

申请上海交通大学博士学位论文

时滞系统稳定性的若干研究

作者： 李旭光

导师： 朱新坚 教授

学院： 电子信息与电气工程学院

系别： 自动化系

专业： 控制理论与控制工程

上海交通大学

自动化系

二〇〇七年十一月

A Dissertation for the Degree of Doctor of Philosophy

**SOME STUDIES ON THE STABILITY OF TIME-DELAY
SYSTEMS**

Presented by

Li Xu-Guang

Under the Supervision of

Prof. Zhu Xin-Jian

Department of Automation

Shanghai Jiao Tong University

November 2007

上海交通大学

学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

学位论文作者签名：

日期： 年 月 日

上海交通大学

学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅。本人授权上海交通大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

保密☐，在____年解密后适用本授权书。

本学位论文属于

不保密☐。

（请在以上方框内打“√”）

学位论文作者签名：

指导教师签名：

日期： 年 月 日

日期： 年 月 日

时滞系统稳定性的若干研究

摘 要

近几十年来,时滞系统的稳定性研究引起了人们广泛关注。时滞系统的理论和实际重要性也得到了大家的普遍认可。可是,由于时滞系统的复杂性,时滞系统的稳定性问题还远远未被研究透彻。目前对这类问题的研究主要有两类方法:时域方法和特征根方法。本论文介绍了作者基于这两种方法(时域方法和特征根方法)所做的关于时滞系统稳定性的若干研究工作。

其中论文的第二章为作者基于简单 Lyapunov 泛函方法分析时滞系统稳定性的工作。这一章主要有三部分内容。1) 提出一种新的时滞系统稳定性分析方法:积分等式方法。在这一部分首先提出一种积分等式。该结论在分析时滞系统时优于已有的积分不等式。这里还给出了积分等式中自由项的选取规则。积分等式和自由项的选取规则构成了一个有效分析时滞系统稳定性的方法。该方法较积分不等式方法保守性更低。2) 分析了含分布时滞的中立系统稳定性。这一部分首先提出了一种改进 Lyapunov-Krasovskii 泛函。基于这个泛函的方法比已有方法保守性更低。3) 分析了网络控制系统的镇定问题。在这部分,分析了一类被控对象含状态和输入时滞的网络控制系统镇定问题。

论文的第三章介绍了作者基于离散化 Lyapunov 泛函方法分析时滞系统稳定性的工作。这一章有四部分内容。1) 提出一种新的针对中立型时滞系统的完全 Lyapunov-Krasovskii 泛函。基于这个新泛函的离散化 Lyapunov 泛函方法可较以往离散化 Lyapunov 泛函方法处理更广的时滞系统鲁棒稳定性问题。2) 分析含混合时滞的中立系统稳定性。在这部分提出了一种新的针对混合型中立系统的离散化 Lyapunov 泛函方法。该方法较之前的方法保守性更低。且所得结论非常接近实际结果。3) 提出一种新的时滞系统指数估计方法。该方法为基于离散化 Lyapunov 泛函的估计方法。从而该方法要优于基于简单 Lyapunov 泛函的估计方法。4) 分析含时变时滞的时滞系统稳定性。这里提出了一种不需要引入输入-输出方法的分析方法。因此该方法要比已有方法更简单。同时该方法的保守性更低。

论文的第二章和第三章为时域分析方法。目前这种方法的一个主要研究动力是如何进一步降低结论的保守性。时域方法的优势为可以有效地分析鲁棒稳定性和设计控制器。而这种方法却不可避免的引入保守性。基于时域方法得到的稳定性结论为充分非必要的。因此,作者在论文的后半部分提出了两种非时域的研究方法。

在论文的第四章,提出了一种新的时滞系统稳定性分析方法:混合代数、频域方法。我们知道已有的代数方法不能给出区间型的稳定结果;而频域方法不能有效的分析给定时滞下的系统稳定性。而目前常用的时域方法又不可避免地具有保守性。当采用这些方法时,我们很难有效地分析非相称型多时滞系统的稳定性。这章提出的混合代数、频域方法克服了已有代数方法和频域方法的不足。这种方法可以准确地分析多时滞系统的稳定性并获得保证系统稳定的时滞区间。

在论文的第五章,提出一种新的方法分析时滞系统的完全稳定性。首先研究了

一般形式的时滞系统虚根穿越情况并得到一些重要的性质。根据这些性质我们知道, 时滞系统的虚根穿越情况可以直接由系统的结构信息得到。详细的说, 这里的结构信息指哪些特征虚根属于同一个子准多项式。一个子准多项式所对应虚根的穿越方向根据这个子准多项式所含的虚根的大小顺序决定。进一步, 我们可以断定一个一般形式的时不变参数时滞系统随时滞的增加将最终不稳定, 如果该系统含有至少一个特征虚根。为得到这个结构信息, 在这章提出了一种频域扫描方法。通过执行该频域扫描方法, 可以得到想要的结构信息并求得系统的临界时滞值。这样, 系统的完全稳定区间可以容易地求得。通过仿真可以看出, 该方法比已有方法简单许多。

关键词: 时滞系统, Lyapunov-Krasovskii 泛函, 稳定性, 离散化 Lyapunov 泛函方法, 稳定性切换

SOME STUDIES ON THE STABILITY OF TIME-DELAY SYSTEMS

ABSTRACT

The stability of time-delay systems has received considerable attention in the last few decades. The theoretical and practical importance of this topic has been well recognized. However, the stability of time-delay systems is not fully investigated due to the complexity. Roughly speaking, there are two types of approaches to study the stability: namely, time domain ones and the eigenvalue-based ones. In this dissertation, some studies of the author based on these two approaches are introduced.

In Chapter 2, the researches based on simple Lyapunov functional methods are introduced. There are three parts in the chapter. 1) A new method for the stability analysis, an integral equality method, is proposed. First, an integral equality is presented in this part. This equality is better than the integral inequality in the stability analysis of time-delay systems. In addition, the selecting rules of the free terms are given. The integral equality and the selecting rules constitute a systematic method to study the stability. This new method is less conservative than the one based on the integral inequality. 2) The stability of neutral systems with distributed delays is studied. By constructing a modified Lyapunov-Krasovskii functional, a new and less conservative stability criterion is obtained. 3) The stabilization of networked control system, in which the plant has state and input delays, is addressed.

In Chapter 3, the studies based on discretized Lyapunov functional method are presented. Four contributions are introduced therein. 1) A new complete Lyapunov-Krasovskii functional for neutral systems is proposed. Based on this new complete functional, the discretized functional method is applicable to a wider class of robust analysis problem. 2) The stability of neutral systems with mixed delays is studied. A new discretized Lyapunov functional method is proposed. By the method, the results are less conservative than the existing ones and are very close to the analytical results. 3) A new exponential estimate method, based on discretized Lyapunov functional method, is proposed. The estimate results by the method are better than the ones obtained by the methods based simple Lyapunov functionals. 4) The stability of the systems with time-varying delays is discussed. The proposed method does not introduce the input-output method. As a consequence, the method is easier than the existing ones. In addition, the method is less conservative than the previous methods.

Chapter 2 and Chapter 3 are in the time domain framework. A main motivation for this framework is to further reduce the conservatism. The time domain methods can be used to effectively study the robustness and design controller. However, the results by

the methods are inevitably conservative. In addition, the obtained stability conditions are sufficient though not necessary. Considering this, two new non-time-domain methods are proposed.

In Chapter 4, a new method, mixed algebra and frequency method is proposed. It is known that the algebra method cannot lead to delay interval which guarantees the stability while the frequency method cannot be utilized to study the system stability for given delay. As to the time-domain methods, the results are inevitably conservative. One can hardly apply these methods to address the stability of the systems with incommensurate multiple delays. The mixed algebra and frequency method can overcome the respective disadvantages of the algebra method and the frequency method. By this new method, one can accurately find the delay interval for system stability.

In Chapter 5, a new methodology is presented to study the complete stability of time-delay systems. First, we study the crossing directions of the imaginary roots and some important properties are obtained. According to these properties we can directly determine the crossing directions via the structure information. More specifically, here the structure information means which imaginary roots belong to one factored quasi-polynomial. The crossing direction of an imaginary root can be directly determined by the magnitude order of the imaginary roots of the factored quasi-polynomial where it belongs. Moreover, we can confirm that a time invariant delayed system will be ultimately unstable as delay increases if there exists at least one imaginary root. To obtain the desired structure information, a frequency sweeping method is presented. By performing the frequency sweeping method, the complete stability regions can be depicted. The method is easier than the existing ones.

Key words: Time-delay systems, Lyapunov-Krasovskii functional, stability, discretized Lyapunov functional method, stability switch

目 录

| | |
|--|-----|
| 摘 要..... | I |
| ABSTRACT..... | III |
| 第一章 绪论..... | 1 |
| 1.1 引言..... | 1 |
| 1.2 基本概念..... | 1 |
| 1.3 常见的分析方法..... | 5 |
| 1.4 论文的内容和结构..... | 11 |
| 第二章 基于简单Lyapunov泛函方法的时滞系统稳定性分析..... | 13 |
| 2.1 引言..... | 13 |
| 2.2 时滞系统稳定性分析：一种积分等式方法..... | 13 |
| 2.2.1 积分等式..... | 14 |
| 2.2.2 积分等式的应用..... | 16 |
| 2.3 含分布时滞的中立系统稳定性分析..... | 23 |
| 2.4 网络控制系统控制器设计..... | 29 |
| 2.5 小结..... | 36 |
| 第三章 基于离散化Lyapunov泛函方法的时滞系统稳定性分析..... | 37 |
| 3.1 引言..... | 37 |
| 3.2 中立系统鲁棒稳定性分析..... | 37 |
| 3.2.1 一种新型完全Lyapunov-Krasovskii泛函..... | 38 |
| 3.2.2 离散化Lyapunov泛函方法..... | 43 |
| 3.3 含混合时滞的中立系统稳定性分析..... | 50 |
| 3.4 时滞系统指数估计..... | 60 |
| 3.5 含时变时滞的时滞系统稳定性分析..... | 69 |
| 3.5.1 引言..... | 69 |
| 3.5.2 主要结论..... | 70 |
| 3.6 小结..... | 80 |
| 第四章 时滞系统稳定性分析：一种混合代数、频域方法..... | 83 |
| 4.1 引言..... | 83 |
| 4.2 主要结论..... | 84 |
| 4.3 数值仿真..... | 88 |
| 4.4 小结..... | 89 |
| 第五章 线性时不变系统完全稳定性..... | 91 |
| 5.1 引言..... | 91 |
| 5.2 预备知识..... | 92 |
| 5.3 时滞系统完全稳定性..... | 93 |
| 5.4 一种频域扫描方法..... | 97 |
| 5.5 数值仿真..... | 98 |
| 5.6 小结..... | 102 |
| 第六章 总结与展望..... | 103 |
| 6.1 总结..... | 103 |

| | |
|-------------------------|-----|
| 6.2 展望..... | 103 |
| 参考文献..... | 105 |
| 致 谢..... | i |
| 攻读博士学位期间发表或录用的论文目录..... | iii |

第一章 绪论

1.1 引言

关于时滞系统的研究近年来得到了数学、物理、系统与控制等多个领域学者的广泛关注并且其重要性也得到了普遍认同。时滞现象广泛存在于实际的系统中,并且时滞因素是影响一个系统动态特性的重要因素。尽管人们半个世纪前已得到一些关于时滞系统的基本规律。可是,直到最近二十几年,时滞系统才真正成为一个热点研究课题。这是由于一方面一些新的工程实际应用对象(如网络控制系统)的出现。这些实际应用需要更好的从理论角度分析与了解。而时滞分析在其中具有极其重要的作用。另一方面,一些新的理论结果的出现(比如目前常用的线性矩阵不等式技术)也允许我们更有效、准确地分析和解决一些理论问题。如同很多其它的控制理论研究一样,理论研究和实际应用是紧密联系在一起。实际应用是理论研究的动力而理论研究则为实际应用的基础与保障。

时滞系统(time-delay system),在有些文献中还称为: systems with aftereffect, systems with dead-time 或 hereditary systems 等。一个时滞系统可以表示为多种不同的数学模型如: functional differential equations (Hale & Lunel, 1993), infinite dimensional systems over operators (Curtain & Pritchard, 1978) 或 ring models (Mores, 1976)。当前主要采用的是 functional differential equations (泛函微分方程)的数学框架。读者可能也会注意到,目前关于时滞系统稳定性分析的文献有一部分标题就是泛函微分方程(如 Peet, 2006)。而其中的内容其实就是工程技术人员所知的时滞系统。

而本论文主要研究控制理论与控制工程学科中我们更关心的问题,时滞系统的稳定性。

1.2 基本概念

在这一小节中,我们简单介绍一些时滞系统的基本概念。首先介绍一下文献中常涉及的不同种类的时滞。并且由于论文主要研究的是线性时滞系统的稳定性问题,所以给出的是线性系统的例子。

先看一个最简单的时滞型(retarded)时滞系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau) \quad (1.1)$$

系统(1.1)中的时滞 τ 存在于系统的状态变量中,我们称这样的时滞 τ 为离散时滞(discrete delay)。

再看一个中立型(neutral)时滞系统

$$\dot{x}(t) - C\dot{x}(t - \tau) = Ax(t) \quad (1.2)$$

系统(1.2)中的时滞称 τ 存在于系统状态变量的导数中, 这样的时滞 τ 我们称为中立时滞(neutral delay)。

接下来给出一个分布型(distributed)时滞系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + D \int_{t-\tau}^t x(t) \quad (1.3)$$

系统(1.3)中的时滞作用为过去一段时间系统变量的积分, 这样的时滞 τ 称为分布时滞(distributed delay)。

当然, 一个系统中可能同时含有以上介绍的两种或三种类型的时滞。如:

$$\dot{x}(t) - C\dot{x}(t - \tau) = Ax(t) + Bx(t - \tau) + D \int_{t-\tau}^t x(t) \quad (1.4)$$

三种类型的时滞也可以是不同的, 如:

$$\dot{x}(t) - C\dot{x}(t - \tau) = Ax(t) + Bx(t - h) + D \int_{t-\tau}^t x(t) \quad (1.5)$$

对于形如(1.1)的系统称为单时滞系统。一个系统中可能含有多个时滞。下面给出一个含多时滞的系统, 如:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^n B_i x(t - \tau_i) \quad (1.6)$$

进一步分, 如果一个多时滞系统(1.6)可以表示为

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{k=1}^m B_k x(t - k\tau) \quad (1.7)$$

则我们称(1.7)为相称(commensurate)时滞系统否则称为非相称(incommensurate)时滞系统。

根据时滞的变化情况, 时滞又可分好多种。并且, 我们会发现, 已有的每一篇文献都是针对某一类型的时滞研究的。基于变化情况, 时滞可分以下常见几类:

1. 常数时滞: 1. a 已知常数时滞 1. b 未知常数时滞
2. 时变时滞: 2. a 慢变时滞 2. b 快变时滞

例如: $\dot{x}(t) = Ax(t - \tau)$, 则对应的情况为:

1. τ 是常数。这里还分为已知和未知的情况。
2. τ 是时变的。2. a $\dot{\tau} < 1$ 2. b $\dot{\tau} \geq 1$

基于时滞界的情况又可分为:

1. 具有上界
2. 具有上界和下界 (区间型)

如对应系统 $\dot{x}(t) = Ax(t - \tau)$ 的情况就是

1. $0 \leq \tau \leq \bar{\tau}$
2. $\underline{\tau} \leq \tau \leq \bar{\tau}$

下面我们再根据时滞系统的特征方程的形式对时滞系统做一个分类。之所以这样分, 是因为目前有一类文章专门研究一些具有简单形式的准多项式的稳定性问题。比如时滞系统(1.1)的特征方程为

$$\det(sI - A - Be^{-\tau s}) = 0 \quad (1.8)$$

其具体形式为下面的准多项式

$$CE(s, \tau) = a_n(s)e^{-n\tau s} + a_{n-1}(s)e^{-(n-1)\tau s} + \cdots + a_0(s) = \sum_{k=0}^n a_k(s)e^{-k\tau s} = 0 \quad (1.9)$$

其中 $a_k(s)$ 为 $n-k$ 次 s 的实系数多项式。 $a_0(s)$ 具有 s 的次数最高, 并且与时滞无关。准多项式 (1.9) 含 n 重相称时滞。

这里称特征方程为

$$CE(s, \tau) = p(s) + q(s)e^{-\tau s} = 0 \quad (1.10)$$

形式的时滞系统为简单时滞系统并称 (1.10) 为简单准多项式。相对地, 我们称 (1.9) 为一般形式的准多项式并称对应的时滞系统为一般形式的时滞系统。因为针对简单时滞系统, 我们可以得到一些独特的稳定性质。而想要推广这些稳定性质到特征方程为 (1.9) 这样的一般时滞系统, 通常是不容易的。关于简单时滞系统的稳定性分析, 论文的后面会有所涉及, 但这部分不是本论文的重点。关于简单型的时滞系统稳定性研究可参考 Beretta & Kuang (2002), Boese (1998), Boese (1999), Cooke & Grossman (1982), Cooke & van den Driessche (1986) 和 Malakhovskii & Mirkin (2006)。

下面给出两个非常重要的时滞系统稳定性结论。

定理 1.1 (Lyapunov-Krasovskii 稳定性定理): 假定 $u, v, w: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ 是连续非减函数。对于 $s > 0$, $u(s)$ 和 $v(s)$ 是正的且 $u(0) = v(0) = 0$ 。如果存在可微泛函 $V: \mathbb{R} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ 满足

$$u(\|\phi(0)\|) \leq V(t, \phi) \leq v(\|\phi\|_c) \quad (1.11a)$$

且

$$\dot{V}(t, \phi) \leq -w(\|\phi(0)\|) \quad (1.11b)$$

则系统是零解一致稳定的。如果对于 $s > 0$, $w(s) > 0$, 则系统是一致渐近稳定的。

Lyapunov-Krasovskii 稳定性定理 (Gu, Kharitonov & Chen, 2003) 在时滞系统的稳定性分析中具有非常重要的作用。大家知道 Lyapunov-Krasovskii 泛函方法是一种常用的时域分析方法。而 Lyapunov-Krasovskii 稳定性定理就是这种方法的理论依据。

更详细的说, 对于简单 Lyapunov 泛函方法, 我们仅需要验证条件 (1.11b)。这是因为一个合理的简单 Lyapunov-Krasovskii 泛函自然满足条件 (1.11a)。文献 Li & Zhu (2007) 指出了这样一个错误的, 在 Lee, Moon, Kwon & Park (2004) 中所构建的 Lyapunov-Krasovskii 泛函违背条件 (1.11a)。

在 Lee, Moon, Kwon & Park (2004) 中, 构建了如下 Lyapunov-Krasovskii 泛函

$$V(x_t) = V_1(x_t) + V_2(x_t) + V_3(x_t) + V_4(x_t)$$

其中

$$V_4(x_t) = \int_0^t \int_{\beta-h}^{\beta} \begin{bmatrix} x(\beta) \\ \dot{x}(\beta) \\ \dot{x}(\alpha) \end{bmatrix}^T \times \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & Y_1 \\ * & X_{22} & Y_2 \\ * & * & Z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x(\beta) \\ \dot{x}(\beta) \\ \dot{x}(\alpha) \end{bmatrix} d\alpha d\beta$$

我们可以发现, $V_4(x_t)$ 是一个从 $-h$ 到 t 时刻的积分。这样的 Lyapunov-Krasovskii 泛函是不满足条件(1.11a)的。因此相关的结论就不正确了。

而对于离散化 Lyapunov 泛函方法, 由于所采用的 Lyapunov-Krasovskii 泛函要比简单 Lyapunov-Krasovskii 泛函复杂。我们需要同时验证 (1.11a) 和 (1.11b)。当(1.11a) 和 (1.11b) 都满足时, 被研究的时滞系统是渐近稳定的。

完全型 Lyapunov-Krasovskii 泛函结合离散化从而得到线性矩阵不等式形式稳定判据的这种方法我们称为离散化 Lyapunov 泛函方法。关于离散化 Lyapunov 泛函方法我们将在论文的第三章比较详细的介绍。这里需要说明的是, 目前还有其它(据作者了解, 两种)采用完全型 Lyapunov-Krasovskii 泛函的分析方法。一种方法为墨西哥 CINVESTAV-IPN, Department of Automatic Control 的 Vladimir L. Kharitonov 提出的构建 Lyapunov-Krasovskii 泛函方法。关于这种方法可参考文献 Fridman (2006a), Kharitonov (2006), Kharitonov (2005), Kharitonov & Melchor-Aguilar (2003), Kharitonov, Mondié & Collado (2005), Kharitonov & Plischke (2006), Kharitonov & Zhabko (2003) 和 Mondié, Kharitonov & Santos (2005)。此外还有一种有效的基于完全 Lyapunov-Krasovskii 泛函的方法, Sum-of-Squares and Convex Optimization 方法。关于这种方法可参考 Papachristodoulou, Peet & Sanjay (2005) 和 Peet (2006)。关于前一种方法, 将在第三章关于完全 Lyapunov-Krasovskii 泛函性质的分析中有所涉及。而后一种方法本论文中将不讨论。对这两种方法感兴趣的读者可参考上述文献。

