非线性系统局部镇定问题的一般方法及其应用

吉英存　　高为炳

北京航空航天大学七研

摘　要　文中我们给出非线性系统局部镇定的一种较为一般的方法,并讨论了它的应用.

关键词: 非线性系统, 解析反馈, 局部镇定.

一. 引　言

镇定问题近年来引起了人们的极大兴趣，如[3－8]. 其中不少学者详细研究二维系统的光滑镇定[7], 也有不少学者运用中心流形定理来镇定一个非线性系统，很出色的工作见 *D.Aeyels*[4],*Isidori－Byrnes*[6,8]. 还有人运用动力系统中的 *HOPF* 分叉理论来处理该问题[5].

在本文中，我们先给出系统临界指数的概念，(定义见后). 我们举例表明：系统在低临界程度下不能局部镇定. 在高临界程度下却是全局可镇定的. 然后，我们首次运用常微分方程定性理论来讨论低维系统的局部渐近解析镇定，给出了二维系统具有一个不可控零根，一对不可控纯虚根在选择最小临界指数下可镇定的充要条件. 接着，借助于中心流形理论将低维结果推广至高维情形. 我们发现镇定问题有三种关键因素：

(i)　开环系统可供选择的临界指数(定义见后).

(ii)　镇定一个"全临界子系统"(定义见后).

(iii)　解一个代数方程，把低维系统的镇定律变为整个系统的镇定律.

二. 临界指数与镇定

从 *Brockett* 的必要条件知：镇定问题只须考虑临界情形."临界指数"的概念用来表明系统的临界程度.

定义 1. 系统 $\dot{x}=N(x),x\in R^n$ 具有临界指数 (α,β) 是指其线性化系统具有 α 个零根,β 对纯虚根.

对一个一般的非线性系统经过坐标变换和坐标重排,就考虑镇定问题而言总可以化为：

$$\dot{x}=Ax+\bar{f}(x,\xi,u) \tag{2.1a}$$

$$\dot{\xi}=B\xi+Cu+\bar{g}(x,\xi,u) \tag{2.1b}$$

$x\in R^{\ell},\xi\in R^{(n-\ell)},u\in R^m$,　$\bar{f}$,　$\bar{g}\in C^\infty,Re(\lambda(A))=0$　不妨设有$\bar{\alpha}$个零根,$\bar{\beta}$对纯虚根,$\{B,C\}$可镇定.

$\bar{f}(0,0,0)=\bar{g}(0,0,0)=0$　$D\bar{f}(0,0,0)=D\bar{g}(0,0,0)=0$

我们知道,u 的选取使得闭环系统的临界指数为 (α,β), 其满足 $\alpha\geqslant\bar{\alpha}$　$\beta\geqslant\bar{\beta}$. 一个系统在低临界程度下不可镇定，但是在高临界程度下恰是全局可镇定的.

例：$\dot{x}=x^2(x-2y^3)$

$\dot{y}=u$

$x,y,u\in R$

该系统可供择的临界指选择的临界起指数为 $\{1,0\},\{2,0\}$. 由定理 3.1.3 易得其在 $\{1,0\}$ 不可镇定，而在 $\{2,0\}$ 下是全局可镇定的 (*Marino*,1989)

三.(1)　具有一个不可控零根的二维系统的最小临界指数镇定

考虑系统

$$\dot{x}=P_2(x,y,u) \tag{3.1a}$$

$$\dot{y}=-y+u+Q_2(x,y,u) \tag{3.1b}$$

$x,y,u\in R$ 的局部解析镇定问题,p_2,Q_2 是原点邻的内不低于 2 次的解析函数. 该系统可供选择的临界指数为 $\{1,0\},\{2,0\}$. 这里我们选择临界指数为 $\{1,0\}$, 给出其可镇定的充要条件. 先叙述一个引理，详细见[2].

