小结

证明方法：

已知恒等式代入
二项式定理
幂级数的求导、积分
归纳法
组合分析

求和方法：

Pascal公式---式3
级数求和
观察和的结果，然后使用归纳法证明
利用已知的公式

非降路径问题

- 基本模型
- 限制条件下的非降路径数
- 非降路径模型的应用

    证明恒等式

    单调函数计数

    栈的输出

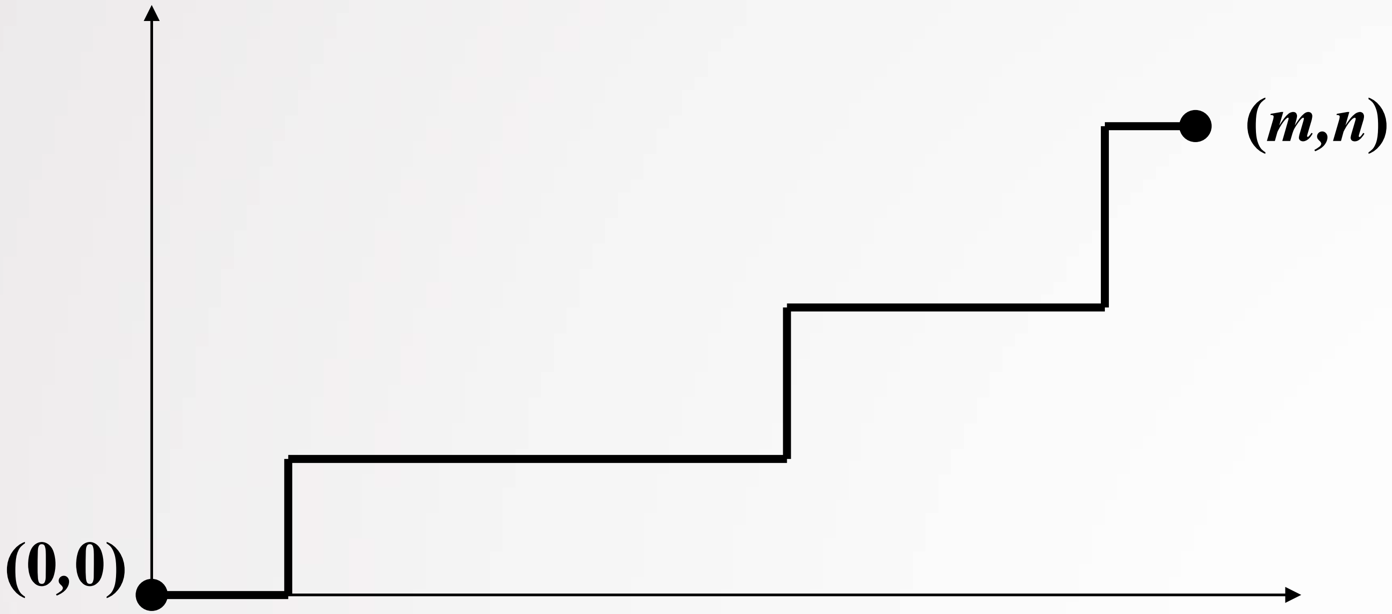
基本模型

(0,0) 到 (m,n) 的非降路径数：$C(m+n,m)$

(a,b)到 (m,n) 的非降路径数：

等于 (0,0) 到 $(m-a,n-b)$ 的非降路径数

