DOI：10.13195/j.cd.1998.06.9.shey.002
Vol. 13 No. 6 CONTROL AND DECISION Nov. 1998

一般非线性控制系统的局部反馈渐近镇定*

佘 焱 张嗣瀛
(上海交通大学信控系, 200030) (东北大学)

摘 要 运用微分几何方法讨论了存在相对阶的一般非线性控制系统的局部反馈渐近镇定问题。在给出这类系统基于相对阶的标准形之后, 如果其零动态渐近稳定, 则可找到控制律局部镇定该系统。所得结果适用于一般非线性控制系统局部反馈渐近镇定的临界问题。

关键词 非线性控制系统, 局部反馈渐近镇定, 相对阶

分类号 TP273

1 引 言

镇定问题是控制系统设计中最基本的问题。线性系统的镇定问题已经获得了完善的解决, 但非线性系统的镇定问题则复杂得多[1], 这一问题曾被列为控制中最重要的未解决的问题之一[2]。设一般非线性控制系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x) \end{cases} \tag{1}$$

其中 $x \in R^n, u \in R^m, y \in R^p, p \leq m, f(x, u), h(x)$ 是光滑向量值函数, $f(x_0, u_0) = 0, h(x_0) = 0$。本文运用微分几何方法讨论上述系统的局部反馈渐近镇定问题, 所得结果适用于解决一般非线性系统在虚轴上存在不能控极点的局部反馈渐近镇定的临界问题。

2 若干定义和引理

下面对于一般非线性控制系统, 引入类似仿射非线性系统的若干概念[3,4]。

定义 1 称系统(1) 在点(x_0, u_0) 具有相对阶$\{r_1, \cdots, r_p\}$, 如果:

1) 在点(x_0, u_0) 的某邻域

$$\frac{\partial}{\partial u_j}(L^k_{f(x,u)} h_i(x)) = 0, \quad 1 \leq j \leq m, \quad 1 \leq i \leq p, \quad k \leq r_i - 1 \tag{2}$$

2) $p \times m$ 阶矩阵

$$A(x, u) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u_1} L^{r_1}_{f(x,u)} h_1(x) & \cdots & \frac{\partial}{\partial u_m} L^{r_1}_{f(x,u)} h_1(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial}{\partial u_1} L^{r_p}_{f(x,u)} h_p(x) & \cdots & \frac{\partial}{\partial u_m} L^{r_p}_{f(x,u)} h_p(x) \end{bmatrix} \tag{3}$$

在(x_0, u_0) 的秩为 p。

定义 2 称 R^n 中的光滑子流形 z^* 是系统(1) 在 $x_0 \in z^*$ 的零输出子流形, 如果:

1) $\forall x \in z^*$, 有 $h(x) = 0$。

* 国家自然科学基金, 中国博士后科学基金和辽宁省科学技术基金资助项目

1997- 09- 25 收稿, 1997- 11- 20 修回

2) 存在唯一且光滑的映射 $u^*: z^* \to R^m$，满足

$$f^*(x) = f^*(x, u^*(x)) \in T_{z^*}(x)$$

其中 $T_{z^*}(x)$ 是 z^* 在 x 的切空间。如果 z^* 在 x_0 局部最大，则称 (z^*, f) 是系统(1) 在 x_0 的零动态。

为了讨论需要，下面引入系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, z) \\ \dot{z} = v \\ y = h(x) \end{cases} \tag{4}$$

其中，f, h 由(1) 式定义，$x \in R^n, z \in R^m$。上式写成更紧凑的形式

$$\begin{cases} \tilde{x} = \tilde{f}(\tilde{x}) + \tilde{g}(\tilde{x})v \\ y = \tilde{h}(\tilde{x}) = h(x) \end{cases} \tag{5}$$

其中

$$\tilde{x} = (x, z) \in R^{n+m}, \quad v \in R^m$$

$$\tilde{f}(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} f(x, z) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{g}_i(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdots \\ 1 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{第 } n+i \text{ 行} \tag{6}$$

定义 3　系统(4) 称为系统(1) 的伴随系统。

引理 1　系统(1) 在点 (x_0, u_0) 具有相对阶 $\{r_1, \cdots, r_p\}$，当且仅当其伴随系统在点 $\tilde{x}_0 = (x_0, u_0)$ 具有相对阶 $\{r_1 + 1, \cdots, r_p + 1\}$。

