MCS 第3次作业

李青林*

May 27, 2012

3.27
对于一个有三个点v_1, v_2, v_3的图
第一份包含$(v_1, v_2), (v_1, v_3)$两条边
第二份包含(v_2, v_3)一条边
生成的两个图都没有三角形
求并集,包含$(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_3)$三条边，含有三角形 $\square$

3.28
如果Q是一个递增性质(increasing property)，指性质Q满足对于集合S，如果集合S满足Q性质，在S中加一个数形成的结合仍满足Q性质

令$p(n)$表示最小实数a,使得$N(n, a)$有$\frac{1}{2}$的概率满足Q性质
对于任意函数$p_0(n)$满足

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_0(n)}{p(n)} = 0$$

假设$N(n, p_0(n))$满足Q性质的概率不收敛于0
那么，$\exists\varepsilon > 0$，$n \to \infty$时，$N(n, p_0(n))$满足Q性质的概率至少为ε
令$m = \lceil 1/\varepsilon \rceil$
令H为$G(n, p_0(n))$的m-fold replication
则H不满足性质Q的概率至多为$(1-\varepsilon)^m \leq \frac{1}{2}$
$\therefore mp_0(n) \geq p(n)$，与$\lim_{n\to\infty} \dfrac{p_0(n)}{p(n)} = 0$矛盾
于是$G(n, p_0(n))$几乎不满足性质Q
同理对于$\lim_{n\to\infty} \dfrac{p(n)}{p_1(n)} = 0$,$G(n, p_1(n))$几乎满足性质Q $\square$

*jack951753@gmail.com

2.29

1.

$$(1-p)^{\sqrt{n}} = 1/2$$

$$p = 1 - 2^{-\sqrt{n}}$$

2.

$$(1-p)^{\sqrt[3]{n}} = 1/2$$

$$p = 1 - 2^{-\sqrt[3]{n}}$$

3.

$$(1-p)^{n/2} = 1/2$$

$$p = 1 - 2^{n/2}$$

4.共有$\Theta(n^2)$对三元组(x,y,z)满足$x+y=z$，每一对三元组出现的概率为p^3，三元组数的期望为$\Theta(n^2p^3)$，要使$\Theta(n^2p^3)=\Theta(1)$，必须有$p^3=\Theta(n^2)$，$p=\Theta(n^{-2/3})$ □

3.40

当$k=3$时，$\frac{1}{e}-(1-\frac{1}{2^k})^{2^k}=0.0243$

当$k=5$时，$\frac{1}{e}-(1-\frac{1}{2^k})^{2^k}=0.0058$

当$k=7$时，$\frac{1}{e}-(1-\frac{1}{2^k})^{2^k}=0.0014$

与理论值$\lim\limits_{x\to\infty}=\frac{1}{e}$是相符的 □