



## 单元-2.2 二元关系

第一编 集合论 第2章二元关系  
2.2 二元关系



北京大学



# 内容提要

- n元关系
- 二元关系
- A到B的二元关系
- A上的二元关系
- 一些特殊关系



北京大学



# n元关系

- n元关系: 其元素全是有序n元组的集合.
- 例1:  $F_1=\{\langle a,b,c,d \rangle, \langle 1,2,3,4 \rangle,$   
 $\quad \langle \text{物理}, \text{化学}, \text{生物}, \text{数学} \rangle\},$   
 $F_1$ 是4元关系. #
- 例2:  $F_2=\{\langle a,b,c \rangle, \langle \alpha,\beta,\gamma \rangle,$   
 $\quad \langle \text{大李}, \text{小李}, \text{老李} \rangle\}$   
 $F_2$ 是3元关系. #



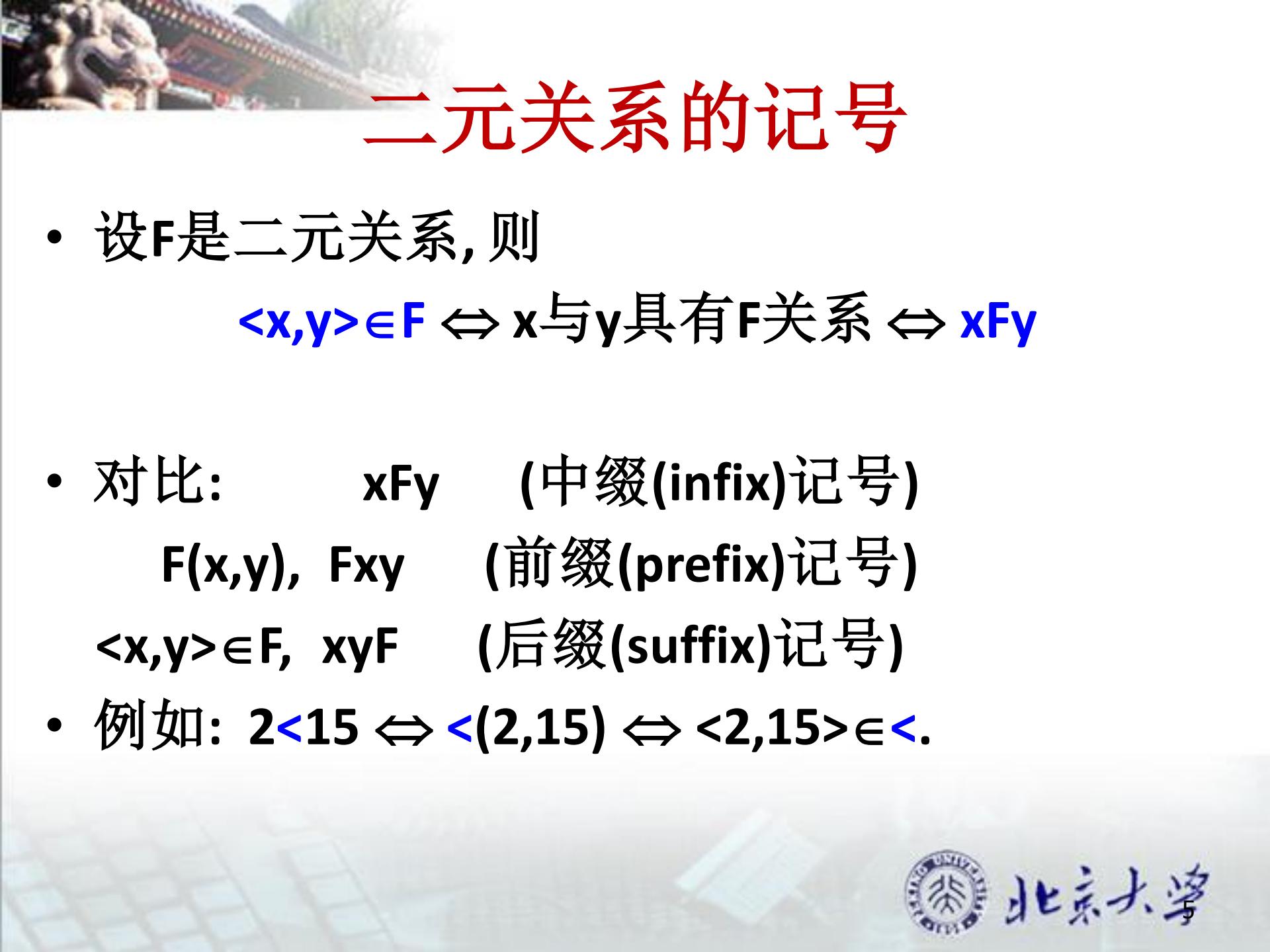
北京大学

# 二元关系

- 2元关系(关系): 元素全是有序对的集合.
- 例3:  $R_1=\{<1,2>, <\alpha,\beta>, <a,b>\}$   
 $R_1$ 是2元关系. #
- 例4:  $R_2=\{<1,2>, <3,4>, <\text{白菜}, \text{小猫}>\}$   
 $R_2$ 是2元关系. #
- 例5:  $A=\{<a,b>, <1,2,3>, a, \alpha, 1\}$   
当 $a, \alpha, 1$ 不是有序对时,  $A$ 不是关系. #



北京大学



# 二元关系的记号

- 设 $F$ 是二元关系，则

$\langle x, y \rangle \in F \Leftrightarrow x$ 与 $y$ 具有 $F$ 关系  $\Leftrightarrow xFy$

- 对比： $xFy$  (中缀(infix)记号)

$F(x, y)$ ,  $Fxy$  (前缀(prefix)记号)

$\langle x, y \rangle \in F$ ,  $xyF$  (后缀(suffix)记号)

