第 37卷 第 12期
2005年 12月
哈尔滨工业大学学报
JOURNAL OF HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY
Vol.37 No.12
Dec. 2005

一类局部稳定系统的镇定及稳定鲁棒控制

马跃超[1,2], 张庆灵[1], 童 松[1]
(1.东北大学 系统科学研究所, 辽宁 沈阳 110004; 2.燕山大学 理学院, 辽宁 秦皇岛 066004)

摘 要: 为寻求各种类型系统的镇定设计方法, 从矩阵 A的对称分支阵 H(A)入手, 利用李雅普诺夫稳定理论、LMI和矩阵理论, 研究了一类局部稳定系统. 给出了系统是绝对局部稳定系统的充分条件, 针对绝对局部稳定系统提出了递次降阶的稳定控制器的设计方法. 给出了不确定动态系统的稳定鲁棒控制.

关键词: 鲁棒稳定; 镇定; 对称分支
中图分类号: TP13 文献标识码: A 文章编号: 0367-6234(2005)12-1661-03

Stabilization and stable robust control for a class of the part stable systems

MA Yue-chao[1,2], ZHANG Qing-ling[1], TONG Song[1]
(1. Faculty of System Science, Northeastern University, Shenyang 110004, China;
2. College of Science, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China)

Abstract: Through H(A), the symmetric part of matrix A, a class of stable part system is studied by employing Lyapunov stable theory, LMI and matrix theory. A sufficient condition for absolute part stable systems is given. A design method for a kind of stabilization controller for absolute part stable systems is obtained. A stable robust controller for uncertain absolute part stable systems is given.

Key words: stability; stabilization; symmetric part of matrix

对于动态系统, 判定系统的稳定性和对系统镇定是很重要的任务. 对于一般的动态系统, 通常采用极点配置、状态反馈、动态补偿器等方法设计系统的镇定控制器[1~7]. 但对于一个具体的 n阶系统, 特别是阶数 n较大时, 工作相当麻烦. 为此, 需要寻求各种类型系统的镇定设计方法. 许多动态系统的状态矩阵具有某阶主子式是稳定阵的性质. 本文针对这一情况, 对一类具有绝对局部稳定性的系统进行了研究. 矩阵 A的稳定性由它的对称分支即 $H(A) = (A + A^T)/2$决定. 本文从 H(A)入手, 对一类绝对局部稳定系统提出了递次降阶设计镇定控制器的方案. 用不确定系统的对称部分给出了不确定系统的一种稳定鲁棒控制, 这种方法与传统方法比有它的优势.

收稿日期: 2004-12-10.
基金项目: 黑龙江省自然科学基金资助项目(A01-11); 辽宁省学科带头人基金资助项目.
作者简介: 马跃超(1963-), 男, 博士研究生;
张庆灵(1957-), 男, 教授, 博士生导师.

1 定 义

引入如下记号, $R^{n\times n}$表示 $n\times n$矩阵集; R, R^n表示实数集和 n维实向量集. $\lambda(M)$与 $\lambda_{max}(M)$分别表示矩阵 M的特征值和最大特征值. $\|\cdot\|_2$表示谱范数.

设 $A\in R^{n\times n}$, 则 $A = (A + A^T)/2 + (A - A^T)/2$, 记 $H(A) = (A + A^T)/2$, $S(A) = (A - A^T)/2$, 显然 H(A)为对称阵, S(A)为斜对称阵.

引理 1 A是稳定阵的充分必要条件是 H(A)负定.

引理 2 若 A为稳定阵, S为斜对称阵, 则 A + S是稳定阵.

定义 1 对于系统

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{1}$$

设若 A_{11}为 A的稳定的 k阶顺序主子式:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},\ A = H(A) + S(A),$$

$$H(A)=\begin{bmatrix} H(A_{11}) & (A_{12}+A_{21}^{T})/2 \\ (A_{21}+A_{12}^{T})/2 & H(A_{22}) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} H(A_{11}) & C^{T} \\ C & H(A_{22}) \end{bmatrix},\qquad(2)$$

若存在 $Q_1\in R^{n\times k}$, $Q_1^TQ_1=I_k$ 及 $Q_2\in R^{n\times(n-k)}$, $Q=(Q_1, Q_2)$为正交阵, 使

$$Q^T[H(A)]Q=\begin{bmatrix} Q_1^TH(A)Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2^TH(A)Q_2 \end{bmatrix}.\qquad(3)$$

式中: $Q_1^TH(A)Q_1$ 为 k阶稳定阵, 则称式(1)具有绝对局部稳定性.

