



单元1.3 谓词逻辑预备知识

第一编 集合论 第一章 集合

1.1 预备知识（下）



北京大学



内容提要

一阶谓词逻辑中的

- 个体、谓词、量词等基本概念
- 几个重要的等值式
- 推理定律



北京大学



个体

将可以独立存在的客体（具体事务或抽象概念）称为个体或个体词，并用 a, b, c, \dots 表示个体常元，用 x, y, z, \dots 表示个体变元。（个体的函数还是个体，例如，设 a, b 是数， $f(a, b)$ 可以表示 a 和 b 的运算结果，如 $a+b$ 、 $a \bullet b$ 等。）

将个体变元的取值范围称为个体域，个体域可以是有穷或无穷集合。人们称由宇宙间一切事务组成的个体域为全总个体域。





谓词

将表示个体性质或彼此之间关系的词称为谓词，
常用 F, G, H, \dots 表示谓词常元或谓词变元，用 $F(x)$ 表示
“ x 具有性质 F ”，用 $F(x, y)$ 表示“ x 和 y 具有关系 F ”。
例如，若 $F(x)$ 表示“ x 是黑色的”， a 表示黑板，
则 $F(a)$ 表示“黑板是黑色的”；
若 $F(x, y)$ 表示“ x 大于 y ”，则 $F(5, 2)$ 表示“5大于2”。





量词、全称量词

称表示数量的词为**量词**。

全称量词是自然语言中的“所有的”、“一切的”、“任意的”、“每一个”、“都”等的统称，

用符号“ \forall ”表示。

用 $\forall x$ 表示个体域里的所有 x ；

用 $\forall xF(x)$ 表示个体域里所有 x 都有性质 F 。





存在量词

存在量词是自然语言中的“有一个”、“至少有一个”、“存在着”、“有的”等的统称，
用符号“ \exists ”表示。

用 $\exists x$ 表示存在个体域里的 x ；

用 $\exists xF(x)$ 表示在个体域里存在 x 具有性质 F 。





命题符号化

一阶逻辑中命题符号化的两个基本公式:

个体域中所有有性质F的个体都有性质G, 应符号化为

$\forall x (F(x) \rightarrow G(x))$, 其中

$F(x)$: x具有性质F, $G(x)$: x具有性质G。

个体域中存在有性质F同时有性质G的个体, 应符号化为

$\exists x (F(x) \wedge G(x))$, 其中

$F(x)$: x具有性质F, $G(x)$: x具有性质G。





例

将下面命题符号化

- ① 人都吃饭；
- ② 有人喜欢吃糖；
- ③ 男人都比女人跑得快（这是假命题）。

使用全总个体域。



北京大学



解①②

① 人都吃饭；

令 $F(x)$: x 是人, $G(x)$: x 吃饭。

命题符号化为 $\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$ 。

② 有人喜欢吃糖；

令 $F(x)$: x 是人, $G(x)$: x 喜欢吃糖。

命题符号化为 $\exists x(F(x) \wedge G(x))$ 。





解③

③ 男人都比女人跑得快（这是假命题）。

令 $F(x)$: x 是男人, $G(y)$: y 是女人,

$H(x,y)$: x 比 y 跑得快。

命题符号化为

$$\forall x (F(x) \rightarrow \forall y (G(y) \rightarrow H(x,y)))$$

等值形式为

$$\forall x \forall y (F(x) \wedge G(y) \rightarrow H(x,y))$$





一阶谓词逻辑公式及其分类

一阶谓词逻辑公式也简称为公式，它的形成规则类似于命题逻辑公式，只需加上一条，即若 A 是公式，则 $\forall x A$ 及 $\exists x A$ 也都是公式。

在公式 $\forall x A$ 和 $\exists x A$ 中，称 x 为指导变元，称 A 为相应量词的辖域。在 $\forall x$ 和 $\exists x$ 的辖域中， x 的所有出现都称为是约束出现， A 中不是约束出现的变元称为自由出现。





例

$$\forall x (F(x) \rightarrow \exists y (G(y) \wedge H(x,y,z)))$$

$\forall x$ 的辖域为 $(F(x) \rightarrow \exists y (G(y) \wedge H(x,y,z)))$,

$\exists y$ 的辖域为 $(G(y) \wedge H(x,y,z))$,

除 z 是自由出现的变元外, 其他变元都是约束出现的。

$$\forall x (F(x) \rightarrow \exists y (G(y) \wedge H(x,y,z)))$$

$$\forall x (F(x) \rightarrow \exists y (G(y) \wedge H(x,y,z)))$$





解释

对于给定的公式 A ，如果指定 A 的个体域为已知的 D ，并用特定的个体常元取代 A 中的个体常元，用特定函数取代 A 中的函数变元，用特定的谓词取代 A 中的谓词变元，则就构成了 A 的一个解释。

