行星的轨道和位置

李青林,5110309074
郑辉煌,5110209289

1 实验任务1

问题

在求解方程(5.24)时，试用矩形法和simpson法来计算数值积分，并对所得的结果加以比较

解答

矩形法：

```
function Q1_rectangle(h)
    ep=0.01672;   C1=4.455e15;   p=1.496e11;
    T1=100*24*3600;   f=C1*T1/p^2;
    theta=0;   F=0;

    i=2;
    while true
        theta=theta+h;
        F=F+h*(1-ep*cos((theta-h/2)))^-2;
        if F>f; break;end
        i=i+1;
    end

    t=theta-h;   r=p/(1-ep*cos(t));
    dtheta=C1/r^2;   v=r*dtheta;
    disp(h);disp(t);disp(v);
end
```

h	θ	v
0.1	1.6000	29794
0.01	1.6800	29834
0.001	1.6850	29836
0.0001	1.6859	29837
0.00001	1.6860	29837

simpson法:

```
function Q1_simpson(h)
    ep=0.01672;  C1=4.455e15;  p=1.496e11;
    T1=100*24*3600;  f=C1*T1/p^2;  theta=0;
    F=0;  fun=@(x)(1-ep*cos(x))^-2;

    i=2;
    while true
        theta=theta+h;
        F=F+h/6*(fun(theta-h)+4*fun(theta-h/2)+fun(theta));
        if F>f;break;end
        i=i+1;
    end

    t=theta-h;  r=p/(1-ep*cos(t));
    dtheta=C1/r^2;  v=r*dtheta;
    disp(h);disp(t);disp(v);
end
```

h	θ	v
0.1	1.6000	29794
0.01	1.6800	29834
0.001	1.6850	29836
0.0001	1.6859	29837
0.00001	1.6860	29837

可以看出由于精度受步长限制，试用精度更高的simpson公式并不会使得计算量大幅减小

2 实验任务2

问题

水星到太阳的最远距离为0.6982×10^{11}m，此时水星绕太阳运行的线速度是3.886×10^{4}m/s，试求:

1. 水星到太阳的最近距离
2. 水星绕太阳运行的周期
3. 画出水星绕太阳旋转的轨道曲线
4. 求从远日点开始的第50天（地球天）结束时水星的位置

解答

1. 已知
$$r_0 = 0.6982 \times 10^{11}, v_0 = 3.886 \times 10^4$$
由行星轨迹方程
$$r = \frac{p}{1 - e\cos\theta}$$
得$\theta = \pi$时，r最小，为近日点
$$r_m = \frac{p}{1+e}$$
可知
$$C_1 = 2.7132 \times 10^{15}, p = \frac{C_1^2}{MG} = 5.5472 \times 10^{10}$$
$$e = 1 - \frac{p}{r_0} = 0.2055$$
则最近距离为
$$r_m = 4.6016 \times 10^{10}(\mathrm{m})$$

2. 设周期为T，由开普勒第二定律
$$\int_0^T \frac{1}{2} r^2 \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2} C_1 T$$

上式左端为行星轨迹椭圆所围的面积，记为S

$$S = \pi ab = \frac{\pi p^2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}$$