2 主要结论及证明

首先研究满足什么条件的系统具有绝对局部稳定性.

由式(2)得 $Q^T[H(A)]Q=\begin{bmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \end{bmatrix}H(A)[Q_1\ Q_2]$, 其中 $Q_1=\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$, $Q_2=\begin{bmatrix} P_3 \\ P_4 \end{bmatrix}$, 则式(3)变为

$$Q^T[H(A)]Q=\begin{bmatrix} P_1^T & P_2^T \\ P_3^T & P_4^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H(A_{11}) & C^T \\ C & H(A_{12}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_1 & P_3 \\ P_2 & P_4 \end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} P_1^T[H(A_{11})]P_1+P_2^TCP_1+P_1^TC^TP_2+P_2^TH(A_{22})P_2 & 0 \\ 0 & P_3^TH(A_{11})P_3+P_4^TCP_3+P_3^TC^TP_4+P_4^TH(A_{22})P_4 \end{bmatrix}.\qquad(4)$$

由 Q 的取法, 让 P_1 可逆, 由引理 1, A_{11}稳定, 于是 $H(A_{11})$稳定, 从而 $P_1^TH(A_{11})P_1$稳定. 于是有下述李雅普诺夫方程有惟一正定对称解 M:

$$[P_1^TH(A_{11})P_1]^TM+M[P_1^TH(A_{11})P_1]=-2I_k.\qquad(5)$$

定理 1 对于式(1)的状态阵 A, Q^TAQ的分块(4), 若

$$[2\|C\|_2+\|H(A_{22})\|_2]<1/\lambda_{\max}(M),\qquad(6)$$

则系统

$$\dot{x}_1=Q_1^TH(A)Q_1x_1\qquad(7)$$

是稳定的, 即矩阵 $Q_1^TH(A)Q_1$ 是稳定阵, 从而式(1)具有绝对局部稳定性.

证明　构造李雅普诺夫函数 $V=x_1^TMx_1$, M满足式(5)显然 V是正定函数, 将 V沿系统(7)的轨迹对 t求导得

$$\dot{V}=x_1^T[(P_1^TH(A_{11})P_1)^TM+M[P_1^TH(A_{11})P_1]+(P_2^TCP_1+P_1^TC^TP_2+P_2^TH(A_{22})P_2)^TM+M(P_2^TCP_1+P_1^TC^TP_2+P_2^TH(A_{22})P_2)]x_1\leqslant-2[1-\lambda_{\max}(M)(2\|C\|_2+\|H(A_{22})\|_2)]x_1^Tx_1.$$

由于式(6)中 $\lambda_{\max}(M)(2\|C\|_2+\|H(A_{22})\|_2)<1$, 从而 $\dot{V}<0$. 系统(7)渐近稳定. $Q_1^TH(A)Q_1$是稳定阵. 系统(1)具有绝对局部稳定性.

定理 2 对于系统(1), 若 A_{11} 是系统的绝对局部稳定的 k阶顺序主子式, 即存在 $Q_1\in R^{n\times n}$, $Q_1^TQ_1=I_k$, 及 $Q_2\in R^{n\times(n-k)}$, $Q=(Q_1\ Q_2)$为正交阵, 使

$$Q^TH(A)Q=\begin{bmatrix} Q_1^TH(A)Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2^TH(A)Q_2 \end{bmatrix},$$

且 $Q_1^TH(A)Q_1$ 稳定. 记 $Q^TB=\begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix}$. 若 $(Q_2^TH(A)Q_2, \bar{B}_2)$是能控对, 则存在状态反馈: $u=[O\ K]\bar{x}$, $x=Q\bar{x}$, 使式(1)的闭环系统渐近稳定. 其中 $K=YM^{-1}$, M与 Y满足 LMI:

$$Q_2^TH(A)Q_2M+MQ_2^TH(A)Q_2+\bar{B}_2Y+Y^T\bar{B}_2^T<0\quad(M>0).$$

证明　令 $x=Q\bar{x}$, 则系统(1)变为 $\dot{\bar{x}}=Q^TH(A)Q\bar{x}+Q^TS(A)Q\bar{x}+Q^TBu$,

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} Q_1^TH(A)Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2^TH(A)Q_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}+Q^TS(A)Q\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix}u.$$