(a,b) 经过 (c,d) 到 (m,n) 的非降路径数：乘法法则

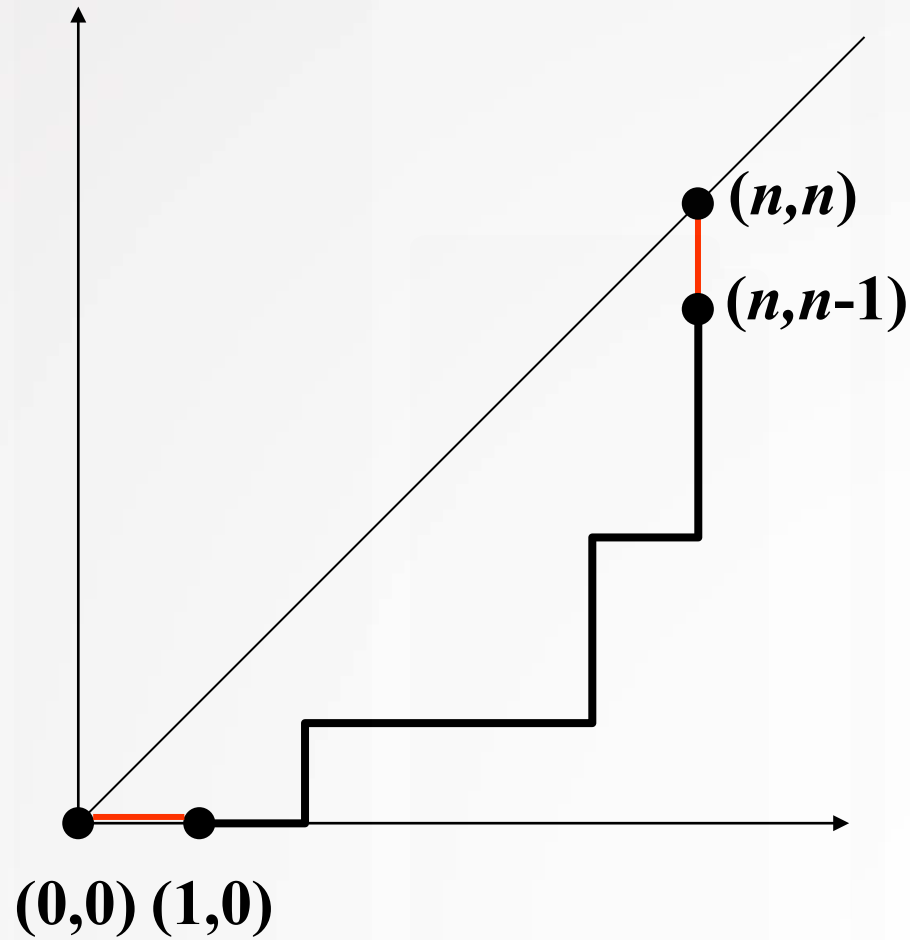


限制条件的非降路径数

从 (0,0)到(*n*,*n*)除端点外不接触对角线的非降路径数

下方从(0,0)到(*n*,*n*)不接触对角线非降路径数的 2 倍

下方从(0,0)到(*n*,*n*)不接触对角线非降路径数等于从(1,0)到(*n*,*n*-1)不接触对角线非降路径数

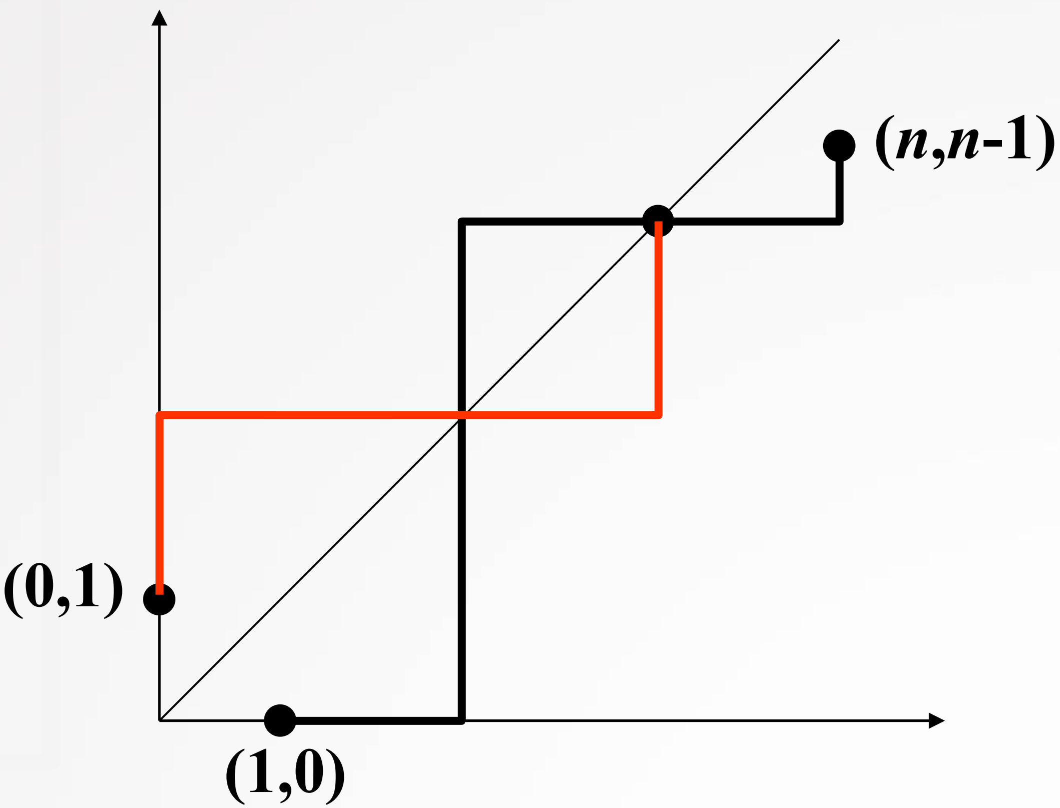


限制条件下非降路径数(续)

