第十六章 半群与独异点

定义

广群 $V=<S,\circ>$
∘封闭性

$\xrightarrow{\text{结合}}$

半群 $V=<S,\circ>$
∘封闭性
∘可结合

$\xrightarrow{\text{单位元}}$

独异点 $V=<S,\circ,e>$
∘封闭性
∘可结合
含单位元 e

性质 ⇨

$a^1 = a$　　　　$a^0 = e$

$a^{n+1} = a^n a,\ n\in \mathrm{Z}^+$　　　　$a^{n+1} = a^n a,\ n\in \mathrm{N}$

幂运算规则　$a^n a^m = a^{n+m}$，$(a^n)^m = a^{nm}$

子代数
积代数 ⇨ 子半群
半群直积 ⟶ 子独异点
独异点直积

商代数 ⇨ 商半群 ⟶ 商独异点

同态 ⇨ 半群同态 ⟶ 独异点同态

16.1 半群与独异点

- 半群、独异点的定义与性质
  - 半群与独异点定义

表示：半群V=<S,∘>，独异点V= <S,∘,e>

说明：任何半群可通过增加单位元e并定义与e的运算扩张成独异点

运算表示式中可以省略算符

  - 半群与独异点的幂运算性质

定理1：对于任何$a \in S$，$a^n a^m = a^{n+m}$，$(a^n)^m = a^{nm}$

注意：n,m在半群为正整数，在独异点为自然数

证明：数学归纳法

运算性质的应用

例 1 V 为半群，任取 $a,b\in S$，如果 $a\neq b$，则有 $ab\neq ba$，证明

(1) V 中成立幂等律

(2) $\forall a,b\in V$,　$aba = a$

(3) $\forall a,b,c\in V$,　$abc = ac$

证 (1) 假若 $aa \neq a$, 则

$$(aa)a \neq a(aa) \Rightarrow aaa \neq aaa，\text{矛盾}$$

(2) 假若 $aba \neq a$, 则

$$(aba)a \neq a(aba) \Rightarrow aba \neq aba，\text{矛盾}$$

(3) 假若 $abc \neq ac$, 则

$$(abc)(ac) \neq (ac)(abc) \Rightarrow abcac \neq acabc \Rightarrow abc \neq abc，$$

矛盾

子半群与子独异点

子半群、子独异点的判别

非空子集B，

B 对于V 中的运算（含0元运算）封闭.

定理2

若干子半群的非空交集仍为子半群；

若干子独异点的交集仍为子独异点.

重要的子半群---子集合B生成的子半群

$V=<S,*>$，$B\subseteq S$，包含B 的最小的半群

$<B>=\cap\{A \mid A$是 S 的子半群，$B\subseteq A\}$

$$<B>=\bigcup_{n\in Z^+} B^n\text{，}B^n=\{ b_1b_2\ldots b_n \mid b_i\in B, i=1,2,\ldots,n \}$$

实例

例2 $V=<\mathrm{Z},+>$半群，$B=\{4,6\}$,

$$<B>=\{\,4\,i+6\,j \mid i,j\in\mathrm{N},\ i\text{和}\ j\text{不同时为}0\,\}$$
$$=\{\,4,6,8,10,12,14,16,\ldots\}=2\mathrm{Z}^{+}-\{2\}$$

例3 Σ有穷字母表，Σ^{+}为非空字的集合, Σ^{*}为字的集合。

$$a_1a_2\ldots a_n=b_1b_2\ldots b_n$$
$$\Leftrightarrow a_1=b_1,\ a_2=b_2,\ \ldots,\ a_n=b_n$$

说明：每个字可以唯一分解为Σ中的元素之积，Σ^{+}上的连接运算满足结合律，$V=<\Sigma^{+},\cdot>$构成半群，称为Σ上的自由半群，Σ为这个自由半群的生成元集，即 $<\Sigma>=V$.

如果包含空串则Σ^{*}构成自由独异点.