- 例如： $2 < 15 \Leftrightarrow \langle (2, 15) \rangle \Leftrightarrow \langle 2, 15 \rangle \in <$ .



北京大学



# A到B的二元关系

- A到B的二元关系：是 $A \times B$ 的任意子集.

R是A到B的二元关系

$$\Leftrightarrow R \subseteq A \times B \Leftrightarrow R \in P(A \times B)$$

- 若  $|A|=m, |B|=n$ , 则  $|A \times B|=mn$ , 故

$$|P(A \times B)|=2^{mn}$$

即A到B不同的二元关系共有 $2^{mn}$ 个



北京大学

# A到B的二元关系举例

- 设  $A=\{a_1, a_2\}$ ,  $B=\{b\}$ ,  
则A到B的二元关系共有4个:  
 $R_1=\emptyset$ ,  $R_2=\{\langle a_1, b \rangle\}$ ,  $R_3=\{\langle a_2, b \rangle\}$ ,  
 $R_4=\{\langle a_1, b \rangle, \langle a_2, b \rangle\}.$   
B到A的二元关系也有4个:  
 $R_5=\emptyset$ ,  $R_6=\{\langle b, a_1 \rangle\}$ ,  $R_7=\{\langle b, a_2 \rangle\}$ ,  
 $R_8=\{\langle b, a_1 \rangle, \langle b, a_2 \rangle\}. \quad \#$



北京大学



# A上的二元关系

- A上的二元关系: 是 $A \times A$ 的任意子集  
R是A上的二元关系

$$\Leftrightarrow R \subseteq A \times A \Leftrightarrow R \in P(A \times A)$$

- 若 $|A|=m$ , 则 $|A \times A|=m^2$ , 故

$$|P(A \times A)| = 2^{m^2}$$

即A上不同的二元关系共有 $2^{m^2}$ 个

- $m=3$ ?