因为 $(Q_2^TH(A)Q_2, \bar{B}_2)$是能控对, 存在状态反馈: $u'=K\bar{x}_2$, 使系统 $\dot{\bar{x}}_2=(Q_2^TH(A)Q_2+\bar{B}_2K)\bar{x}_2$ 渐近稳定. 于是 $(Q_2^TH(A)Q_2+\bar{B}_2K)$满足李雅普诺夫不等式

$$[Q_2^TH(A)Q_2+\bar{B}_2K]M+M[Q_2^TH(A)Q_2+\bar{B}_2K]^T<0\quad(M>0).$$

令 $Y=KM$, $M>0$, $K=YM^{-1}$, 将 $K=YM^{-1}$代入上式: $Q_2^TH(A)Q_2M+MQ_2^TH(A)Q_2+\bar{B}_2Y+Y^T\bar{B}_2^T<0$. 这样得到关于变量 M, Y的 LMI, 其中 $M>0$, 解出 M, Y后, $K=YM^{-1}$.

令 $u=[O\ K]\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}$, 则

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} Q_1^TH(A)Q_1 & \bar{B}_1K \\ 0 & Q_2^TH(A)Q_2+\bar{B}_2K \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}+$$

$Q^T S(A) Q \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}$.　　(8)

先证 $\begin{bmatrix} Q_1^T H(A) Q_1 & \bar{B}_1 K \\ 0 & Q_2^T H(A) Q_2 + \bar{B}_2 K \end{bmatrix}$ 是稳定阵.

$$\left| SI - \begin{bmatrix} Q_1^T H(A) Q_1 & \bar{B}_1 K \\ 0 & Q_2^T H(A) Q_2 + \bar{B}_2 K \end{bmatrix} \right| =$$

$$\left| \begin{matrix} SI_k - Q_1^T H(A) Q_1 & -\bar{B}_1 K \\ 0 & SI_{n-k} - (Q_2^T H(A) Q_2 + \bar{B}_2 K) \end{matrix} \right| =$$

$$| SI_k - Q_1^T H(A) Q_1 | \, | SI_{n-k} - (Q_2^T H(A) Q_2 + \bar{B}_2 K) |. \quad (9)$$

$Q_1^T H(A) Q_1$, $Q_2^T H(A) Q_2 + \bar{B}_2 K$均为稳定阵，从而式(9)的所有根的实部均为负数. 即 $\begin{bmatrix} Q_1^T H(A) Q_1 & \bar{B}_1 K \\ 0 & Q_2^T H(A) Q_2 + \bar{B}_2 K \end{bmatrix}$ 是稳定的. 式(8)改写为

$$\dot{\bar{x}} = \left\{ \begin{bmatrix} Q_1^T H(A) Q_1 & \bar{B}_1 K \\ 0 & Q_2^T H(A) Q_2 + \bar{B}_2 K \end{bmatrix} + Q^T S(A) Q \right\} \bar{x} \quad (10)$$

其中，$Q^T S(A) Q$为斜对称阵. 由引理 2 $\begin{bmatrix} Q_1^T H(A) Q_1 & \bar{B}_1 K \\ 0 & Q_2^T H(A) Q_2 + \bar{B}_2 K \end{bmatrix} + Q^T S(A) Q$是稳定阵. 即式(10)的闭环系统是渐近稳定的.

事实上，定理 2中的顺序主子式可换为反顺序子式或更一般的主子式仍成立，这里不作讨论.

在定理 2的基础上，顺次考虑 $Q_2^T H(A) Q_2$，若 $Q_2^T H(A) Q_2$有绝对局部稳定的主子式，重复定理 2的过程，存在正交阵 G，使

$$G^T (Q_2^T H(A) Q_2) G = \begin{bmatrix} G_1^T (Q_2^T H(A) Q_2) G_1 & 0 \\ 0 & G_2^T (Q_2^T H(A) Q_2) G_2 \end{bmatrix},$$

再考虑 $G_2^T (Q_2^T H(A) Q_2) G_2$… 一直下去，直到没有绝对局部稳定主子式. 这样选择的 K阶数最低.

步骤

1) 判定 A_{11}为 A的稳定主子式；

2) 对系统(1)进行变换：$Q = (Q_1, Q_2)$，$Q_1^T H(A) Q_1$，$Q_2^T H(A) Q_2$，$Q^T B = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix}$；

3) 对 $Q_2^T H(A) Q_2$重复 1)，若 $Q_2^T H(A) Q_2$没有稳定主子式则到 4)；

4) 判定 $(Q_2^T H(A) Q_2, \bar{B}_2)$的能控性，若不能控，结束；

5) 解 LMI：

$Q_2^T H(A) Q_2 M + M Q_2^T H(A) Q_2 + \bar{B}_2 Y + Y^T \bar{B}_2^T < 0$ $(M > 0)$，$K = Y M^{-1}$，$u = [\,0 \ K\,] Q^T x$.