从(1,0)到(n,n-1)的不接触对角线的非降路径数

= 从(1,0)到(n,n-1)的非降路径数

– 从(0,1)到(n,n-1)的非降路径数



$$N = 2\left[\binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n}\right] = \frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}$$

应用（证明恒等式）

例 8 证明 $\sum_{k=0}^{r}\binom{m}{k}\binom{n}{r-k}=\binom{m+n}{r}$

证:

(0,0)到$(m-k,k)$路径数:

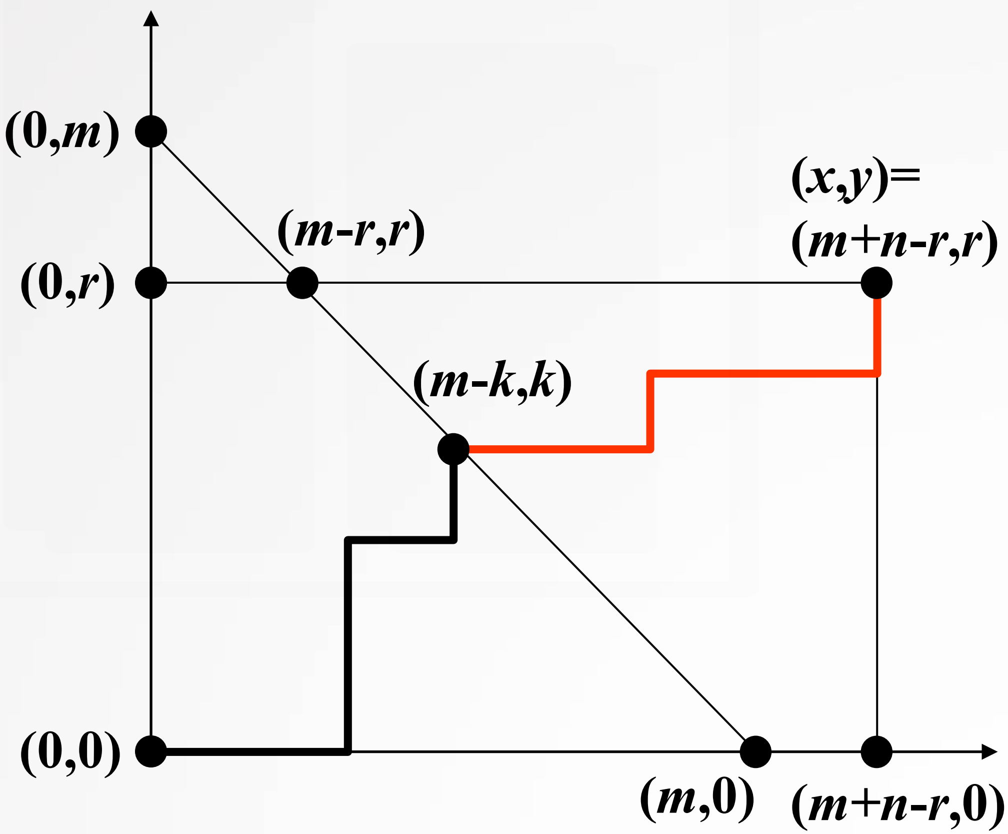
$\binom{m}{k}$

$(m-k,k)$到(x,y)路径数:

$\binom{n}{r-k}$

$$\begin{cases} x-(m-k)+y-k=n \\ y-k=r-k \end{cases}$$

$$\Rightarrow y=r, x=m+n-r$$



应用（单调函数计数）

例9 集合$\{1, 2, \ldots, n\}$上单调递增函数个数

$=(1,1)$ 到 $(n+1,n)$ 的非降路径数 $= \binom{2n-1}{n}$

单调函数个数$= 2\binom{2n-1}{n}$

$A=\{1, 2, \ldots, m\}$， $B=\{1, 2, \ldots, n\}$，

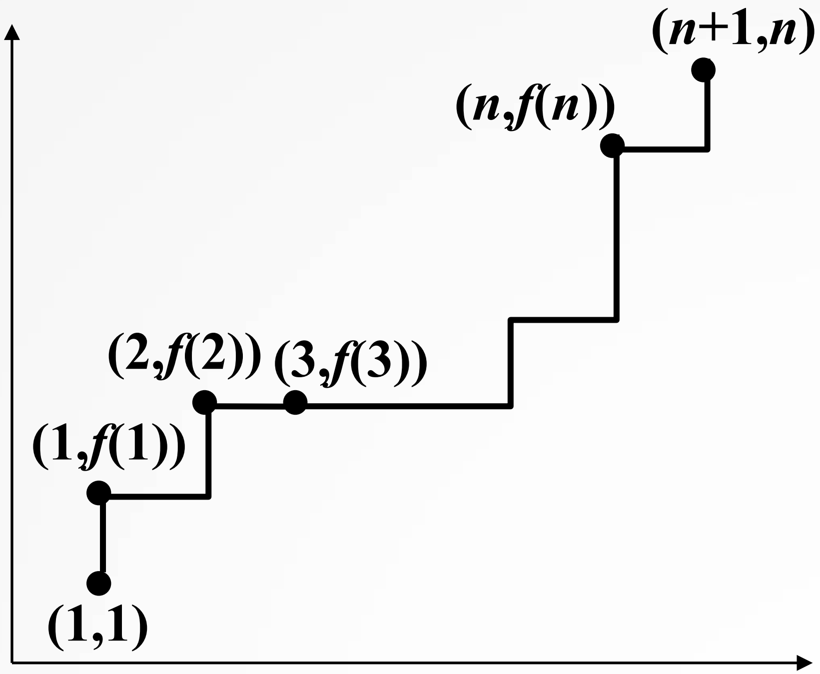
A到B单调函数个数

$=(1,1)$到$(m+1,n)$非降路径数2倍

$$= 2\binom{m+n-1}{m}$$

严格单调递增函数个数$C(n,m)$，

严格单调递减函数个数$C(n,m)$



函数计数小结

$A = \{1, 2, \ldots, m\}$, $B = \{1, 2, \ldots, n\}$

$f: A \to B$

函数	单射	满射	双射	单调	严格单调递增
计数	$P(n,m)$	$\left\{ m \atop n \right\} n!$	$\left\{ n \atop n \right\} n! = n!$ $= P(n,n)$	$2\binom{m+n-1}{m}$	$C(n,m)$
模型	排列	放球	排列	非降路径	组合

应用（栈输出的计数）

例10 将1, 2, … , n 按照顺序输入栈，有多少个不同的输出序列?

