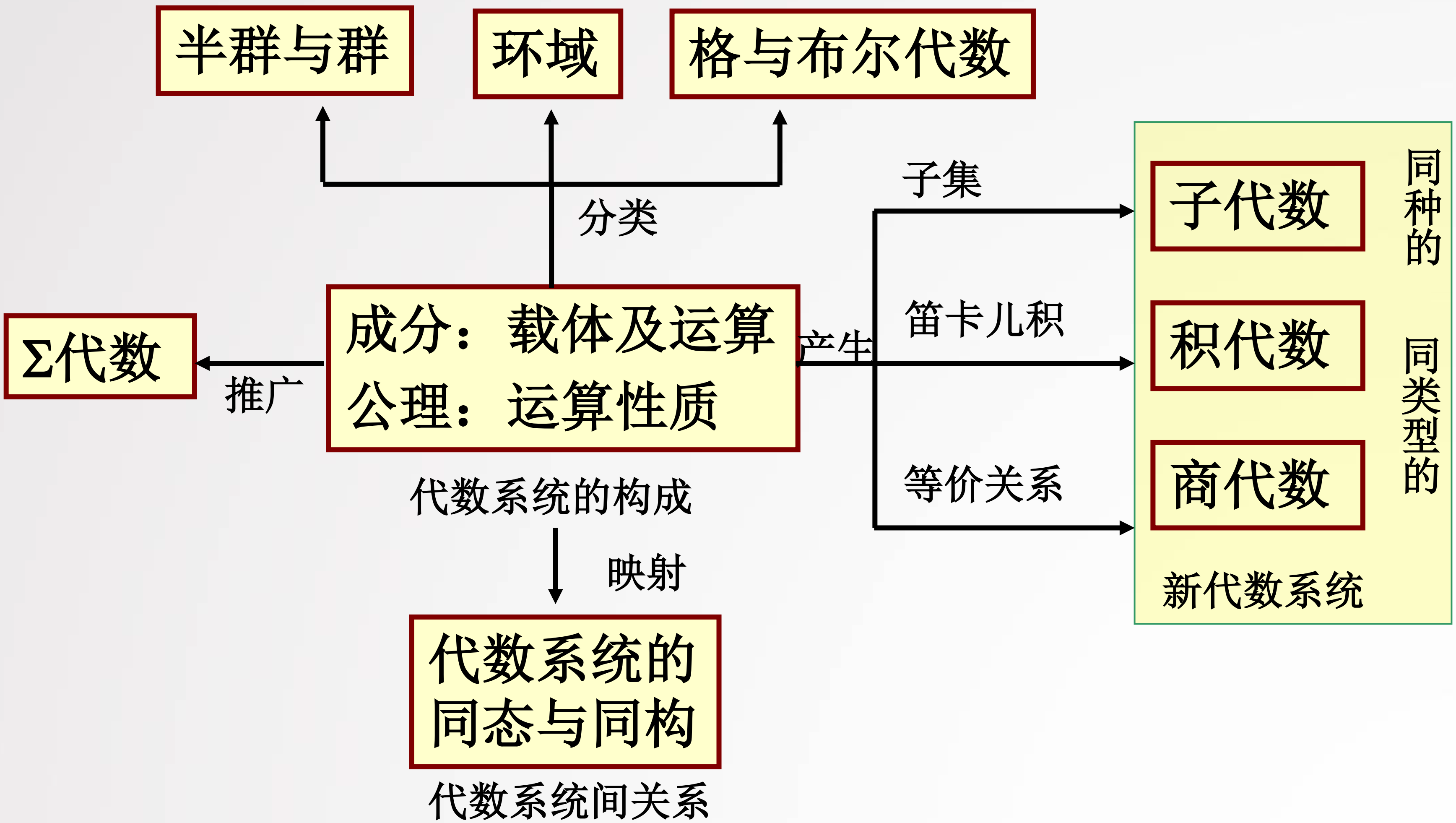
代数结构

Algebraic Structure

代数系统 半群与独异点群

环与域 格与布尔代数

第十五章 代数系统


半群与群
环域
格与布尔代数
分类
Σ代数
推广
成分：载体及运算
公理：运算性质
代数系统的构成
产生
子集
笛卡儿积
等价关系
子代数
积代数
商代数
同种的
同类型的
新代数系统
映射
代数系统的同态与同构
代数系统间关系

15.1 二元运算及其性质

- *n*元运算的定义及实例
- *n*元运算的表示
- 二元运算的算律
- 二元运算的特异元素

n元运算的定义

定义：设A为集合，

函数 $f: A\times A\to A$ 称为A上的二元运算

函数 $f: A^n\to A$ 称为A上的 n元运算

n=0, 0元运算， $f:\to A$

n=1, 一元运算，$f:A\to A$

A 在运算 f 下是封闭的：

任何A中元素都可参与 f 运算

运算结果属于A

n元运算的实例

集合	二元运算	一元运算	0元运算
Z, Q, R, C	+, ×	−	0, 1
M_n(R)	+, ×	−	θ, E
$P(B)$	∪, ∩, −, ⊕	~	∅, B
$R(B)$	∘		I_B
A^A	∘		

