23.3 Burnside引理

- 不动置换类和轨道
- Burnside引理
- Burnside引理的应用

不动置换类和轨道

不动置换类：设 $N=\{1, 2, \ldots, n\}$, G 为 N 上置换群，

$$Z_k = \{ \sigma \mid \sigma \in G, \sigma(k)=k \}$$

称 Z_k 为 k 的不动置换类.

可以证明 Z_k 是 G 的子群.

N,G 定义如上，R 是 N 上的二元关系，$\forall x,y \in N$,

$$xRy \Leftrightarrow \exists\sigma\ (\sigma \in G, \sigma(x)=y)$$

$$\forall k \in N, E_k=\{ l \mid l \in N, kRl \}$$

称 E_k 为 k 的轨道.

可以证明 R 为 N 上等价关系，且 k 的轨道就是 k 的等价类.

实例

例 1　$N=\{1, 2, 3, 4\}$，$G=\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6, \sigma_7, \sigma_8\}$

$\sigma_1=(1)$　　$\sigma_2=(1\ 2\ 3\ 4)$

$\sigma_3=(1\ 3)(2\ 4)$　　$\sigma_4=(1\ 4\ 3\ 2)$

$\sigma_5=(1\ 2)(3\ 4)$　　$\sigma_6=(1\ 4)(2\ 3)$

$\sigma_7=(1)(3)(2\ 4)$　　$\sigma_8=(2)(4)(1\ 3)$

$Z_1=Z_3=\{\sigma_1, \sigma_7\}$,　$Z_2=Z_4=\{\sigma_1, \sigma_8\}$

$E_1=E_2=E_3=E_4=\{1, 2, 3, 4\}$

$S_3=\{(1), (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$,

$Z_1=\{(1), (2\ 3)\}$, $E_1=\{1, 2, 3\}$,

$|S_3|=6$, $|Z_1|=2$, $|E_1|=3$, $6=2\times 3$.

不动置换类与轨道的关系

定理 1　$N=\{1, 2, \ldots, n\}$, G 为 N 上置换群，则$\forall k\in N$,

$$|Z_k|\cdot|E_k|=|G| .$$

证：Z_k 是子群，根据 Lagrange 定理

$$|G| = |Z_k|\ [G:Z_k]$$

下面证明 $[G:Z_k]=|E_k|$.

令 S 是 Z_k 的所有左陪集的集合，

定义　$f: S\to E_k, f(\sigma Z_k)=\sigma(k)$，

良定义及单射性：

$$\sigma Z_k=\tau Z_k \Leftrightarrow \sigma^{-1}\tau\in Z_k \Leftrightarrow \sigma^{-1}\tau(k)=k$$

$$\Leftrightarrow \sigma^{-1}(\tau(k))=k \Leftrightarrow \sigma(k)=\tau(k)$$

满射性：$\forall t\in E_k, \exists\sigma\in G$，使得$\sigma(k)=t$,

因此 $f(\sigma Z_k)= \sigma(k)=t$.

Burnside引理

引理　设 $N=\{1,2,\ldots,n\}$, G 是 N 上置换群.

令 $G=\{\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_g\}$,

$c_1(\sigma_k)$ 是 σ_k 的轮换表示中 1-轮换的个数,

M 为不同的轨道个数，则

$$M=\frac{1}{|G|}\sum_{k=1}^{g}c_1(\sigma_k)$$

证明

证：$c_1(\sigma_k)$是σ_k的作用下保持不变的N中元素数。做下表

$G \backslash N$	$1 \quad 2 \quad \cdots\cdots \quad n$	$c_1(\sigma_k)$
$\sigma_1=(1)$	$S_{11} \quad S_{12} \quad \cdots\cdots \quad S_{1n}$	$c_1(\sigma_1)$
σ_2	$S_{21} \quad S_{22} \quad \cdots\cdots \quad S_{2n}$	$c_1(\sigma_2)$
。	$\cdot \quad \cdot \quad \quad \cdot$	$\cdot$
。	$\cdot \quad \cdot \quad \quad \cdot$	$\cdot$
σ_g	$S_{g1} \quad S_{g2} \quad \cdots\cdots \quad S_{gn}$	$c_1(\sigma_n)$
合 计	$\lvert Z_1\rvert \quad \lvert Z_2\rvert \quad \cdots\cdots \quad \lvert Z_n\rvert$	$\sum_{k=1}^{g} c_1(\sigma_k) = \sum_{j=1}^{n} \lvert Z_j \rvert$