下面考虑不确定系统

$$\dot{x} = (A + \Delta A) x + B u \quad (11)$$

这里 $x \in R^n$，$u \in R^m$，A，B为相应维数的常数矩阵，ΔA为不确定量，具有结构 $\Delta A \in U_\alpha = \{ F: \| F \|_2 < \alpha, \ \alpha > 0 \}$.

当 $\Delta A = 0$时，称(14)为理想系统，即

$$\dot{x} = A x + B u \quad (12)$$

称

$$\dot{x} = H(A) x + B u \quad (13)$$

为理想系统(12)的对称系统.

考虑当对称系统(13)满足什么条件时，系统(11)有稳定鲁棒控制.

引理 3　设式(12)可镇定，则存在状态反馈 $u = kx$，使闭环系统

$$\dot{x} = (A + BK) x \quad (14)$$

渐近稳定.

记系统(14)为

$$\dot{x} = A_1 x \quad (15)$$

由引理 1知，式(15)的对称系统

$$\dot{x} = H(A_1) x$$

也是渐近稳定的，即 $H(A_1) < 0$. 所以，李雅普诺夫方程

$$H(A_1) M + M H(A_1) = -2I \quad (16)$$

有惟一正定解

定理 3　设理想系统(12)的对称系统(13)可镇定. 则当不确定参数的范数阶 $\alpha < \alpha^*$，$\alpha^* = [\lambda_{max}(M)]^{-1}$时，反馈 $u = kx$是系统(11)的稳定鲁棒控制.

证明　考虑系统

$$\dot{x} = (H(A_1) + \Delta A) x \quad (17)$$

取李雅普诺夫函数 $V = x^T M x$，显然 V为正定函数，将 V沿系统(17)的轨迹对 t求导得

$$\dot{V} = x^T (H(A_1) M + M H(A_1) + \Delta A^T M + M \Delta A) x$$
$$\leqslant x^T (-2 I_n + 2\lambda_{max}(M) \alpha I_n) x$$
$$= -2 (1 - \lambda_{max}(M) \alpha) x^T x$$

由于 $\alpha < [\lambda_{max}(M)]^{-1}$，所以，$\dot{V} < 0$. 于是系统(16)对任意的 $\Delta A \in U_\alpha$都是渐近稳定. 而系统 $\dot{x} = A_1 x + \Delta A x$ 写成

$$\dot{x} = [\,(H(A_1) + \Delta A) + S(A_1)\,] x \quad (18)$$

由引理 2，由于 $H(A_1) + \Delta A$是稳定的，从而 $(H(A_1) + \Delta A) + S(A_1)$是稳定阵. 从而对任意的 $\Delta A \in U_\alpha$，系统(18)都是渐近稳定的. 于是反馈 $u = kx$是系统(11)的稳定鲁棒控制. (下转第 **1713**页)

$$\alpha+\beta ke-be^2/2-pqke-r_a\beta^2\sigma^2/2=\bar{u}. \quad (4)$$

将式（4）和激励相容约束条件（式（3）中的IC）代入股东期望效用最大化函数（式（3）中的最大化函数），消去 α、e得

$$\max_{e,\alpha,\beta}[-\alpha+(1-\beta)ke-(1-p)qke]=$$
$$\max_{e,\alpha,\beta}\left[k\left(\frac{\beta k-pqk}{b}\right)-qk\left(\frac{\beta k-pqk}{b}\right)-b\left(\frac{\beta k-pqk}{b}\right)^2/2-r_a\beta^2\sigma^2/2-\bar{u}\right]. \quad (5)$$

在式（5）中对 β求最优化一阶条件，得

$$\beta^*=k^2[(1-q)+pq]/(k^2+r_a b\sigma^2). \quad (6)$$

将式（5）代入式（2），得 $e^*=k[(1-q)k^2-r_a b\sigma^2 pq]/(b(k^2+r_a b\sigma^2))$. （7）

式（6）中的 β^* 是股东设计的独立董事最优产出分享系数，式（7）中 e^* 是在此激励条件下的独立董事最优努力程度.