另一个时滞系统稳定的条件为

定理 1.2 一个时滞系统(1.1)渐近稳定, 当且仅当它的特征方程(1.8)的所有根都位于复平面的开左半平面。

特征方程(1.8)为形如(1.9)的准多项式形式。对一个正时滞, (1.9)具有无穷多个根。以目前的情况来看, 完全求得这些特征根是不现实也是不可能的。事实上目前分析时滞系统稳定性的方法为检验系统是否含有非负实部的根。如果没有这样的特征根则系统渐近稳定。这也是目前所有特征根方法的思路。需要注意的是, 对于含时变、不确定参数的系统, 特征根方法是无效的。这里可以简单的解释: 对于一个时变系统, 即使对所有时刻它的所有特征根都具有严格负实部, 这个系统也可能是不稳定的(Mullhaupt, Buccieri & Bonvin 2007)。

时滞相关与时滞无关稳定性

对于一个含单时滞 τ 的时滞系统, 如果该系统对所有 $\tau \geq 0$ 都满足系统渐近稳定, 则称该系统时滞无关渐近稳定。另一方面, 如果一个稳定判据与时滞 τ 无关(稳定判据中不含 τ), 则该稳定条件称为时滞无关稳定条件。如果一个稳定判据与时滞 τ 相关(稳定判据中包含 τ), 则该稳定条件称为时滞相关稳定条件。

通常来说, 时滞无关稳定条件比时滞相关稳定性要强。因为很显然, 相对来说

只有很少的系统对所有 $\tau \geq 0$ 渐近稳定。大多数时滞系统仅当时滞取值属于某一个或某几个区间时系统渐近稳定。关于这一点可结合后面的完全稳定性内容理解。此外,很多情况下时滞 τ 是已知的,这时我们完全可以利用这个信息分析系统的稳定性,鲁棒稳定性或控制器设计问题。如果此时我们不利用这个时滞信息而仅获得时滞无关稳定条件,则这个条件必然会有很大的保守性。尤其当这个时滞很小时,时滞无关稳定条件将比时滞相关稳定条件保守许多。因此,通常来说我们更希望获得时滞相关的稳定性条件。

进一步,一个时滞系统中可能含有多个时滞,并且这些时滞也可能不属于同类时滞。比如假定这个系统含时滞 τ_i ($i=1, \dots, n$)。对于这个多时滞系统,它可能与某些时滞,比如 τ_j ($j \in \{1, \dots, n\}$) 时滞无关稳定。这时我们可以称该系统 τ_j 无关渐近稳定。而另一方面,如果一个稳定判据与 τ_j ($j \in \{1, \dots, n\}$) 无关而与其它时滞(这里表示为 τ_k) 相关,我们可以说这个稳定条件是 τ_k 相关且 τ_j 无关的。关于这些概念,论文中很多地方会出现。

1.3 常见的分析方法

关于时滞系统稳定性的研究,到目前已发展出很多比较成熟而又相对独立的分析方法。简单的说主要有两类:时域方法和特征根方法。而每种方法又可再细分为多种方法。在这里简要介绍一下本论文中涉及的方法。

需要指出,虽然这里介绍了多种分析方法,但这些绝不是全部。并且目前关于时滞系统的很多研究都是从某一种或某几种方法研究,甚至有些方法世界上仅有某个学者或小组在研究。因此目前关于很多概念,名称及观点还没有统一及规范。论文中也有很多作者个人的观点。由于作者目前水平有限,难免会有与各位学者不同的看法和理解。

时域分析方法

时域分析方法主要是基于 Lyapunov 函数或泛函:如 Lyapunov-Krasovskii 泛函或 Lyapunov-Razumikhin 函数。总的来说, Lyapunov-Krasovskii 泛函方法要比 Lyapunov-Razumikhin 函数方法保守性更低,因此目前时域框架内,前者的应用更多。在这里,我们主要讨论 Lyapunov-Krasovskii 泛函方法。关于 Lyapunov-Razumikhin 函数方法的介绍可参考 Gu, Kharitonov & Chen (2003)。

最近十年, Lyapunov-Krasovskii 泛函方法被广泛关注。到今天,该方法已经发展得比较成熟。这其中,最主要的一个因素就是线性矩阵不等式在控制理论中的应用和推广。一方面,由于凸优化技术的发展提供了线性矩阵不等式求解的方法(如椭圆法和内点法)。另一方面,由于计算机技术的迅猛发展,使得过去看起来很难处理得问题,现在可以在一些科学计算软件(如 Matlab)的帮助下,非常容易的解决。因此,现在时滞系统稳定性分析的时域框架基本就是 Lyapunov-Krasovskii 泛函+线性矩阵不等式。

在当前的这个框架下(Lyapunov-Krasovskii 泛函+线性矩阵不等式),近十年来一个最主要的研究动力就是:如何进一步降低结论(稳定性判据)的保守性。

为了达到进一步降低结论保守性的目的,几个重要的改进被提出:

Park 不等式, Park (1999)

Moon 不等式, Moon, Park, Kwon & Lee (2001)

Descriptor 系统方法, Fridman & Shaked (2001)。

一些新的 Lyapunov-Krasovskii 泛函, 如 Fridman (2001) 和 Lin, Wang & Lee (2006)。

自由权矩阵技术, He, Wu, She & Liu (2004a, b)。

及一些不用任何不等式的方法, Xu, Lam & Zou (2006)。

以上介绍的方法,虽然不同程度的改进了已有结论,但是保守性还是比较大。并且,即使我们愿意增加计算量,也没有明显的有效方法进一步改进结果。接下来,介绍时域框架内一个尤其重要的成果:离散化(完全) Lyapunov 泛函方法。

在 Huang (1989)中已指出, 对一个时滞系统,一个渐近稳定的充分必要条件是存在一个完全型的 Lyapunov 泛函。但是,由于这样的一个完全型 Lyapunov 泛函是无穷维的,并没有有效的方法对其验证。1997 年, 美国 Southern Illinois University Edwardsville 的 Gu Keqin 教授首次提出了离散化 Lyapunov 泛函的概念。这个方法的基本思想是: 将时滞的区间分成若干段,对每一段中的矩阵函数用分段线性矩阵函数替代,从而得到的离散化 Lyapunov 泛函近似于理论上的完全 Lyapunov 泛函。离散化的分段数越多,就越近似。进一步,通过相应的处理,可以得到线性矩阵不等式形式的稳定判据。由仿真结果可见,这种方法比之前的简单 Lyapunov 泛函方法明显的降低保守性,且所得结果非常接近解析解。如果想进一步降低结果的误差,可以通过增加离散化分段来实现。这种离散化 Lyapunov 泛函方法在时滞系统稳定性分析中占据着重要的地位。

此后,离散化 Lyapunov 泛函方法得到了进一步的改进和推广。如:

分析鲁棒稳定性问题, Han & Gu (2001)。

分析分布时滞系统稳定性, Gu (2003a)。

分析时变时滞系统稳定性, Gu, Kharitonov & Chen (2003)。

特征根分析方法

除了前面介绍的时域方法,目前还有许多其它的有效分析方法,如频域法,代数法,直接方法,特征方程根聚类法(CTCR)等等。需要声明的是,目前对这些方法,还没有一个统一的称呼。虽然在 Gu, Kharitonov, & Chen (2003)中,将已有方法主要分为时域法和频域法(该书主要介绍这两类方法)。但考虑到目前的分析方法还是多种多样的,如果对非 Lyapunov 方法统称频域方法,这样有些不全面。大家知道,由于一个时滞系统的特征方程是一个准多项式,它具有无穷多的特征根。并且目前来看, 计算所有的特征根是不现实的。目前对于时滞系统稳定性的分析,已有的方法是检测是否在右半复平面存在特征根。况且,对于验证稳定性来说,也没有必要考虑所有特征根的分布。一些频域方法的思路是: 检验系统在什么情况下具有特征虚根,这样根据稳定指数连续性,可得到一些简单情况的稳定性质。可以说,目前大多数非时域方法要基于系统虚根的信息。正因如此,称这些方法为频域方法是有道理的。但是,有些方法,如代数方法是可以直接判断系统右半平面是否含有特征根的。还有一些方法,如 CTCR 方法,研究的很多结论也超过了频域法的范围。还有一些文献,提出了一些研究虚根运动方向的方法。以上介绍方法中所采用的思路也远远超出了传统意义上的频域方法。比如有些方法采用的是一些几何的观点。

另一个值得注意的地方是, 近期提出的一些新方法得益于计算机的大力帮助。因此作者觉得, 在现阶段用频域方法统称非时域方法有些不甚合适。在和一些领域内的学者交流后, 觉得称为特征根方法比较贴切。原因很明显, 这些方法大多是从系统的特征方程入手考虑系统的稳定性。这一点有别于时域方法是根据系统状态方程。更确切的说, 这些方法是检验系统是否具有非负实部的特征根。一个系统渐近稳定的充分必要条件是系统的所有特征根都在复平面的开左半平面。自然地, 大家也会想到这些方法的局限性: 这些方法不能处理含时变, 不确定性和外界扰动情况。通常这些方法只能处理时不变时滞系统。同时, 这些方法的优点也很明显: 结论是精确的(不含保守性)。虽然前面提到离散化 Lyapunov 泛函方法可以使结论的保守性非常低, 但终究保守性是不可避免的。此外, 更重要的, Lyapunov 方法不能很好的反映时滞系统的一些本质。而很多特征方程法可以得到一些时滞系统很重要的性质和规律, 可以使我们更好的理解认知时滞系统。时滞系统的研究虽然从很早就开始, 并且即使对一个看似简单的线性单时滞系统(无论是状态方程还是特征方程都看起来很简单), 到现在还是有很多问题人们没有找到答案。在已有的文献中, 对时滞系统的描述, 可常见一个英文单词 “transcendent”。这也从侧面反映了目前人们对时滞系统的认知程度。而这些基于特征根的研究方法就可以很好地深入研究系统的相关性质。

这里举一个比较有代表性的例子。对于一个简单的时滞系统(准多项式), Cooke 教授在他 1986 年的文献 Cooke & van den Driessche (1986) 中指出, 系统的特征虚根运动方向可以根据虚根的大小顺序直接得到。进而得出, 时滞系统只要有特征虚根, 随着时滞的增大, 系统将最终不稳定。并且在最终不稳定之前, 系统可能经过有限次的稳定性切换。

以上是一个非常具有理论和实际价值的发现! 更详细的说明和分析会在后面的章节中介绍。可惜的是, 现阶段可以媲美 Cooke 教授这个发现的结论还是太少了。时滞系统这个既熟悉又陌生的学科还等待我们进一步的去深入研究!

目前大多数研究成果, 如时域方法, 仅能处理系统的某一个稳定区间。更确切的说, 第一稳定区间。例如一个系统, 时滞为零的时候稳定, 当时滞逐步增加, 系统仍可保持稳定, 但当超过某一个值的时候, 系统不再稳定。通过时域方法可得到这个零到一个临界值的区间。再讨论相对复杂一些的情况, 既常被称为 non-small 型的系统。一个时滞系统当时滞为零的时候不稳定, 当时滞增加并超过一个临界值后稳定, 继续增加并超过另一个临界值后不稳定。这样的一个 non-small 型稳定区间是可以通过离散化 Lyapunov 泛函方法得到的(注意, 这时简单 Lyapunov 泛函方法无法处理)。

可是, 我们很自然地会问: 那当时滞继续增加, 还会出现其它的稳定区间吗? (Olgac & Sipahi (2002) 中的一个例子中, 系统存在两个稳定区间) 有什么方法能够分析一个时滞系统的完全稳定性吗? 既当时滞从零增加到正无穷大, 如何检查所有的稳定区间?

此外如何理解时滞因素对于系统稳定性的影响呢? 因为通常认为, 时滞会让系统变的不稳定。可是从以上 non-small 型系统和 Olgac & Sipahi (2002) 中例子说明, 至少在某一局部, 这样的理解是有偏差的。另外, 一个特殊的情况, Beretta & Kuang (2002) 中的系统当时滞从零增加到无穷大的过程中, 存在多个稳定区间, 且当时滞大于某一临界值后到无穷大区间(这个区间是无穷大的), 系统是稳定的。这种情况被称做最终稳定。

因为从零到正无穷大逐点检测稳定性(如采用时域方法或代数方法)是不现实

的。因此,对于时滞系统的分析,还需要一些更深入的理解,还要找到一些更本质的性质。这样的规律将具有及其重要的理论和实际价值!

下面简单介绍几种论文中涉及的特征根分析方法。

频域方法

这里的频域方法主要指 Chen (1995), Fu, Niculescu & Chen (2006) 及 Gu, Kharitonov & Chen (2003) 介绍的相关结论和方法。这种方法主要依据系统的稳定指数连续性及系统的虚根信息。

所谓系统的稳定指数连续性可以这样理解: 对一个含正时滞的系统, 系统的特征根关于时滞参数是连续变化的。并且对于整个非负时滞区间, 系统所有特征根的最大实部是连续的(对于中立系统则需要一个前提条件)。因此, 如果随着时滞的增加, 某些特征根从左(右)半平面运动到右(左)平面, 则这期间必与虚轴相交。这是由特征根关于时滞参数的连续性决定的。

系统的虚根及对应的时滞值(临界时滞), 可以通过一些频域方法准确获得。其中一种为频域扫描方法一种为 Matrix Pencil 方法。

这样如果一个时滞系统在时滞为零的情况下渐近稳定(不包含具有非负实部的特征根)且系统对所有非负时滞没有虚根, 则可以确定该系统为时滞无关渐近稳定。如该系统零时滞下渐近稳定, 在某些时滞下具有虚根。则该系统在零到最小临界时滞这段区间渐近稳定。可是, 除了这两种情况, 其它的稳定信息很难由这种方法得到。相关的介绍可见后面的章节。

代数方法

这里的代数方法主要介绍 Hu & Hu (1996), Hu & Hu (1997), Hu, Hu & Zou (2004) 及 Hu & Liu (2007) 中的方法。其它的一些代数方法仅能得到时滞不相关的稳定条件, 而这里介绍的方法应用复变函数知识中的幅角定理(Brown & Churchill 2004) 可以得到时滞相关型的稳定条件。在这里对这种方法做一个简单的介绍。

代数方法是根据一些矩阵的性质(参考 Lancaster & Tismenetsky 1985) 对时滞系统的特征方程进行分析。例如对一个时滞系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau)$$

注意这里代数方法是直接分析系统的特征函数

$$\det(sI - A - Be^{-\tau s})$$

而不必将其表示为

$$a_n(s)e^{-n\tau s} + a_{n-1}(s)e^{-(n-1)\tau s} + \cdots + a_0(s)$$

的形式处理。

代数方法首先基于代数性质求得一个含所有可能具有非负实部特征根的区域。这个区域可以是长方形的(Hu & Liu 2007)或半圆形的(Hu, Hu & Zou 2004)。如果这个区域为空集, 则被研究的系统为时滞无关渐近稳定。这个思路也是很多其它代数方法所采用的。

进一步,利用复变函数中的幅角性质。简单的说,观察特征函数在一个闭曲线上的幅角变化情况。如果这个闭曲线内不包含系统的特征根,则特征函数在这个闭曲线上的幅角变化为零。因为前面已经得到包含所有可能不稳定特征根的区域,而对给定时滞,这个区域内是否含有特征根是可以根据幅角情况得到的。通过检验特征方程在这个区域边界上的状态,可以确定系统是否含有不稳定根,进而判断系统稳定性。

CTCR 方法

特征根聚类方法 (cluster treatment of characteristic roots, CTCR), 是近年来由美国学者 Nejat Olgac 和 Rifat Sipahi 提出的。简单地说, 该方法的思路是基于两类形式的聚类。

其中一种聚类是指求出系统所有特征虚根, 并反映在以时滞参数为坐标的图形(二维图形或三维图形)中。

另一种聚类是指根据时滞系统虚根穿越方向与时滞值的不相关性及特征根关于时滞的连续性, 求得图形中各个闭区域中的不稳定根个数。对于不稳定根个数为零的区域系统渐近稳定。

这种方法是结合已有的稳定性质和已有计算机软件(如 Matlab, Maple)的一种新型分析方法。方法可以直观的反映系统的稳定区域。尤其这种方法在处理二时滞, 三时滞系统时, 可以得到以往方法无法相比的效果。

关于这种方法可参考 Olgac & Sipahi (2002), Olgac & Sipahi (2005), Olgac, & Sipahi (2006), Sipahi & Olgac (2005), Sipahi & Olgac (2006a), Sipahi & Olgac (2006b), Ergenc, Olgac & Fazelinia (2007) 和 Fazelinia, Sipahi & Olgac (2007)。

直接方法

所谓直接方法(Direct method), 就是指在分析时滞系统时不采用任何变换方法或其它处理技术, 而仅仅根据系统特征方程的一些性质(如共轭对称性质)进行分析的方法。虽然随着时滞研究的发展, 目前各种方法的界限已不是很清晰, 但目前很多针对简单形式特征方程的分析方法实际上都可认为是直接方法。

首先考虑一个前面提到的简单准多项式

$$a(s) + b(s)e^{-\tau s} = 0$$

其中 $a(s)$, $b(s)$ 为常数多项式。

这类系统可对应一个标量形式的状态方程

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bx(t - \tau)$$

或一些特殊形式的矩阵参数状态方程如

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0.1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x(t - \tau)$$

对于上述的实系数准多项式, 如果存在虚根 $s = \omega i$ 满足

$$a(\omega i) + b(\omega i)e^{-\tau \omega i} = 0$$

则由系统的共轭对称性, $s = -\omega i$ 也为系统虚根, 也就是

$$a(-\omega i) + b(-\omega i)e^{\tau \omega i} = 0$$

根据这样的共轭对称性, 一些文献对简单型时滞系统求得了一些很好的稳定性性质。如 Beretta & Kuang (2002), Boese (1998), Boese (1999), Cooke & Grossman (1982), Cooke & van den Driessche (1986) 和 Malakhovskii & Mirkin (2006)。

而直接方法对于特征方程为

$$a_n(s)e^{-n\tau s} + a_{n-1}(s)e^{-(n-1)\tau s} + \cdots + a_0(s) = 0 \quad (a_k(s) \ (k = 0, \dots, n) \text{ 为实系数多项式})$$

的一般形式时滞系统, 研究非常少。其中 Walton & Marshall (1987) 对这种相称型时滞系统采用直接方法进行了分析。并取得了一些很重要的稳定性结论。

关于控制器设计的说明

控制器设计是时滞系统稳定性分析中一类重要的问题。可是就目前的理论发展情况看, 严格的说, 综合问题还不能称得上一类单独的问题。但由于它常常出现在各类文献及实际应用中, 我们这里做一个简单的介绍。比如对一个含控制信号的时滞系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau) + Cu(t)$$

我们需要设计系统的控制量 $u(t)$ 从而使闭环系统稳定。

而这里的控制信号 $u(t)$ 又可能具有多种不同的形式, 比如

$$\text{状态反馈型: } u(t) = Kx(t)$$

状态反馈型的控制器是目前最为常见的控制器, 可参考 Lee, Moon, Kwon & Park (2005), Jiang & Han (2005), Chen & Zheng (2007)。

$$\text{含时滞的状态反馈型: } u(t) = Kx(t - \tau)$$

关于以上控制器类型可参考 Zhang, Wu, She & He (2005), Yue & Han (2005)。

$$\text{积分型: } u(t) = K \int_{t-\tau}^t x(\theta) d\theta$$

关于以上控制器形式可参考 Yue (2004)。

接下来, 介绍一下时滞系统常用的两类控制器设计方法

1) 基于时域框架 (Lyapunov-Krasovskii 泛函结合线性矩阵不等式) 控制器的设计通常是稳定性结论的扩展。例如对于一个自治系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau)$$

可得到一组线性矩阵不等式形式的结论。当考虑控制器时, 系统为一个具有控制参数的闭环系统, 比如

$$\dot{x}(t) = (A + CK)x(t) + Bx(t - \tau)$$

这时我们将 $(A + CK)$ 替换刚才线性矩阵不等式形式结论中的 A 可得到这个闭环系统的稳定结论。但是这时的结论不再是一个线性矩阵不等式, 而是非线性的。

以目前的理论基础和计算工具来看, 非线性形式的条件是不能直接应用的。因此要对这个非线性部分做相应的处理, 从而我们可以按线性的方法处理。到这里大家可以看出, 在时域框架内, 时滞系统的综合问题实际上比分析问题就复杂在这个非线性的处理部分。并且分析是控制的基础。如果我们得到的稳定性结论保守性更低, 则基于这个结论的控制器设计也必将保守性更低。

在本论文中, 对时滞系统控制器的设计涉及不多。这里列举一些目前常采用的控制器设计方法, 感兴趣的读者可参考相关的文献。

不等式法 (Yu, Wang & Chu 2005)。

优化方法 (Gao & Wang, 2003)。

Cone complementary linearization (CCL) 方法 (El ghaoui, Oustry & AitRami 1997)。

Sequential linear programming matrix method (SLPMM) (Gao, Lam & Wang, 2007)。

调节参数方法 (Zhang, Wu, She & He 2005)。

2) 对于时不变参数的时滞系统控制器设计, Wim Michiels 提出了一系列基于特征根的时滞系统控制器设计方法。关于这种方法可参考 Michiels & Roose (2003), Michiels, Van Assche & Niculescu (2005), Michiels & Vyhlídal (2005) 及一本即将面世的专著 <<Stability and stabilization of time-delay systems: An eigenvalue-based approach >>。