分析：将进栈、出栈分别记作 x, y,

操作序列是 n 个 x， n 个 y 的排列,

排列中任何前缀的 x 个数不少于 y 的个数,

等于从(0,0)到 (n,n) 的不穿过对角线的非降路径数

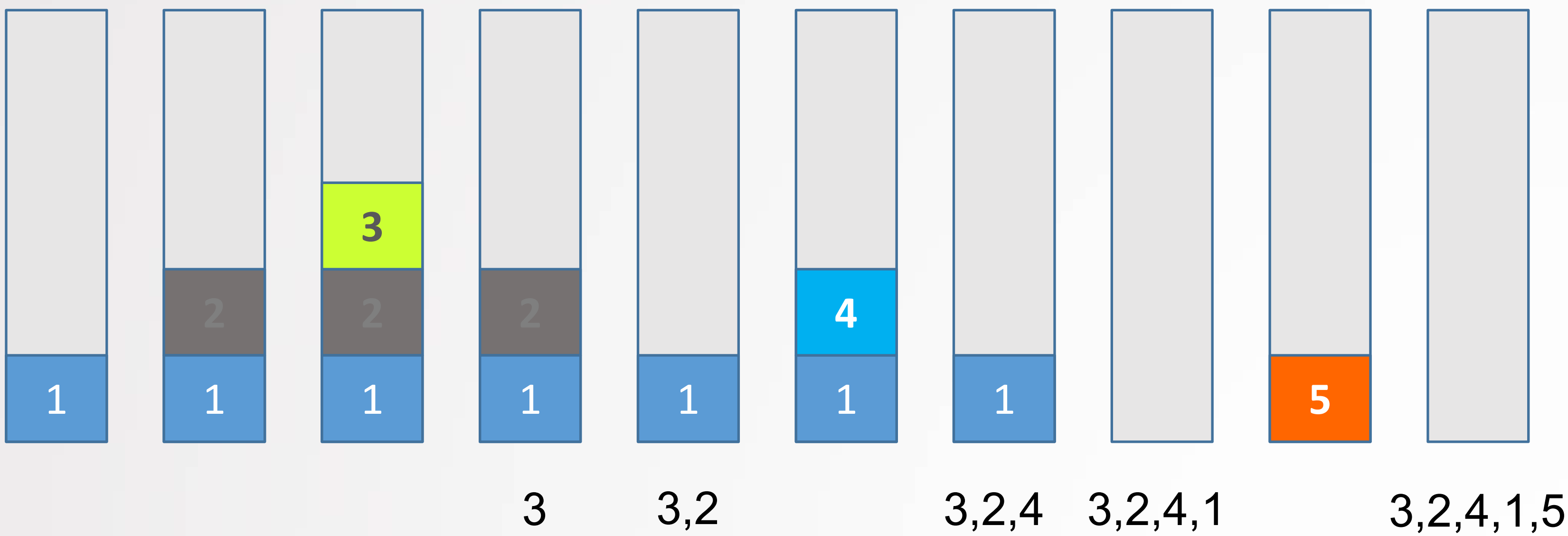
应用（栈输出的计数）

输入： 1, 2, 3, 4, 5

输出 ： 3, 2, 4, 1, 5

⇔ 进,进,进,出,出,进,出,出,进,出

⇔ $x, x, x, y, y, x, y, y, x, y$



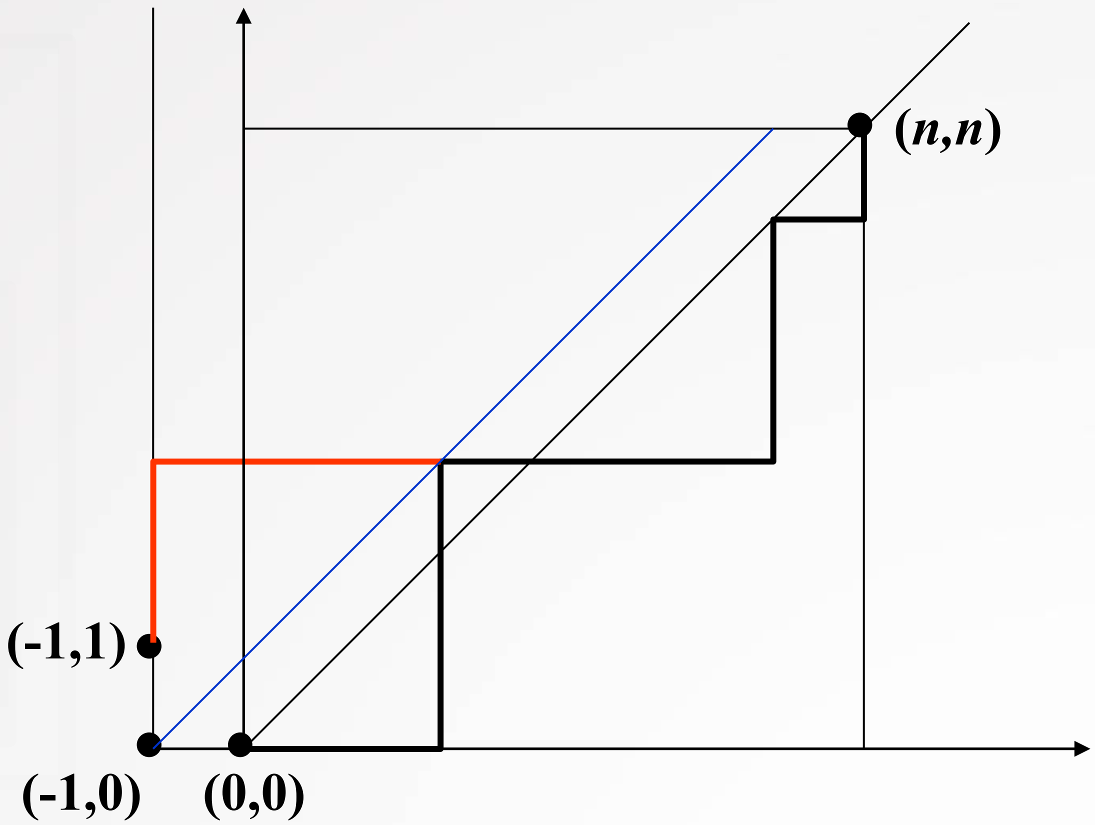
栈输出的计数（续）

从(0,0)到(n,n)的穿过对角线的非降路径

⇔从(-1,1)到(n,n)的非降路径

从(0,0)到(n,n)的非降路径总数为 C(2n,n)条，

从(-1,1)到(n,n)的非降路径数为 C(2n,n-1)条，



$$N=\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n-1}=\frac{(2n)!}{n!n!}-\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$