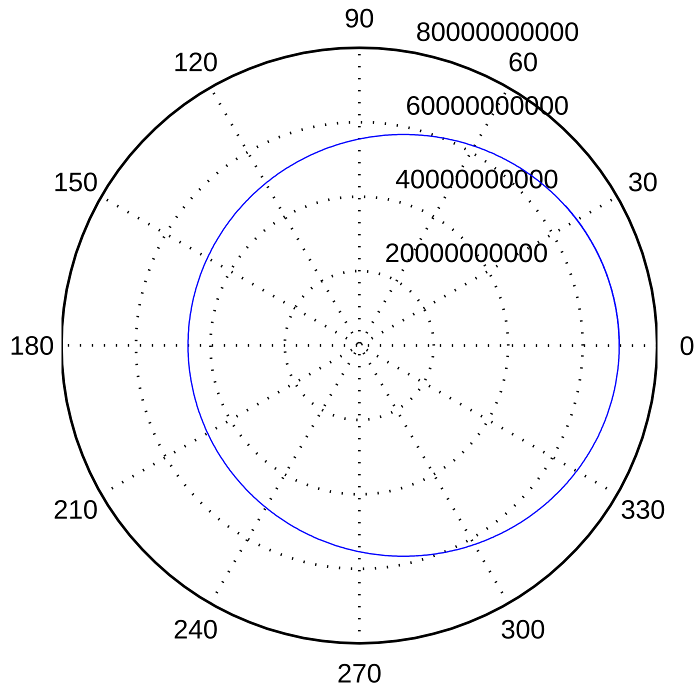
代入，解得

$$T = \frac{2\pi p^2}{C_1(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} = 7.6025 \times 10^6(\mathrm{s}) = 87.991(\mathrm{d})$$

试用runge-kutta法:

```
function Q2_4(h)
    function dy=build(t,y)
        C1=2.7132e+015;MG=1.3271e+020;
        dy=[C1^2/y(2)^3-MG/y(2)^2;y(1);C1/y(2)^2];
    end
[t,y]=ode45(@build,0:h:100*24*3600,[0,0.6982e11,0]);
n=find(y(:,3)<2*pi,1,'last');
T=t(n);
r=y(round(n/2),2);
disp(T/24/3600);disp(r);
polar(y(:,3),y(:,2));
end
```

得出$T = 87.8472(\mathrm{d}), r_m = 4.6002 \times 10^{10}(\mathrm{m})$,与理论计算相符



3.

4. 由开普勒第二定律

$$\int_{\theta}^{\theta+\Delta\theta} r^2 \mathrm{d}\theta = C_1 \Delta t$$

可得

$$\int_0^{\theta} \frac{p^2}{C_1(1-e\cos\theta)} \mathrm{d}\theta = t$$

解方程

$$F(\theta) = \frac{C_1 T_1}{p^2}$$

其中

$$F(\theta) = \int_0^{\theta} \frac{1}{(1-e\cos\phi)} \mathrm{d}\phi$$

simpson法:

```
function Q2_4_simpson(h)
ep=0.2055;C1=2.7132e15;p=5.5472e10;
T1=50*24*3600;f=C1*T1/p^2;theta=0;
F=0;fun=@(x)(1-ep*cos(x))^-2;

i=2;
while true
    theta=theta+h;
    F=F+h/6*(fun(theta-h)+4*fun(theta-h/2)+fun(theta));
    if F>f;break;end
    i=i+1;
end

t=theta-h;r=p/(1-ep*cos(t));
dtheta=C1/r^2;v=r*dtheta;
disp(r);disp(t);disp(v);
end
```

h	r($\times 10^{10}$)	θ	v($\times 10^{4}$)
0.1	4.7239	3.7000	5.7436
0.01	4.7665	3.7900	5.6922
0.001	4.7665	3.7900	5.6922
0.0001	4.7668	3.7906	5.6919
0.00001	4.7668	3.7906	5.6919

得50天后水星处于$r = 4.7668 \times 10^{10}$(m),$\theta = 3.7906$处,$v = 5.6919$(m/s)

runge-kutta法:

```
function Q2_4
    function dy=build(t,y)
        C1=2.7132e+015;MG=1.3271e+020;
        dy=[C1^2/y(2)^3-MG/y(2)^2;y(1);C1/y(2)^2];
    end
[t,y]=ode45(@build,[0 50*24*3600],[0,0.6982e11,0]);
disp(y(length(y),2));disp(y(length(y),3));
end
```

