15.3 代数系统的同态同构

- 同态映射的概念
  - 同态映射定义
  - 同态映射分类
  - 实例
- 同态映射的性质
  - 同态映射的合成仍旧是同态映射
  - 同态像是映到代数系统的子代数
  - 同态像中保持原有代数系统的运算性质

同态映射的定义

定义 设

$$V_1 =< A, o_1, o_2, ..., o_r > \text{与} V_2 =< B, o_1', o_2', ..., o_r' >$$

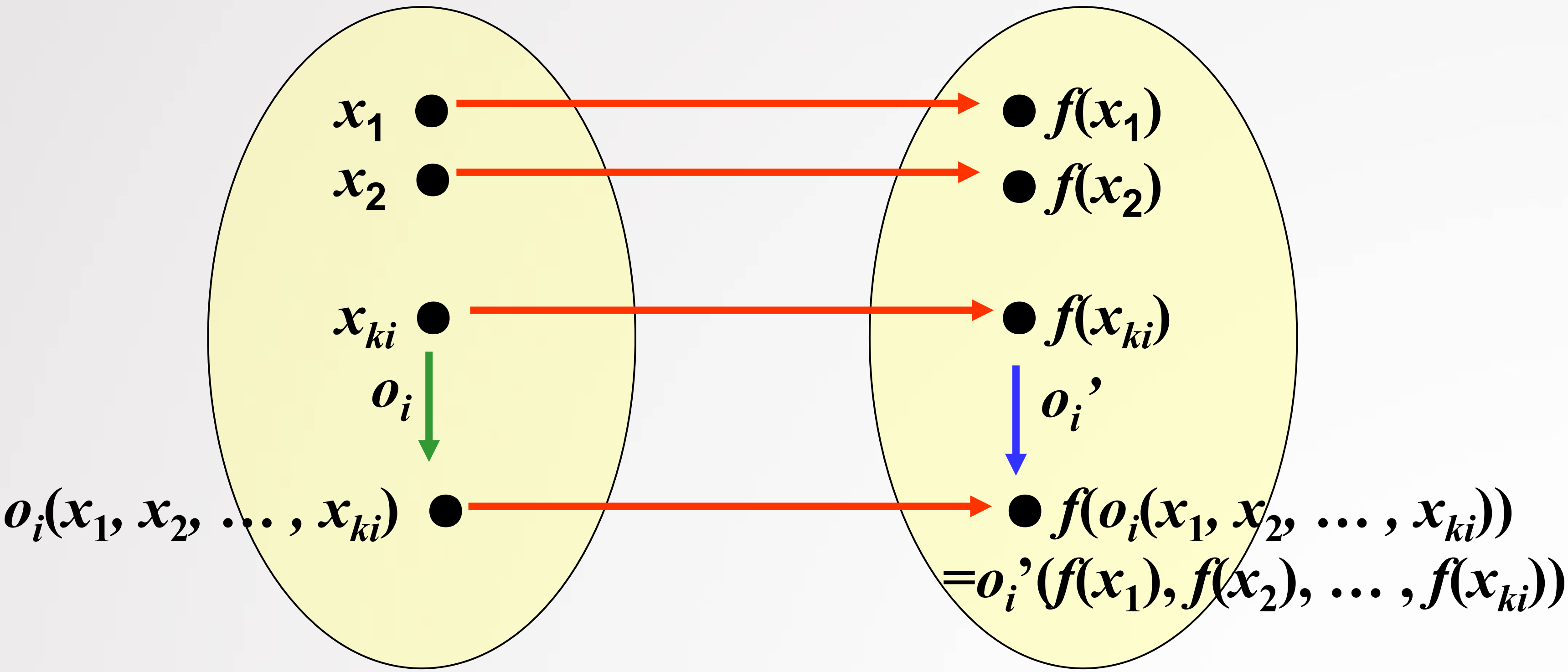
是同类型的代数系统，对于i=1,2,…,r，o_i为 k_i 元运算, 函数 $f: A \to B$, 如果对于所有的运算 o_i与 o_i'