北京大学

# A上的二元关系(例1)

- 例1: 设  $A=\{a_1, a_2\}$ ,

则A上的二元关系共有16个:

$$R_1 = \emptyset,$$

$$R_2 = \{<a_1, a_1>\},$$

$$R_3 = \{<a_1, a_2>\},$$

$$R_4 = \{<a_2, a_1>\},$$

$$R_5 = \{<a_2, a_2>\},$$



北京大学

# A上的二元关系(例1)

$$R_6 = \{ \langle a_1, a_1 \rangle, \langle a_1, a_2 \rangle \},$$

$$R_7 = \{ \langle a_1, a_1 \rangle, \langle a_2, a_1 \rangle \},$$

$$R_8 = \{ \langle a_1, a_1 \rangle, \langle a_2, a_2 \rangle \},$$

$$R_9 = \{ \langle a_1, a_2 \rangle, \langle a_2, a_1 \rangle \},$$

$$R_{10} = \{ \langle a_1, a_2 \rangle, \langle a_2, a_2 \rangle \},$$

$$R_{11} = \{ \langle a_2, a_1 \rangle, \langle a_2, a_2 \rangle \},$$



# A上的二元关系(例1)

$$R_{12} = \{ \langle a_1, a_1 \rangle, \langle a_1, a_2 \rangle, \langle a_2, a_1 \rangle \}$$

$$R_{13} = \{ \langle a_1, a_1 \rangle, \langle a_1, a_2 \rangle, \langle a_2, a_2 \rangle \}$$

$$R_{14} = \{ \langle a_1, a_1 \rangle, \langle a_2, a_1 \rangle, \langle a_2, a_2 \rangle \}$$

$$R_{15} = \{ \langle a_1, a_2 \rangle, \langle a_2, a_1 \rangle, \langle a_2, a_2 \rangle \}$$

$$R_{16} = \{ \langle a_1, a_1 \rangle, \langle a_1, a_2 \rangle, \langle a_2, a_1 \rangle, \langle a_2, a_2 \rangle \}. \#$$