1.4 论文的内容和结构

作者的论文主体部分由四章组成。介绍了作者在简单 Lyapunov 泛函方法, 离散化 Lyapunov 泛函方法框架内的工作和提出的两种新的基于特征根的分析方法。

第二章介绍了作者基于简单 Lyapunov-Krasovskii 泛函+线性矩阵不等式这个框架做的两个改进和一个应用类的理论研究。

2.2 节提出一种积分等式方法。该方法为一种系统有效的时滞系统稳定性分析方法。该方法可得到比积分不等式方法保守性更低的结论。

2.3 节提出一种改进的含分布时滞的中立时滞系统稳定性分析方法。基于提出的一种改进 Lyapunov-Krasovskii 泛函。该方法可得出比以往方法保守性更低的稳定判据。

2.4 节研究了一类网络控制系统的控制器设计问题。

第三章介绍了作者在完全 Lyapunov-Krasovskii 泛函+线性矩阵不等式这个框架内的工作。

3.2 节提出一种改进的完全型 Lyapunov-Krasovskii 泛函。这种新完全型 Lyapunov-Krasovskii 泛函的优势在于, 可以处理已有离散化 Lyapunov 泛函方法不能处理的一类中立时滞系统的鲁棒稳定性问题。

3.3 节提出一种改进的含混合时滞的中立型时滞系统稳定性分析方法。该方

法可以较已有方法明显的降低结论保守性。且得到的结果非常接近于精确的稳定界。

3.4 节提出一种新的时滞系统指数估计方法。该方法得到的估计结果要明显优于基于简单 Lyapunov 泛函的估计方法。且由于采用了论文中提出的新型离散化 Lyapunov 泛函方法, 该节的方法可以处理更广的鲁棒稳定性问题。

3.5 节研究了含时变时滞的时滞系统稳定性问题。该节提出了一种纯 Lyapunov-Krasovskii 泛函方法。这种方法比采用离散化 Lyapunov 泛函方法结合输入-输出方法的分析方法要简单得多。并且得到的结论具有更低的保守性。此外, 两类其它的稳定性问题被研究。结合本节的结论, 我们可求得满足系统稳定的时滞上界和下界及满足系统稳定的最大时滞区间。

论文的第四章介绍了作者提出的一种新的时滞系统稳定性分析方法: 混合代数、频域分析方法。该方法结合了代数方法和频域方法的优点又弥补了两种方法的不足, 在分析非相称时滞系统稳定性时可取得比已有方法更好的结果。

论文的第五章介绍了作者关于时滞系统完全稳定性的研究。通过分析发现, 对于一般形式的时滞系统, 虚根的穿越方向可直接由系统的结构信息确定。并且由这个性质我们可以进一步得到, 如果一个线性时不变时滞系统有至少一个虚根时, 该系统随时滞的增大将最终不稳定。为获得所需要的结构信息, 提出了一种频域扫描方法。该扫描方法可以得到系统的特征虚根, 并可以指出哪些特征虚根属于同一个子准多项式。这也就给出了可以判断系统虚根穿越方向的结构信息。并且根据所检测到的虚根, 我们可以进一步求得所对应的临界时滞值。本章中得出的一些关于虚根穿越方向的性质和频域扫描方法构成了一个新的分析含相称时滞时滞系统完全稳定性的框架。要分析一个时滞系统的完全稳定性, 我们仅需要执行频域扫描方法即可。通过数值仿真可以看出, 本章的方法是方便有效的。并且要比已有方法简单许多。尤其当系统比较复杂时, 本章的方法可以大幅降低完全稳定性分析所需要的工作量。

对某一部分内容感兴趣的读者也可以直接跳到相应的章节。这四部分内容是相对独立且自我完备的。

第二章 基于简单 Lyapunov 泛函方法的时滞系统稳定性分析

2.1 引言

由前面的介绍我们知道, 目前 Lyapunov 泛函结合线性矩阵不等式的方法是一种常用的时域分析时滞系统稳定性方法。根据所采用的 Lyapunov 泛函形式, 又可分为简单 Lyapunov 泛函方法和离散化 Lyapunov 泛函方法。在这一章中主要介绍一些作者基于简单 Lyapunov 泛函方法分析时滞系统稳定性的工作。

第 2.2 节中, 提出一种积分等式方法研究时滞系统稳定性问题。提出的积分等式方法是已有积分不等式方法的改进。结合自由权矩阵构建积分等式, 并且自由权矩阵的选取由 Lyapunov-Krasovskii 泛函的导数形式确定。从而在稳定条件的推导过程中, 不引入任何模型转换及限界方法。基于该方法, 可得到具有更低保守性的稳定条件。

第 2.3 节中, 分析了含分布时滞的中立系统稳定性。提出了一种新型 Lyapunov-Krasovskii 泛函。所得到的稳定判据为离散时滞、分布时滞和中立时滞相关的。基于此判据的稳定性结果要比已有文献的保守性低。并且, 该方法可处理一类更广的时滞系统鲁棒性分析问题。

第 2.4 节中, 研究了较已有文献含更广泛的被控对象的网络控制系统镇定问题。文中假定被控对象含有时变状态和输入时滞。对该问题, 采用 Lyapunov-Krasovskii 泛函方法而不是采用 Razumikhin 方法进行研究。提出的方法可转化为线性矩阵不等式问题从而控制器和广义最大允许时延可容易的求得。

2.2 时滞系统稳定性分析: 一种积分等式方法

时滞系统的稳定性分析是当前一个热点研究问题。如何进一步降低结论的保守性, 是当前研究的一个主要动力。近年来许多基于简单 Lyapunov 泛函框架的新方法被提出用以降低已有结论的保守性。

Park (1999) 提出一种改进的不等式方法。此后, Moon et al. (2001) 扩展了 Park (1999) 的结果提出 Moon 不等式。Moon 不等式也被广泛的应用于时滞系统稳定性分析中, 如: Fridman & Shaked (2002a, b), Guan & Chen (2004) 和 Yu, Wang & Chu (2005)。Fridman (2001) 和 Fridman & Shaked (2002a, b) 提出一种描述符系统方法从而不再需要系统的模型转换。最近的一些研究中 (Yue & Han, 2005; Zhang et al., 2005; Lin, Wang & Lee, 2006), 自由权矩阵被引入到时滞系统分析中。自由权矩阵, 在有的文献中也称松弛矩阵, 可用来表示系统变量间的关系, 如系统动态关系和 Leibniz-Newton 公式。应用自由权矩阵, 一些文献 (Wu et al., 2004; He et al., 2004a, b) 的推导中可既不引入模型转换也不采

用Moon不等式。还有一些研究从构建新型的Lyapunov-Krasovskii 泛函出发 (Wang & Lee, 2006)。这样的新型的Lyapunov-Krasovskii泛函通常要比之前的泛函含有更多的变量,因而导出的结论保守性要更低。

最近, Zhang et al. (2005)提出了一种新的分析方法,积分不等式方法。这种方法结合了Moon不等式和自由权矩阵技术。由Zhang et al. (2005)中的数值仿真可以看出,该方法在分析时滞系统稳定性时,要比之前的一些方法保守性更低。

在这节中,我们从下面两个方面改进了Zhang et al. (2005)的积分不等式方法:1. 积分不等式方法是一种局部的方法。当应用积分不等式分析时滞系统时,我们发现,一些系统变量间的关系被忽略。考虑到这一点,我们构建了一种结合自由权矩阵积分等式。进一步,我们提出自由权的选取规则,从而确保没有任何变量间的关系被忽略。这种基于积分等式的方法是一种全局的方法。2. 积分不等式中引入了Moon不等式,从而不可避免的带来结论的保守性。而我们的方法是积分等式,不引入任何保守性。因此可以预见本节提出的方法会进一步改进Zhang et al. (2005)中的积分不等式方法。

应用积分等式方法,我们结合两类 Lyapunov-Krasovskii泛函(比较传统的和 Lin, Wang & Lee, 2006 中提出的一种新型Lyapunov-Krasovskii泛函)研究系统稳定性。通过分析可见,本节提出的积分等式方法是一种系统、有效的分析方法。

本节的符号说明: A^T 和 A^{-1} 分别代表矩阵 A 的转置和逆矩阵。 $A > 0$ ($A < 0$) 指 A 正定 (负定)。 $*$ 表示由对称性可直接推定的矩阵块。 I 为单位阵。 $\text{diag}\{\dots\}$ 代表对角矩阵。如不特殊说明,矩阵都认为是具有合适维数的。

2.2.1 积分等式

首先,我们给出Zhang et al. (2005) 中提出的积分不等式。

积分不等式: 对任意矩阵 M_1, M_2 , $X = X^T > 0$ 和一个标量 $h > 0$, 下面的不等式成立:

$$-\int_{t-h}^t \dot{x}^T(s) X \dot{x}(s) ds \leq \xi^T(t) \begin{bmatrix} M_1^T + M_1 & -M_1^T + M_2 \\ * & -M_2^T - M_2 \end{bmatrix} \xi(t) + h \xi^T(t) \begin{bmatrix} M_1^T \\ M_2^T \end{bmatrix} X^{-1} \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix} \xi(t)$$

$$\text{其中 } \xi(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-h) \end{bmatrix}。$$

这个的不等式是基于 Moon 不等式和下面的等式得到的:

$$0 \equiv 2[x^T(t)N_1^T + x^T(t-h)N_2^T] \times [x(t) - x(t-h) - \int_{t-h}^t \dot{x}(s)ds] \quad (2.2.1)$$

这里的 N_1 和 N_2 是自由权矩阵。

接下来给出我们提出的积分等式,并对两者进行比较。

引理 2.2.1: 对任意矩阵 R, N, X 和向量函数 $f(s)$ 和 η , 下面的等式成立:

$$-\int_{t-h}^t f^T(s) R f(s) ds = 2\eta^T N \int_{t-h}^t f(s) ds + h\eta^T X \eta - \int_{t-h}^t \begin{pmatrix} \eta^T & f^T(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & N \\ N^T & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ f(s) \end{pmatrix} ds$$

证明： 以上的积分等式可由两个关系 $\eta^T N \int_{t-h}^t f(s) ds = \int_{t-h}^t f^T(s) N^T \eta ds$ 和 $\int_{t-h}^t \eta^T X \eta ds = h \eta^T X \eta$ 推导得到。□

注 2.2.1： 积分不等式应用了 Moon 不等式。而积分等式中未采用任何形式的不等式, 因此基于积分等式的分析不引入保守性。

对给定的 $f(s)$ 和 R , 自由项 N, X 和 η 可以任意选定。当我们应用引理 2.2.1 进行稳定性分析时, 应该遵循以下的选取规则, 从而得到最好的结果。

规则 1： 在时滞系统稳定性的推导中, 常常会得到这样的关系: $\dot{V} \leq e^T \Omega e$, 其中 V 是所构建的 Lyapunov-Krasovskii 泛函。我们选取 $\eta = e$ 。

规则 2： N 选取为一个具有合适维数的自由权矩阵。并且, 取 N 中元素的个数与 e 中元素的个数相等。也就是说, e 中每一个元素都被分配自由权矩阵。

等式 (2.2.1) 是正确的。然而, 应用该关系来分析系统稳定性, 会忽略一些系统变量间的关系。比如, 考虑下面的时滞系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^n A_i x(t-h_i) \quad (2.2.2)$$

通常, 对以上系统, 可见 Lyapunov-Krasovskii 泛函导数满足: $\dot{V} \leq e^T \Omega e$, $e^T = (x^T(t) \ x^T(t-h_1) \ \cdots \ x^T(t-h_n) \ \dot{x}^T(t))$ 。根据提到的规则, 我们取 $\eta = e$ 且 $N^T = (N_1^T \ \cdots \ N_{n+2}^T)$, 从而确保无系统关系被忽略。可是, 如果采用积分不等式, n 项和对应的自由权矩阵会被忽略 (见 Zhang et al., 2005 中(19))。可见, 积分等式要优于积分不等式方法, 尤其当系统含有多时滞的情况。后面将给出数值仿真对两种方法进行比较。

积分等式, 连同规则 1 和 2 构成了一个研究时滞系统稳定性的系统方法。该方法的有效性和优势可见于后面的分析。

注 2.2.2： 规则 1 和 2 也可用于其它应用自由权矩阵的情况。如果系统变量间的关系由自由权矩阵表示, 则该表达应根据 Lyapunov-Krasovskii 泛函的导数情况 ($\dot{V} \leq e^T \Omega e$) 确定。并且 e 中每个元素都分配相应的自由权矩阵。

现在我们给出一个例子说明已有的一些结果可以由以上的分析直接改进。

在文献 Yue & Han(2005) 和 Yue, Han & Lam(2005) 中可见 $\dot{V} \leq e^T \Omega e$, $e^T = [x^T(t) \ x^T(i_k h) \ x^T(t-\tau_0) \ \dot{x}^T(t) \ \int_{t-\tau_0}^t x(s) ds]$ 。可是, $\int_{t-\tau_0}^t x(s) ds$ 这项却未分配自由权矩阵。下面说明根据规则 2, 相应的结果可直接改进。

例 2.2.1：

考虑文献 Yue, Han & Lam(2005) 中的一个例子

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix} u(t), \quad u(t) = [-3.75 \quad -11.5] x(t) \quad (2.2.3)$$

由 Yue, Han & Lam(2005) 中方法所得到的最大稳定时滞上界是 0.873。根据由引理 2.2.2 改进的稳定判据 (见本节附录), 最大稳定时滞上界是 0.967。可见改进的判据保守性更底。

注 2.2.3： 这里应该明确一点, 增加自由权矩阵不等于一定能降低结论的保守

性。这要具体情况,具体分析。一些反例可见于 Gu (1999)。不过,通常来说更多的自由权矩阵会使得线性矩阵不等式的求解更灵活,从而有可能降低保守性。并且,即使不降低保守性,也绝不会增加保守性。

2.2.2 积分等式的应用

在这一小节中,我们将应用积分等式分析两种 Lyapunov-Krasovskii 泛函的情况。

应用 2.2.1

考虑如下 Zhang et al. (2005) 中的系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-h_1) + A_2x(t-h_2) \quad (2.2.4)$$

其中 A, A_1 和 A_2 是已知常数矩阵。 h_1 和 h_2 是时变时滞,满足:

$$0 \leq h_1 \leq \bar{h}_1, 0 \leq h_2 \leq \bar{h}_2, \dot{h}_1 \leq \mu < 1$$

由积分不等式推导得到的稳定性条件为:

对给定标量 $\mu > 0$, $\bar{h}_1 > 0$ 和 $\bar{h}_2 > 0$, 系统 (2.2.4) 是渐近稳定的, 如果存在矩阵 $P > 0$, $Q = Q^T > 0$, $R_1 = R_1^T > 0$, $R_2 = R_2^T > 0$, $M_{11}, M_{12}, M_{21}, M_{22}$ 满足下面的线性矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix} H & \bar{h}_1 \Gamma_1^T R_1 & \bar{h}_2 \Gamma_1^T R_2 & \bar{h}_1 \Gamma_2^T & \bar{h}_2 \Gamma_3^T \\ * & -\bar{h}_1 R_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\bar{h}_2 R_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\bar{h}_1 R_1 & 0 \\ * & * & * & * & -\bar{h}_2 R_2 \end{bmatrix} < 0 \quad (2.2.5)$$

$$\text{其中 } H = \begin{bmatrix} H_{11} & PA_1 - M_{11}^T + M_{21} & PA_2 - M_{12}^T + M_{22} \\ * & -(1-\mu)Q - M_{21} - M_{21}^T & 0 \\ * & * & -M_{22} - M_{22}^T \end{bmatrix}$$

$$H_{11} = PA + A^T P^T + Q + M_{11} + M_{11}^T + M_{12} + M_{12}^T$$

$$\Gamma_1 = [A \ A_1 \ A_2], \Gamma_2 = [M_{11} \ M_{21} \ 0], \Gamma_3 = [M_{12} \ 0 \ M_{22}]$$

证明: 由 Zhang et al. (2005) 中式(22), 得到系统 (2.2.4) 渐近稳定的充分条件是

$$\Xi = \begin{bmatrix} H & \bar{h}_1 \Gamma_1^T & \bar{h}_2 \Gamma_1^T & \bar{h}_1 \Gamma_2^T & \bar{h}_2 \Gamma_3^T \\ * & -\bar{h}_1 R_1^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\bar{h}_2 R_2^{-1} & 0 & 0 \\ * & * & * & -\bar{h}_1 R_1 & 0 \\ * & * & * & * & -\bar{h}_2 R_2 \end{bmatrix} < 0 \quad (2.2.6)$$

(2.2.6) 等价于 $\text{diag}(I, R_1, R_2, I, I) \times \Xi \times \text{diag}(I, R_1, R_2, I, I) < 0$ 。□

下面的稳定性判据是根据积分等式得到的。

定理 2.2.1: 对给定标量 $\mu > 0$, $\bar{h}_1 > 0$ 和 $\bar{h}_2 > 0$, 系统 (2.2.4) 渐近稳定, 如果存在矩阵 $P > 0$, $Q = Q^T > 0$, $R_1 = R_1^T > 0$, $R_2 = R_2^T > 0$, N_{1i}, N_{2i}, M_i ($i = 1, 2, 3, 4$) 满足下面的线性矩阵不等式:

$$\begin{pmatrix} \Omega & \bar{h}_1 N_1 & \bar{h}_2 N_2 \\ * & -\bar{h}_1 R_1 & 0 \\ * & * & -\bar{h}_2 R_2 \end{pmatrix} < 0 \quad (2.2.7)$$

$$\text{其中 } \Omega = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & Q_{14} \\ * & Q_{22} & Q_{23} & Q_{24} \\ * & * & Q_{33} & Q_{34} \\ * & * & * & Q_{44} \end{pmatrix}$$

$$\Omega_{11} = Q + N_{11} + N_{11}^T + N_{21} + N_{21}^T - M_1 A - A^T M_1^T$$

$$\Omega_{12} = -N_{11} + N_{12}^T + N_{22}^T - M_1 A_1 - A_1^T M_2^T$$

$$\Omega_{13} = N_{13}^T - N_{21} + N_{23}^T - M_1 A_2 - A_2^T M_3^T$$

$$\Omega_{14} = P + N_{14}^T + N_{24}^T + M_1 - A^T M_4^T$$

$$\Omega_{22} = -(1-\mu)Q - N_{12} - N_{12}^T - M_2 A_1 - A_1^T M_2^T$$

$$\Omega_{23} = -N_{13}^T - N_{22} - M_2 A_2 - A_1^T M_3^T$$

$$\Omega_{24} = -N_{14}^T + M_2 - A_1^T M_4^T$$

$$\Omega_{33} = -N_{23} - N_{23}^T - M_3 A_2 - A_2^T M_3^T$$

$$\Omega_{34} = -N_{24}^T + M_3 - A_2^T M_4^T$$

$$\Omega_{44} = \sum_{i=1}^2 \bar{h}_i R_i + M_4 + M_4^T$$

$$N_1^T = \begin{pmatrix} N_{11}^T & N_{12}^T & N_{13}^T & N_{14}^T \end{pmatrix}, \quad N_2^T = \begin{pmatrix} N_{21}^T & N_{22}^T & N_{23}^T & N_{24}^T \end{pmatrix}$$

证明: 选择如下的 Lyapunov-Krasovskii 泛函:

$$V = x^T(t)Px(t) + \sum_{i=1}^2 \int_{-\bar{h}_i}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s)R_i\dot{x}(s)ds + \int_{t-h_1}^t x^T(s)Qx(s)ds \quad (2.2.8)$$

对 V 求导得

$$\begin{aligned} \dot{V} = & 2x^T(t)P\dot{x}(t) + \sum_{i=1}^2 \bar{h}_i \dot{x}^T(t)R_i\dot{x}(t) - \sum_{i=1}^2 \int_{t-\bar{h}_i}^t \dot{x}^T(s)R_i\dot{x}(s)ds + x^T(t)Qx(t) \\ & - (1-\dot{h}_1)x^T(t-h_1)Qx(t-h_1) + \alpha + \beta \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

$$\text{其中 } \alpha = \sum_{i=1}^2 2\eta^T N_i(x(t) - x(t-h_i) - \int_{t-h_i}^t \dot{x}(s)ds) \equiv 0$$

$$\beta = 2\eta^T M(-Ax(t) - A_1x(t-h_1) - A_2x(t-h_2) + \dot{x}(t)) \equiv 0$$

下面的关系成立：

$$-\sum_{i=1}^2 \int_{t-\bar{h}_i}^t \dot{x}^T(s)R_i\dot{x}(s)ds \leq -\sum_{i=1}^2 \int_{t-h_i}^t \dot{x}^T(s)R_i\dot{x}(s)ds \quad (2.2.10)$$