引理 3.1.1　　设 $O(0,0)$ 是系统

$$\dot{x} = P_2(x,y) \tag{3.2a}$$

$$\dot{y} = -y + Q_2(x,y) \tag{3.2b}$$

的孤立奇点，且 P_2,Q_2 是原点邻域 $S(O)$ 内次数不低于 2 的解析函数．于是当邻域足够小时，存在解析函数 $\varphi(x)$ 满足：

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0\ , \qquad -\varphi(x) + Q_2(x,\varphi(x)) = 0$$

现令 $\psi(x) = P_2(x,\varphi(x)) = \alpha_m x^m + o(x^m)$ 其中 $\alpha_m \neq 0, m \geqslant 2$. 于是有

(i) 当 m 为奇数时，且 $\alpha_m < 0, O(0,0)$ 是稳定节点．

(ii) 其余情况皆不稳定．

为便于推广至控制系统，考虑该系统的一个简单推论．

推论 3.1.2 考虑这样的系统

$$\dot{x} = P_2(x,y) \tag{3.3a}$$

$$\dot{y} = -y + kx + Q_2(x,y) \tag{3.3b}$$

$O(0,0)$ 是孤立奇点，P_2,Q_2 是原点邻域内次数不低于 2 的解析函数．该系统原点的稳定性由 $\psi(x) = P_2(x,\varphi(x))$ 的首项决定，其中 $\varphi(x)$ 满足： $-\varphi(x) + kx + Q_2(x,\varphi(x)) = 0$ 若首项形如 $-\alpha_p x^{(2p-1)}, \alpha_p > 0$, 则原点 $O(0.0)$ 渐稳，否则不稳．

根据引理 3.1.1 和推论 3.1.2, 我们考虑系统 (3.1) 的局部解析镇定问题．

定理 3.1.3 考虑系统 (3.1). 由 $-y + u + Q_2(x,y,u) = 0$ 解得 $y = \varphi(x,u)$ 将其代人 $P_2(x,y,u)$ 得 $\psi(x) = P_2(x,\varphi(x,u),u)$, 则系统 (3.1) 在临界指数 $\{1,0\}$ 下可局部解析镇定的充要条件为：存在 $u(x)$, 使得 $\psi(x,u(x))$ 的首项形如：$-\alpha_p x^{(2p-1)}$, 这里，$u(0) = 0$, $\alpha_p > 0$, p 为正整数，$u(x)$ 为解析函数．

例 3.1.4

$$\begin{cases} \dot{z} = y^2 - z^5 \\ \dot{y} = z^2 + u \end{cases} \tag{3.4}$$

求镇定律步骤如下：

(1) 令：$z^2 + u = -y + \bar{u}$, 则系统变成：

$$\dot{z} = y^2 - z^5 \tag{3.5a}$$

$$\dot{y} = -y + \bar{u} \tag{3.5b}$$

(2) 依据定理 3.1.3 易得：$\bar{u} = yF(z)$ $(F(z) \neq 1)$ 和：$\bar{u} = \alpha_3 z^3 + \dots;$ $\alpha_3, \dots \neq 0.$

皆是系统 (3.5) 的局部镇定律．因而原系统在 $\{1,0\}$ 临界指数下可镇定，且反馈形式为：$u = -y - z^2 + yF(z)$, $F(z) \neq 1$, 和 $u = -y - z^2 + (\alpha_3 z^3 + \dots)$

三 .(2) 具有一对不可控的纯虚根的二维系统的镇定

现考虑如下系统的局部解析镇定问题

$$\dot{x} = y + P_2(x,y,u) \tag{3.6a}$$

$$\dot{y} = -x + Q_2(x,y,u) \tag{3.6b}$$

P_2,Q_2 表示在原点邻域内其是 x,y,u 的次数不低于 2 的解析函数．这里解决问题的理论基础是常微分方程定性理论中用来判别细焦点或中心的形式级数法，详见 [2]$p108-112$. 具体求镇定律的步骤如下：

