单元 4.2- 自然数的性质

第一编 集合论 第 4 章 自然数

4.2 传递集

4.3 自然数的运算

4.3 自然数上的序

内容提要

- 传递集
  - 传递集的等价条件
- 递归定理、递归定义
  - 加 m 函数、加法
  - 乘 m 函数、乘法
  - 加法和乘法的运算律
- 自然数集上的序

传递集

- A 为传递集 $\Leftrightarrow$

  A 的元素的元素还是 A 的元素

  $\Leftrightarrow \forall x \forall y(x \in y \land y \in A \rightarrow x \in A)$

定理 4.10

- $\quad$ (1) A 为传递集

$\Leftrightarrow$ (2) $\cup A \subseteq A$

$\Leftrightarrow$ (3) $\forall x(x \in A \rightarrow x \subseteq A)$

$\Leftrightarrow$ (4) $A \subseteq P(A)$

例 4.2

下列集合是否传递集？

- $A=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}\}$
- $B=\{0,1,2\}$
- $C=\{\{a\}\}$
- $D=\langle 0,1\rangle$

例 4.2：是否传递集？

- $A=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}\}$ 是
- $B=\{0,1,2\}$ 是
- $C=\{\{a\}\}$ 不是
- $D=\langle 0,1\rangle=\{\{0\},\{0,1\}\}$ 不是

- 自然数 ?
- 自然数集 ?

定理 4.11

定理 4. 11 A 为传递集 $\Leftrightarrow$ P(A) 为传递集

证明 A 为传递集

$\Leftrightarrow A \subseteq P(A)$ （定理 4.10）

$\Leftrightarrow \cup P(A) \subseteq P(A)$ ($A=\cup P(A)$)

$\Leftrightarrow$ P(A) 是传递集 （定理 4.10）

#

定理 4.12

定理 4.12　A 为传递集 $\Rightarrow$ $\cup(A^{+})=A$

证明　$\cup(A^{+})$

$= \cup(A\cup\{A\})$　　(A^{+} 定义)

$= (\cup A)\cup(\cup\{A\})$　($\cup(A\cup B)=(\cup A)\cup(\cup B)$)

$= (\cup A)\cup A$

$= A$　　(因为 $\cup A\subseteq A$)　#

定理 4.13

定理 4. 13　　每个自然数都是传递集

证明　令 $S=\{n \mid n\in N \wedge n$ 是传递集 $\}$

(1) $0\in S$:　显然 .

(2) $\forall n\in N, n\in S \Rightarrow n^{+}\in S$:　　$n\in S$

$\Rightarrow n$ 是传递集 $\Rightarrow \cup(n^{+})=n\subseteq n^{+}$ (定理 4.12)

$\Rightarrow n^{+}$ 是传递集 (定理 4.10) $\Rightarrow n^{+}\in S$.

$\therefore$　$S=N$　　　　　　　　#

定理 4.14

定理 4. 14　　自然数集 N 是传递集

证明　　令 $S = \{ n \mid n \in N \wedge n \subseteq N \}$

(1) $0 \in S$: 显然 .

(2) $\forall n \in N, n \in S \Rightarrow n^+ \in S$:　　$n \in S$

$\Rightarrow n \subseteq N \Rightarrow n \cup \{n\} = n^+ \subseteq N$　($\{n\} \subseteq N$)

$\Rightarrow n^+ \in S$. $\therefore$ $S=N$,　即 $\forall n(n \in N \rightarrow n \subseteq N)$.

由定理 4.10, N 是传递集 .　　#

自然数集上的二元运算

- 加法：

$$+: N\times N\to N,$$

$$+(<2,3>)=5,\ \ 2+3=5$$

- 乘法：

$$\bullet: N\times N\to N,$$

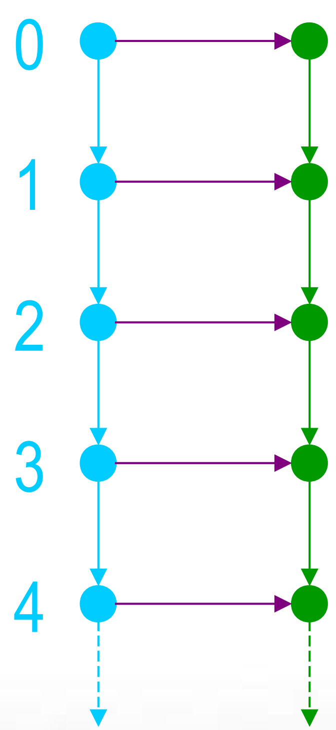
$$\bullet(<2,3>)=6,\ \ 2\bullet 3=6$$

北京大学

N上的递归定理

- 设 A 为集合 , $a\in A$, $F:A\to A$, 则存在唯一函数 $h:N\to A$, 使得 $h(0)=a$, 且$\forall n\in N$, $h(n^{+})=F(h(n))$. #

