

# MCS 第6次作业

李青林\*

May 31, 2012

4.25



原图:

保留10%:



保留25%:

保留50%:



---

\*jack951753@gmail.com

保留10%的奇异值时，Frobenius norm比值为99.8689%  
 保留25%的奇异值时，Frobenius norm比值为99.9849%  
 保留50%的奇异值时，Frobenius norm比值为99.9997%

□

#### 4.30

$$1. d_{ij}^2 = (x_i - x_j)^T (x_i - x_j) = x_i^T x_i + x_j^T x_j - 2x_i^T x_j$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_{ij}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^T x_i + x_j^T x_j - 2 \left( \sum_{i=1}^n x_i^T \right) x_j$$

$$\text{质心在原点} \Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i^T = \mathbf{0} \Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_{ij}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^T x_i + x_j^T x_j$$

$$\text{同理可得} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n d_{ij}^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j^T x_j + x_i^T x_i$$

$$\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j^T x_j + x_i^T x_i \right) = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n x_i^T x_i$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} \left( d_{ij}^2 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_{ij}^2 - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n d_{ij}^2 + \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij}^2 \right) = x_i^T x_j$$

2. 由第一问知  $X^T X$  可构造

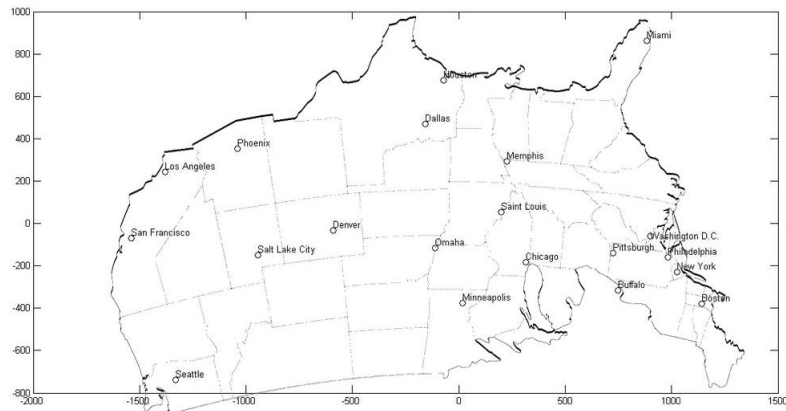
$X^T X$  是实对称矩阵  $\Rightarrow X^T X$  正交相似于实对角阵

令  $X^T X = T^T A T$ ，其中  $A$  是实对角阵且每个元素是正的， $X$  是正交阵

令  $A = B^2, X = B T$

□

#### 4.31



1. 结果如图:

2. 取决于航线是否是走的球面最短距离