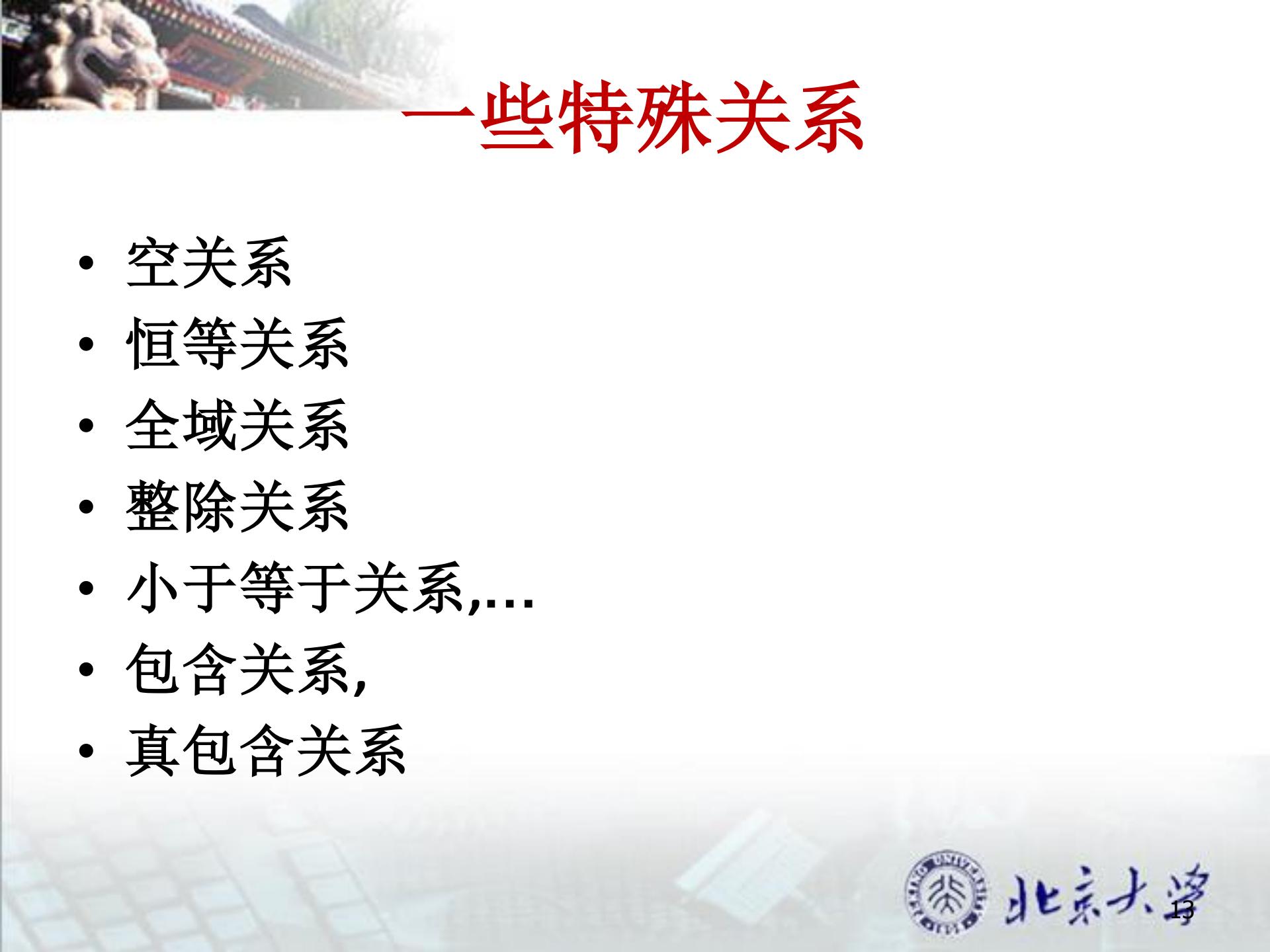


# A上的二元关系(例2)

- 例2: 设  $B=\{b\}$ ,  
则B上的二元关系共有2个:  
 $R_1=\emptyset$ ,     $R_2=\{\langle b,b \rangle\}$ . #



北京大学



# 一些特殊关系

- 空关系
- 恒等关系
- 全域关系
- 整除关系
- 小于等于关系,...
- 包含关系,
- 真包含关系



北京大学  
13

# 特殊关系

设A是任意集合，则可以定义A上的：

- 空关系：  $\emptyset$
- 恒等关系：  $I_A = \{<x,x> | x \in A\}$
- 全域关系：

$$E_A = A \times A = \{<x,y> | x \in A \wedge y \in A\}$$



# 特殊关系

设  $A \subseteq Z$ , 则可以定义A上的:

- 整除关系:

$$D_A = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in A \wedge y \in A \wedge x | y \}$$

- 例:  $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ , 则

$$\begin{aligned} D_A = & \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \\ & \langle 1, 5 \rangle, \langle 1, 6 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 2, 6 \rangle, \\ & \langle 3, 3 \rangle, \langle 3, 6 \rangle, \langle 4, 4 \rangle, \langle 5, 5 \rangle, \langle 6, 6 \rangle \}. \# \end{aligned}$$



# 特殊关系

设  $A \subseteq R$ , 则可以定义 A 上的:

- 小于等于(less than or equal to)关系:

$$LE_A = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in A \wedge y \in A \wedge x \leq y \}$$

- 小于(less than)关系,

$$L_A = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in A \wedge y \in A \wedge x < y \}$$

- 大于等于(greater than or equal to)关系
- 大于(great than)关系, ...