求得$r = 4.7667 \times 10^{10}$(m), $\theta = 3.7909$

3 实验任务3

问题

利用开普勒三定律，也可以推导出万有引力定律，试完成这个推导

解答

1. 开普勒第一定律：行星的轨道是椭圆，太阳位于椭圆的一个焦点上。
   椭圆轨道极坐标方程为：
   $$\frac{ep}{1-ecos\theta}$$
   以位矢的观点看：
   $$\mathbf{r}=r\mathbf{i}$$
   $\mathbf{i}$为径向单位向量，另外设$\mathbf{j}$为切向单位向量，则
   $$\frac{d\mathbf{i}}{dt}=\frac{d\theta}{dt}\mathbf{j}$$
   $$\frac{d\mathbf{j}}{dt}=-\frac{d\theta}{dt}\mathbf{i}$$
   从而对速度矢量$\mathbf{v}$有：
   $$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\frac{dr}{dt}\mathbf{i}+r\frac{d\mathbf{i}}{dt}=\frac{dr}{dt}\mathbf{i}+r\frac{d\theta}{dt}\mathbf{j}$$
   记再得到加速度的表达式
   $$\begin{aligned}\mathbf{a}&=\frac{d\mathbf{v}}{dt}\\&=\frac{d\dot{r}i}{dt}+\frac{dr\dot{\theta}j}{dt}\\&=(\ddot{r}i+\dot{r}\frac{di}{dt})+(\dot{r}\dot{\theta}j+r\ddot{\theta}j+r\dot{\theta}\frac{dj}{dt})\\&=(\ddot{r}i+\dot{r}\dot{\theta}j)+(\dot{r}\dot{\theta}j+r\ddot{\theta}j-r\dot{\theta}^2i)\\&=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)i+(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})j\end{aligned}$$
   故径向和横向加速度分别为：
   $$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

那么首先

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r}(2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta}) = \frac{1}{r}\frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt}$$

开普勒第二定律知道

$$r^2\dot{\theta} = C_1(const)$$

故

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0$$

由椭圆方程得:

$$\frac{pe}{r} = 1 - ecos\theta$$

对时间t求导:

$$-\frac{\dot{r}p}{r^2} = sin\theta\dot{\theta}$$

$$\dot{r} = -\frac{r^2}{p}sin\theta\dot{\theta}$$

再次对时间求导:

$$\begin{aligned}
\ddot{r} &= -(\frac{2r\dot{r}}{p}sin\theta\dot{\theta} + \frac{r^2}{p}cos\dot{\theta} + \frac{r^2}{p}sin\theta\ddot{\theta}) \\
&= -\frac{r}{p}(r\dot{\theta}^2cos\theta) - \frac{r}{p}(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})sin\theta \\
&= -\frac{r}{p}(r\dot{\theta}^2cos\theta) \\
&= -\frac{r^2\dot{\theta}^2}{p}cos\theta
\end{aligned}$$

又由椭圆方程:

$$cos\theta = \frac{1}{e} - \frac{p}{r}$$

代入上式得:

$$\ddot{r} = -r\dot{\theta}^2(\frac{r}{pe} - 1)$$

故

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -r\dot{\theta}^2(\frac{r}{pe} - 1) - r\dot{\theta}^2 = -\frac{r^2\dot{\theta}^2}{pe}$$

分子分母同时乘以r^2

$$a_r = -\frac{(r^2\dot{\theta})^2}{pe} \cdot \frac{1}{r^2}$$

由开普勒第二定律，$r^2\dot{\theta}$为常数，而$a_\theta = 0$故说明行星的加速度等于径向加速度，也就是上式。从而已经有行星受引力与距太阳距离的二次方成反比。接下来运用开普勒第三定律：

$$\frac{a^3}{T^2} = k$$

面积的变化率等于单位时间内行星与太阳连线扫过的距离，设椭圆半长轴和半短轴分别为a、b由椭圆面积公式：

$$\frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{\pi ab}{T}$$

$$(r^2\dot{\theta})^2 = \frac{4\pi^2a^2b^2}{T^2}$$

又由开普勒第三定律变形：

$$\frac{a^2}{T^2} = \frac{k}{a}$$

得

$$(r^2\dot{\theta})^2 = \frac{4\pi^2b^2k}{a}$$

代入a_r表达式：

$$a_r = -4\pi^2k \cdot \frac{b^2}{pea} \cdot \frac{1}{r^2}$$

这一式中关键要消去$\frac{b^2}{pea}$项，首先由椭圆几何知识：

$$2a = \frac{pe}{1+e} + \frac{pe}{1-e}$$

$$pe = a(1-e^2)$$

$$\frac{b^2}{pea} = \frac{b^2}{a^2(1-e^2)} = \frac{b^2}{a^2(1-\frac{c^2}{a^2})} = \frac{b^2}{a^2-c^2} = \frac{b^2}{b^2} = 1$$

