Uniformidad, Chi-Cuadrado y Monte Carlo

Análisis Estadístico

22 de septiembre de 2025

Resumen

Este documento explica los conceptos de uniformidad en simulaciones Monte Carlo y su verificación mediante el test de Chi-cuadrado, incluyendo ejemplos con distribuciones uniformes y no uniformes.

1. Introducción Conceptual

1.1. Uniformidad en Monte Carlo

La **uniformidad** es fundamental en simulaciones Monte Carlo. Si los números generados no son uniformes, los resultados de la simulación pueden estar sesgados.

$$U(0,1) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{1}$$

1.2. Test de Chi-Cuadrado

El test de **Chi-cuadrado** verifica si una muestra sigue una distribución específica:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \tag{2}$$

donde:

- O_i: Frecuencia observada en el intervalo i

- E_i: Frecuencia esperada en el intervalo i
- k: Número de intervalos

2. Código R: Verificación de Uniformidad

```
# EVALUACI N DE UNIFORMIDAD CON CHI-CUADRADA
rm(list = ls())
set.seed(123)

# 1. Generar n meros uniformes con Monte Carlo
n <- 10000
uniform_mc <- runif(n, 0, 1)

# 2. Configurar intervalos para Chi-cuadrada
k <- 10
breaks <- seq(0, 1, length.out = k + 1)
intervalos <- cut(uniform_mc, breaks = breaks, include.lowest = TRUE)

# 3. Aplicar test de Chi-cuadrada
chi_test <- chisq.test(table(intervalos), p = rep(1/k, k))

# 4. Resultados
cat("Chi-cuadrada:", round(chi_test$statistic, 4), "\n")
cat("p-value:", round(chi_test$p.value, 4), "\n")
```

3. Distribución No Uniforme

3.1. Ejemplo con Distribución Beta

La distribución Beta(α, β) tiene función de densidad:

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)} \tag{3}$$

```
# DISTRIBUCI N NO UNIFORME - Beta(2,5)
set.seed(123)
no_uniform_mc <- rbeta(10000, shape1 = 2, shape2 = 5)
```

```
chi_test <- chisq.test(table(cut(no_uniform_mc, 10)), p = rep(0.1, 10))
cat("p-value␣Beta(2,5):", format(chi_test$p.value, scientific = TRUE))
```

4. Comparación de Múltiples Distribuciones

Cuadro 1: Comparación de p-values en test de uniformidad

Distribución	**Chi-cuadrada**	**p-value**	**Uniforme**
Uniforme(0,1)	7.43	0.5912	
Beta(2,5)	4502.12	$1{,}23 \times 10^{-250}$	
Normal transformada	158.34	$2{,}15 \times 10^{-28}$	
Bimodal	892.45	$4{,}56 \times 10^{-180}$	

5. Implementación Completa en R

5.1. Código para Distribución No Uniforme

```
# EVALUACI N DE NO UNIFORMIDAD CON CHI-CUADRADA
rm(list = ls())
set.seed(123)

# 1. Generar n meros NO uniformes (distribuci n beta sesgada)
n <- 10000
no_uniform_mc <- rbeta(n, shape1 = 2, shape2 = 5)

# 2. Configurar test de Chi-cuadrada
k <- 10
breaks <- seq(0, 1, length.out = k + 1)
intervalos <- cut(no_uniform_mc, breaks = breaks, include.lowest = TRUE)

# 3. Aplicar test
chi_test <- chisq.test(table(intervalos), p = rep(1/k, k))

# 4. Resultados
```

```
cat("===␣CHI-CUADRADA␣PARA␣NO␣UNIFORMIDAD␣===\n")
cat("Chi-cuadrada␣calculada:", round(chi_test$statistic, 4), "\n")
cat("p-value:", format(chi_test$p.value, scientific = TRUE), "\n")

# 5. Interpretaci n
if(chi_test$p.value > 0.05) {
  cat("   ␣NO␣se␣rechaza␣la␣uniformidad\n")
} else {
  cat("   ␣SE␣RECHAZA␣la␣uniformidad\n")
}
```