再由积分等式我们得到

$$\begin{aligned} -\sum_{i=1}^2 \int_{t-h_i}^t \dot{x}^T(s)R_i\dot{x}(s)ds = \\ \sum_{i=1}^2 (2\eta^T N_i \int_{t-h_i}^t \dot{x}(s)ds + h_i \eta^T X_i \eta - \int_{t-h_i}^t (\eta^T \quad \dot{x}^T(s)) \begin{pmatrix} X_i & N_i \\ N_i^T & R_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \dot{x}(s) \end{pmatrix} ds) \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

根据前面介绍的规则，我们定义

$$\eta^T = (x^T(t) \quad x^T(t-h_1) \quad x^T(t-h_2) \quad \dot{x}^T(t))$$

$$N_i^T = (N_{i1}^T \quad N_{i2}^T \quad N_{i3}^T \quad N_{i4}^T), \quad M^T = (M_1^T \quad M_2^T \quad M_3^T \quad M_4^T)$$

联立 (2.2.9)-(2.2.11) 得

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & 2x^T(t)P\dot{x}(t) + \sum_{i=1}^2 \bar{h}_i \dot{x}^T(t)R_i\dot{x}(t) + x^T(t)Qx(t) \\ & - (1-\mu)x^T(t-h_1)Qx(t-h_1) + \sum_{i=1}^2 2\eta^T N_i(x(t) - x(t-h_i)) \\ & + 2\eta^T M(Ax(t) - A_1x(t-h_1) - A_2x(t-h_2) + \dot{x}(t)) \\ & + \sum_{i=1}^2 (h_i \eta^T X_i \eta - \int_{t-h_i}^t (\eta^T \quad \dot{x}^T(s)) \begin{pmatrix} X_i & N_i \\ N_i^T & R_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \dot{x}(s) \end{pmatrix} ds) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{V} \leq & 2x^T(t)P\dot{x}(t) + \sum_{i=1}^2 \bar{h}_i \dot{x}^T(t)R_i\dot{x}(t) + x^T(t)Qx(t) \\
& - (1-\mu)x^T(t-h_1)Qx(t-h_1) + \sum_{i=1}^2 2\eta^T N_i(x(t)-x(t-h_i)) \\
& + 2\eta^T M(Ax(t)-A_1x(t-h_1)-A_2x(t-h_2)+\dot{x}(t)) \\
& + \sum_{i=1}^2 (\bar{h}_i \eta^T X_i \eta - \int_{t-h_i}^t (\eta^T \quad \dot{x}^T(s)) \begin{pmatrix} X_i & N_i \\ N_i^T & R_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \dot{x}(s) \end{pmatrix} ds)
\end{aligned}$$

这样

$$\dot{V} \leq \eta^T (\Omega + \sum_{i=1}^2 \bar{h}_i X_i) \eta - \sum_{i=1}^2 \int_{t-h_i}^t (\eta^T \quad \dot{x}^T(s)) \begin{pmatrix} X_i & N_i \\ N_i^T & R_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \dot{x}(s) \end{pmatrix} ds \quad (2.2.12)$$

接着取 $X_i = N_i R_i^{-1} N_i^T$ 以确保 $\begin{pmatrix} X_i & N_i \\ N_i^T & R_i \end{pmatrix} \geq 0$ 。由 Schur 补性质 (Boyd et al.,

1994), 得 $\dot{V} \leq 0$ 如果 (2.2.7) 成立。□

现在给出一个例子比较两个稳定性判据。

例 2.2.2: 考虑系统 (2.2.4)。

$$\text{令 } A = \begin{pmatrix} 0.0129 & -0.0031 \\ 0.0129 & 0.4969 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} -2 & -0.5 \\ -0.2 & -1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0.0129 & -0.0031 \end{pmatrix}$$

$\bar{h}_2 = 0.1, \mu = 0.5$ 。我们的任务是计算一个可保证系统 (2.2.4) 渐近稳定的最大 \bar{h}_1 。根据 Zhang et al. (2005) 的判据, 我们得到 $\bar{h}_1 = 0.744$ 。再由积分等式的方法, 我们得到 $\bar{h}_1 = 1.262$ 。可见本节的方法保守性更低。

注 2.2.4: 积分等式方法可以系统地分析多时滞系统的稳定性。并且, 我们可以看出系统包含的时滞项越多, 本节提出的方法优势就越明显。

应用 2.2.2:

在应用 2.2.1 中, 所研究的是比较传统的 Lyapunov-Krasovskii 泛函。最近, 文献 Lin, Wang & Lee (2006) 中提出了一种新的 Lyapunov-Krasovskii 泛函。这个 Lyapunov-Krasovskii 泛函要含有更多的项, 从而所得到的结论要保守性更低。这里我们应用积分等式方法分析采用这种新型 Lyapunov-Krasovskii 泛函的情况。

在 Lin, Wang & Lee (2006) 中分析了如下含单时滞的系统:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-d(t)) \quad (2.2.13)$$

其中 A 和 B 为常数矩阵, 时变时滞 $d(t)$ 满足:

$$\dot{d}(t) \leq \mu < 1, d(t) \leq \tau$$

Lin, Wang & Lee (2006) 中构建了如下的新型 Lyapunov-Krasovskii 泛函:

$$V = x^T(t)Px(t) + \int_{t-d(t)}^t \begin{bmatrix} x(s) \\ \dot{x}(s) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q & U \\ U^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(s) \\ \dot{x}(s) \end{bmatrix} ds + \int_{-\tau}^0 \int_{t+\theta}^t \begin{bmatrix} x(s) \\ \dot{x}(s) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} S & W \\ W^T & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(s) \\ \dot{x}(s) \end{bmatrix} ds d\theta \quad (2.2.14)$$

其中的零项定义如下

$$\alpha = 2[x^T(t)N_1 + x^T(t-d(t))N_2 + \dot{x}^T(t)N_3 + \dot{x}^T(t-d(t))N_4] \\ \times [x(t) - x(t-d(t)) - \int_{t-d(t)}^t \dot{x}(s)ds] \equiv 0$$

$$\beta = 2[x^T(t)T_1 + x^T(t-d(t))T_2 + \dot{x}^T(t)T_3 + \dot{x}^T(t-d(t))T_4 + \int_{t-d(t)}^t x^T(s)dsT_5] \\ \times [\dot{x}(t) - Ax(t) - Bx(t-d(t))] \equiv 0$$

对于系统 (2.2.13), 一般常用的 Lyapunov-Krasovskii 泛函为

$$V = x^T(t)Px(t) + \int_{t-d(t)}^t x^T(s)Qx(s)ds + \int_{-\tau}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s)S\dot{x}(s)ds d\theta \quad (2.2.15)$$

注 2.2.5: (2.2.14) 要比 (2.2.15) 含有更多的变量。根据 Lin, Wang & Lee (2006) 的观点, 更多的矩阵变量会使线性矩阵不等式的求解更灵活, 从而结论的保守性更低。到目前为知, 在简单 Lyapunov 泛函方法的框架内, 对于系统 (2.2.13) 的分析, Lin, Wang & Lee (2006) 所得到的结果是最好的。

我们现在应用 Lyapunov-Krasovskii 泛函 (2.2.14) 分析系统 (2.2.13) 的稳定性。

由前面介绍的规则, 我们定义

$$\eta^T = [x^T(t) \quad x^T(t-d(t)) \quad \dot{x}^T(t) \quad \dot{x}^T(t-d(t))]$$

$$N^T = \begin{pmatrix} N_1^T & N_2^T & N_3^T & N_4^T \end{pmatrix}, T^T = \begin{pmatrix} T_1^T & T_2^T & T_3^T & T_4^T \end{pmatrix}$$

这样, $\alpha + \beta$ 可表示为

$$\alpha + \beta = 2\eta^T (N[x(t) - x(t-d(t))] + T[\dot{x}(t) - Ax(t) - Bx(t-d(t))]) + 2\eta^T \tilde{N} \int_{t-\tau}^t f(s)ds$$

其中

$$f(s) = \begin{bmatrix} x(s) \\ \dot{x}(s) \end{bmatrix}, \tilde{N} = \begin{bmatrix} A^T T_5^T & N_1 \\ B^T T_5^T & N_2 \\ -T_5^T & N_3 \\ 0 & N_4 \end{bmatrix}.$$

为表达方便, 定义 $\tilde{Z} = \begin{bmatrix} S & W \\ W^T & Z \end{bmatrix}$ 。则:

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{-\tau}^0 \int_{t+\theta}^t \begin{bmatrix} x(s) \\ \dot{x}(s) \end{bmatrix}^T \tilde{Z} \begin{bmatrix} x(s) \\ \dot{x}(s) \end{bmatrix} ds d\theta \right) = \tau \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix}^T \tilde{Z} \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} - \int_{t-\tau}^t \begin{bmatrix} x(s) \\ \dot{x}(s) \end{bmatrix}^T \tilde{Z} \begin{bmatrix} x(s) \\ \dot{x}(s) \end{bmatrix} ds \quad (2.2.16)$$

由积分等式, 我们得到

$$\begin{aligned}
& -\int_{t-\tau}^t \begin{bmatrix} x(s) \\ \dot{x}(s) \end{bmatrix}^T \tilde{Z} \begin{bmatrix} x(s) \\ \dot{x}(s) \end{bmatrix} ds = \\
& 2\eta^T \tilde{N} \int_{t-\tau}^t f(s) ds + \tau \eta^T X \eta - \int_{t-h}^t \begin{pmatrix} \eta^T & f^T(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & \tilde{N} \\ \tilde{N}^T & \tilde{Z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ f(s) \end{pmatrix} ds
\end{aligned} \tag{2.2.17}$$

经过一些简单的推导后, 我们可得到同文献 Lin, Wang & Lee (2006) 中相同的稳定性条件。

从上面的分析和应用可见, 本节提出的积分等式方法是一种系统的稳定性分析方法。可以有效的分析时滞系统的稳定性。并且, 该方法要优于积分不等式方法

附录

这里我们提出一个基于文献 Yue, Han & Lam (2005) 中 Lemma 8 的改进判据。考虑一个网络控制系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BKx(i_k h), t \in [i_k h + \tau_k, i_{k+1} h + \tau_{k+1}]$$

$$(i_{k+1} - i_k)h + \tau_{k+1} \leq \eta, \tau_m \leq \tau_k, k = 1, 2, \dots, \tag{A.1}$$

定理 2.2.2: 对给定标量 τ_m 和 η 及矩阵 K , 如果存在矩阵 P_k ($k=1,2,3$), $T_j > 0$, $R_j > 0$ ($j=1,2$) 和任意矩阵 N_i , S_i 和 M_i ($i=1,2,3,4,5$) 满足下面的线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} \psi_{11} & * \\ \psi_{21} & \psi_{22} \end{bmatrix} < 0 \tag{A.2}$$

$$\begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2^T & P_3 \end{bmatrix} > 0 \tag{A.3}$$

其中

$$\begin{aligned}
\psi_{11} &= \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & * & * & * \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & * & * \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33} & * \\ \Gamma_{41} & \Gamma_{42} & \Gamma_{43} & \Gamma_{44} \end{bmatrix} \\
\psi_{21} &= \begin{bmatrix} \tau_0 P_3 + N_5 - M_5 A & -N_5 - M_5 B K + S_5 & -\tau_0 P_3 - S_5 & \tau_0 P_2^T + M_5 \\ \eta N_1^T & \eta N_2^T & \eta N_3^T & \eta N_4^T \\ \delta S_1^T & \delta S_2^T & \delta S_3^T & \delta S_4^T \end{bmatrix} \\
\psi_{22} &= \begin{bmatrix} -\tau_0 T_2 & * & * \\ \eta N_5^T & -\eta R_1 & * \\ \delta S_5^T & 0 & -\delta R_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\Gamma_{11} = P_2 + P_2^T + T_1 + \tau_0 T_2 + N_1 + N_1^T - M_1 A - A^T M_1^T$$

$$\Gamma_{21} = N_2 - N_1^T + S_1^T - M_2 A - K^T B^T M_1^T$$

$$\Gamma_{31} = N_3 - P_2^T - S_1^T - M_3 A$$

$$\Gamma_{41} = M_1^T + N_4 + P_1 - M_4 A$$

$$\Gamma_{22} = -N_2 - N_2^T + S_2 + S_2^T - M_2 B K - K^T B^T M_2^T$$

$$\Gamma_{32} = -N_3 + S_3 - S_2^T - M_3 B K$$

$$\Gamma_{42} = -N_4 + S_4 + M_2^T - M_4 B K$$

$$\Gamma_{33} = -T_1 - S_3 - S_3^T$$

$$\Gamma_{43} = -S_4 + M_3^T$$

$$\Gamma_{44} = M_4 + M_4^T + \eta R_1 + 2\delta R_2$$

$$\tau_0 = \frac{\eta + \tau_m}{2}, \delta = \frac{\eta - \tau_m}{2}$$

则系统 (A. 1) 是渐近稳定的。

定理的证明类似于文献 Yue, Han & Lam (2005) 中 lemma 8 的证明。在 Yue, Han & Lam (2005) 中零项定义选取为

$$\begin{aligned} & 2e^T(t)N[x(t) - x(i_k h) - \int_{i_k h}^t \dot{x}(s)ds] + 2e^T(t)S[x(i_k h) - x(t - \tau_0) - \int_{t-\tau_0}^{i_k h} \dot{x}(s)ds] \\ & + 2e^T(t)M[-Ax(t) - BKx(i_k h) + \dot{x}(t)] \equiv 0 \end{aligned} \quad (\text{A. 4})$$

其中

$$e^T(t) = [x^T(t) \quad x^T(i_k h) \quad x^T(t - \tau_0) \quad \dot{x}^T(t)], \quad N^T = \begin{bmatrix} N_1^T & N_2^T & N_3^T & N_4^T \end{bmatrix},$$

$$S^T = \begin{bmatrix} S_1^T & S_2^T & S_3^T & S_4^T \end{bmatrix}, \quad M^T = \begin{bmatrix} M_1^T & M_2^T & M_3^T & M_4^T \end{bmatrix}$$

根据规则 2, 我们用下面式子替换 (A. 4)

$$\begin{aligned} & 2e'^T(t)N'[x(t) - x(i_k h) - \int_{i_k h}^t \dot{x}(s)ds] + 2e'^T(t)S'[x(i_k h) - x(t - \tau_0) - \int_{t-\tau_0}^{i_k h} \dot{x}(s)ds] \\ & + 2e'^T(t)M'[-Ax(t) - BKx(i_k h) + \dot{x}(t)] \end{aligned} \quad (\text{A. 5})$$

其中

$$e'^T(t) = \begin{bmatrix} e^T(t) & \int_{t-\tau_0}^t x(s)ds \end{bmatrix}, \quad N'^T = \begin{bmatrix} N^T & N_5^T \end{bmatrix}, \quad S'^T = \begin{bmatrix} S^T & S_5^T \end{bmatrix}, \quad M'^T = \begin{bmatrix} M^T & M_5^T \end{bmatrix}$$

这样, 一些新的自由权矩阵 (N_5 , S_5 和 M_5) 被引入, 从而结论保守性可进一步降低。同样地, 文献 Yue & Han (2005) 和 Yue, Han & Lam (2005) 中其它一些结论

也可用本节方法改进。

2.3 含分布时滞的中立系统稳定性分析

中立型时滞系统做为一类常见的时滞系统,其稳定性的研究具有非常重要的理论和实际意义。近年来,中立系统的稳定性问题也得到了大家的广泛关注。而对于含分布时滞的中立型时滞系统的分析尤为重要。这是因为,对于系统中的时滞影响,很多情况下我们不能仅仅认为是状态的时滞或状态导数的时滞。我们常常需要扩展一个系统模型为含有中立时滞的更广泛的系统模型。一些引入分布时滞建模的实际情况可见于文献 Fiagbedzi & Pearson (1987), Hale & Lunel (1993) 和 Richard (2003)。然而,对于检验这类系统稳定性的研究还比较少。Gu, Han, Luo & Niculescu (2001) 和 Gu (2003a) 采用离散化 Lyapunov 泛函对含分布时滞的系统进行了稳定性研究。可是,这种方法相对复杂且不易在此框架下进行控制器设计。

最近 Han (2004) 和 Chen & Zheng (2007) 采用描述符系统方法 (Fridman, 2001, Fridman & Shaked, 2002a, b) 研究了含分布时滞的中立系统稳定性。其中, Han (2004) 采用分解技术 (Goubet-Bartholoméüs, Dambrine & Richard, 1997) 对系统离散时滞项进行了模型转换。不同于 Han (2004), Chen & Zheng (2007) 对离散时滞项和分布时滞项都进行了变换并且采用了 Moon 不等式 (Moon, Park, Kwon & Lee, 2001)。据作者了解, Chen & Zheng (2007) 提出的稳定性判据是目前效果最好的。并且, Han (2004) 和 Chen & Zheng (2007) 的结论都是离散时滞相关, 分布时滞相关, 但中立时滞不相关的。

为进一步改进已有结果。我们自然的会考虑尝试采用自由权矩阵技术。自由权矩阵, 在有些文献中也称为松弛矩阵, 最近常常被应用于时滞系统的分析中 (例如: He et al., 2004a 和 b)。Wu, He & She (2004) 和 He et al. (2004a, b) 采用自由权矩阵分析了中立系统的稳定性, 且相应的方法可扩展到含分布时滞的系统中。然而, Wu, He & She (2004) 和 He et al. (2004a, b) 的方法不能处理中立时滞项含时变不确定参数的情况。

本节的目的是进一步改进含分布时滞中立系统的稳定性结论。为了这个目的, 我们构建了一种改进的 Lyapunov-Krasovskii 泛函并且采用了自由权矩阵。通过仿真结果可以看出, 本节的方法保守性更低。

本节的符号说明: A^T 和 A^{-1} 分别代表矩阵 A 的转置和逆矩阵。 $A > 0$ ($A < 0$) 指 A 正定 (负定)。 $*$ 表示由对称性可直接推定的矩阵块。 I 为单位阵。如不特殊说明, 矩阵都认为是具有合适维数的。

考虑下面一个含离散时滞, 中立时滞和分布时滞的系统:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) - C(t)\dot{x}(t-\tau) &= A(t)x(t) + B(t)x(t-h) + D(t)\int_{t-r}^t x(s)ds \\ x(t) &= \phi(t), \quad t \in [-\max\{\tau, h, r\}, 0] \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

其中 $x(t)$ 为状态量, $\tau > 0$, $h > 0$ 和 $r > 0$ 分别为中立时滞, 离散时滞和分布时

滞, $\phi(t)$ 为初始状态, $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ 和 $D(t)$ 为范数有界的不确定矩阵, 且假定满足:

$$A(t) = A + \Delta A(t)$$

$$B(t) = B + \Delta B(t)$$

$$C(t) = C + \Delta C(t)$$

$$D(t) = D + \Delta D(t)$$

$$[\Delta A(t) \quad \Delta B(t) \quad \Delta C(t) \quad \Delta D(t)] = LF(t)[E_A \quad E_B \quad E_C \quad E_D]$$

其中 $A, B, C, D, L, E_A, E_B, E_C$ 和 E_D 为已知常数矩阵, $F(t)$ 为一个未知时变矩阵满足 $\|F(t)\| \leq 1$ 。本节中假定 $C(t)$ 为 Schur 稳定。

本节的任务就是研究系统 (2.3.1) 的鲁棒稳定性。

首先我们先分析系统 (2.3.1) 的标称系统, 即

$$\dot{x}(t) - C\dot{x}(t-\tau) = Ax(t) + Bx(t-h) + D \int_{t-r}^t x(s)ds \quad (2.3.2)$$

为分析系统 (2.3.2) 的稳定性, 我们需要引用下面的引理。

引理 2.3.1 (Gu, Kharitonov & Chen, 2003): 对任意正定对称矩阵 M 和标量 $\gamma > 0$, 如果存在向量函数 $\omega: [0, \gamma] \rightarrow \mathbb{R}^n$ 使 $\int_0^\gamma \omega^T(s)M\omega(s)ds$ 和 $\int_0^\gamma \omega^T(s)ds$ 定义明确, 则下面不等式成立:

$$\gamma \int_0^\gamma \omega^T(s)M\omega(s)ds \geq \left(\int_0^\gamma \omega^T(s)ds \right) M \left(\int_0^\gamma \omega(s)ds \right)$$

对于系统 (2.3.2), 我们可得到下面的结论。

定理 2.3.1: 对给定标量 τ, h 和 r , 中立系统 (2.3.2) 渐近稳定, 如果存在矩阵 $P_{11} = P_{11}^T$, P_{12} , P_{13} , $P_{22} = P_{22}^T$, P_{23} , $P_{33} = P_{33}^T$, $Q = Q^T > 0$, $R = R^T > 0$, $S = S^T$, S_1 , $T = T^T$, $U = U^T > 0$, $V = V^T > 0$, $W = W^T > 0$, M_i , N_i 和 O_i ($i=1,2,\dots,6$) 满足下面的线性矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix} \Omega & hN & rP' & \tau O \\ * & -hR & 0 & 0 \\ * & * & -rV & 0 \\ * & * & * & -\tau W \end{bmatrix} < 0 \quad (2.3.3)$$

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ * & P_{22} & P_{23} \\ * & * & P_{33} \end{bmatrix} > 0, \begin{bmatrix} S & S_1 \\ * & T \end{bmatrix} > 0 \quad (2.3.4a, b)$$