$$f(o_i(x_1, x_2, ..., x_{k_i})) = o_i'(f(x_1), f(x_2), ..., f(x_{k_i}))$$

$$\forall x_1, x_2, ..., x_{k_i} \in A$$

则称 f 是代数系统 V_1 到 V_2 的同态映射，简称同态

同态映射的含义



x_1
x_2
x_{ki}
o_i
$o_i(x_1, x_2, \ldots, x_{ki})$
$f(x_1)$
$f(x_2)$
$f(x_{ki})$
o_i'
$f(o_i(x_1, x_2, \ldots, x_{ki}))$
$=o_i'(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_{ki}))$

几点说明

1. 对于二元运算∘、一元运算Δ、0元运算 k 采用下述表示：

$$f(x\circ y)=f(x)\circ' f(y)$$

$$f(\Delta x)=\Delta' f(x)$$

$$f(k)=k'$$

2. 同态映射必须保持所有的运算，包括0元运算在内，例如

$$V=<A,\cdot,\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}>,\quad A=\left\{\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}\middle|\, a,b\in\mathbf{R}\right\}$$

$$f:A\to A,\quad f(\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}a&0\\0&0\end{pmatrix}$$

则 f 不是 V 的自同态，因为不保持0元运算 $f(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix})\neq\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

同态映射的分类

特殊的同态映射

- 按映射性质分为：
  - 单同态
  - 满同态　$V_1 \sim V_2$
  - 同构　$V_1 \cong V_2$
- 按载体分：自同态
- 综合：单自同态、满自同态、自同构

同态映射的实例

(1) $V = \langle Z,+\rangle$, $f_c:Z\to Z$, $f_c(x) = cx$, c为给定整数

$c = 0$, 零同态；$c = \pm 1$， 自同构；其它c, 单自同态

(2) $V = \langle Z_6,\oplus\rangle$, $f_p:Z_6\to Z_6$, $f_p(x) = (px) \bmod 6$,

$p = 0,1,2,3,4,5$

$p = 0$, f_0 零同态；$p = 1$, f_1 恒等映射， 自同构

$p = 2$, $f_2 = \{\langle 0,0\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,0\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 5,4\rangle\}$,

$p = 3$, $f_3 = \{\langle 0,0\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,0\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,0\rangle,\langle 5,3\rangle\}$

$p = 4$, $f_4 = \{\langle 0,0\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,0\rangle,\langle 4,4\rangle,\langle 5,2\rangle\}$

$p = 5$, $f_5 = \{\langle 0,0\rangle,\langle 1,5\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 5,1\rangle\}$自同构

(3) 推广到 $f_p:Z_n\to Z_n$, 恰好存在 n 个自同态，$p=0,1,\ldots,n-1$

$$f_p(x\oplus y) = (p(x\oplus y)) \bmod n$$

$$= (px) \bmod n \oplus (py) \bmod n = f_p(x)\oplus f_p(y)$$

同态性质

- 同态的合成仍旧是同态
- 同态像是映到的代数系统的子代数
- 满同态映射（在同态像中）保持原代数系统的下述性质：
  - 交换、结合、幂等、分配、吸收
  - 单位元、零元、逆元

注意：消去律不一定保持

同态的合成仍是同态

命题 若 $f:V_1 \to V_2$, $g:V_2 \to V_3$为同态映射，则 $g \circ f:V_1 \to V_3$也为同态映射.