$Step(1)$: 令 $u = u_1^{\alpha_1} + u_2^{\alpha_2} + \dots + u_k^{\alpha_k} + \dots = \alpha_{10}x + \alpha_{01} + \alpha_{20}x^2 + \alpha_{11}xy + \alpha_{02}y^2 + \dots$ 记 α_1

$=(\alpha_{10},\alpha_{01}),\alpha_2=(\alpha_{20},\alpha_{11},\alpha_{02}),\ldots$ $u_k^{\alpha_k}$ 表示系数为 α_k 的 k 次齐式．

Step(2)：将 u 形式地代人系统 (3.6) 得：

$$\dot{x}=y+P_2^{[\alpha_1]}(x,y)+P_3^{[\alpha_1,\alpha_2]}(x,y)+\ldots \tag{3.7a}$$

$$\dot{y}=-x+Q_2^{[\alpha_1]}(x,y)+Q_3^{[\alpha_1,\alpha_2]}(x,y)+\ldots \tag{3.7b}$$

这里 $P_2^{[\alpha_1]}$ 表示该二次齐式的系数可能与 α_1 有关，余下类同．

Step(3)：令 $F(x,y)=x^2+y^2+F_3+\ldots F_k$ 表示 x,y 的 k 次齐式．计算 $F(x,y)$ 沿着系统 (3.7) 的对时间的导数：

$$\dot{F}=(2x+\sum_3^\infty\frac{\partial F_k}{\partial x})(y+P_2^{[\alpha_1]}(x,y)+\ldots+(2y+\sum_3^\infty\frac{\partial F_k}{\partial y})(-x+Q_2^{[\alpha_1]}(x,y)+\ldots)$$

Step(4)：令同次幂系数为零，我们可以用递推的方法来定 F_n：记

$$F_n=\sum_n^\infty a_kx^{n-k}y^k$$

$$A_n=2[xP_{n-1}^{[\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-2}]}(x,y)+yQ_{n-1}^{[\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-2}]}(x,y)]+\sum_3^{n-1}[P_{n-k+1}^{[\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}]}(x,y)\frac{\partial F_k}{\partial x}+Q_{n-k+1}^{[\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-k}]}(x,y)\frac{\partial F_k}{\partial y}$$

$$=\sum_n^\infty b_kx^{n-k}y^k$$

因而我们得方程组：

$$\begin{bmatrix}0&-1&0&\ldots&0&0&0\\ n&0&-2&\ldots&0&0&0\\ 0&n-1&0&\ldots&0&0&0\\ \ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\ 0&0&0&\ldots&0&-n+1&0\\ 0&0&0&\ldots&2&0&-n\\ 0&0&0&\ldots&0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\\ \ldots\\ a_{n-2}\\ a_{n-1}\\ a_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_0\\ b_1\\ b_2\\ \ldots\\ b_{n-2}\\ b_{n-1}\\ b_n\end{bmatrix} \tag{3.8}$$

(*i*) 当 n 为奇数时，$det(A)=[(2k+1)!!]^2,n=(2k+1)$．从而方程组不管 u 如何选取，总有唯一解．

(*ii*) 当 n 为偶数时，不妨设 $n=2m$，方程组 (3.8) 可以分解成两部分：

$$2ka_{2k}-2(m-k+1)a_{2(k-1)}=b_{2k-1};k=1,2,\ldots,m \tag{3.9}$$

$$(2k+1)a_{2k+1}-(2m-2k+1)a_{2k-1}=b_{2k-1};k=0,1,\ldots,m \tag{3.10}$$

方程组 (3.9) 有 m 个方程，$(m+1)$ 个未知数，系数矩阵的秩为 m，其有依赖于一个参数的解．方程组 (3.10) 有 $m+1$ 个方程，m 个未知数，其系数矩阵的秩为 m．