其中

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \Omega_{13} & \Omega_{14} & \Omega_{15} & \Omega_{16} \\ * & \Omega_{22} & \Omega_{23} & \Omega_{24} & \Omega_{25} & \Omega_{26} \\ * & * & \Omega_{33} & \Omega_{34} & \Omega_{35} & \Omega_{36} \\ * & * & * & \Omega_{44} & \Omega_{45} & \Omega_{46} \\ * & * & * & * & \Omega_{55} & \Omega_{56} \\ * & * & * & * & * & \Omega_{66} \end{bmatrix}$$

$$\Omega_{11} = Q + S + rU + M_1 A + A^T M_1^T + N_1 + N_1^T + O_1 + O_1^T$$

$$\Omega_{12} = A^T M_2^T + N_2^T - O_1 + O_2^T$$

$$\Omega_{13} = M_1 D + A^T M_3^T + N_3^T + O_3^T$$

$$\Omega_{14} = P_{11} + S_1 - M_1 + A^T M_4^T + N_4^T + O_4^T$$

$$\Omega_{15} = P_{12} + M_1 C + A^T M_5^T + N_5^T + O_5^T$$

$$\Omega_{16} = M_1 B + A^T M_6^T - N_1 + N_6^T + O_6^T$$

$$\Omega_{22} = -S - O_2 - O_2^T$$

$$\Omega_{23} = M_2 D - O_3^T$$

$$\Omega_{24} = P_{12}^T - M_2 - O_4^T$$

$$\Omega_{25} = P_{22} - S_1 + M_2 C - O_5^T$$

$$\Omega_{26} = M_2 B - N_2 - O_6^T$$

$$\Omega_{33} = -\frac{1}{r}U + M_3 D + D^T M_3^T$$

$$\Omega_{34} = P_{13}^T - M_3 + D^T M_4^T$$

$$\Omega_{35} = P_{23}^T + M_3 C + D^T M_5^T$$

$$\Omega_{36} = M_3 B + D^T M_6^T - N_3$$

$$\Omega_{44} = \tau W + hR + T + rV - M_4 - M_4^T$$

$$\Omega_{45} = M_4 C - M_5^T$$

$$\Omega_{46} = M_4 B - M_6^T - N_4$$

$$\Omega_{55} = -T + M_5 C + C^T M_5^T$$

$$\Omega_{56} = M_5 B + C^T M_6^T - N_5$$

$$\Omega_{66} = -Q + M_6 B + B^T M_6^T - N_6 - N_6^T$$

$$M^T = \begin{bmatrix} M_1^T & M_2^T & M_3^T & M_4^T & M_5^T & M_6^T \end{bmatrix}$$

$$N^T = \begin{bmatrix} N_1^T & N_2^T & N_3^T & N_4^T & N_5^T & N_6^T \end{bmatrix}$$

$$O^T = \begin{bmatrix} O_1^T & O_2^T & O_3^T & O_4^T & O_5^T & O_6^T \end{bmatrix}$$

$$P'^T = \begin{bmatrix} -P_{13}^T & -P_{23}^T & -P_{33}^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

证明：构建如下 Lyapunov-Krasovskii 泛函

$$V = V_1 + V_h + V_\tau + V_r \quad (2.3.5)$$

其中

$$V_1 = e^T P e, e^T = \begin{bmatrix} x^T(t) & x^T(t-\tau) & \int_{t-\tau}^t x^T(s) ds \end{bmatrix}$$

$$V_h = \int_{t-h}^t x^T(s) Q x(s) ds + \int_{-h}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds d\theta$$

$$V_\tau = \int_{t-\tau}^t \begin{bmatrix} x^T(s) & \dot{x}^T(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S & S_1 \\ * & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(s) \\ \dot{x}(s) \end{bmatrix} ds + \int_{-\tau}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s) W \dot{x}(s) ds d\theta$$

$$V_r = \int_{-r}^0 \int_{t+\theta}^t (x^T(s) U x(s) + \dot{x}^T(s) V \dot{x}(s)) ds d\theta$$

这个 Lyapunov-Krasovskii 泛函类似于 He, Wang, Lin & Wu (2005) 中所构建的泛函。并且在该文献中,相应的泛函称为增广型 Lyapunov-Krasovskii 泛函。对 V 沿系统 (2.3.2) 的轨迹求导得

$$\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_h + \dot{V}_\tau + \dot{V}_r + \alpha + \beta + \gamma \quad (2.3.6)$$

其中

$$\alpha = 2\zeta^T M (Ax(t) + Bx(t-h) + D \int_{t-r}^t x(s) ds - \dot{x}(t) + C\dot{x}(t-\tau)) = 0$$

$$\beta = 2\zeta^T N (x(t) - x(t-h) - \int_{t-h}^t \dot{x}(s) ds) = 0$$

$$\gamma = 2\zeta^T O (x(t) - x(t-\tau) - \int_{t-\tau}^t \dot{x}(s) ds) = 0$$

$$\zeta^T = \begin{bmatrix} x^T(t) & x^T(t-\tau) & \int_{t-\tau}^t x^T(s) ds & \dot{x}^T(t) & \dot{x}^T(t-\tau) & x^T(t-h) \end{bmatrix}$$

$\dot{V}_1, \dot{V}_h, \dot{V}_\tau$ 和 \dot{V}_r 为：

$$\dot{V}_1 = \zeta^T \Theta \zeta + 2e^T \begin{bmatrix} P_{13} \\ P_{23} \\ P_{33} \end{bmatrix} \int_{t-r}^t \dot{x}(s) ds$$

$$\dot{V}_h = x^T(t) Q x(t) - x^T(t-h) Q x(t-h) + h \dot{x}^T(t) R \dot{x}(t) - \int_{t-h}^t \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_\tau = & \begin{bmatrix} x^T(t) & \dot{x}^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S & S_1 \\ * & T + \tau W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x^T(t-\tau) & \dot{x}^T(t-\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S & S_1 \\ * & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t-\tau) \\ \dot{x}(t-\tau) \end{bmatrix} \\ & - \int_{t-\tau}^t \dot{x}^T(s) W \dot{x}(s) ds \end{aligned}$$

$$\dot{V}_r = r(x^T(t) U x(t) + \dot{x}^T(t) V \dot{x}(t)) - \int_{t-r}^t (x^T(s) U x(s) + \dot{x}^T(s) V \dot{x}(s)) ds$$

其中

$$\Theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & P_{11} & P_{12} & 0 \\ * & 0 & 0 & P_{12}^T & P_{22} & 0 \\ * & * & 0 & P_{13}^T & P_{23}^T & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & 0 \end{bmatrix}$$

根据引理 2.3.1, 我们可知

$$-\int_{t-r}^t x^T(s) U x(s) ds \leq -\frac{1}{r} \left(\int_{t-r}^t x(s) ds \right)^T U \left(\int_{t-r}^t x(s) ds \right) \quad (2.3.7)$$

联立 (2.3.6) 和 (2.3.7) 得到

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & \zeta^T \Omega \zeta - 2\zeta^T N \int_{t-h}^t \dot{x}(s) ds - \int_{t-h}^t \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds - 2\zeta^T P' \int_{t-r}^t \dot{x}(s) ds \\ & - \int_{t-r}^t \dot{x}^T(s) V \dot{x}(s) ds - 2\zeta^T O \int_{t-\tau}^t \dot{x}(s) ds - \int_{t-\tau}^t \dot{x}^T(s) W \dot{x}(s) ds \end{aligned}$$

这样, 对任意的 X, Y 和 Z

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & \zeta^T (\Omega + hX + rY + \tau Z) \zeta - \int_{t-h}^t \begin{bmatrix} \zeta^T & \dot{x}^T(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & N \\ * & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta \\ \dot{x}(s) \end{bmatrix} ds \\ & - \int_{t-r}^t \begin{bmatrix} \zeta^T & \dot{x}^T(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y & P' \\ * & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta \\ \dot{x}(s) \end{bmatrix} ds - \int_{t-\tau}^t \begin{bmatrix} \zeta^T & \dot{x}^T(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z & O \\ * & W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta \\ \dot{x}(s) \end{bmatrix} ds \end{aligned}$$

类似于 He et al. (2004b) 中的处理方法, 我们取 $X = NR^{-1}N^T$, $Y = P'V^{-1}P'^T$ 和 $Z = OW^{-1}O^T$ 。则

$$\begin{bmatrix} X & N \\ * & R \end{bmatrix} > 0, \begin{bmatrix} Y & P' \\ * & V \end{bmatrix} > 0, \begin{bmatrix} Z & O \\ * & W \end{bmatrix} > 0$$

且

$$\dot{V} \leq \zeta^T (\Omega + hNR^{-1}N^T + rP'V^{-1}P'^T + \tau OW^{-1}O^T) \zeta \quad (2.3.8)$$

应用 Schur 补性质 (Boyd, El Ghaoui, Feron & Balakrishnan, 1994), 我们可得到条件 (2.3.3)。□

注 2.3.1: 定理 2.3.1 是中立时滞相关的, 而 Chen & Zheng (2007) 和 Han (2004) 的方法是中立时滞无关的。由此可知, 本节的方法要保守性更低, 尤其当中立时滞很小的情况下。并且, Chen & Zheng (2007) 和 Han (2004) 的方法很难扩展为中立时滞相关型, 这是由描述符系统方法的性质决定的。

现在我们继续研究系统 (2.3.1) 的鲁棒稳定性。首先给出一个引理。

引理 2.3.2 (Wang, Xie & de Souza, 1992): 对任意矩阵 D, E, F ($F^T F \leq I$) 和标量 $\varepsilon > 0$, 下面的不等式成立:

$$DFE + E^T F^T D^T \leq \varepsilon DD^T + \varepsilon^{-1} E^T E.$$

定理 2.3.2: 对给定标量 τ, h 和 r , 中立系统 (2.3.1) 一致渐近稳定, 如果存在矩阵 $P_{11} = P_{11}^T, P_{12}, P_{13}, P_{22} = P_{22}^T, P_{23}, P_{33} = P_{33}^T, Q = Q^T > 0, R = R^T > 0, S = S^T, S_1, T = T^T, U = U^T > 0, V = V^T > 0, W = W^T > 0, M_i, N_i, O_i$ ($i=1,2,\dots,6$) 和标量 $\varepsilon > 0$ 满足 (2.3.4) 和下面的线性矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix} \Omega' & hN & rP' & \tau O & ML \\ * & -hR & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -rV & 0 & 0 \\ * & * & * & -\tau W & 0 \\ * & * & * & * & -\varepsilon I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.3.9)$$

其中

$$\Omega' = \Omega + \varepsilon \begin{bmatrix} E_A^T E_A & 0 & E_A^T E_D & 0 & E_A^T E_C & E_A^T E_B \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & E_D^T E_D & 0 & E_D^T E_C & E_D^T E_B \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & E_C^T E_C & E_C^T E_B \\ * & * & * & * & * & E_B^T E_B \end{bmatrix}$$

证明: 当考虑不确定性因素时, 系统 (2.3.1) 的稳定性条件为同时满足 (2.3.4) 和

$$\Psi + MLF(t)\Gamma_E + \Gamma_E^T F^T(t)L^T M^T < 0 \quad (2.3.10)$$

其中 $\Gamma_E = [E_A \ 0 \ E_D \ 0 \ E_C \ E_B]$, Ψ 为式 (2.3.3) 的左半部分。

由引理 2.3.2, (2.3.10) 的充分条件是存在一个标量 $\varepsilon > 0$ 满足

$$\Psi + \varepsilon^{-1} MLL^T M^T + \varepsilon \Gamma_E^T \Gamma_E < 0 \quad (2.3.11)$$

再由 Schur 补性质, 我们可发现 (2.3.11) 同 (2.3.9) 是等价的。□

注 2.3.2. 本节的方法允许系统中立项系数矩阵为不确定型。而其它应用自由权矩阵的方法 (如 He et al. (2004a) 和 Wu, He & She (2004a)) 不能处理系统 (2.3.1) 中 $C(t)$ 为时变不确定的情况。

下面给出一个仿真说明本节方法的优势。考虑系统 (2.3.1), 令

$$A = \begin{bmatrix} -0.9 & 0.2 \\ 0.1 & -0.9 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1.1 & -0.2 \\ -0.1 & -1.1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -0.2 & 0 \\ 0.2 & -0.1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -0.12 & -0.12 \\ -0.12 & 0.12 \end{bmatrix}$$

$$L = I, E_A = E_B = E_C = E_D = 0.1I, \tau = 0.1。$$

当 $h = 0.1$, 满足系统稳定的 r 的上界为 6.2 (由 Han 2004 方法) 和 6.4 (由 Chen, & Zheng 2007 方法)。而由定理 2.3.2, 得 r 的上界为 6.6。当 $r = 0.1$, 满足系统稳定的 h 的上界为 1.1 (由 Han 2004 方法) 和 1.2 (由 Chen & Zheng 2007 方法)。由本节方法得 h 的上界为 1.3。可见, 本节的方法保守性更低。

2.4 网络控制系统控制器设计

对于一个控制回路通过实时网络实现的闭环控制系统, 我们可称之为网络控制系统 (Networked Control System, 简称 NCS)。网络控制系统 (NCS) 因其具有布线少, 诊断与维护容易, 结构灵活等优点 (Zhang, Branicky & Phillips 2001), 已成为当前一个热点研究问题。由于网络中不可避免的存在网络诱导时滞和数据包丢包, 因此对 NCS 的研究较传统的闭环系统更为复杂。文献 Yu, Wang & Chu (2005), Yu, Wang, Chu & Hao (2004), Yu, Wang, Chu & Xie (2004), Yue, Han, & Lam (2005), Yue, Han & Peng (2004), Fridman, Seuret & Richard (2004) 和 Mastellone, Abdallah & Dorato (2005) 从时滞系统的角度研究了网络控制系统的稳定性并求得使系统稳定的最大允许时延 (MADB)。本节的任务就是, 应用时滞系统的分析方法处理网络控制系统的控制器设计问题。

下面我们给出一个简单网络控制系统 (NCS) 的数学模型。

NCS 含有两类由网络引起的时滞: 由传感器到控制器的时滞 τ_{sc} 和由控制器到执行器的时滞 τ_{ca} 。如下图:

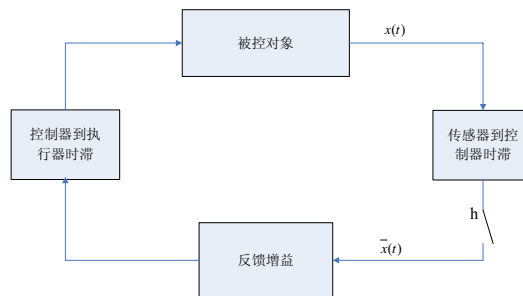


图 2.4.1 网络控制系统

Fig. 2.4.1 Networked Control System

闭环系统由一个含状态和输入时滞的被控对象

$$\dot{x}(t) = Ax + \sum_{i=1}^n A_i x(t - h_i) + Bu + \sum_{i=1}^m B_i u(t - h_{2i}) \quad (2.4.1)$$

和一个具有零阶保持器的控制器

$$u(t) = K\bar{x}(t - \tau_{ca}), t \in [t_k, t_{k+1}), k = 1, 2, \dots \quad (2.4.2)$$

组成。其中 $x(t) \in R^n$ 是状态向量, $u(t) \in R^m$ 是控制向量。 K 是反馈增益矩阵。 $\bar{x}(t)$ 是网络输出, t_k 是采样时刻。 h_{1i}, h_{2i} 分别是时变状态和输入时滞, 满足: 对 $t > 0$, $0 \leq h_{1i}(t) \leq \bar{h}_{1i}$, $0 \leq h_{2i}(t) \leq \bar{h}_{2i}$ 。 $\bar{h}_{1i}, \bar{h}_{2i}$ 分别是状态时滞和输入时滞的上界。 $A, A_i, i = 1, \dots, n$, 和 $B, B_i, i = 1, \dots, m$ 是具有相应维数的系统矩阵和输入矩阵。模型 (2.4.1) 描述了比已有文献中的被控对象 $\dot{x}(t) = Ax + Bu$ 更广泛的系统, 因为考虑了被控对象本身的时滞项。具有网络诱导时滞和数据包丢失的 NCS 可以认为是一个如图 2.4.1 的切换系统。当开关关闭, 数据包传输, 控制器采用新的数据; 当开关断开, 数据包丢失, 控制器采用旧的数据。这里认为采样时间 h 是固定的。在 $d(k)$ 个数据包丢失的情况下, 控制信号可表示为

$$u(t) = K\bar{x}(t - \tau_{ca}) = Kx(t_k - \tau_{ca} - \tau_{sc} - d(k)h) = Kx(t - \tau(t)), t \in [t_k, t_{k+1}) \quad (2.4.3)$$

其中 $\tau(t) = t - t_k + \tau_{ca} + \tau_{sc} + d(k)h$, $0 \leq \tau(t) \leq h + \tau_{ca} + \tau_{sc} + d(k)h$, $t \in [t_k, t_{k+1})$ 。

这样, 整个系统可表示为

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^n A_i x(t - h_{1i}) + \sum_{i=0}^m B_i Kx(t - \tau(t) - h_{2i}) \quad (2.4.4)$$

其中 $A_0 = A, B_0 = B, h_{10} = h_{20} = 0$ 。

我们管使系统稳定的 $\tau(t)$ 的最大值叫做广义最大容许时延, 因为这里考虑了丢包的因素。

到这里我们发现, 网络控制系统中的网络影响(数据丢包和网络传输延时)可以被建模成一类时滞。这样, 从控制和稳定性的角度来讲, 我们可以完全将一个网络控制系统看做一类时滞闭环系统。接下来的工作就是如何设计这个闭环系统的控制器。这里我们仅取了一类比较简单的网络控制系统。即使复杂的网络控制系统, 都是可以按照这样的思路进行建模。对网络控制系统的建模分析可参考 Hu, Bai, Shi & Wu 2007。这篇文献对网络控制系统建模为时滞系统的方法进行了详细的分析。

接下来, 我们进行控制器的设计。首先给出两个有用的引理。

引理 2.4.1 (Moon, Park, Kwon & Lee, 2001): 假定 $a(\cdot) \in R^{na}$, $b(\cdot) \in R^{nb}$, $N(\cdot) \in R^{na \times nb}$ 定义在区间 Ω 。对任意矩阵 $X \in R^{na \times na}$, $Y \in R^{na \times nb}$ 和 $Z \in R^{nb \times nb}$, 下式成立:

$$-2 \int_{\Omega} a^T(\alpha) N b(\alpha) d\alpha \leq \int_{\Omega} \begin{bmatrix} a(\alpha) \\ b(\alpha) \end{bmatrix}^T \times \begin{bmatrix} X & Y - N \\ Y^T - N^T & Z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a(\alpha) \\ b(\alpha) \end{bmatrix} d\alpha$$

其中 $\begin{bmatrix} X & Y \\ Y^T & Z \end{bmatrix} \geq 0$

引理 2.4.2 (Kim, 2001): 令 $\omega(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} \int_{t+\theta}^t f(s) ds d\theta$, 则下式成立:

$$\frac{d}{dt}\omega(t) = (b-a)f(t) - (1+\dot{b})\int_{t+a}^{t+b} f(s)ds + (\dot{b}-\dot{a})\int_{t+a}^t f(s)ds$$

由以上两个引理, 我们可得出如下结论。

定理 2.4.1: 给定标量 $\bar{\tau} > 0$ 和反馈增益矩阵 K , 对于任意 $\tau(t) \leq \bar{\tau}$ 系统 (2.4.4) 是渐近稳定的, 如果存在矩阵 $P_1 > 0$, P_2 , P_3 , Z_{1ij} , Z_{2ij} ($j=1,2,3$) $R_{1i} = R_{1i}^T > 0$ 和 $R_{2i} = R_{2i}^T > 0$ 满足下面的线性矩阵不等式:

$$P^T \begin{pmatrix} 0 & I \\ \tilde{A} & -I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \tilde{A}^T \\ I & -I \end{pmatrix} P + \sum_{i=1}^n \bar{h}_i Z_{1i} + \sum_{i=0}^m (\bar{\tau} + \bar{h}_{2i}) Z_{2i} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sum_{i=1}^n \bar{h}_i R_{1i} + \sum_{i=0}^m (\bar{\tau} + \bar{h}_{2i}) R_{2i} \end{pmatrix} < 0 \quad (2.4.5)$$

$$\begin{pmatrix} R_{1i} & [0 \ A_i^T]P \\ * & Z_{1i} \end{pmatrix} \geq 0, \begin{pmatrix} R_{2i} & [0 \ K^T B_i^T]P \\ * & Z_{2i} \end{pmatrix} \geq 0 \quad (2.4.6a, b)$$

其中

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ P_2 & P_3 \end{pmatrix}, \quad Z_{1i} = Z_{1i}^T = \begin{pmatrix} Z_{1i1} & Z_{1i2} \\ Z_{1i2}^T & Z_{1i3} \end{pmatrix}, \quad Z_{2i} = Z_{2i}^T = \begin{pmatrix} Z_{2i1} & Z_{2i2} \\ Z_{2i2}^T & Z_{2i3} \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \sum_{i=0}^n A_i + \left(\sum_{i=0}^n B_i \right) K$$