证 根据集合论的定理，$g \circ f: V_1 \to V_3$为映射.
任取V_1,V_2,V_3中一组对应的运算 o_1,o_2,o_3, 设为 k 元运算.
$\forall x_1, x_2, \ldots, x_k \in V_1$,

$$
\begin{aligned}
g \circ f(o_1(x_1, x_2, \ldots, x_k)) &= g(f(o_1(x_1, x_2, \ldots, x_k))) \\
&= g(o_2(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_k))) \\
&= o_3(g(f(x_1)), g(f(x_2)), \ldots, g(f(x_k))) \\
&= o_3(g \circ f(x_1), g \circ f(x_2), \ldots, g \circ f(x_k))
\end{aligned}
$$

由于运算的任意性，命题得证.

推论 代数系统的同构具有自反、对称、传递的性质.

同态像是映到系统的子代数

定理1　设 $V_1=<A,o_1,o_2,...,o_r>$ 与 $V_2=<B,o_1',o_2',...,o_r'>$ 是同类型的代数系统，对于 i=1,2,…,r，o_i与o_i'是k_i元运算，f:A→B是V_1到V_2的同态，则 $f(A)$关于V_2中的运算构成代数系统，且是V_2的子代数，称为V_1在 f 下的同态像.

证　$f(A)$是 B 的非空子集.证明 $f(A)$ 对V_2中的所有运算封闭. 若V_2中有0元运算a', 则V_1存在0元运算 a, $f(a)=a'$. 因此 $a'\in f(A)$. 考虑V_2中任意非0元运算o'(k元运算). 任取 $f(A)$中元素 $y_1,y_2,\ldots,y_k$,存在$x_1,x_2,\ldots,x_k$使得 $f(x_i)=y_i$, i=1,2,…,k, 那么

$$o'(y_1,y_2,...,y_k)=o'(f(x_1),f(x_2),...,f(x_k))=f(o(x_1,x_2,...,x_k))$$

显然上述结果属于$f(A)$.

满同态保持原代数性质

定理2 设

$$V_1 = \langle A, o_1, o_2, \ldots, o_r \rangle \text{与} V_2 = \langle B, o_1', o_2', \ldots, o_r' \rangle$$

是同类型的代数系统，函数 $f: A \to B$ 是V_1到 V_2的满同态，

(1) V_2中运算保持V_1中相应运算的下述性质：

交换、结合、幂等、分配、吸收

(2) V_2中保持V_1中的 单位元、零元、逆元，即

$f(e)$是V_2中单位元，其中 e 为V_1中相应运算单位元

$f(\theta)$是V_2中零元，其中θ为V_1中相应运算零元

$f(a^{-1})$是 $f(a)$的逆元

结合律的证明

$V_1 =< A, o_1, o_2, ..., o_r >$ 与 $V_2 =< B, o_1', o_2', ..., o_r' >$

$\forall x, y, z \in B$, f 是满同态，存在 $a, b, c \in A$, 使得

$$f(a)=x,\quad f(b)=y,\quad f(c)=z$$

$$
\begin{aligned}
(x\, o_i'\, y)\, o_i'\, z &= (f(a)\, o_i'\, f(b))\, o_i'\, f(c) \\
&= f(a\, o_i b)\, o_i'\, f(c) \\
&= f((a\, o_i b)\, o_i c) \\
&= f(a\, o_i (b\, o_i c)) \qquad (\, o_i \text{是可结合的}) \\
&= f(a)\, o_i'\, f(b\, o_i c) \\
&= f(a)\, o_i' (f(b)\, o_i'\, f(c)) \\
&= x\, o_i' (y\, o_i'\, z)
\end{aligned}
$$

由于运算的任意性，命题得证.

几点说明

1. 满同态条件重要. 如果不是满同态，有关性质只能在同态像中成立. 例如

$$V = \langle A, \cdot \rangle \quad A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbf{R} \right\},$$

$$f : A \to A, \quad f\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

f 不是满同态，只能将单位元映到 $f(A)$ 的单位元，不是自身. 其他见书上例题 15.22, 15.23.

2. 消去律不一定保持.

书上例题15.24, $\langle Z, \cdot \rangle$, $\langle Z_6, \otimes \rangle$, $f(x) = (x) \bmod 6$