对式（6）进行分析可得如下结论：

1）$\partial\beta/\partial r_a<0$，$\partial\beta/\partial\sigma^2<0$，表明独立董事的产出分享系数 β随着其绝对风险厌恶系数 r_a或外生随机变量方差 σ^2的增大而减小. r_a或 σ^2越大，风险成本 $r_a\beta^2\sigma^2/2$就越高，式（6）中所表示的最优风险分担系数 β就越小.

2）$\partial\beta/\partial b<0$，表明最优产出分享系数 β随着努力成本系数 b的增大而减小；由式（3）可知，b越大，若要想独立董事选择同样的努力水平 e，股东所给出的产出分享系数 β就应该越大，由此，风险成本就越高.因此，独立董事宁愿选择较低的努力水平，也不愿承担太大的风险成本.

3）$\partial\beta/\partial k>0$，$\partial\beta/\partial p>0$，表明独立董事能力越强或其分担的调研成本比例越大，独立董事对产出的分享系数 β就应该越大，即股东对独立董事的激励强度就应该越大.

4）$\partial\beta/\partial q<0$表明独立董事产出分享系数 β随着调研成本在公司产出中比重 q的增大而减小.

3 结　论

股东在设计对独立董事的激励机制时，要综合考虑各种因素，对于工作能力强或调研成本分担比例大的独立董事，股东施加的激励强度应该大一些；对于努力成本大或者绝对风险厌恶系数大的独立董事，股东施加的激励强度应该小一些.只有对独立董事进行有效的激励，才能充分发挥独立董事在公司治理中的重要作用.

参考文献：

[1] HALL B J, MURPHY K J. Optimal exercise prices for executive stock options[J]. American Economic Review, 2000, 90(2): 209－214.

[2] INDJEJIKIAN R J. Performance evaluation and compensation research: An agency perspective[J]. Accounting Horizons, 1999, 13(2): 147－157.

[3] MIRRLEES J. The Theory of Moral Hazard and Unobservable Behavior: Part I[M]. Oxford: Mimeo, Nuffield College, 1976.

[4] HOLMSTROM B. Moral hazard and observability[J]. Bell Journal of Economics, 1979, 10: 74－91.

（编辑　刘　彤）

（上接第 1663页）

定理 4　设系统（11）的理想系统是绝对局部稳定系统，且满足定理 2的条件，在反馈 $u=Kx$下的渐近稳定闭环系统记为 $\dot{x}=A_1x$，则当不确定参数的范数阶 $\alpha<\alpha^*$，$\alpha^*=[\lambda_{\max}(M)]^{-1}$时，反馈 $u=Kx$是系统（11）的稳定鲁棒控制.

由定理 3、4确定的鲁棒控制，与传统方式比有它的优点. H(A)是对称稳定阵.方程 $H(A)M+MH(A)=-2I$易解.实际上，$M=-H^{-1}(A)$.

对于不确定系统（11），若理想系统是绝对局部稳定的，鲁棒控制的不确定量的范数界 α的计算步骤为

1）按定理 2的方法，设计 $u=Kx$；

2）给出反馈后系统的状态矩阵 A_1，求出 $H(A_1)$；

3）解 $H(A_1)M+MH(A_1)=-2I$，求出 M；

4）$\alpha^*=[\lambda_{\max}(M)]^{-1}$.

参考文献：

[1] ANDERSO B D O, LIU Y. Controller reduction: Concepts and approaches[J]. IEEE Trans Automat Contr, 1989, AC 34(8): 802－812.

[2] HOM R A, JOHNSON C R. Matrix Analysis[M]. [s.l.]: Cambrige University Press, 1990.

[3] WALKER H, ROBUST J. Stabilizability of discrete—time systems with normalized stable factor perturbation[J]. Int J Control, 1990, 52(2): 441－455.

[4] GARICIA G, BERNUSSOU J. Pole assignment for uncertain systems in a specified disk by state feedback[J]. IEEE Trans Automat Contr, 1995, 40(2): 184－190.

[5] FLETECHER L R. Pole assignment and controllability subspaces in descriptor systems[J]. Int J Contr, 1997, 66(5): 667－709.

[6] SAFONOV M G. Stability and Robustness of Multivariable Feedback Systems[M]. [s.l.]: MIT press, 1980.

[7] BOYD S. Linear Matrix Inequalities in System and Control theory[M]. [s.l.]: Philadelphia Press, 1994.

（编辑　刘　彤）