$$S_{kl} = 1 \Leftrightarrow \sigma_k(l) = l$$

证明（续）

$$\sum_{k=1}^{g} c_1(\sigma_k) = \sum_{k=1}^{g}\sum_{j=1}^{n} S_{kj} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{g} S_{kj} = \sum_{j=1}^{n} |Z_j|$$

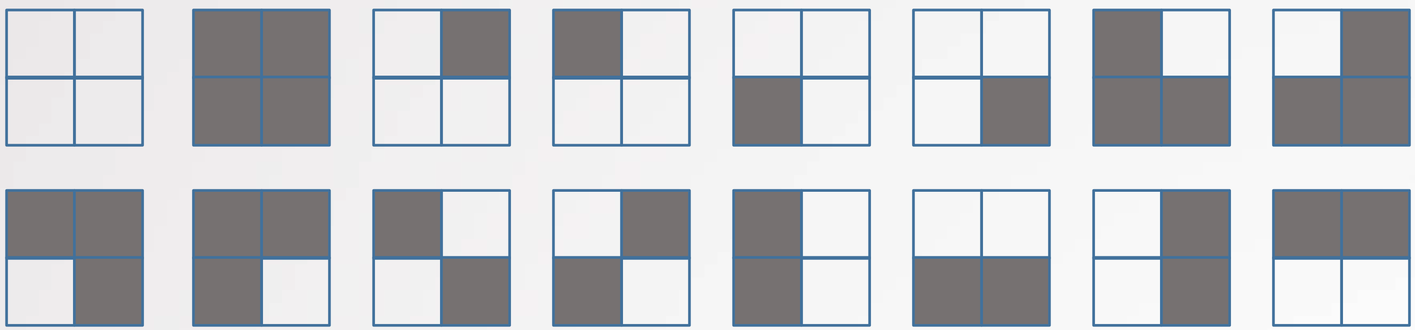
$$\frac{1}{|G|}\sum_{k=1}^{g} c_1(\sigma_k) = \frac{1}{|G|}\sum_{j=1}^{n} |Z_j| = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{|E_j|} = M$$

$$\{i_1, i_2, \ldots, i_l\} = E_{i_1} = E_{i_2} = \ldots = E_{i_l}$$

$$\Rightarrow |E_{i_1}| = l \text{ 且} \sum_{j=i_1}^{i_l} \frac{1}{|E_j|} = 1$$

Burnside引理的应用

例2 用2色涂色2×2方格棋盘，则方案数为16



作用在16个方案上的置换群 $G=\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4\}$,

$\sigma_1=(1)$

$\sigma_2=(1)(2)(3\ 4\ 5\ 6)(7\ 8\ 9\ 10)(11\ 12)(13\ 14\ 15\ 16)$

$\sigma_3=(1)(2)(3\ 5)(4\ 6)(7\ 9)(8\ 10)(11)(12)(13\ 15)(14\ 16)$

$\sigma_4=(1)(2)(6\ 5\ 4\ 3)(10\ 9\ 8\ 7)(11\ 12)(16\ 15\ 14\ 13)$

$$M=\frac{1}{4}(16+2+4+2)=6$$

应用:立方体涂色

例3　涂色立方体使得各个面颜色不同的方案数.