$R(B)$: B上的关系集合

n元运算的表示

算符记号：$\circ$，$*$，$\bullet$，$\square$，$\lozenge$，$\triangle$等，

表达式：

$$\circ\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) = y$$

$$x_1 \circ x_2 = y$$

$$\triangle x = y$$

表示方法：

解析表达式

一元、二元运算表（适用于有穷集）

n元运算的表示实例

- 表达式：∘是实数集 R上的二元运算

  $x \circ y = x + y - 2xy$

- 运算表

  $A = P(\{a,b\})$，A上的二元运算⊕，一元运算~

$\oplus$	$\varnothing$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\{a\}$	$\{a\}$	$\varnothing$	$\{a,b\}$	$\{b\}$
$\{b\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$	$\varnothing$	$\{a\}$
$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{b\}$	$\{a\}$	$\varnothing$

x	$\sim x$
$\varnothing$	$\{a,b\}$
$\{a\}$	$\{b\}$
$\{b\}$	$\{a\}$
$\{a,b\}$	$\varnothing$

运算表的一般形式

适用于有穷集上的一元、二元运算

$\circ$	a_1	a_2	$\cdots$	a_n
a_1	$a_1 \circ a_1$	$a_1 \circ a_2$	$\cdots$	$a_1 \circ a_n$
a_2	$a_2 \circ a_1$	$a_2 \circ a_2$	$\cdots$	$a_2 \circ a_n$
	$\cdots\cdots$			
a_n	$a_n \circ a_1$	$a_n \circ a_2$	$\cdots$	$a_n \circ a_n$

a_i	Δa_i
a_1	Δa_1
a_2	Δa_2
a_n	Δa_n

二元运算的算律

- 涉及一个二元运算的算律

  交换

  结合——广义结合

  幂等

  消去

- 涉及两个不同的二元运算

  分配——广义分配

  吸收（以交换为前提）

算律的定义

设$\circ$,$*$为A上的二元运算

交换律 $\forall a,b\in A$, $a\circ b=b\circ a$

结合律 $\forall a,b,c\in A$, $(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c)$

幂等律 $\forall a\in A$, $a\circ a=a$

分配律 $\forall a,b,c\in A$,

$a\circ(b*c)=(a\circ b)*(a\circ c)$, $(b*c)\circ a=(b\circ a)*(c\circ a)$

吸收律 设$\circ$,$*$可交换 $\forall a,b\in A$,

$a\circ(a*b)=a$，$a*(a\circ b)=a$

推广：结合律、幂等律、分配律推广到有限项

实例1

集合	运算	交换律	结合律	幂等律
Z, Q, R	普通加法+	有	有	无
	普通乘法×	有	有	无
M_n(R)	矩阵加法+	有	有	无
	矩阵乘法×	无	有	无
$P(B)$	并∪	有	有	有
	交∩	有	有	有
	相对补−	无	无	无
	对称差⊕	有	有	无
A^A	函数复合∘	无	有	无

实例2

集合	运算	分配律	吸收律
Z, Q, R	普通加法+与乘法×	×对+可分配 +对×不分配	无
$M_n(\mathbf{R})$	矩阵加法+与乘法×	×对+可分配 +对×不分配	无
$P(B)$	并∪与交∩	∪对∩可分配 ∩对∪可分配	有
	交∩与对称差⊕	∩对⊕可分配 ⊕对∩不分配	无

二元运算的特异元素

- 特异元素名称

  单位元（幺元）e

  零元 θ

  幂等元

  可逆元和逆元

- 说明：存在特异元素也可以作为算律

  同一律（存在单位元）

  零律（存在零元）

特异元素的定义与性质

定义 设$\circ$为A上二元运算

单位元 e, $\forall a\in A,\ e\circ a = a\circ e = a$

零元 θ, $\forall a\in A,\ \theta\circ a = a\circ\theta = \theta$

幂等元 a $a\in A,\ a\circ a = a$

可逆元 x (逆元y) $x\in A,\ \exists y\in A,\ x\circ y = y\circ x = e$

特异元素的性质

单位元以及零元的唯一性

如果 $|A| >1,\ e\neq\theta$

可结合运算逆元唯一性：x 的逆元标记为 x^{-1}.

单位元唯一性定理

定理1

对于给定集合 A 和 A 上的二元运算$\circ$，如果存在 $e_l \in A$ 和 $e_r \in A$ 使得 $\forall x \in A$ 满足

$$e_l \circ x = x \circ e_r = x,$$

则 $e_l = e_r = e$, 且e 就是A中关于$\circ$ 运算的唯一的单位元.

证

$$e_l = e_l \circ e_r = e_r ,$$

令 $e_l = e_r = e$, 则 e 为单位元.