# 特殊关系

设A为任意集合，则可以定义**P(A)**上的：

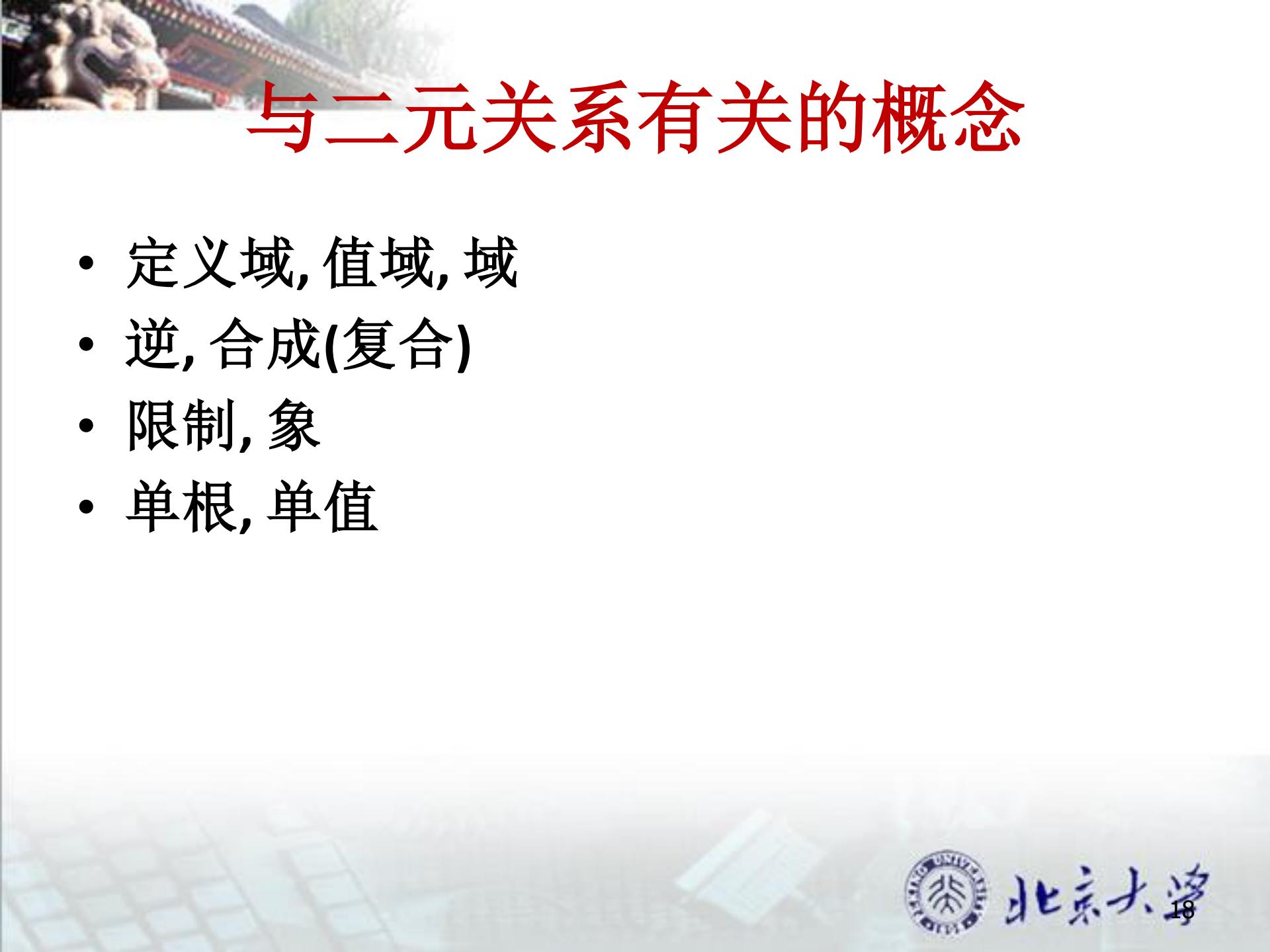
- 包含关系：

$$\subseteq_A = \{ \langle x, y \rangle \mid x \subseteq A \wedge y \subseteq A \wedge x \subsetneq y \}$$

- 真包含关系：

$$\subsetneq_A = \{ \langle x, y \rangle \mid x \subseteq A \wedge y \subseteq A \wedge x \subsetneq y \}$$





# 与二元关系有关的概念

- 定义域, 值域, 域
- 逆, 合成(复合)
- 限制, 象
- 单根, 单值



北京大学  
18

# 定义域,值域,域

对任意集合R, 可以定义:

- 定义域(domain) :

$$\text{dom } R = \{ x \mid \exists y(xRy) \}$$

- 值域(range):

$$\text{ran } R = \{ y \mid \exists x(xRy) \}$$

- 域(field):

$$\text{fld } R = \text{dom } R \cup \text{ran } R$$



# 例

- $R_1 = \{a, b\}$ ,  $R_2 = \{a, b, \langle c, d \rangle, \langle e, f \rangle\}$ ,  
 $R_3 = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 5, 6 \rangle\}$ .