证明: 将 (2.4.4) 写成描述符系统 (Fridman, 2001, Fridman & Shaked, 2002a, b) 的形式:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ 0 &= -y + \sum_{i=0}^n A_i x(t-h_{1i}) + \sum_{i=0}^n B_i K x(t-\tau-h_{2i}) \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

取如下的 Lyapunov-Krasovskii 泛函

$$V = V_1 + V_2 + V_3 \quad (2.4.8)$$

其中

$$V_1 = S^T E P S, \quad V_2 = \sum_{i=1}^n \int_{-h_{1i}}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T R_{1i} \dot{x} ds d\theta, \quad V_3 = \sum_{i=0}^m \int_{-\bar{\tau}-h_{2i}}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T R_{2i} \dot{x} ds d\theta \quad (2.4.9)$$

$$S(t) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix}, \quad R_{1i} > 0, \quad R_{2i} > 0$$

对 V_1 求导

$$\dot{V}_1 = S^T \Delta S + \sum_{i=1}^n \phi_i + \sum_{i=0}^n \varphi_i \quad (2.4.10)$$

其中

$$\Delta = P^T \begin{pmatrix} 0 & I \\ \tilde{A} & -I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \tilde{A}^T \\ I & -I \end{pmatrix} P,$$

$$\phi_i = -2S^T P^T \begin{pmatrix} 0 \\ A_i \end{pmatrix} \int_{t-h_i}^t \dot{x}(\theta) d\theta,$$

$$\varphi_i = -2S^T P^T \begin{pmatrix} 0 \\ B_i K \end{pmatrix} \int_{t-\tau-h_{2i}}^t \dot{x}(\theta) d\theta$$

由引理 2.4.1 可得

$$\phi_i \leq \bar{h}_{1i} S^T Z_{1i} S + \int_{t-h_i}^t \dot{x}^T R_{1i} \dot{x} d\theta, \varphi_i \leq (\bar{\tau} + \bar{h}_{2i}) S^T Z_{2i} S + \int_{t-\tau-h_{2i}}^t \dot{x}^T R_{2i} \dot{x} d\theta \quad (2.4.11)$$

其中

$$\begin{pmatrix} R_{1i} & Y_{1i} \\ Y_{1i}^T & Z_{1i} \end{pmatrix} \geq 0, Y_{1i} = [0 \ A_i^T] P, \begin{pmatrix} R_{2i} & Y_{2i} \\ Y_{2i}^T & Z_{2i} \end{pmatrix} \geq 0, Y_{2i} = [0 \ K^T B_i^T] P$$

由引理 2.4.2 得到

$$\dot{V}_2 = \sum_{i=1}^n (\bar{h}_{1i} \dot{x}^T R_{1i} \dot{x} - \int_{t-h_i}^t \dot{x}^T R_{1i} \dot{x} d\theta) \quad (2.4.12)$$

$$\dot{V}_3 = \sum_{i=0}^m (\bar{\tau} + \bar{h}_{2i}) \dot{x}^T R_{2i} \dot{x} - \int_{t-\bar{\tau}-\bar{h}_{2i}}^t \dot{x}^T R_{2i} \dot{x} d\theta \quad (2.4.13)$$

由 (2.4.10) - (2.4.13) 可知

$$d \frac{V}{dt} \leq S^T \Omega S$$

其中

$$\Omega = \Delta + \sum_{i=1}^n \bar{h}_{1i} Z_{1i} + \sum_{i=0}^m (\bar{\tau} + \bar{h}_{2i}) Z_{2i} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sum_{i=1}^n \bar{h}_{1i} R_{1i} + \sum_{i=0}^m (\bar{\tau} + \bar{h}_{2i}) R_{2i} \end{pmatrix}$$

可见如果 $\Omega < 0$ 且 (2.4.6) 成立, 则 $\dot{V} < 0$, 系统 (2.4.4) 渐近稳定。定理得证。□

当 K 不是给定的, 定理 2.4.1 的不等式是非线性的。下面的定理将给出线性矩阵不等式形式的稳定判据, 从而可用来设计静态反馈控制器。

定理 2.4.2: 给定标量 $\bar{\tau} > 0$, 如果存在矩阵 $\bar{R}_{1i} = \bar{R}_{1i}^T > 0$, $\bar{R}_{2i} = \bar{R}_{2i}^T > 0$, $Q_1 > 0$, Q_2 , Q_3 , $\tilde{Z}_{1i} = \tilde{Z}_{1i}^T$, $\tilde{Z}_{2i} = \tilde{Z}_{2i}^T$ 和 Y 满足下面的线性矩阵不等式:

$$\begin{pmatrix} \Lambda & \bar{h}_{11}Q' & \cdots & \bar{h}_{1n}Q' & \bar{h}_{21}Q' & \cdots & \bar{h}_{2m}Q' \\ * & -\bar{h}_{11}\bar{R}_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\bar{h}_{1n}\bar{R}_{1n} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\bar{h}_{21}\bar{R}_{21} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & \ddots & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\bar{h}_{2m}\bar{R}_{2m} \end{pmatrix} < 0 \quad (2.4.14)$$

$$\begin{aligned} \Lambda = & \begin{pmatrix} Q_2 & Q_3 \\ \sum_{i=0}^n A_i Q_1 + \sum_{i=0}^m B_i Y - Q_2 & -Q_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Q_2^T & (\sum_{i=0}^n A_i Q_1 + \sum_{i=0}^m B_i Y)^T - Q_2^T \\ Q_3^T & -Q_3^T \end{pmatrix} \\ & + \sum_{i=1}^n \bar{h}_{li} \begin{pmatrix} \tilde{Z}_{li1} & \tilde{Z}_{li2} \\ * & \tilde{Z}_{li3} \end{pmatrix} + \sum_{i=0}^m (\bar{\tau} + \bar{h}_{2i}) \begin{pmatrix} \tilde{Z}_{2i1} & \tilde{Z}_{2i2} \\ * & \tilde{Z}_{2i3} \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} Q_1 + Q_1^T - \bar{R}_{1i} & 0 & Q_1^T A_i \\ * & \tilde{Z}_{li1} & \tilde{Z}_{li2} \\ * & * & \tilde{Z}_{li3} \end{pmatrix} \geq 0, \begin{pmatrix} Q_1 + Q_1^T - \bar{R}_{2i} & 0 & Y^T B_i \\ * & \tilde{Z}_{2i1} & \tilde{Z}_{2i2} \\ * & * & \tilde{Z}_{2i3} \end{pmatrix} \geq 0 \end{aligned} \quad (2.4.15a, b)$$

$$\text{其中 } Q' = [Q_2 \ Q_3]^T, \quad \bar{h}_{2i} = \bar{\tau} + \bar{h}_{2i}, \quad \tilde{Z}_{li} = \begin{pmatrix} \tilde{Z}_{li1} & \tilde{Z}_{li2} \\ * & \tilde{Z}_{li3} \end{pmatrix}, \quad \tilde{Z}_{2i} = \begin{pmatrix} \tilde{Z}_{2i1} & \tilde{Z}_{2i2} \\ * & \tilde{Z}_{2i3} \end{pmatrix}$$

那么具有被控对象 (2.4.1) 的 NCS 对所有 $h + \tau_{sc} + \tau_{ca} + d(k)h \leq \bar{\tau}$ 且反馈增益 $K = YQ_1^{-1}$ 是渐近稳定的。可保证以上线性矩阵不等式有解的 $\bar{\tau}$ 的最大值是广义最大容许时延。

证明: 定义

$$Q = P^{-1} = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ Q_2 & Q_3 \end{bmatrix}, \quad \bar{R}_{1i} = R_{1i}^{-1}, \quad \bar{R}_{2i} = R_{2i}^{-1},$$

$$\tilde{Z}_{li} = Q^T Z_{li} Q = \begin{pmatrix} \tilde{Z}_{li1} & \tilde{Z}_{li2} \\ * & \tilde{Z}_{li3} \end{pmatrix}, \quad \tilde{Z}_{2i} = Q^T Z_{2i} Q = \begin{pmatrix} \tilde{Z}_{2i1} & \tilde{Z}_{2i2} \\ * & \tilde{Z}_{2i3} \end{pmatrix}, \quad Y = KQ_1$$

对 (2.4.5) 左右两边分别乘以 Q , Q^T , 得到

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} Q_2 & Q_3 \\ \sum_{i=0}^n A_i Q_1 + \sum_{i=0}^m B_i Y - Q_2 & -Q_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Q_2^T & (\sum_{i=0}^n A_i Q_1 + \sum_{i=0}^m B_i Y)^T - Q_2^T \\ Q_3^T & -Q_3^T \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^n \bar{h}_{li} \tilde{Z}_{li} \\ & + \sum_{i=0}^m (\bar{\tau} + \bar{h}_{2i}) \tilde{Z}_{2i} + \begin{pmatrix} Q_2^T \\ Q_3^T \end{pmatrix} \left(\sum_{i=1}^n \bar{h}_{li} R_{1i} + \sum_{i=0}^m (\bar{\tau} + \bar{h}_{2i}) R_{2i} \right) \begin{pmatrix} Q_2 & Q_3 \end{pmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (2.4.16)$$

由 Schur 补性质, 可知 (2.4.16) 等价于 (2.4.14)。

对 (2.4.6) 左右两边分别乘以 $\text{diag}\{Q_1^T, Q^T\}$, $\text{diag}\{Q_1, Q\}$, 得到

$$\begin{pmatrix} Q_1 \bar{R}_{1i}^{-1} Q_1^T & 0 & Q_1^T A_i \\ * & \tilde{Z}_{1i1} & \tilde{Z}_{1i2} \\ * & * & \tilde{Z}_{1i3} \end{pmatrix} \geq 0, \begin{pmatrix} Q_1 \bar{R}_{2i}^{-1} Q_1^T & 0 & Y^T B_i \\ * & \tilde{Z}_{2i1} & \tilde{Z}_{2i2} \\ * & * & \tilde{Z}_{2i3} \end{pmatrix} \geq 0 \quad (2.4.17a, b)$$

因 $\bar{R}_{1i}^{-1} > 0$, $(Q_1 - \bar{R}_{1i}) \bar{R}_{1i}^{-1} (Q_1 - \bar{R}_{1i})^T = Q_1 \bar{R}_{1i}^{-1} Q_1^T - (Q_1 + Q_1^T - \bar{R}_{1i}) > 0$ 。由此可知

$$Q_1 \bar{R}_{1i}^{-1} Q_1^T > Q_1 + Q_1^T - \bar{R}_{1i} \quad (2.4.18, a)$$

同理

$$Q_1 \bar{R}_{2i}^{-1} Q_1^T > Q_1 + Q_1^T - \bar{R}_{2i} \quad (2.4.18, b)$$

可见 (2.4.18) 是 (2.4.17) 的充分条件。定理得证。□

注 2.4.1: 如果时滞 h_{1i} 和 h_{2i} 是常数, 本文结果同样适用, 只需将结论中的 $\bar{h}_{1i}, \bar{h}_{2i}$ 替换为 h_{1i}, h_{2i} 便可以。

注 2.4.2: 本文的结论不需要知道时滞的导数, 因此可处理时滞导数未知的情况。本文结论也无需限制时变时滞属于慢时变时滞。

下面给出一个数值仿真例子。

例 2.4.1: 如下含状态和输入时滞的被控对象:

$$\dot{x} = Ax + A_1 x(t - h_1) + Bu + B_1 u(t - h_2) \quad (2.4.19)$$

$$\text{令 } A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -0.9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, 0 \leq h_1, h_2 \leq 0.5$$

则 NCS 可以表示为

$$\dot{x} = Ax + A_1 x(t - h_1) + Bu(t - \tau) + B_1 u(t - \tau - h_2), t \in [t_k, t_{k+1}) \quad (2.4.20)$$

其中 $\tau(t) = t - t_k + \tau_{ca} + \tau_{sc} + d(k)h$ 。由本文方法, 得广义最大允许时延为 0.42。也就是说, 对所有 $\tau(t) \leq 0.42$ 含网络诱导时滞和数据丢包的網絡控制系统 (2.4.20) 是可镇定的。当 $\tau(t) = 0.42$, 反馈增益 $K = (0.0934, -0.2922)$ 。系统状态响应如下图。

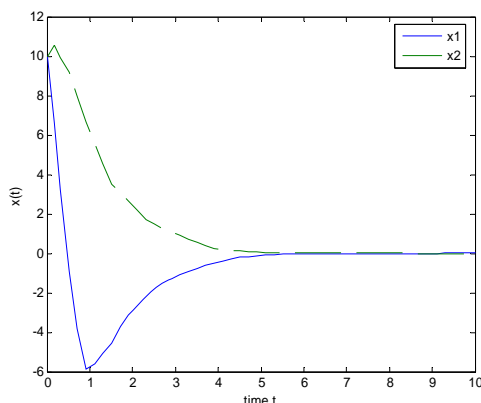


图 2.4.2 网络控制系统状态响应

Fig. 2.4.2 Response of the NCS

需要指出, 本节仅仅是对网络控制系统从时滞系统的角度进行的简单讨论。对于“网络控制系统分析与设计”这个大的研究方向, 我们可以从下面的几个角度进行更深入的研究, 从而进一步改进结果。

- 1) 关于控制器设计。细心的读者可能留意到, 本节的控制器设计是一种比较简单的设计方法。这样的设计不可避免的存在比较大的保守性。对于 Lyapunov-Krasovskii+线性矩阵不等式这个分析框架, 控制器参数的引入使得原来的线性矩阵不等式含有非线性的因素。对于处理控制器参数带来的非线性的处理方法有: 不等式法(Yu, Wang & Chu 2005), 优化算法(Gao & Wang, 2003), cone complementary linearization (CCL) (El ghaoui, Oustry & AitRami 1997), sequential linear programming matrix method(SLPMM) (Gao, Lam & Wang, 2007), 调节参数法(Zhang, Wu, She & He 2005)。其中 SPLMM 是对 CCL 的一种改进。tuning parameters 法是目前应用较多的方法。感兴趣的读者可查阅相关的文献。
- 2) 关于离散化 Lyapunov 泛函方法。在这一章中, 我们主要是采用简单 Lyapunov 泛函的方法。在某些情况下, 网络控制系统的设计是可以采用后面将要介绍的离散化 Lyapunov 泛函方法。因为, 目前已有离散化 Lyapunov 泛函方法处理不确定性(Han & Gu 2001), 时变时滞(Fridman, 2006a)和控制器设计(Fridman, 2006b)的报道。这将显著的提高系统性能指标。
- 3) 关于通讯协议。本节中我们仅仅是从传统控制理论的角度分析设计一个网络控制系统。并且, 从控制理论的角度研究网络控制系统也是当前研究网络控制系统的一个非常主要的框架。相关的文献可参考 Yue, Han & Peng (2004), Yue, Han & Lam (2005), Yu, Wang, Chu & Hao (2004), Yu, Wang & Chu (2005), Fridman & Shaked (2005a) 和 Fridman, Seuret & Richard (2004)。但是, 网络控制系统是一个网络通讯与控制理论相结合的交叉学科。要想更好的研究网络控制系统就必须从通讯和控制两个角度同时研究。从通讯协议设计角度研究网络控制系统的文献可参考 Walsh, Beldiman & Bushnell (2001), Walsh, Ye & Bushnell (2002), Kim, Lee, Kwon & Park (2003) 和 Teel & Nešić (2004)。虽然当前真正从通讯和控制两个角度同时研究网络控制系统的文献不多(Zhang & Hristu-Varsakelis, 2006)。但可以预见, 这种“Co-Design”的思路必将成为主流。

2.5 小结

关于时域方法(在本论文中主要指简单 Lyapunov 泛函方法和离散化 Lyapunov 泛函方法)与其它一些方法的比较,在论文前面和后面的章节中都有相关的说明。在这里,简要的说明一下简单 Lyapunov 泛函方法与离散化 Lyapunov 泛函方法相比较的特点。简单 Lyapunov 泛函方法,由于构建的是简单形式的二次形 Lyapunov-Krasovskii 泛函,从而通常无需证明泛函是否满足 Lyapunov 泛函条件,仅需要分析 Lyapunov 导数条件。所以该方法是一种相对简单的分析方法。同时也是由于结构的简单,该方法的结果与实际结果要有一定的误差。如果想要获得保守性较低的结果,简单 Lyapunov 泛函方法则无能为力。此外,简单 Lyapunov 泛函方法仅能分析时滞取值为零到一个正数区间的系统稳定性。对于一些复杂情况该方法也无法处理。如果要想进一步降低结论的保守性或处理一些相对复杂的稳定性情况,我们可以应用下一章将介绍的另一种时域方法,离散化 Lyapunov 泛函方法。

第三章 基于离散化 Lyapunov 泛函方法的时滞系统稳定性分析

3.1 引言

由前面的介绍我们知道, 简单 Lyapunov 泛函方法相对来说结论的保守性比较高。并且在某些情况下该方法是无效的。因此这章中我们介绍相对简单 Lyapunov 泛函方法更有效的分析方法, 离散化 Lyapunov 泛函方法。这一章主要内容为作者基于离散化 Lyapunov 泛函方法分析时滞系统稳定性的一些工作。

在 3.2 节中, 提出了一种新的离散化 Lyapunov 泛函方法。首先提出了一种新型的完全 Lyapunov-Krasovskii 泛函。这种泛函具有比以往泛函更广泛的形式。进一步由离散化处理和自由权矩阵技术得到线性矩阵不等式形式的稳定判据。该方法可以比已有离散化 Lyapunov 泛函方法处理更广的一类鲁棒稳定性问题。

在 3.3 节中, 分析了含混合时滞的中立系统稳定性。基于提出的新型 Lyapunov 泛函方法, 所得结论比已有离散化 Lyapunov 泛函方法保守性明显降低。并且该方法得到的结论非常接近于实际结果。

在 3.4 节中, 基于离散化 Lyapunov 泛函方法研究了时滞系统的指数估计问题。由于一个指数估计问题可转化为一个稳定性分析问题, 所以基于本章中的结论所得到的指数估计结果要显著优于基于简单 Lyapunov 泛函方法所得到的结论。

在 3.5 节中, 研究了含时变时滞的时滞系统稳定性问题。首先提出了一种纯 Lyapunov-Krasovskii 泛函方法。从而这种方法比采用离散化 Lyapunov 泛函方法结合输入-输出方法的分析方法要简单得多。并且该节的结论具有更低的保守性。此外, 两类其它的稳定性问题被研究。结合本节的结论, 我们可求得满足系统稳定的时滞上界和下界及满足系统稳定的最大时滞区间。

3.2 中立系统鲁棒稳定性分析

最近, Han, Yu & Gu (2004) 和 Han (2005) 这两篇文献基于离散化 Lyapunov 泛函方法研究了中立型时滞系统的稳定性。由于是基于离散化 Lyapunov 泛函方法, 这两篇文献得到的结果比基于简单 Lyapunov 泛函方法(如: Fridman & Shaked, 2002a, b 和 He, Wu, She & Liu, 2004a, b)的结果保守性低。到目前为止, Han, Yu & Gu (2004) 和 Han (2005) 的方法仍是时域框架内分析中立系统稳定性保守性最低的方法。然而, 这两种方法不能处理当中立时滞项系数矩阵含时变不确定性的情况。具体的说, 因为这两种方法的 Lyapunov-Krasovskii 泛函中含有一个偏差算子。当中立时滞项系数矩阵含时变不确定性时, Lyapunov-Krasovskii 泛函的导数是得不到的。相比之简单 Lyapunov 泛函方法, 目前基于离散化 Lyapunov 泛函方法

的报道还是非常少的。一方面是因为离散化 Lyapunov 泛函方法要比简单 Lyapunov 泛函方法复杂许多。另一方面, 也因为目前离散化 Lyapunov 泛函方法已取得了非常好的效果, 不容易取得更进一步的改进。

当然, 除了时域方法, 还有其它可分析中立系统稳定性的方法, 如: 频域方法 (Fu, Niculescu & Chen, 2006) 和代数方法 (Hu & Liu, 2007)。这些方法具有一些非常吸引人的优势。例如, 对相称时滞系统, 频域方法可检测出所有特征虚根。进而, 根据稳定指数的连续性, 一些充分必要稳定条件可以获得。至于代数方法, 我们可以利用这种方法找到一个可能含所有不稳定特征根的区域。并且对于给定时滞, 我们可以根据复变函数的相关定理精确检验系统的稳定性。可是, 由于这些方法是基于系统特征方程进行分析的。这些方法就无法应用于系统的鲁棒稳定性分析。到目前为止, 离散化 Lyapunov 泛函方法还是最有效的鲁棒稳定性分析工具。关于非时域方法, 在后面的章节中会有比较详细的研究。

在这一节中, 我们首先提出一种新的完全 Lyapunov-Krasovskii 泛函。这个完全 Lyapunov-Krasovskii 泛函比 Han, Yu & Gu (2004) 和 Han (2005) 中的要更广泛。接下来, 由离散化和利用自由权矩阵 (He, Wu, She & Liu, 2004a, b) 得到线性矩阵不等式形式的稳定条件。这样的稳定条件允许中立时滞项系数矩阵含有时变不确定性。最后给出一个数值仿真以说明该方法的有效性。