假设 e' 也为单位元，则

$$e' = e' \circ e = e$$

零元唯一性定理

定理2

对于给定集合 A 和 A 上的二元运算$\circ$，如果存在 $\theta_l \in A$ 和 $\theta_r \in A$ 使得 $\forall x \in A$ 满足

$$\theta_l \circ x = \theta_l, \quad x \circ \theta_r = \theta_r,$$

则 $\theta_l = \theta_r = \theta$, 且$\theta$就是$A$中关于$\circ$ 运算的唯一的零元.

证明类似于定理1，留作思考.

逆元唯一性定理

定理3

对于集合 A 和 A 上可结合的二元运算 $\circ$，如果对于A 中元素 x，存在元素 y_l 和 y_r 使得

$$y_l \circ x = x \circ y_r = e,$$

则

$$y_l = y_r = y,$$

且 y 是 x 的唯一的逆元.

证 $\quad y_l = y_l \circ e = y_l \circ (x \circ y_r) = (y_l \circ x) \circ y_r = e \circ y_r = y_r$

令 $y_l = y_r = y$，y 是 x 的逆元.

假设 y' 也是 x 的逆元，则

$$y' = y' \circ e = y' \circ (x \circ y) = (y' \circ x) \circ y = e \circ y = y$$

特异元素的实例

集合	运算	单位元	零元	逆元
Z, Q, R	普通加法+	0	无	x的逆元$-x$
	普通乘法×	1	0	可逆元x存在x^{-1}
M_n(R)	矩阵加法+	全0矩阵	无	X的逆元$-X$
	矩阵乘法×	单位矩阵	全0矩阵	可逆元X存在X^{-1}
$P(B)$	并∪	∅	B	∅的逆元为∅
	交∩	B	∅	B的逆元为B
	对称差⊕	∅	无	X的逆元为X

注意：只有可逆元 x 存在逆元，且 x^{-1}必须属于给定集合

消去律定义及实例

定义　设A为集合，$\circ$为A上二元运算，若 $\forall a, b, c \in A$,

$$a \circ b = a \circ c \wedge a \neq \theta \Rightarrow b = c$$

$$b \circ a = c \circ a \wedge a \neq \theta \Rightarrow b = c$$

则称 $\circ$运算满足 消去律

实例：

Z, Q, R，+，× 满足消去律

M_n(R), 矩阵 + 满足消去律，矩阵 × 不满足消去律

$P(B)$, $\oplus$ 满足消去律，$\cup$、$\cap$、$-$ 一般不满足消去律

A^A, 函数合成$\circ$一般不满足消去律

例题分析

例1 设 ∘ 运算为 Q 上的二元运算，

$$\forall x, y \in Q, \quad x \circ y = x + y + 2xy,$$

(1) 判断 ∘ 运算是否满足交换、结合、幂等、消去律.

(2) 求出 ∘运算的单位元、零元和所有可逆元素的逆元.

证明算律成立：根据定义验证；证明算律不成立：举反例.

解 (1) ∘ 运算可交换，可结合，可消去，不幂等.

结合律成立，任取 x, y, z∈Q,

$$(x \circ y) \circ z = (x + y + 2xy) + z + 2(x + y + 2xy)\, z$$

$$= x + y + z + 2xy + 2xz + 2yz + 4xyz$$

$$x \circ (y \circ z) = x + (y + z + 2yz) + 2x(y + z + 2yz$$

$$= x + y + z + 2xy + 2xz + 2yz + 4xyz$$

幂等律不成立，因为 $1 \circ 1 = 1 + 1 + 2 = 4 \neq 1$.

例题分析（续）

(2) 设 ∘运算的单位元和零元分别为 e 和 θ，则对于任意 x 有 $x \circ e = x$ 成立，即

$$x + e + 2xe = x \Rightarrow e = 0$$

由于∘ 运算可交换，所以 0 是幺元.

对于任意 x 有 $x \circ \theta = \theta$ 成立，即

$$x+\theta + 2x\theta = \theta \Rightarrow x + 2x\theta = 0 \Rightarrow \theta = -1/2$$

给定 x，设 x 的逆元为 y, 则有 $x \circ y = 0$ 成立，即

$$x + y + 2xy = 0 \Rightarrow y = -\frac{x}{1+2x} \quad (x \neq = -1/2)$$

因此当 $x \neq -1/2$时，$y = -\dfrac{x}{1+2x}$ 是 x 的逆元.

例题分析（续）

例2 (1) 说明哪些运算是可交换的、可结合的、幂等的.
(2) 求出每个运算的单位元、零元、所有可逆元素的逆元.

$*$	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	c
c	b	c	a

$\circ$	a	b	c
a	a	a	a
b	b	b	b
c	c	c	c

$\bullet$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	c
c	c	c	c

解 (1) $*$ 满足交换律、结合律； $\circ$ 满足结合律、幂等律；
$\bullet$ 满足交换律、结合律.

(2) $*$ 的单位元为 b, 没有零元， $a^{-1} = c$, $b^{-1} = b$, $c^{-1} = a$
$\circ$ 的单位元和零元都不存在，没有可逆元素.
$\bullet$ 的单位元为 a，零元为c, $a^{-1}=a$. b, c不是可逆元素.