故

$$a_r = -4\pi^2k \cdot \frac{1}{r^2}$$

$$F == -4\pi^2 k \cdot \frac{m}{r^2}$$

$$F \propto \frac{m}{r^2}$$

这正是我们想要的结果。

4 实验任务4

问题

冥王星在1989年10月处于近日点距太阳44.4×10^{11}m，此时其线速度为0.6122×10^4m/s，试求：

1. 它在什么时间到达远日点，此时它的线速度为多少?
2. 远日点到太阳的距离；
3. 其椭圆轨道的偏心率及作图

解答

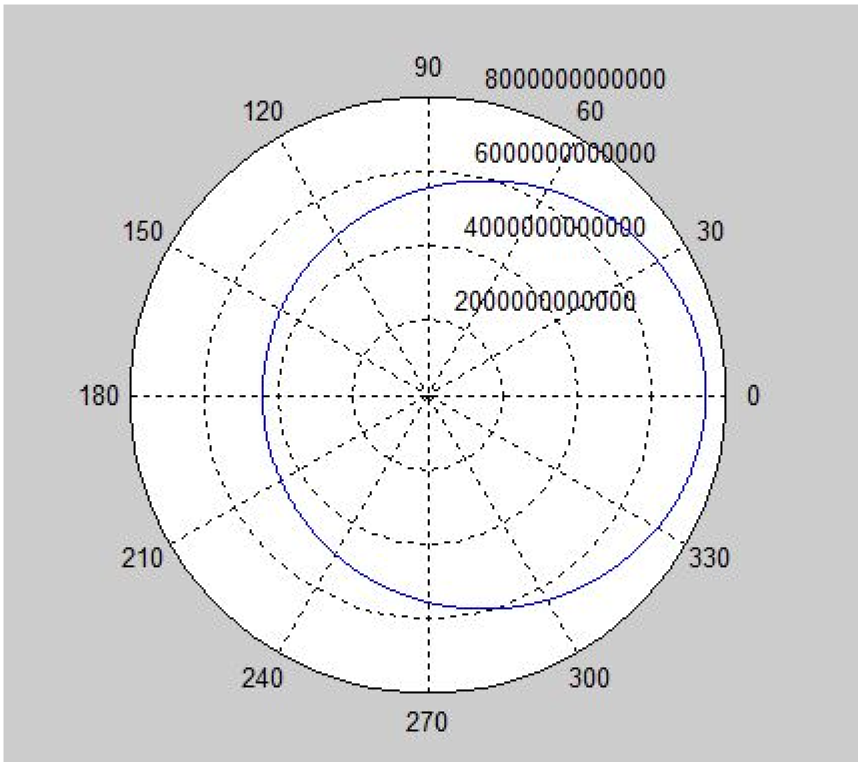
1. 已知
$$v_0 = 0.6122 \times 10^4, r_0 = 44.4 \times 10^{11}$$
可知
$$C_1 = r_0 v_0 = 2.718 \times 10^{16}$$
远日点速度：
$$v_M = \frac{C_1}{r_M} = 3.643 \times 10^3 (m/s)$$
与上水星计算同理：
$$T = \frac{2\pi p^2}{C_1(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} = 7.917 \times 10^9 (s) \approx 251(year)$$

2.
$$p = \frac{C_1^2}{MG} = 5.567 \times 10^{12}$$
$$e = \frac{p}{r_0} - 1 = 0.2538$$

远日点距离：

$$r_M = \frac{p}{1-e} = 7.460 \times 10^{12}(m)$$

3. 由2已算出椭圆偏心率为$e = 0.2538$，作图如下：



5 分工

李青林：实验1,2
郑辉煌：实验3,4