本节符号说明: A^T 和 A^{-1} 分别代表矩阵 A 的转置和逆矩阵。 $A > 0$ ($A < 0$) 指 A 正定 (负定)。 $*$ 表示由对称性可直接推定的矩阵块。 I 为单位阵。 \cdot 表示对时间 t 求导, 而 $\dot{\cdot}$ 表示对变量 ξ 求导。如不特殊说明, 矩阵都认为是具有合适维数的。

3.2.1 一种新型完全 Lyapunov-Krasovskii 泛函

考虑下面的中立系统

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) - C\dot{x}(t-r) &= Ax(t) + Bx(t-r) \\ x(t) &= \phi(t), t \in [-r, 0]\end{aligned}\quad (3.2.1)$$

其中 $r > 0$ 是常数时滞, A , B 和 C 为给定常数矩阵, $\phi(t)$ 代表初始条件。

在本节中, 我们假定

A1) $|\lambda_i(C)| < 1$, ($i=1, 2, \dots, n$), 其中 $\lambda_i(C)$ 表示 $n \times n$ 维矩阵 C 的第 i 个特征值。
A1) 是系统 (3.2.1) 渐近稳定的必要条件, Fu, Niculescu & Chen (2006)。

对一个稳定的系统 (3.2.1), 我们首先希望得到一个 Lyapunov-Krasovskii 泛函 $V(x_t)$ 满足:

$$\begin{aligned}\dot{V}(x_t) &= -x^T(t)W_1x(t) - \int_{-r}^0 x^T(t+\theta)W_2x(t+\theta)d\theta - x^T(t-r)W_3x(t-r) \\ &\quad - \dot{x}^T(t)W_4\dot{x}(t) - \dot{x}^T(t-r)W_5\dot{x}(t-r)\end{aligned}\quad (3.2.2)$$

其中 $x_t = x(t+\theta)$ ($-r \leq \theta \leq 0$), $W_i > 0$ ($i=1, 2, \dots, 5$) 是常数对称矩阵。

下面介绍一些中立时滞系统的基本知识。

定义 3.2.1 (Bellman & Cooke, 1963): 考虑如下矩阵等式

$$\dot{K}(t) - C\dot{K}(t-r) = AK(t) + BK(t-r), \quad t \geq 0, \quad t \neq kr, \quad k=1,2,\dots \quad (3.2.3)$$

其中 $K(t)$ 为一个矩阵函数满足：对 $t < 0$, $K(t) = 0$ 和 $K(0) = I$ 。 $K(t)$ 称系统 (3.2.1) 的基础矩阵。

引理 3.2.1 (Bellman & Cooke, 1963)：系统 (3.2.1) 的基础矩阵 $K(t)$ 满足

$$\dot{K}(t) - \dot{K}(t-r)C = K(t)A + K(t-r)B, \quad t \geq 0, \quad t \neq kr, \quad k=1,2,\dots \quad (3.2.4)$$

并且系统 (3.2.1) 的解为

$$x(t, \phi) = [K(t) - K(t-r)C]\phi(0) + \int_{-r}^0 K(t-\theta-r)[B\phi(\theta) + C\dot{\phi}(\theta)]d\theta, \quad t \geq 0 \quad (3.2.5)$$

如果系统 (3.2.1) 是指数稳定的，则对给定矩阵 W ，下面的函数是明确的 (Rodriguez, Kharitonov, Dion & Gugard, 2004)

$$U_w(\xi) = \int_0^\infty K^T(t)WK(t+\xi)dt \quad (3.2.6)$$

$U_w(\xi)$ 称为系统 (3.2.1) 的 Lyapunov 矩阵。

下面给出系统 (3.2.1) 指数稳定条件下，如何构建一个 Lyapunov-Krasovskii 泛函。

定理 3.2.1：假定系统 (3.2.1) 指数稳定。给定对称矩阵 $W_i > 0$ ($i=1,2,\dots,5$) 和如下泛函

$$\begin{aligned} W(x_t) = & x^T(t)W_1x(t) + \int_{-r}^0 x^T(t+\theta)W_2x(t+\theta)d\theta + x^T(t-r)W_3x(t-r) \\ & + \dot{x}^T(t)W_4\dot{x}(t) + \dot{x}^T(t-r)W_5\dot{x}(t-r) \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

则 Lyapunov-Krasovskii 泛函

$$\begin{aligned} V(x_t) = & (x(t) - Cx(t-r))^T \bar{P}(x(t) - Cx(t-r)) + 2(x(t) - Cx(t-r))^T \int_{-r}^0 \tilde{Q}(\theta)x(t+\theta)d\theta \\ & + \int_{-r}^0 \int_{-r}^0 x^T(t+\theta_1)\tilde{R}(\theta_1, \theta_2)x(t+\theta_2)d\theta_1d\theta_2 + \int_{-r}^0 x^T(t+\theta)\tilde{S}(\theta)x(t+\theta)d\theta \\ & + \int_{-r}^0 \dot{x}^T(t+\theta)L\dot{x}(t+\theta)d\theta \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

其中

$$\bar{P} = U(0) + \bar{U}(0)$$

$$\tilde{Q}(\theta) = U^T(r+\theta)B - U'^T(r+\theta)C + \bar{U}^T(r+\theta)B - \bar{U}'^T(r+\theta)C$$

$$\begin{aligned} \tilde{R}(\theta_1, \theta_2) = & B^T U(\theta_1 - \theta_2)B - C^T U'(\theta_1 - \theta_2)B + B^T U'(\theta_1 - \theta_2)C - C^T \underset{\theta_1 \neq \theta_2}{U''}(\theta_1 - \theta_2)C \\ & + B^T \bar{U}(\theta_1 - \theta_2)B - C^T \bar{U}'(\theta_1 - \theta_2)B + B^T \bar{U}'(\theta_1 - \theta_2)C - C^T \underset{\theta_1 \neq \theta_2}{\bar{U}''}(\theta_1 - \theta_2)C \end{aligned}$$

$$\tilde{S}(\theta) = (r+\theta)W_2 + W_3 + C^T \Delta U'(0)C + C^T \Delta \bar{U}'(0)C$$

$$L = W_5$$

$$U(\theta) \triangleq \int_0^\infty K^T(t)(W_1 + rW_2 + W_3)K(t+\theta)dt$$

$$\bar{U}(\theta) \triangleq \int_0^\infty \dot{K}^T(t)(W_4 + W_5)\dot{K}(t+\theta)dt$$

($\Delta U'(0)$ 和 $\Delta \bar{U}'(0)$ 表示 $U'(0)$ 和 $\bar{U}'(0)$ 的跳变)

满足

$$\frac{d}{dt}V(x_t) = -W(x_t), \quad t \geq 0 \quad (3.2.9)$$

证明： 为构建一个满足 (3.2.9) 的 Lyapunov-Krasovskii 泛函, 我们可以选取 $V(x_t) = V_1(x_t) + V_2(x_t) + V_3(x_t)$ 满足

$$\frac{d}{dt}V_1(x_t) = -x^T(t)W^1x(t), \quad W^1 = W_1 + rW_2 + W_3 \quad (3.2.10a)$$

$$\frac{d}{dt}V_2(x_t) = -\dot{x}^T(t)W^2\dot{x}(t), \quad W^2 = W_4 + W_5 \quad (3.2.10b)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V_3(x_t) = & x^T(t)(rW_2 + W_3)x(t) - \int_{-r}^0 x^T(t+\theta)W_2x(t+\theta)d\theta - x^T(t-r)W_3x(t-r) \\ & + \dot{x}^T(t)W_5\dot{x}(t) - \dot{x}^T(t-r)W_5\dot{x}(t-r) \end{aligned} \quad (3.2.10c)$$

$V_3(x_t)$ 可以容易地获得

$$V_3(x_t) = \int_{-r}^0 x^T(t+\theta)[(r+\theta)W_2 + W_3]x(t+\theta)d\theta + \int_{-r}^0 \dot{x}^T(t+\theta)W_5\dot{x}(t+\theta)d\theta \quad (3.2.11)$$

类似于文献 Gu, Kharitonov & Chen (2003), Rodriguez, Kharitonov, Dion & Gugard (2004) 和 Kharitonov (2005), 我们构建 V_1 如下

$$V_1(\phi) = \int_0^\infty x^T(t, \phi)W^1x(t, \phi)dt \quad (3.2.12)$$

其中 $x(t, \phi)$ 是系统 (3.2.1) 初始条件为 $x(t) = \phi(t)$ ($t \in [-r, 0]$) 时的解。

由 (3.2.5),

$$\begin{aligned} V_1(x_t) = & x^T(t)[U(0) - C^TU(r) - U^T(r)C + C^TU(0)C]x(t) \\ & + 2x^T(t)\int_{-r}^0 [U^T(r+\theta) - C^TU^T(\theta)][Bx(t+\theta) + C\dot{x}(t+\theta)]d\theta \\ & + \int_{-r}^0 \int_{-r}^0 [Bx(t+\theta_1) + C\dot{x}(t+\theta_1)]^T U(\theta_1 - \theta_2)[Bx(t+\theta_2) + C\dot{x}(t+\theta_2)]d\theta_1 d\theta_2 \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

由分步积分,

$$\begin{aligned} V_1(x_t) = & [x(t) - Cx(t-r)]^T U(0)[x(t) - Cx(t-r)] + 2[x(t) - Cx(t-r)]^T \times \\ & \int_{-r}^0 [B^TU(r+\theta) - C^TU'(r+\theta)]^T x(t+\theta)d\theta + \\ & \int_{-r}^0 \int_{-r}^0 x^T(t+\theta_1)[B^TU(\theta_1 - \theta_2)B - C^TU'(\theta_1 - \theta_2)B + \\ & B^TU'(\theta_1 - \theta_2)C - C^TU''(\theta_1 - \theta_2)C]x(t+\theta_2)d\theta_1 d\theta_2 \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

类似地, 我们构建 V_2

$$V_2(\phi) = \int_0^\infty \dot{x}^T(t, \phi)W^2\dot{x}(t, \phi)dt \quad (3.2.15)$$

对 (3.2.5) 求时间导数

$$\frac{d}{dt}x(t, \phi) = [\dot{K}(t) - \dot{K}(t-r)C]\phi(0) + \int_{-r}^0 \dot{K}(t-\theta-r)[B\phi(\theta) + C\dot{\phi}(\theta)]d\theta \quad (3.2.16)$$

将 (3.2.16) 带入 (3.2.15) 得

$$\begin{aligned} V_2(\phi) = & \phi^T(0)(\bar{U}(0) - C^T\bar{U}(r) - \bar{U}^T(r)C + C^T\bar{U}(0)C)\phi(0) + \\ & 2\phi^T(0)\int_{-r}^0 (\bar{U}^T(r+\theta) - C^T\bar{U}(\theta))(B\phi(\theta) + C\dot{\phi}(\theta))d\theta + \\ & \int_{-r}^0 \int_{-r}^0 [B\phi(\theta_1) + C\dot{\phi}(\theta_1)]^T \bar{U}(\theta_1 - \theta_2) [B\phi(\theta_2) + C\dot{\phi}(\theta_2)] d\theta_1 d\theta_2 \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

其中 $\bar{U}(\theta) \triangleq \int_0^\infty \dot{K}^T(t)W^2\dot{K}(t+\theta)dt$ 。因为系统 (3.2.1) 假定指数稳定, $\bar{U}(\theta)$ 是明确定义的。

由分步积分得

$$\begin{aligned} & 2\phi^T(0)\int_{-r}^0 (\bar{U}^T(r+\theta) - C^T\bar{U}^T(\theta))C\dot{\phi}(\theta)d\theta = \\ & 2\phi^T(0)[(\bar{U}^T(r) - C^T\bar{U}(0))C\phi(0) - (\bar{U}(0) - C^T\bar{U}(r)C\phi(-r))] \\ & - 2\phi^T(0)\int_{-r}^0 (\bar{U}^{T'}(r+\theta) - C^T\bar{U}^{T'}(\theta))C\phi(\theta)d\theta \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

$$\begin{aligned} & 2\int_{-r}^0 \int_{-r}^0 \dot{\phi}^T(\theta_1)C^T\bar{U}(\theta_1 - \theta_2)B\phi(\theta_2)d\theta_1 d\theta_2 = \\ & 2\phi^T(0)C^T\int_{-r}^0 \bar{U}(-\theta)B\phi(\theta)Cd\theta - 2\phi^T(-r)C^T\int_{-r}^0 \bar{U}(-r-\theta)B\phi(\theta)Cd\theta \\ & - 2\int_{-r}^0 \int_{-r}^0 \phi^T(\theta_1)C^T\bar{U}'(\theta_1 - \theta_2)B\phi(\theta_2)d\theta_1 d\theta_2 \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-r}^0 \int_{-r}^0 \dot{\phi}^T(\theta_1)C^T\bar{U}(\theta_1 - \theta_2)C\dot{\phi}(\theta_2)d\theta_1 d\theta_2 = \\ & \phi^T(0)C^T\bar{U}(0)C\phi(0) - 2\phi^T(0)C^T\bar{U}(r)C\phi(-r) + \phi^T(-r)C^T\bar{U}(0)C\phi(-r) \\ & + 2\phi^T(0)\int_{-r}^0 C^T\bar{U}'(-\theta)C\phi(\theta)d\theta - 2\phi^T(-r)\int_{-r}^0 C^T\bar{U}'(-r-\theta)C\phi(\theta)d\theta \\ & - \int_{-r}^0 \int_{-r}^0 \phi^T(\theta_1)C^T\bar{U}''(\theta_1 - \theta_2)C\phi(\theta_2)d\theta_1 d\theta_2 = \end{aligned} \quad (3.2.20)$$

这样

$$\begin{aligned} V_2(\phi) = & (\phi(0) - C\phi(-r))^T \bar{U}(0)(\phi(0) - C\phi(-r)) \\ & + 2(\phi(0) - C\phi(-r))^T \int_{-r}^0 [B^T\bar{U}(r+\theta) - C^T\bar{U}'(r+\theta)]^T \phi(\theta)d\theta \\ & + \int_{-r}^0 \int_{-r}^0 \phi^T(\theta_1)[B^T\bar{U}(\theta_1 - \theta_2)B - C^T\bar{U}'(\theta_1 - \theta_2)B \\ & + B^T\bar{U}'(\theta_1 - \theta_2)C - C^T\bar{U}''(\theta_1 - \theta_2)C]\phi(\theta_2)d\theta_1 d\theta_2 \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

注意, $U'(\theta)$ 和 $\bar{U}'(\theta)$ 在 $\theta=0$ 时有跳变,

$$\begin{aligned} & \int_{-r}^0 \int_{-r}^0 \phi^T(\theta_1) C^T U''(\theta_1 - \theta_2) C \phi(\theta_2) d\theta_2 d\theta_1 = \\ & \int_{-r}^0 \int_{-r}^0 \phi^T(\theta_1) C^T \underset{\theta_1 \neq \theta_2}{U''}(\theta_1 - \theta_2) C \phi(\theta_2) d\theta_2 d\theta_1 \end{aligned} \quad (3.2.22a)$$

$$\begin{aligned} & - \int_{-r}^0 \phi^T(\theta) C^T \Delta U'(0) C \phi(\theta) d\theta \\ & \int_{-r}^0 \int_{-r}^0 \phi^T(\theta_1) C^T \bar{U}''(\theta_1 - \theta_2) C \phi(\theta_2) d\theta_2 d\theta_1 = \\ & \int_{-r}^0 \int_{-r}^0 \phi^T(\theta_1) C^T \underset{\theta_1 \neq \theta_2}{\bar{U}''}(\theta_1 - \theta_2) C \phi(\theta_2) d\theta_2 d\theta_1 \end{aligned} \quad (3.2.22b)$$

$$- \int_{-r}^0 \phi^T(\theta) C^T \Delta \bar{U}'(0) C \phi(\theta) d\theta$$

其中 $\Delta U'(0)$ 和 $\Delta \bar{U}'(0)$ 表示 $U'(0)$ 和 $\bar{U}'(0)$ 的跳变。因为我们主要关心这个完全 Lyapunov-Krasovskii 泛函的结构。这里的跳变不必计算。相关的研究可参考 Rodriguez, Kharitonov, Dion & Gugard (2004) 和 Kharitonov (2005)。到此, 联立 $V_1(\phi)$, $V_2(\phi)$ 和 $V_3(\phi)$ 可得到 (3.2.8)。□

注 3.2.1: 如果令 $W_4 = 0$, $W_5 = 0$, 那么 Lyapunov-Krasovskii 泛函 (3.2.8) 简化为如下形式:

$$\begin{aligned} V(x_t) = & [x(t) - Cx(t-r)]^T U(0) [x(t) - Cx(t-r)] + 2[x(t) - Cx(t-r)]^T \times \\ & \int_{-r}^0 [B^T U(r+\theta) - C^T U'(r+\theta)]^T x(t+\theta) d\theta + \\ & \int_{-r}^0 \int_{-r}^0 x^T(t+\theta_1) [B^T U(\theta_1 - \theta_2) B - C^T U'(\theta_1 - \theta_2) B + \\ & B^T U'(\theta_1 - \theta_2) C - C^T \underset{\theta_1 \neq \theta_2}{U''}(\theta_1 - \theta_2) C] x(t+\theta_2) d\theta_1 d\theta_2 + \\ & \int_{-r}^0 x^T(t+\theta) [(r+\theta)W_2 + W_3 + C^T \Delta U'(0) C] x(t+\theta) d\theta \end{aligned} \quad (3.2.23)$$

这个 Lyapunov-Krasovskii 泛函和 Han, Yu & Gu (2004), Han (2005), Rodriguez, Kharitonov, Dion & Gugard (2004), 和 Kharitonov (2005) 中的 Lyapunov-Krasovskii 泛函具有相同的结构。可见, 本节中提出的 Lyapunov-Krasovskii 泛函具有更广泛的形式。这是因为在 Lyapunov-Krasovskii 泛函导数中我们加了两项状态导数二次项。正是因为这个更广泛的 Lyapunov-Krasovskii 泛函, 我们可以在后面得到的稳定条件可以处理一类更广的鲁棒稳定性问题。

本节中, 我们主要关心完全 Lyapunov-Krasovskii 泛函的结构。关于 Lyapunov 矩阵的更多性质(如: 动态性质, 对称性质, 代数性质, 跳变)可参考 Rodriguez, Kharitonov, Dion & Gugard (2004), Kharitonov (2005) 和 Hale & Lunel (1993)。

3.2.2 离散化 Lyapunov 泛函方法

本小节的内容就是推导出一个可以数值检验的稳定条件。如前面介绍,我们将应用离散化方法得到线性矩阵不等式形式的稳定判据。

首先,对系统(3.2.1)选取下面的 Lyapunov-Krasovskii 泛函

$$V(\phi) = \begin{pmatrix} \phi^T(0) & \phi^T(-r) \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} \phi(0) \\ \phi(-r) \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} \phi^T(0) & \phi^T(-r) \end{pmatrix} \int_{-r}^0 Q(\xi) \phi(\xi) d\xi \\ + \int_{-r}^0 \left[\int_{-r}^0 \phi^T(\xi) R(\xi, \eta) \phi(\eta) d\eta \right] d\xi + \int_{-r}^0 \phi^T(\xi) S(\xi) \phi(\xi) d\xi + \int_{-r}^0 \dot{\phi}^T(\xi) L \dot{\phi}(\xi) d\xi \quad (3.2.24)$$

$$\text{其中 } P = P^T = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ * & P_3 \end{pmatrix}, \quad Q(\xi) = \begin{pmatrix} Q_1(\xi) \\ Q_2(\xi) \end{pmatrix}.$$

将时滞区间 $[-r, 0]$ 分成具有等长 $h=r/N$ 的 N 段 $[\theta_p, \theta_{p-1}]$, ($p=1, \dots, N$), $\theta_p = -ph$ 。将正方 $[-r, 0] \times [-r, 0]$ 分成 $N \times N$ 个小正方 $[\theta_p, \theta_{p-1}] \times [\theta_q, \theta_{q-1}]$, 每一个小的正方再进一步分成两个三角。矩阵函数 $Q(\xi)$ 和 $S(\xi)$ 在每个区间选定为线性的, 矩阵函数 $R(\xi, \eta)$ 在每个三角中选定为线性的。

$$Q^T(\theta_p + \alpha h) = \begin{pmatrix} Q_1^T(\theta_p + \alpha h) & Q_2^T(\theta_p + \alpha h) \end{pmatrix}, \quad Q_i(\theta_p + \alpha h) = (1-\alpha)Q_{ip} + \alpha Q_{i,p-1}, \quad (i=1,2), \quad \alpha \in [0,1] \quad (3.2.25a)$$

$$S(\theta_p + \alpha h) = (1-\alpha)S_p + \alpha S_{p-1}, \quad \alpha \in [0,1] \quad (3.2.25b)$$

$$R(\theta_p + \alpha h, \theta_q + \beta h) = \begin{cases} (1-\alpha)R_{p,q} + \beta R_{p-1,q-1} + (\alpha-\beta)R_{p-1,q}, & \alpha \geq \beta \\ (1-\beta)R_{p,q} + \alpha R_{p-1,q-1} + (\beta-\alpha)R_{p,q-1}, & \alpha < \beta \end{cases}, \quad \alpha \in [0,1], \quad \beta \in [0,1] \quad (3.2.25c)$$