当 F 是单射时



$a=h(0)$

$F(a)=F(h(0))=h(1)=h(0^+)$

$F^2(a)=F(F(a))=F(h(1))=h(2)=h(1^+)$

$F^3(a)=F(F^2(a))=F(h(2))=h(3)=h(2^+)$

$F^4(a)=F(F^3(a))=F(h(3))=h(4)=h(3^+)$

递归定义

- $a \in A$, $F: A \to A$

$$\begin{cases} h(0)=a \\ h(n+1)=F(h(n)), \forall n \in N \end{cases}$$

- 递归定理说：$h: N \to A$ 存在唯一

一元函数“加 m”

- m 固定，A_m: N→N,

$$\begin{cases} A_m(0)=m, \\ A_m(n^+)=(A_m(n))^+. \end{cases}$$

$$A_m = \underbrace{\sigma \circ \sigma \circ \cdots \circ \sigma}_{m个\sigma} = \sigma^m$$

一元函数“加 m”举例

- $A_m(n)=m+n$

$$\begin{cases} A_m(0)=m \\ A_m(n^+)=A_m(n)^+=(m+n)^+=(m+n)+1 \\ \qquad =m+(n+1)=m+n^+ \end{cases}$$

- $A_2(3)=A_2(2^+)=A_2(2)^+=A_2(1^+)^+$

$=A_2(1)^{++}=A_2(0^+)^{++}=A_2(0)^{+++}$

$=2^{+++}=3^{++}=4^{+}=5.$

北京大学

二元函数加法

- $+ : N\times N\to N,\ \ m+n=A_m(n)$

- $3+3 = A_3(3)$

  $= A_3(2^+) = A_3(2)^+$

  $= A_3(1^+)^+ = A_3(1)^{++}$

  $= A_3(0^+)^{++} = A_3(0)^{+++}$

  $= 3^{+++} = 4^{++} = 5^+ = 6$

定理 4.15

定理 4. 15 $\forall m,n\in N$, $m+0 = m$

$m+n^{+} = (m+n)^{+}$

证明 $m+0=A_m(0)=m.$

$m+n^{+} = A_m(n^{+})$ (+ 定义)

$= (A_m(n))^{+}$ (A_m 定义)

$= (m+n)^{+}$ (+ 定义). #

定理

- $\forall m,n \in N, \quad 0+n = n$

  $m^{+}+n = (m+n)^{+}$

- 用归纳法证明

加法交换律

定理 $\forall\ m,n\in N,\ m+n=n+m.$

证明 $\forall\ m\in N$, 令 $S=\{n|n\in N\wedge m+n=n+m\}$

(1) $0\in S$: $m+0 = m = 0+m.$

(2) $n\in S \Rightarrow n^+\in S$:

$m+n^+=A_m(n^+)=A_m(n)^+=(m+n)^+$

$=(n+m)^+$ （归纳假设）

$= n^++m$ （前一个定理）

$\therefore\ S = N.$ #

加法性质总结

- 单位元： $0+n = n+0 = n$
- 交换律： $n+m = m+n$
- 结合律： $(m+n)+k = m+(n+k)$
- 消去律： $m+k=n+k \Rightarrow m=n$

- 用归纳法证明

乘法

- “乘 m”: m 固定，$M_m: N \to N$,

$$\begin{cases} M_m(0) = 0, \\ M_m(n^+) = M_m(n) + m. \end{cases}$$

- 乘法：$\bullet: N \times N \to N$, $m \bullet n = M_m(n)$

乘法性质总结

- 单位元： $1 \bullet n = n \bullet 1 = n$
- 交换律：$n \bullet m = m \bullet n$
- 结合律：$(m \bullet n) \bullet k = m \bullet (n \bullet k)$
- 消去律： $m \bullet k = n \bullet k \Rightarrow m = n \quad (k \neq 0)$
- 分配律：$m \bullet (n+k) = (m \bullet n)+(m \bullet k)$

- 用归纳法证明

自然数的序

- “属于等于”：$m \underline{\in} n \Leftrightarrow m \in n \vee m=n$
  （线序，良序）
- $m<n \Leftrightarrow m \in n$
- $m>n \Leftrightarrow n \in m$
- $m \leq n \Leftrightarrow m \underline{\in} n$
- $m \geq n \Leftrightarrow n \underline{\in} m$

小结

- 传递集
  - 传递集的等价条件： $\cup A \subseteq A$， $A \subseteq P(A)$
- 递归定理、递归定义
  - 加 m 函数、加法
  - 乘 m 函数、乘法
  - 加法和乘法的运算律
- 自然数集上的序： $m \underline{\in} n \Leftrightarrow m \in n \vee m = n$