如果我们能够选择 $u=u_1^{\alpha_1}+u_2^{\alpha_2}+\ldots+u_{n-2}^{\alpha_{n-2}}$ 使得

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_0 \\ -(2m-1) & 3 & 0 & \dots & 0 & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2m-1 & b_{2(m-1)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & b_{2m} \end{vmatrix} \neq 0$$

这样我们求解方程组：

$$(2k+1)(t_{2k+1} - (2m-2k+1)a_{2k-1} + C^k_{m\lambda} = b_{2k},\ k=0,1,\dots m \tag{3.11}$$

得： $\lambda = \frac{1}{2m\ !!}\sum_0^m (2m-2k-1)!!(2k-1)!b_{2k}$

定理 3.2.1 系统 (3.6) 可局部解析镇定等价于在有限步内可求得 $\lambda^{[\alpha_1 \dots \alpha_s]} < 0$.

四．高维系统镇定律的构造

在这一节,我们先考虑如下系统:

$$\dot{x} = Ax + \bar{f}(x,\xi) \tag{4.1a}$$

$$\dot{\xi} = B\xi + Cu + \bar{g}(x,\xi,u) \tag{4.1b}$$

其中：$Re(\lambda(A)) = 0$ $\{B,C\}$ 可镇定，不妨设 $Re(\lambda(B)) < 0$, $\bar{f}(0,0) = \bar{g}(0,0,0) = 0$, $D\bar{f}(0,0) = 0, D\bar{g}(0,0,0) = 0$, $x \in R^s, \xi \in R^{(n-s)}$, $\bar{f}$, $\bar{g} \in C^\infty$

定理 4.1: 系统 [4.1], 可以用 $u(x), u(0) = Du(0) = 0$ 来局部光滑镇定等价于

(i) 存在 $h(x), h(0) = Dh(0) = 0$ 使得 $\dot{x} = Ax + \bar{f}(x,h(x))$ 渐稳．

(ii) 代数方程：$Dh(x)(Ax + \bar{f}(x,h(x))) = Bh(x) + Cu + \bar{g}(x,h(x),u)$ 有解 $u = u(x)$.

证明：从中心流形定理易得．

注：(i) 首先，我们先镇定一个低维子系统 :$\dot{x} = Ax + f(x,\xi), Re(\lambda(A)) = 0$ 称说为"全临子系统"．这里我们视"ξ"为控制变量．$h(0) = Dh(0) = 0$ 的要求是为便于运用中心流形理论．

(ii) 接着，选择 $u(x)$ 使得 $h(x)$ 也是整个闭环系统的中心流形．这样，由"全临子系统"的动力学行为决定了整个闭环系统的动力学行为．不过这里我们和通常的做法不一样，不是由高维到低维，这需要解一个偏微分方程，而由低维到高维只须解一个代数方程．

参考文献

[1] Jack Carr, Applications of centre manifold theory, Springer,1981.

[2] 张芷芬等,微分方程定性理论,科学出版社,1985

[3] R.W.Brockett, Asmptotic stability and feedback stabilizability,in R.W.Brockett et al eds."Differential Geometric Control Theory.(Birkhauser. BostonMA, 1983)

[4] D.Aeles, Stabilization of a class of nonlinear systems by smooth feedback, Systems and Control Letters 5 289–294 1985.

[5] E.H.Abed and J.H.Fu, Local feedback stabilization and bifurcation control I: Hopf Bifurcation, IBID 7, 11–17 1986.

[6] C.I.Byrnes and A,Isidori,Local stabilization of critically minimun phase nonlinear systems,Systems and Control Letters, Vol.11, 9–17, 1988.

[7] W.P.Dayawansa and C.F.Martin :Asymptotic stabilization of two dimensional real analytic systems, IBID 12, 437–442, 1989.

[8] C.I.Byrnes and A.Isidori,New results and examples in nonlinear feedback stabilization, IBID, 12, 205–211, 1989.