半群独异点的直积商代数、同态

- 半群与独异点的直积

  半群的直积仍是半群

  独异点的直积仍是独异点

- 半群与独异点的商代数

  半群$<A,\circ>$，商半群$<A/R, \bar{\circ}>$

  独异点$<A,\circ,e>$，商独异点$<A/R, \bar{\circ}, [e]>$

- 半群与独异点的同态和同构

  半群　$f(xy)=f(x)f(y)$

  独异点　$f(xy)=f(x)f(y)$, $f(e)= e'$

半群同态的性质

定理3 设V=<S,$*$>为半群，V'=<S^S,$\circ$>，$\circ$为合成，则V'也是半群，且存在 V 到 V' 的同态.

证： 只证同态. 令 $f_a: S\to S$, $f_a(x) = a*x$,

$f_a\in S^S$, 且 $\{f_a \mid a\in S\}\subseteq S^S$,

令 $\varphi: S\to S^S$, $\varphi(a) = f_a$,

$\varphi(a*b) = f_{a*b}$, $\varphi(a)\circ\varphi(b) = f_a\circ f_b$

为证同态只需证明 $f_{a*b} = f_a\circ f_b$

$\forall x\in S$

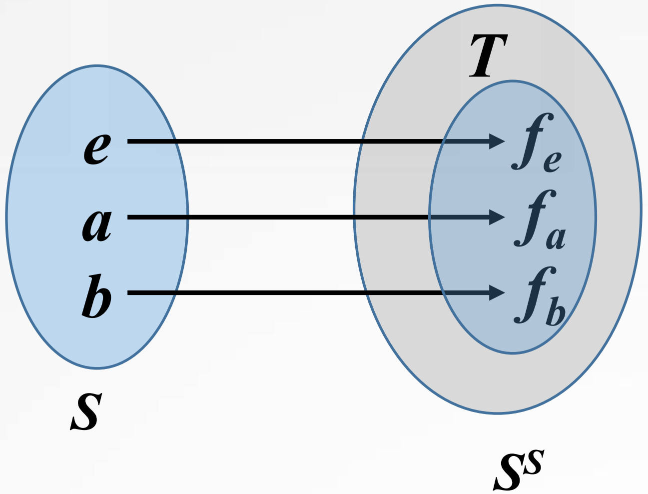
$$f_{a*b}(x) = (a*b)*x = a*b*x$$

$$f_a\circ f_b(x) = f_a(f_b(x)) = f_a(b*x) = a*(b*x) = a*b*x$$

独异点的表示定理

定理 4 设 $V=<S, *, e>$为独异点，则存在 $T\subseteq S^S$，使得

$<S, *, e>$ 同构于 $<T, \circ, I_S>$



证：令 $\varphi : S\to S^S$, $\varphi(a) = f_a$, 则

$\varphi(a * b) = \varphi(a)\circ\varphi(b)$

$\varphi(e) = f_e = I_S$,

φ 为独异点 V 到 $<S^S,\circ,I_S>$ 的同态

$\varphi(a) = \varphi(b) \Rightarrow f_a = f_b \Rightarrow \forall x\in S\ (a * x = b * x)$

$\Rightarrow a * e = b * e \Rightarrow a=b$, φ为单射

令$T = \varphi(S)$，则 $T\subseteq S^S$, 且 $\varphi : S \to T$ 为双射，

$<S, *, e> \cong <T,\circ, I_S>$

实例

例4　$S = Z_3 = \{ 0, 1, 2 \}$，独异点 $V = <S,\oplus,0>$,

$S^S = \{ f_0, f_1, f_2, \ldots, f_{26} \}$，其中

$$f_0 = \{<0,0>,<1,1>,<2,2>\}$$

$$f_1 = \{<0,1>,<1,2>,<2,0>\}$$

$$f_2 = \{<0,2>,<1,0>,<2,1>\}$$

$\varphi: S \to S^S$,　$\varphi(0) = f_0$,　$\varphi(1) = f_1$, $\varphi(2) = f_2$

$\varphi(S) = \{ f_0, f_1, f_2 \} \subseteq S^S$

$\oplus$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\circ$	f_0	f_1	f_2
f_0	f_0	f_1	f_2
f_1	f_1	f_2	f_0
f_2	f_2	f_0	f_1