当a,b不是有序对时,  $R_1$  和  $R_2$  不是关系.

$\text{dom } R_1 = \emptyset$ ,  $\text{ran } R_1 = \emptyset$ ,  $\text{fld } R_1 = \emptyset$

$\text{dom } R_2 = \{c, e\}$ ,  $\text{ran } R_2 = \{d, f\}$ ,  $\text{fld } R_2 = \{c, d, e, f\}$

$\text{dom } R_3 = \{1, 3, 5\}$ ,  $\text{ran } R_3 = \{2, 4, 6\}$ ,

$\text{fld } R_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . #



# 逆, 合成(复合)

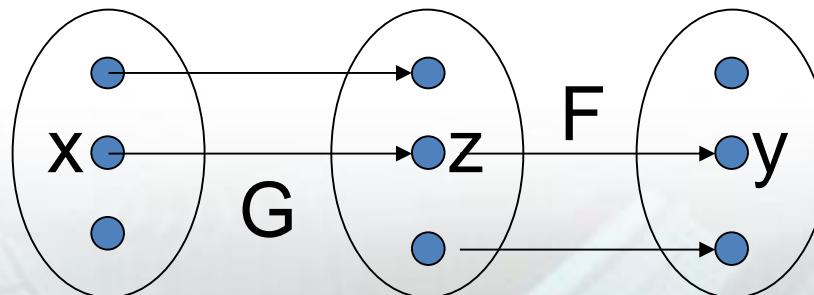
对任意集合 $F, G$ , 可以定义:

- 逆(inverse) :

$$F^{-1} = \{ \langle x, y \rangle \mid y F x \}$$

- 合成(复合)(composite):

$$F \circ G = \{ \langle x, y \rangle \mid \exists z ( x G z \wedge z F y ) \}$$





# 关于合成

- 顺序合成(右合成):

$$\text{FoG} = \{ \langle x, y \rangle \mid \exists z ( xFz \wedge zGy ) \}$$

- 逆序合成(左合成):

$$\text{FoG} = \{ \langle x, y \rangle \mid \exists z ( xGz \wedge zFy ) \}$$



北京大学  
22

# 限制、象

对任意集合 $F, A$ , 可以定义:

- 限制(restriction):

$$F \uparrow A = \{ \langle x, y \rangle \mid x F y \wedge x \in A \}$$

- 象(image):

$$F[A] = \text{ran}(F \uparrow A)$$

$$F[A] = \{ y \mid \exists x(x \in A \wedge x F y) \}$$



# 单根

一个y对应一个唯一的x就是单根

对任意集合F, 可以定义:

- 单根(single rooted): F是单根的 $\Leftrightarrow$

$$\forall y ( y \in \text{ran } F \rightarrow \exists ! x ( x \in \text{dom } F \wedge x F y ) )$$

$$\Leftrightarrow (\forall y \in \text{ran } F) (\exists ! x \in \text{dom } F) (x F y)$$

- $\exists !$ 表示“存在唯一的”

- $\forall x (x \in A \rightarrow B(x))$ 缩写为 $(\forall x \in A) B(x)$

- $\exists x (x \in A \wedge B(x))$ 缩写为 $(\exists x \in A) B(x)$



# 单值

一个x对应一个唯一的y就是单值

对任意集合F, 可以定义:

- 单值(single valued): F是单值的 $\Leftrightarrow$

$$\forall x ( x \in \text{dom } F \rightarrow \exists ! y ( y \in \text{ran } F \wedge x F y ) )$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in \text{dom } F) (\exists ! y \in \text{ran } F) (x F y)$$



北京大学

## 例2.2

- 设  $A=\{a,b,c,d\}$ ,  $B=\{a,b,\langle c,d \rangle\}$ ,

$$R=\{\langle a,b \rangle, \langle c,d \rangle\},$$

$$F=\{\langle a,b \rangle, \langle a,\{a\} \rangle, \langle \{a\},\{a,\{a\}\} \rangle\},$$

$$G=\{\langle b,e \rangle, \langle d,c \rangle\}.$$

求: (1)  $A^{-1}$ ,  $B^{-1}$ ,  $R^{-1}$ .

(2)  $BoR^{-1}$ ,  $GoB$ ,  $GoR$ ,  $RoG$ .

(3)  $F^{\uparrow}\{a\}$ ,  $F^{\uparrow}\{\{a\}\}$ ,  $F^{\uparrow}\{a,\{a\}\}$ ,  $F^{-1}\uparrow\{\{a\}\}$ .

(4)  $F[\{a\}]$ ,  $F[\{a,\{a\}\}]$ ,  $F^{-1}[\{a\}]$ ,  $F^{-1}[\{\{a\}\}]$ .



## 例2.2(1)

- $A = \{a, b, c, d\}$ ,  $B = \{a, b, \langle c, d \rangle\}$ ,  
 $R = \{ \langle a, b \rangle, \langle c, d \rangle \}$ ,

求: (1)  $A^{-1}$ ,  $B^{-1}$ ,  $R^{-1}$ .

解: (1)  $A^{-1} = \emptyset$ ,

$$B^{-1} = \{\langle d, c \rangle\},$$

$$R^{-1} = \{\langle b, a \rangle, \langle d, c \rangle\}.$$



北京大学  
27

## 例2.2(2)

- $B = \{a, b, \langle c, d \rangle\}$ ,  $R = \{\langle a, b \rangle, \langle c, d \rangle\}$ ,  $G = \{\langle b, e \rangle, \langle d, c \rangle\}$ .

求: (2)  $BoR^{-1}$ ,  $GoB$ ,  $GoR$ ,  $RoG$ .

解: (2)  $BoR^{-1} = \{\langle d, d \rangle\}$ ,

$GoB = \{\langle c, c \rangle\}$ ,

$GoR = \{\langle a, e \rangle, \langle c, c \rangle\}$ ,

$RoG = \{\langle d, d \rangle\}$ .



北京大学

## 例2.2(3)

- $F = \{<a, b>, <a, \{a\}>, <\{a\}, \{a, \{a\}\}>\}$ ,

求: (3)  $F \uparrow \{a\}$ ,  $F \uparrow \{\{a\}\}$ ,  $F \uparrow \{a, \{a\}\}$ ,  $F^{-1} \uparrow \{\{a\}\}$ .

解: (3)  $F \uparrow \{a\} = \{<a, b>, <a, \{a\}>\}$ ,

$F \uparrow \{\{a\}\} = \{<\{a\}, \{a, \{a\}\}\>\}$ ,

$F \uparrow \{a, \{a\}\} = F$ ,

$F^{-1} \uparrow \{\{a\}\} = \{<\{a\}, a>\}$ .



## 例2.2(4)

- $F = \{ \langle a, b \rangle, \langle a, \{a\} \rangle, \langle \{a\}, \{a, \{a\}\} \rangle \}$ ,

求: (4)  $F[\{a\}]$ ,  $F[\{a, \{a\}\}]$ ,  $F^{-1}[\{a\}]$ ,  
 $F^{-1}[\{\{a\}\}]$ .