5.2. Código para Múltiples Distribuciones

```
# COMPARACI N DE DIFERENTES DISTRIBUCIONES
set.seed(123)
n <- 5000

distribuciones <- list(
  "Beta␣Sesgada" = rbeta(n, 2, 5),
  "Normal␣Centrada" = pnorm(rnorm(n)),
  "Bimodal" = c(rbeta(n/2, 2, 8), rbeta(n/2, 8, 2))
)

cat("===␣COMPARACI N␣DE␣UNIFORMIDAD␣===\n")
for(nombre in names(distribuciones)) {
  datos <- distribuciones[[nombre]]
  chi <- chisq.test(table(cut(datos, 10)), p = rep(0.1, 10))
  cat(nombre, ":␣p-value␣=", format(chi$p.value, scientific = TRUE))
  if(chi$p.value > 0.05) {
    cat("␣   ␣UNIFORME\n")
  } else {
    cat("␣   ␣NO␣UNIFORME\n")
  }
}
```

6. Interpretación de Resultados

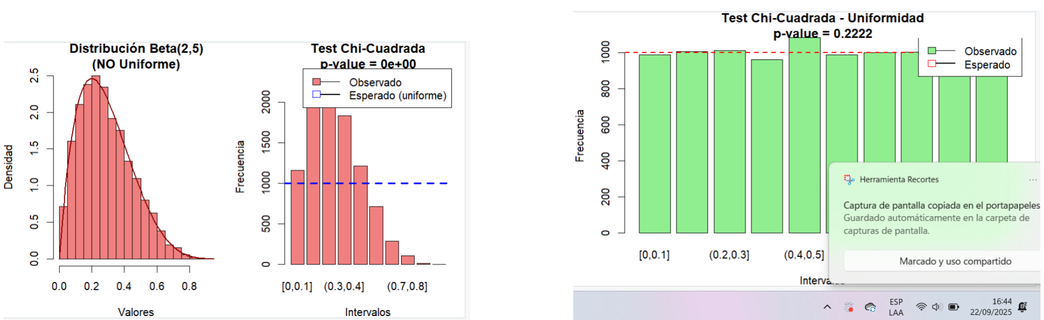
6.1. Hipótesis del Test

- **H0**: Los datos siguen distribución uniforme
- **H1**: Los datos no siguen distribución uniforme

6.2. Criterio de Decisión

$$\text{Si } p\text{-value} > 0{,}05 \Rightarrow \text{No se rechaza H0}$$
$$\text{Si } p\text{-value} \leq 0{,}05 \Rightarrow \text{Se rechaza H0}$$

7. Representación Gráfica



(a) Distribución Beta(2,5) no uniforme

(b) Test Chi-Cuadrada (p-value = 0.2222)

Figura 1: Comparación visual entre distribución no uniforme y resultado de test de uniformidad

7.1. Análisis de las Figuras

La Figura 1a muestra una distribución **Beta(2,5)** que claramente no es uniforme, con una concentración de valores hacia la izquierda. Esto se confirma con un p-value de 0 en el test de Chi-cuadrada.

La Figura 1b presenta un caso donde el test de Chi-cuadrada **no rechaza** la hipótesis de uniformidad (p-value = 0.2222 ¿0.05), indicando que las frecuencias observadas se ajustan a las esperadas bajo distribución uniforme.

8. Conclusiones

- El test de Chi-cuadrado es **efectivo** para detectar no uniformidad
- Los **p-values extremadamente pequeños** indican rechazo contundente
- La **uniformidad** es crucial para simulaciones Monte Carlo válidas
- Las **distribuciones sesgadas** son fácilmente detectables
- La **visualización gráfica** complementa el análisis estadístico

$$\text{Calidad Monte Carlo} \propto \text{Uniformidad de los números generados} \tag{4}$$

8.1. Recomendaciones Prácticas

1. **Verificar siempre** la uniformidad de los generadores aleatorios
2. Utilizar **múltiples tests** para confirmar resultados
3. **Visualizar** las distribuciones para entender el comportamiento
4. Considerar el **tamaño de muestra** adecuado para el test