解：以过一对面的轴

旋转0度：1个

旋转90度，270度：6个

旋转180度：3个

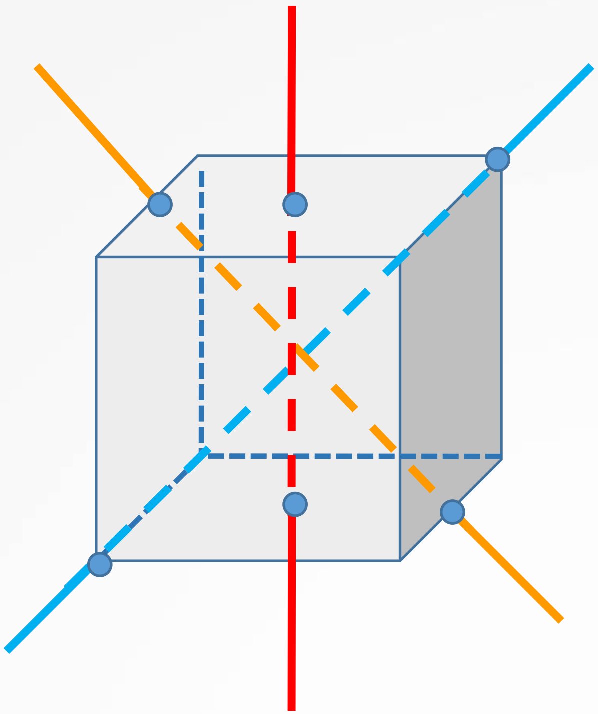
以过一对顶点的轴

旋转120度，240度：8个

以过一对棱的的轴

旋转180度：6个

$|G|=24$，$M=1/24 \cdot 6! =30$



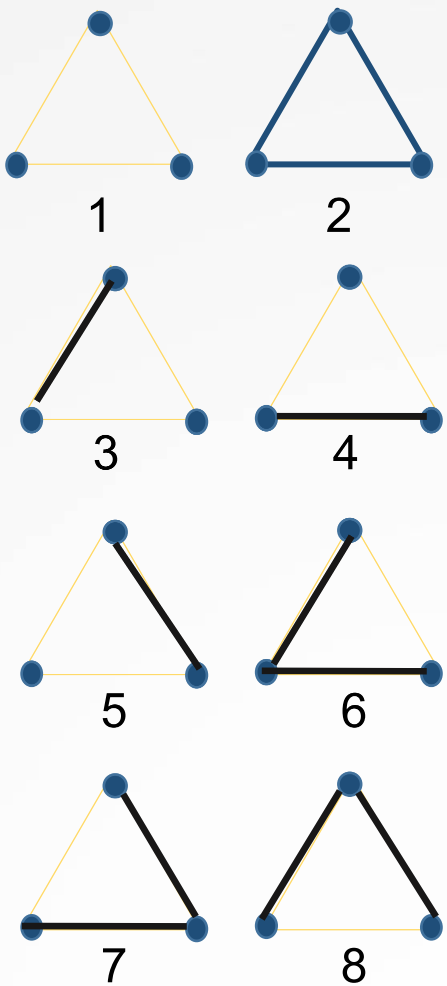
应用:图的同构

例 4　3 个顶点的不同构的图的个数

G= { σ_1, σ_2, σ_3, σ_4, σ_5, σ_6 }

σ_1=(1)	0 度
σ_2=(1) (2) (3 4 5) (6 7 8)	120 度
σ_3=(1) (2) (3 5 4) (6 8 7)	240 度
σ_4=(1) (2) (3 5) (4) (6 7) (8)	翻 180 度
σ_5=(1) (2) (4 5) (3) (6 8) (7)	翻 180 度
σ_6=(1) (2) (3 4) (5) (7 8) (6)	翻 180 度

$$M = \frac{1}{6}(8+2+2+4+4+4) = 4$$



23.4 Polay定理

- **Polya定理**
- **Polya定理的应用**

Polay定理

定理 1 设 $N=\{1, 2, \ldots, n\}$,

令 $G=\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_g\}$为 N 上置换群,

用 m 种颜色涂色 N 中的元素，

$c(\sigma_k)$是 σ_k 的轮换表示中轮换的个数，

则在 G 作用下不同的涂色方案数为

$$M=\frac{1}{|G|}\sum_{k=1}^{g} m^{c(\sigma_k)}$$

证明：使用 Burnside 引理.

