MCS 第5次作业

李青林*

May 30, 2012

1

What are the eigonvectors and eigonvalues of the matrix $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$?

特征多项式

$$|\lambda E - A| = \begin{pmatrix}\lambda-1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & \lambda-1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & \lambda-1 & -1\\ -1 & -1 & -1 & \lambda-1\end{pmatrix} = \lambda^4 - 4\lambda^3 = 0$$

$\Longrightarrow \lambda = 0$或$\lambda = 4$
若$\lambda = 0$，带入$(\lambda E - A)$

$$\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

基础解系为

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}$$

*jack951753@gmail.com

所以属于0的特征向量为

$$k1\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}+k2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}+k3\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}$$

若$\lambda=4$，带入$(\lambda E-A)$

$$\begin{pmatrix}3&-1&-1&-1\\-1&3&-1&-1\\-1&-1&3&-1\\-1&-1&-1&3\end{pmatrix}$$

基础解系为

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

属于4的特征向量为

$$k\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

□

4.7

如果该矩阵A第i行代表第i个词，第j列代表第j篇文章，a_{ij}表示第i个词在第j篇文章中出现的次数

奇异值分解得$A=UDV^T$

U中的每个行向量用于描述每个词，第一个元素表示该词的出现频繁程度，后面的元素与词的相关性有关

V中的每个行向量用于描述每篇文章，第一个元素表示该文章中词出现的频度，后面的元素与文章的相关性有关 □

4.10

1.

$$A^TA=\left(\sum_{i=1}^{r}\sigma_i\mathbf{v_i}\mathbf{u_i}^T\right)\left(\sum_{j=1}^{r}\sigma_j\mathbf{u_j}\mathbf{v_j}^T\right)=\sum_{1\le i,j\le r}\sigma_i\sigma_j\mathbf{v_i}\mathbf{u_i}^T\mathbf{u_j}\mathbf{v_j}^T=\sum_{i=1}^{r}\sigma_i^2\mathbf{v_i}\mathbf{v_i}^T$$

2. $\because A^TA\mathbf{v_i} = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i^2 \mathbf{v_i}\mathbf{v_i}^T\mathbf{v_i} = \sigma^2\mathbf{v_i}$
   $\therefore \forall \mathbf{v_i}$是特征向量

3. $\because$每个奇异值都是A^TA的特征值且特征值是唯一确定的
   $\therefore$奇异值唯一(原题是在说什么。。)

$\square$