证明略。

引理 2　设系统(1) 在 (x_0, u_0) 具有相对阶 $\{r_1, \cdots, r_p\}$，则以下行向量线性无关

$$\begin{gathered} dh_1(x_0),\ dL_{f(x_0,u_0)}h_1(x_0), \cdots, dL^{r_1-1}_{f(x_0,u_0)}h_1(x_0) \\ \cdots \\ dh_p(x_0),\ dL_{f(x_0,u_0)}h_p(x_0), \cdots, dL^{r_p-1}_{f(x_0,u_0)}h_p(x_0) \end{gathered} \tag{7}$$

证明　由引理 1，系统(4) 在点 $\tilde{x}_0 = (x_0, u_0)$ 具有相对阶 $\{r_1 + 1, \cdots, r_p + 1\}$，所以以下 $n + m$ 维行向量线性无关

$$\begin{gathered} d\tilde{h}_1(\tilde{x}_0),\ dL_{\tilde{f}(\tilde{x}_0)}\tilde{h}_1(\tilde{x}_0), \cdots, dL^{r_1}_{\tilde{f}(\tilde{x}_0)}\tilde{h}_1(\tilde{x}_0) \\ \cdots \\ d\tilde{h}_p(\tilde{x}_0),\ dL_{\tilde{f}(\tilde{x}_0)}\tilde{h}_p(\tilde{x}_0), \cdots, dL^{r_p}_{\tilde{f}}(\tilde{x}_0)\tilde{h}_p(\tilde{x}_0) \end{gathered} \tag{8}$$

注意到，由(2) 式，当 $0 \le k \le r_i - 1$ 时，有 $dL^k_{\tilde{f}(\tilde{x}_0)}\tilde{h}_i(\tilde{x}_0) = (dL^k_{f(x_0,u_0)}h_i(x_0), 0)$，该式右端的后 m 个分量为零，所以(8) 的线性无关蕴含了(7) 的线性无关。

引理 3　设系统(1) 在 (x_0, u_0) 具有相对阶 $\{r_1, \cdots, r_p\}$，则存在坐标变换 $\Phi(x)$，使系统(1) 在新坐标下具有标准形

$$\begin{cases} \xi^i_1 = \xi^i_2, \cdots, \xi^i_{r_i-1} = \xi^i_{r_i}, \quad \xi^i_{r_i} = L_{f(x,u)}\xi^i_{r_i} \\ y_i = \xi^i_1, \quad i = 1, \cdots, p, \quad \dot{\eta} = q(\xi, \eta, u) \end{cases} \tag{9}$$

其中矩阵 $\tilde{A}(x,u)=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial u}L_{f(x,u)}\xi_{r_1}^1\\ \cdots\\ \frac{\partial}{\partial u}L_{f(x,u)}\xi_{r_m}^m\end{bmatrix}$ 在 (x_0,u_0) 的秩为 p。

证明略。

引理 **4** 设系统(1) 在 (x_0,u_0) 具有相对阶 $\{r_1,\cdots,r_p\}$, 则存在光滑反馈 $u=k(x,v)$, $u_0=k(x_0,0)$ 及坐标变换 $\Phi(x)$, 使系统(1) 在新坐标下具有形式

$$\begin{cases}\dot{\xi}_1^i=\xi_2^i,\cdots,\dot{\xi}_{r_i-1}^i=\xi_{r_i}^i,\quad \dot{\xi}_{r_i}^i=v_i,\quad y_i=\xi_1^i\\ i=1,\cdots,p,\quad \dot{\eta}=q(\xi,\eta,k(\Phi^{-1}(\xi,\eta),v))\end{cases}\tag{10}$$

证明 令函数 $F:R^{n+2m}\rightarrow R^p$

$$F_i(x,u,v)=L_{f(x,u)}^{r_i}h_i(x)-v_i\tag{11}$$

由(3) 式, 矩阵 $\frac{\partial}{\partial u}F=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial u}F_1\\ \cdots\\ \frac{\partial}{\partial u}F_p\end{bmatrix}=A(x,u)$ 在 (x_0,u_0) 的秩为 p, 不妨设其中左边的 $p\times p$ 阶子阵是满秩, 令 $\tilde{u}=(u_1,\cdots,u_p,u_{0p+1},\cdots,u_{0m})$, 其中 u_{0i} 是 u_0 的第 i 个分量。记