给定的一个公式 A 可以有多种解释。





例

给定公式A为 $\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$ ，有多种解释。

解释①：取个体域为实数集合，

$F(x)$: x 是有理数， $G(x)$: x 能表示成分数，

A解释为“有理数都能表示成分数”，这是真命题。

解释②：取个体域为全总个体域，

$F(x)$: x 是人， $G(x)$: x 长着黑头发，

A解释为“人都长着黑头发”，这是假命题。





永真、永假、可满足、等值式

若 A 在任何解释下都为真，则称 A 为永真式。

若 A 在任何解释下都为假，则称 A 为永假式。

若 A 至少存在一个成真的解释，则称 A 为可满足式。

若 $A \leftrightarrow B$ 是永真式，则称 A 与 B 是等值的，记为 $A \leftrightarrow B$ ，
并称 $A \leftrightarrow B$ 为等值式。



北京大学

基本等值式①②

① 在有限个体域 $D=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 中消去量词等值式:

$$(1) \forall x A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \dots \wedge A(a_n)$$

$$(2) \exists x A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \vee A(a_2) \vee \dots \vee A(a_n)$$

② 量词否定等值式:

$$(1) \neg \forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$$

$$(2) \neg \exists x A(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$$





基本等值式③

③量词辖域收缩与扩张等值式(**B**中**不含x**):

$$(1) \forall x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \forall xA(x) \vee B, \quad (2) \forall x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \forall xA(x) \wedge B$$

$$(3) \forall x(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \exists xA(x) \rightarrow B, \quad (4) \forall x(B \rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B \rightarrow \forall xA(x)$$

$$(5) \exists x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \exists xA(x) \vee B, \quad (6) \exists x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \exists xA(x) \wedge B$$

$$(7) \exists x(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \forall xA(x) \rightarrow B, \quad (8) \exists x(B \rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B \rightarrow \exists xA(x)$$





基本等值式④

④ 量词分配等值式

$$(1) \forall x(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall xA(x) \wedge \forall xB(x)$$

说明：全称量词对 “ \wedge ” 有分配律，但
全称量词对 “ \vee ” 不适合分配律。

$$(2) \exists x(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists xA(x) \vee \exists xB(x)$$

说明：存在量词对 “ \vee ” 有分配律，但
存在量词对 “ \wedge ” 不适合分配律。





前束范式

若公式 A 具有形式 $Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_kx_kB$ ，则称 A 为**前束范式**，其中 $Q_i (1 \leq i \leq k)$ 为 \forall 或 \exists ， B 中不含量词。

求前束范式时用基本等值式和换名规则。

换名规则：将公式 A 中某量词辖域中出现的某个约束出现的个体变元及相应的指导变元 x_i ，都改成公式 A 中没有出现过的 x_j ，所得公式 $A' \Leftrightarrow A$ 。





例

$$\forall x F(x) \vee \neg \exists x G(x, y)$$

$$\Leftrightarrow \forall x F(x) \vee \forall x \neg G(x, y) \quad (\text{量词否定等值式})$$

$$\Leftrightarrow \forall x F(x) \vee \forall z \neg G(z, y) \quad (\text{换名规则})$$

$$\Leftrightarrow \forall x (F(x) \vee \forall z \neg G(z, y)) \quad (\text{辖域扩张等值式})$$

$$\Leftrightarrow \forall x \forall z (F(x) \vee \neg G(z, y)) \quad (\text{辖域扩张等值式})$$

$$\Leftrightarrow \forall x \forall z (G(z, y) \rightarrow F(x)) \quad (\text{蕴涵等值式})$$





重要的推理定律

$$(1) \forall xA(x) \vee \forall xB(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \vee B(x))$$

$$(2) \exists x(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists xA(x) \wedge \exists xB(x)$$

$$(3) \forall x(A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow \forall xA(x) \rightarrow \forall xB(x)$$

$$(4) \forall x(A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow \exists xA(x) \rightarrow \exists xB(x)$$

说明：在使用以上4条推理定律时，千万注意，别将它们当成等值式用，这样会犯错误的。





小结

逻辑符号：个体词 a, b, c, \dots 、谓词 $F(x), G(x, y), H(x, y, z), \dots$ 、
量词 $\forall \exists$

逻辑概念：公式、解释、永真式、永假式、可满足式、
等值式、等值演算、推理定律、前束范式

逻辑规则：换名规则



北京大学