解: (4)  $F[\{a\}] = \{ b, \{a\} \}$ ,  
 $F[\{a, \{a\}\}] = \{ b, \{a\}, \{a, \{a\}\} \}$ ,  
 $F^{-1}[\{a\}] = \emptyset$ ,  
 $F^{-1}[\{\{a\}\}] = \{ a \}$ . #



# 例2.3

• 设  $R=\{<x,y> \mid x,y \in \mathbb{Z} \wedge y=|x|\}$ ,

$$A=\{0,1,2\}, B=\{0,-1,-2\}$$

求: (1)  $R[A \cap B]$  和  $R[A] \cap R[B]$ ;

(2)  $R[A]-R[B]$  和  $R[A-B]$ .

解: (1)  $R[A \cap B]=R[\{0\}]=\{0\}$ ,

$$R[A] \cap R[B]=\{0,1,2\} \cap \{0,1,2\}=\{0,1,2\};$$

(2)  $R[A]-R[B]=\{0,1,2\}-\{0,1,2\}=\emptyset$ ,

$$R[A-B]=R[\{1,2\}]=\{1,2\}. \quad \#$$



# 定理2.5(合成运算结合律)

- 设 $R_1, R_2, R_3$ 为集合，则

$$(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$$

证明:  $\forall <x,y>, <x,y> \in (R_1 \circ R_2) \circ R_3$

$$\Leftrightarrow \exists z (xR_3z \wedge z(R_1 \circ R_2)y)$$

$$\Leftrightarrow \exists z (xR_3z \wedge \exists t (zR_2t \wedge tR_1y))$$

$$\Leftrightarrow \exists z \exists t (xR_3z \wedge (zR_2t \wedge tR_1y))$$

$$\Leftrightarrow \exists t \exists z (xR_3z \wedge zR_2t \wedge tR_1y)$$



# 定理2.5证明

$$\Leftrightarrow \exists \textcolor{blue}{t} \exists \textcolor{blue}{z} ( xR_3 z \wedge zR_2 t \wedge tR_1 y )$$

$$\Leftrightarrow \exists t ( \exists \textcolor{blue}{z} ( xR_3 z \wedge zR_2 t) \wedge tR_1 y )$$

$$\Leftrightarrow \exists \textcolor{blue}{t} ( x(R_2 \circ R_3) \textcolor{blue}{t} \wedge \textcolor{blue}{t} R_1 y )$$

$$\Leftrightarrow xR_1 \circ (R_2 \circ R_3) y$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$$

$$\therefore (R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3). \quad \#$$



# 定理2.7

定理2.7 设 $F, G$ 为二集合, 则  $(F \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ F^{-1}$

证明  $\forall \langle x, y \rangle,$

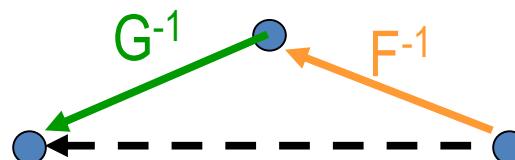
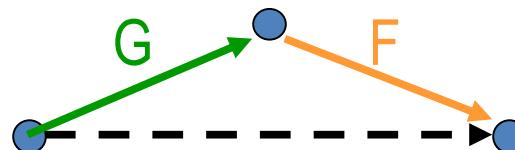
$$\langle x, y \rangle \in (F \circ G)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in (F \circ G)$$

$$\Leftrightarrow \exists z (yGz \wedge zFx)$$

$$\Leftrightarrow \exists z (zG^{-1}y \wedge xF^{-1}z)$$

$$\Leftrightarrow \exists z (xF^{-1}z \wedge zG^{-1}y) \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in G^{-1} \circ F^{-1}. \ #$$



# 小结

R是A到B的二元关系

- $R \subseteq A \times B, R \subseteq A \times A; xRy \rightarrow x$ 的有序对在R里
- $\emptyset, I_A, E_A;$ 
  - A上的任何两个元素都没有关系
  - A上的任意两个元素都有关系
  - A上的每个元素只和自己有关系
- $\text{dom}(R), \text{ran}(R), \text{fld}(R);$  定义域，值域，域

$R \uparrow A, R[A];$

$R^{-1}, R \circ S$