$$\bar{F}(x,\bar{u},v)=F(x,\tilde{u},v)\tag{12}$$

其中 $\bar{u}=(u_1,\cdots,u_p)\in R^p$, 则 $p\times p$ 阶矩阵 $\frac{\partial}{\partial u}\bar{F}(x,\bar{u},v)$ 在 $(x_0,u_{01},\cdots,u_{0p})$ 满秩。又因为 $\bar{F}(x_0,\bar{u}_0,0)=0$, 其中 $\bar{u}=(u_{01},\cdots,u_{0p})$。所以, 根据隐函数定理, 存在 x_0, $v=0$ 的某邻域, 及定义在该邻域上的光滑函数 $\phi(x,v)$, 满足

$$\bar{F}(x,\phi(x,v),v)=0,\quad \phi(x_0,0)=\bar{u}_0\tag{13}$$

令

$$k_1(x,v)=\phi_1(x,v),\cdots,k_p(x,v)=\phi_p(x,v)\tag{14}$$

$$k_{p+1}(x,v)=u_{0p+1},\cdots,k_m(x,v)=u_{0m}\tag{15}$$

由(13)、(12) 及(11) 式有 $F(x,k(x,v),v)=0$, $k(x_0,0)=u_0$, 将 $u=k(x,v)$ 代入(9) 式, 得引理。

3 主要结果

将(11) 写成更紧凑的形式

$$\begin{cases}\dot{\xi}=A\xi+Bv\\ \dot{\eta}=q(\xi,\eta,k(\phi^{-1}(\xi,\eta),v))\\ y_i=\xi_1^i\\ i=1,\cdots,p\end{cases}\tag{16}$$

其中

$$A=\mathrm{diag}(A_1,\cdots,A_p),\quad B=\mathrm{diag}(B_1,\cdots,B_p)$$

$$A_i=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\ &&&\ddots&\\0&0&0&\cdots&1\\0&0&0&\cdots&0\end{bmatrix}_{r_i\times r_i},\quad B_i=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\0\\1\end{bmatrix}_{r_i\times 1}$$

适当选择 $p\times r$ 阶矩阵 $K = \mathrm{diag}(K_1, \cdots, K_p)$, 其中 $K_i = (K_{i1}, \cdots, K_{ir_i})$ 使得矩阵 $A + BK$ 是稳定的, 即 $A_i + B_iK_i(1 \le i \le p)$ 稳定。令 $v = K\xi$, 则系统(17) 具有形式

$$\begin{cases} \dot{\xi} = (A + BK)\xi \\ \dot{\eta} = q(\xi, \eta, k(\Phi^{-1}(\xi, \eta), K\xi)) \end{cases} \tag{17}$$

定理 1　设系统(1) 在 (x_0, u_0) 具有相对阶 $\{r_1, \cdots, r_p\}$, 其零动态在 x_0 点渐近稳定, 则在反馈 $u = k(x, K\xi)$ 下, 系统(1) 在 x_0 点渐近稳定, 其中 $\xi_k^i = L_{f(x,u)}^{k-1}h_i(x), 1 \le i \le p, 1 \le k \le r_i$, $k(x, v)$ 由(14) 式定义。

定理 1 是引理 4 和下述引理的直接推论。

引理 5　文献[5] 考虑系统

$$\begin{cases} \dot{\xi} = A\xi + p(\xi, \eta) \\ \dot{\eta} = f(\xi, \eta) \end{cases} \tag{18}$$

如果当 η 在 0 点附近有 $p(0, \eta) = 0$, 且 $\frac{\partial p}{\partial \xi}(0, 0) = 0$。而 $\eta = 0$ 是 $\dot{\eta} = f(0, \eta)$ 的渐近稳定平衡点, 则 $(\xi, \eta) = (0, 0)$ 是系统(18) 的渐近稳定平衡点。

注 1　由定义(2) 及引理 4 易知, 定理 1 中的零动态是指如下系统

$$\dot{\eta} = q(0, \eta, k(\Phi^{-1}(0, \eta), 0)) \tag{19}$$

注意到系统(19) 的维数为 $n - r$, 所以定理 1 的主要意义是将系统(1) 的稳定性问题转化为低阶系统的稳定性问题。

4　例　　子

本节详细讨论一般非线性系统局部反馈渐近镇定临界问题的一个例子。

例 1　考虑以下一般非线性系统

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1x_2 - x_1^3 \\ x_1 + (2 + 2x_3)u \\ -x_3 + u + x_1^3u^3 \\ x_1^2 + x_2 \end{bmatrix} \\ y = h(x) = x_4 \end{cases} \tag{20}$$