证明思路

(1)令$\overline{G}=\{\tau_{\sigma_k} \mid \sigma_k \in G\}$， $\tau_{\sigma_k}(f)=f\sigma_k$， f为方案

(2)证明 G 与 $\overline{G}$ 同构

(3)证明$c_1(\tau_{\sigma_k})=m^{c(\sigma_k)}$

(4)证明 $M=\dfrac{1}{|\overline{G}|}\sum_{k=1}^{g}c_1(\tau_{\sigma_k})=\dfrac{1}{|G|}\sum_{k=1}^{g}m^{c(\sigma_k)}$

与Burnside引理的区别

- **Burnside引理的群作用于方案集合**

  Polya定理的群作用于元素的集合

- 如果有n个元素，m种颜色，将有m^n种方案.一般使用Polya定理的群要简单得多.

- 一般情况使用Polya定理，但在某些特殊情况只能直接计数不变的方案，必须使用Burnside引理

应用

例 5　考虑例 1，群 $G = \{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4\}$

$\sigma_1 = (1)\ (2)\ (3)\ (4)$　　旋转 0 度

$\sigma_2 = (1\ 2\ 3\ 4)$　　旋转 90 度

$\sigma_3 = (1\ 3)\ (2\ 4)$　　旋转 180 度

$\sigma_4 = (1\ 4\ 3\ 2)$　　旋转 270 度

$$M = \frac{1}{4}\left(2^4 + 2^1 + 2^2 + 2^1\right) = 6$$

应用:Fermat小定理

例6 **Fermat小定理：** 设 p为素数，则 $p \mid (n^p-n)$

证：考虑 p个珠子的手镯，用 n 种颜色的珠子穿成.

考虑旋转，则

$G=\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p\}$

$\sigma_1=(\bullet)(\bullet)\ldots(\bullet)$

$\sigma_2=(\bullet\ \bullet\ \ldots\ \bullet)$

…

$\sigma_p=(\bullet\ \bullet\ \ldots\ \bullet)$

$$M=\frac{1}{p}[n^p+(p-1)n^1]=\frac{1}{p}(n^p-n+pn)$$

$$p \mid (n^p-n)$$

正多边形的置换群

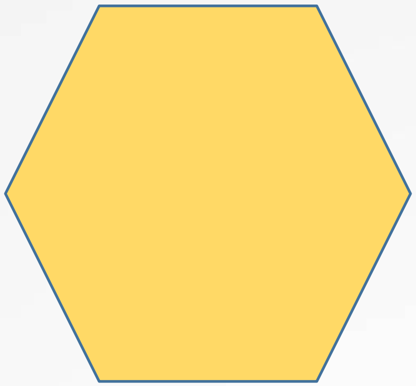
对顶点置换

旋转：

(•)(•)(•)(•)(•)(•)	1
(• • • • • •)	2
(• • •)(• • •)	2
(• •)(• •)(• •)	1

翻转：

(•)(•)(• •)(• •)	3
(• •)(• •)(• •)	3



考虑：对于边的置换？

正八面体的置换群

对面的置换：24个

旋转：

黑色轴 3个（0,90, 180, 270度）

(•)(•)(•)(•)(•)(•) (•)(•) 1

(• • • •)(• • • •) 6

(• •)(• •)(• •)(• •) 3

蓝色轴 6个 （180度）

(• •)(• •)(• •)(• •) 6

橙色轴 4个（120, 240度）：

(• • •)(• • •)(•)(•) 8

考虑：对于边、顶点的置换？