考虑系统在 $(x, u) = (0, 0)$ 点附近的线性近似, 直接计算可知当特征值 $\lambda = 0$ 时, 系统在虚轴存在一个不能控的极点, 所以, 用通常的方法不能求出渐近稳定控制律。下面应用本文结果解决这一问题。直接计算可知, 在 $(x, u) = (0, 0)$ 点, 系统存在相对阶 1。令

$$\begin{aligned} z_1 &= \Phi_1(x) = h(x) = x_4, \quad z_2 = \Phi_2(x) = x_1^2 + x_2 \\ z_3 &= \Phi_3(x) = x_3, \quad z_4 = \Phi_4(x) = x_1 \end{aligned} \tag{21}$$

其 Jacabi 矩阵为非奇异, 所以上述函数定义了原点附近的微分同胚坐标变换。直接计算可得系统在新坐标下的标准形

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ z_4 + 2z_4(z_4(z_2 - z_4^2) - z_4^3) - (2 + 2z_3)u \\ -z_3 + u + z_4^3u^3 \\ -2z_4^3 + z_2z_4 \end{bmatrix} \\ y = z_1 \end{cases} \tag{22}$$

令 $z_1 = z_2 = 0$, 可得 $u = \dfrac{z_4 - 4z_4^4}{2 + 2z_3}$, 代入上述标准形的第 3 式和第 4 式, 可得系统零动态。直接计算可知零动态在 0 点渐近稳定。所以可以用本文方法求出控制律。由定理 1 可知, 控制律

$$u = \frac{1}{\frac{\partial}{\partial u} L_f^2 h(x)} \left(- L_f^2 h(x) - c_1 h(x) - c_2 L_f h(x) \right)$$

使得系统(22) 渐近稳定, 其中 c_1, c_2 为任意正整数。

5 结 论

本文运用微分几何方法讨论了存在相对阶的一般非线性控制系统的局部反馈渐近镇定问题。在给出这类系统基于相对阶的标准形之后, 如果其零动态渐近稳定, 则可以找到控制律局部镇定该系统。最后给出了一个一般非线性系统局部反馈渐近镇定临界问题的例子, 说明本文方法的有效性。

参 考 文 献

1 陈彭年, 韩正之, 张钟俊. 非线性系统镇定的若干进展. 控制理论与应用, 1995, 12(4): 401- 409

2 Report on the workshop: Challenges to control: A collective view. IEEE Trans Auto Contr, 1987, AC- 32(4): 275- 285

3 Isidori A. Nonlinear control systems. Berlin: Springer- Verlag, 1989

4 Hu X. Some results in nonlinear output regulation and feedback stabilization. Automatica, 1994, 59(4): 1085- 1093

5 Hahn W. Stability of movation. Berlin: Springer- Verlag, 1967

Local Feedback Asymptotic Stabilization for General Nonlinear Systems

She Yan *Zhang Siying*

(Shanghai Jiaotong University) (Northeastern University)

Abstract Local feedback asymptotic stabilization problems for the general nonlinear systems which exist a relative degree are discussed. Differential geometry methods are used to conduct the main results which are extension of the results for affine nonlinear systems. The local feedback stabilization control law can be gotten after its norm form is known. The critical problems of the local feedback asymptotic stabilization for this class of general nonlinear systems can also be solved by the theorem of this paper.

Key words nonlinear control systems, local feedback asymptotic stabilization, relative degree

作 者 简 介

佘 焱 1968 年生。1990 年于武汉大学数学系获理学学士学位并免试推荐为硕士研究生, 1992 年硕士研究生毕业并提前攻博, 1995 年获理学博士学位, 1995 年入东北大学自动控制博士后流动站进行博士后研究。目前感兴趣的研究领域为复杂控制系统的相似结构与全息性质、非线性控制系统等。

张嗣瀛 1925 年生。东北大学教授、博士生导师。中国科学院院士, 国务院学位委员会学科评议组成员, 国家自然科学基金委员会委员, 中国自动化学会理事。研究方向为: 复杂系统的相似结构与全息性质, 微分对策, 大系统, 非线性控制系统等。