这样, Lyapunov-Krasovskii 泛函就可完全由矩阵 P , Q_{1p} , Q_{2p} , S_p , $R_{p,q}$, L , ($p, q=0, 1, \dots, N$) 决定。

此外, 对 $\theta_p < \xi < \theta_{p-1}$ 和 $\theta_q < \eta < \theta_{q-1}$

$$S'(\xi) = \frac{1}{h}(S_{p-1} - S_p), \quad Q'_i(\xi) = \frac{1}{h}(Q_{ip-1} - Q_{ip}), \quad \frac{\partial R(\xi, \eta)}{\partial \xi} + \frac{\partial R(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{1}{h}(R_{p-1,q-1} - R_{p,q}) \quad (3.2.26)$$

这里 Lyapunov-Krasovskii 泛函(3.2.24)和 Lyapunov-Krasovskii 泛函(3.2.8)略有不同。(3.2.24)是一个增广形式。

根据 Hale & Lunel (1993)中 Theorem 8.1, 我们得到下面结果。

定理 3.2.2: 系统(3.2.1)渐近稳定, 如果存在 $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ 和 Lyapunov-Krasovskii 泛函(3.2.24)满足

$$\varepsilon_1(x(t) - Cx(t-r))^T(x(t) - Cx(t-r)) \leq V(x_t) \quad (3.2.27a)$$

且

$$\dot{V}(x_t) \leq -\varepsilon_2 x^T(t)x(t) \quad (3.2.27b)$$

这个定理的证明类似于 Han, Yu & Gu (2004) 中 Theorem 1 的证明, 因此这里省略。根据 Jensen 不等式 (Gu, Kharitonov & Chen, 2003), Lyapunov-Krasovskii 泛函 (3.2.24) 满足

$$V(\phi) \geq \begin{pmatrix} \phi^T(0) & \phi^T(-r) \end{pmatrix} (P + \tilde{L}) \begin{pmatrix} \phi(0) \\ \phi(-r) \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} \phi^T(0) & \phi^T(-r) \end{pmatrix} \sum_{p=1}^N V_{Q^p} + \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N V_{R^{pq}} + \sum_{p=1}^N V_{S^p} \quad (3.2.28)$$

其中

$$\tilde{L} = \begin{pmatrix} L/r & -L/r \\ -L/r & L/r \end{pmatrix}$$

$$V_{Q^p} = \int_0^1 Q^{(p)}(\alpha) \phi^{(p)}(\alpha) h d\alpha$$

$$V_{R^{pq}} = \int_0^1 \int_0^1 \phi^{(p)T}(\alpha) R^{(pq)}(\alpha, \beta) \phi^{(q)}(\beta) h d\beta h d\alpha$$

$$V_{S^p} = \int_0^1 \phi^{(p)T}(\alpha) S^{(p)}(\alpha) \phi^{(p)}(\alpha) h d\alpha$$

$$\phi^{(p)}(\alpha) = \phi(\theta_p + \alpha h)$$

$$Q^{(p)}(\alpha) = Q(\theta_p + \alpha h), S^{(p)}(\alpha) = S(\theta_p + \alpha h), R^{(pq)}(\alpha, \beta) = R(\theta_p + \alpha h, \theta_q + \beta h)$$

现在给出下面结论。

命题 3.2.1: 取 (3.2.25) 中定义的分段线性 Q , R 和 S , 则 Lyapunov-Krasovskii 泛函 (3.2.24) 满足 (3.2.27a) 如果 $\tilde{S} > 0$, $L > 0$ 且下面线性矩阵不等式成立

$$\begin{pmatrix} P + \tilde{L} & \tilde{Q} \\ \tilde{Q}^T & \tilde{R} + \tilde{S} \end{pmatrix} > 0 \quad (3.2.29)$$

其中

$$\tilde{Q} = (Q_0 \quad Q_1 \quad \cdots \quad Q_N), \tilde{R} = \begin{pmatrix} R_{00} & R_{01} & \cdots & R_{0N} \\ R_{10} & R_{11} & \cdots & R_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{N0} & R_{N1} & \cdots & R_{NN} \end{pmatrix}, \tilde{S} = \text{diag}(S_0/h \quad S_1/h \quad \cdots \quad S_N/h)。$$

定义: 沿 Gu, Kharitonov & Chen (2003) 中 Proposition 5.20 证明的路线, 我们得到

$$V(\phi) \geq \int_0^1 \begin{pmatrix} \varsigma^T & \psi^T(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P + \tilde{L} & \tilde{Q} \\ \tilde{Q}^T & \tilde{R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varsigma \\ \psi(\alpha) \end{pmatrix} d\alpha + \sum_{p=1}^N V_{S^p} \quad (3.2.30)$$

其中

$$\zeta^T = (\phi^T(0) \quad \phi^T(-r)), \quad \psi(\alpha) = \begin{pmatrix} \psi_{(0)}(\alpha) \\ \psi_{(1)}(\alpha) \\ \psi_{(2)}(\alpha) \\ \vdots \\ \psi_{(N-1)}(\alpha) \\ \psi_{(N)}(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{(1)}(\alpha) \\ \varphi_{(2)}(\alpha) + \varphi^{(1)}(\alpha) \\ \varphi_{(3)}(\alpha) + \varphi^{(2)}(\alpha) \\ \vdots \\ \varphi_{(N)}(\alpha) + \varphi^{(N-1)}(\alpha) \\ \varphi^{(N)}(\alpha) \end{pmatrix},$$

$$\varphi^{(p)}(\alpha) = h \int_0^\alpha \phi^{(p)}(\beta) d\beta, \quad \varphi_{(p)}(\alpha) = h \int_\alpha^1 \phi^{(p)}(\beta) d\beta, \quad p = 0, 1, \dots, N$$

如果 $S_p > 0$ ($p = 0, 1, \dots, N$), 则

$$V(\phi) \geq \int_0^1 \begin{pmatrix} \zeta^T & \psi^T(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P + \tilde{L} & \tilde{Q} \\ \tilde{Q}^T & \tilde{R} + \tilde{S} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta \\ \psi(\alpha) \end{pmatrix} d\alpha \quad (3.2.31)$$

这样, 如果 (3.2.29) 成立, 必存在一个充分小的 $\varepsilon_1 > 0$ 满足 (3.2.27a)。□

在计算 Lyapunov-Krasovskii 泛函 (3.2.24) 的导数前, 我们给出下面结合自由权矩阵 (He, Wu, She & Liu, 2004a, b) 的等式表达

$$\gamma = 2 \begin{pmatrix} x^T(t) & x^T(t-r) & \dot{x}^T(t) & \dot{x}^T(t-r) \end{pmatrix} M [\dot{x}(t) - C\dot{x}(t-r) - Ax(t) - Bx(t-r)] = 0 \quad (3.2.32)$$

其中 $M^T = (M_1^T \quad M_2^T \quad M_3^T \quad M_4^T)$, M_i ($i = 1, 2, 3, 4$) 是任意矩阵。

Lyapunov-Krasovskii 泛函 (3.2.24) 的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}(\phi) &= 2 \begin{pmatrix} \phi^T(0) & \phi^T(-r) \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} \dot{\phi}(0) \\ \dot{\phi}(-r) \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} \phi^T(0) & \phi^T(-r) \end{pmatrix} \int_{-r}^0 Q(\xi) \dot{\phi}(\xi) d\xi \\ &+ 2 \begin{pmatrix} \dot{\phi}^T(0) & \dot{\phi}^T(-r) \end{pmatrix} \int_{-r}^0 Q(\xi) \phi(\xi) d\xi + 2 \int_{-r}^0 \left[\int_{-r}^0 \phi^T(\xi) R(\xi, \eta) \dot{\phi}(\eta) d\eta \right] d\xi \\ &+ 2 \int_{-r}^0 \phi^T(\xi) S(\xi) \dot{\phi}(\xi) d\xi + \dot{\phi}^T(0) L \dot{\phi}(0) - \dot{\phi}^T(-r) L \dot{\phi}(-r) + \gamma \end{aligned} \quad (3.2.33)$$

由分部积分得

$$\begin{aligned} \dot{V}(\phi) &= -e^T \Delta e + 2 \begin{pmatrix} \dot{\phi}^T(0) & \dot{\phi}^T(-r) \end{pmatrix} \int_{-r}^0 Q(\xi) \phi(\xi) d\xi \\ &- 2 \begin{pmatrix} \phi^T(0) & \phi^T(-r) \end{pmatrix} \int_{-r}^0 \dot{Q}(\xi) \phi(\xi) d\xi - \int_{-r}^0 \phi^T(\xi) \dot{S}(\xi) \phi(\xi) d\xi \\ &- \int_{-r}^0 d\xi \int_{-r}^0 \phi^T(\xi) \left[\frac{\partial}{\partial \xi} R(\xi, \eta) + \frac{\partial}{\partial \eta} R(\xi, \eta) \right] \phi(\eta) d\eta \\ &+ 2 \phi^T(0) \int_{-r}^0 R(0, \xi) \phi(\xi) d\xi + 2 \phi^T(-r) \int_{-r}^0 -R(-r, \xi) \phi(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (3.2.34)$$

其中 $e^T = (\phi^T(0) \quad \phi^T(-r) \quad \dot{\phi}^T(0) \quad \dot{\phi}^T(-r))$

$$\Delta = - \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} & \Delta_{14} \\ * & \Delta_{22} & \Delta_{23} & \Delta_{24} \\ * & * & \Delta_{33} & \Delta_{34} \\ * & * & * & \Delta_{44} \end{pmatrix}$$

$$\Delta_{11} = Q_1(0) + Q_1^T(0) + S(0) - M_1 A - A^T M_1^T$$

$$\Delta_{12} = -Q_1(-r) + Q_2^T(0) - M_1 B - A^T M_2^T$$

$$\Delta_{13} = P_1 + M_1 - A^T M_3^T$$

$$\Delta_{14} = P_2 - M_1 C - A^T M_4^T$$

$$\Delta_{22} = -Q_2(-r) - Q_2^T(-r) - S(-r) - M_2 B - B^T M_2^T$$

$$\Delta_{23} = P_2^T + M_2 - B^T M_3^T$$

$$\Delta_{24} = P_3 - M_2 C - B^T M_4^T$$

$$\Delta_{33} = L + M_3 + M_3^T$$

$$\Delta_{34} = -M_3 C + M_4^T$$

$$\Delta_{44} = -M_4 C - C^T M_4^T - L$$

考虑分段线性的 Q , R 和 S , 我们得到

$$\begin{aligned} \dot{V}(\phi) = & -e^T \Delta e + 2e^T \sum_{p=1}^N \int_0^1 [(1-\alpha)(D_p^s + D_p^a) + \alpha(D_p^s - D_p^a)] \phi^{(p)}(\alpha) d\alpha \\ & - \sum_{p=1}^N \int_0^1 \phi^{(p)T}(\alpha) S_{dp} \phi^{(p)}(\alpha) d\alpha - \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \int_0^1 \int_0^1 \phi^{(p)T}(\alpha) R_{dpq} \phi^{(p)}(\beta) d\alpha d\beta \end{aligned} \quad (3.2.35)$$

或

$$\begin{aligned} \dot{V}(\phi) = & -e^T \Delta e + 2e^T \int_0^1 [D^s + (1-2\alpha)D^1] \tilde{\phi}(\alpha) h d\alpha \\ & - \int_0^1 \tilde{\phi}^T(\alpha) S_d \tilde{\phi}(\alpha) d\alpha - \int_0^1 \int_0^1 \tilde{\phi}^T(\alpha) R_d \tilde{\phi}(\beta) d\alpha d\beta \end{aligned} \quad (3.2.36)$$

其中

$$\tilde{\phi}^T(\alpha) = (\phi^{1T}(\alpha) \quad \phi^{2T}(\alpha) \quad \cdots \quad \phi^{NT}(\alpha)), \quad S_d = \text{diag}(S_{d1} \quad S_{d2} \quad \cdots \quad S_{dN}), \quad S_{dp} = S_{p-1} - S_p$$

$$R_d = \begin{pmatrix} R_{d11} & R_{d12} & \cdots & R_{d1N} \\ R_{d21} & R_{d22} & \cdots & R_{d2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{dN1} & R_{dN2} & \cdots & R_{dNN} \end{pmatrix}, \quad R_{dpq} = h(R_{p-1,q-1} - R_{p,q})$$

$$D^s = (D_1^s \quad D_2^s \quad \cdots \quad D_N^s), \quad D^a = (D_1^a \quad D_2^a \quad \cdots \quad D_N^a)$$

$$D_p^s = \begin{pmatrix} -(Q_{1p-1} - Q_{1p}) + \frac{h}{2}(R_{0,p-1} + R_{0,p}) \\ -(Q_{2p-1} - Q_{2p}) - \frac{h}{2}(R_{N,p-1} + R_{N,p}) \\ \frac{h}{2}(Q_{1p-1} + Q_{1p}) \\ \frac{h}{2}(Q_{2p-1} + Q_{2p}) \end{pmatrix}, D_p^a = \begin{pmatrix} -\frac{h}{2}(R_{0,p-1} - R_{0,p}) \\ \frac{h}{2}(R_{N,p-1} - R_{N,p}) \\ -\frac{h}{2}(Q_{1p-1} - Q_{1p}) \\ -\frac{h}{2}(Q_{2p-1} - Q_{2p}) \end{pmatrix}$$

命题 3.2.2: 对于 Lyapunov-Krasovskii 泛函 (3.2.24) 和 (3.2.25) 中定义的分段线性 Q , R 和 S , 它的导数满足 (3.2.27b), 如果下面的线性矩阵不等式成立:

$$\begin{pmatrix} \Delta & -D^s & -D^a \\ * & R_d + S_d & 0 \\ * & * & 3S_d \end{pmatrix} > 0 \quad (3.2.37)$$

证明: 由 (3.2.36) 得

$$\begin{aligned} \dot{V}(\phi) = & -\int_0^1 \left(e^T [D^s + (1-2\alpha)D^a] \quad \tilde{\phi}^T(\alpha) \right) \begin{pmatrix} U & -I \\ -I & S_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [D^s + (1-2\alpha)D^a]^T e \\ \tilde{\phi}(\alpha) \end{pmatrix} d\alpha \\ & -e^T [\Delta - D^s U D^{sT} - \frac{1}{3} D^a U D^{aT}] e - \left(\int_0^1 \tilde{\phi}(\alpha) d\alpha \right)^T R_d \left(\int_0^1 \tilde{\phi}(\alpha) d\alpha \right) \end{aligned} \quad (3.2.38)$$

对任意 U 成立。根据 Jensen 不等式

$$\dot{V}(\phi) \leq - \left(e^T \quad \int_0^1 \tilde{\phi}^T(\alpha) d\alpha \right) \begin{pmatrix} \Delta - \frac{1}{3} D^a U D^{aT} & -D^s \\ -D^{sT} & R_d + S_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ \int_0^1 \tilde{\phi}(\alpha) d\alpha \end{pmatrix} \quad (3.2.39)$$

这样, (3.2.27b) 成立, 如果

$$\begin{pmatrix} \Delta - \frac{1}{3} D^a U D^{aT} & -D^s \\ -D^{sT} & R_d + S_d \end{pmatrix} > 0 \quad (3.2.40)$$

任意矩阵 U 可利用 Gu, Kharitonov & Chen (2003) 中 Proposition B.6 消去。这样条件 (3.2.37) 可证。□

根据命题 3.2.1, 命题 3.2.2 和 定理 3.2.2, 我们得到下面结论。

定理 3.2.3: 假定 A1), 系统 (3.2.1) 是渐近稳定的, 如果存在矩阵 P , Q_p , $S_p > 0$, $R_{p,q}$, ($p, q = 0, 1, \dots, N$), $L > 0$ 和 M 满足 (3.2.29) 和 (3.2.37)。

定理 3.2.3 是基于前面得到的完全 Lyapunov-Krasovskii 泛函求得的系统 (3.2.1) 的稳定判据。这个方法可扩展到含时变不确定参数的中立时滞系统, 我们接下来将进行这方面的研究。

注 3.2.2: 通过 Han, Yu & Gu (2004) 和 Han (2005) 中的例子可知, 离散化 Lyapunov 泛函方法的性能显著优于简单 Lyapunov 泛函方法。似乎想进一步改进

已有成果不太可能, 因为所得到的结论已非常接近实际值。事实上, 本节提出的方法是可以进一步降低保守性的。例如, 考虑如下时滞系统

$$\dot{x}(t) - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix} \dot{x}(t-r) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0.2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x(t-r)$$

由 Han, Yu & Gu (2004) 和 Han (2005) (取分段数 $N=3$), 得到稳定时滞区间 $r \in (0.229 \ 1.583)$ 。再由本节的方法定理 3.2.3 (取分段数 $N=3$), 得稳定区间 $r \in (0.229 \ 1.588)$ 。不过, 改进还是很有限的。本节提出的方法主要的优势在于处理鲁棒稳定性分析。

下面考虑一个不确定中立系统

$$\dot{x}(t) - C(t)\dot{x}(t-r) = A(t)x(t) + B(t)x(t-r) \quad (3.2.41)$$

其中 $A(t)$, $B(t)$ 和 $C(t)$ 为不确定矩阵。假定它们是范数有界的且可以表示如下:

$$A(t) = A + \Delta A(t), \quad B(t) = B + \Delta B(t), \quad C(t) = C + \Delta C(t)$$

$$[\Delta A(t) \quad \Delta B(t) \quad \Delta C(t)] = EF(t)[E_A \quad E_B \quad E_C]$$

其中 A, B, C, E, E_A, E_B 和 E_C 是已知常数矩阵, $F(t)$ 为未知时变 Lebesgue 可测满足 $\|F(t)\| \leq 1$ 。这里假定 $\|C(t)\| < 1$ 。

在给出鲁棒稳定判据前, 给出一个鲁棒分析中重要的引理。

引理 3.2.2 (Wang, Xie & de Souza, 1992): 对任意维数兼容矩阵 D, E, F (满足 $F^T F \leq I$), 和一个标量 $\varepsilon > 0$, 下面不等式成立:

$$DFE + E^T F^T D^T \leq \varepsilon DD^T + \varepsilon^{-1} E^T E \quad (3.2.42)$$

定理 3.2.4: 系统 (3.2.41) 是一致渐近稳定的如果存在矩阵 P, Q_p , $S_p > 0, R_{p,q}$, ($p, q = 0, 1, \dots, N$), $L > 0, M$ 和标量 $\varepsilon > 0$ 满足 (3.2.29) 和下面的线性矩阵不等式

$$\begin{pmatrix} \Delta' & -D^s & -D^a & ME \\ * & R_d + S_d & 0 & 0 \\ * & * & 3S_d & 0 \\ * & * & * & \varepsilon I \end{pmatrix} > 0 \quad (3.2.43)$$

其中

$$\Delta' = \Delta - \varepsilon \Gamma_E^T \Gamma_E, \quad \Gamma_E = [E_A \quad E_B \quad 0 \quad E_C]$$

证明: 类似于定理 3.2.2, 系统 (3.2.41) 是一致稳定的, 如果存在 $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$ 和一个 Lyapunov-Krasovskii 泛函满足 (3.2.27a) 和 (3.2.27b)。选取 Lyapunov-Krasovskii 泛函 (3.2.24)。根据命题 3.2.1, 我们知道 (3.2.27a) 成立如果 (3.2.29) 满足。我们接下来证明导数条件 (3.2.27b)。

如果考虑系统不确定性, (3.2.32) 将被下式取代

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma} = & 2 \begin{pmatrix} x^T(t) & x^T(t-r) & \dot{x}^T(t) & \dot{x}^T(t-r) \end{pmatrix} M \times \\ & [\dot{x}(t) - (C + EF(t)E_C)\dot{x}(t-r) - (A + EF(t)E_A)x(t) - (B + EF(t)E_B)x(t-r)] = 0 \end{aligned}$$

(3.2.44)

相应地, (3.2.24) 的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}(\phi) = & 2\left(\phi^T(0) \quad \phi^T(-r)\right)P\begin{pmatrix} \dot{\phi}(0) \\ \dot{\phi}(-r) \end{pmatrix} + 2\left(\phi^T(0) \quad \phi^T(-r)\right)\int_{-r}^0 Q(\xi)\dot{\phi}(\xi)d\xi \\ & + 2\left(\dot{\phi}^T(0) \quad \dot{\phi}^T(-r)\right)\int_{-r}^0 Q(\xi)\phi(\xi)d\xi + 2\int_{-r}^0\left[\int_{-r}^0 \phi^T(\xi)R(\xi,\eta)\dot{\phi}(\eta)d\eta\right]d\xi \\ & + 2\int_{-r}^0 \phi^T(\xi)S(\xi)\dot{\phi}(\xi)d\xi + \dot{\phi}^T(0)L\dot{\phi}(0) - \dot{\phi}^T(-r)L\dot{\phi}(-r) + \tilde{\gamma} \end{aligned} \quad (3.2.45)$$

沿命题 3.2.2 证明的思路, 我们可得到

$$\dot{V}(\phi) \leq -\left(e^T \quad \int_0^1 \tilde{\phi}^T(\alpha)d\alpha\right)\begin{pmatrix} \tilde{\Delta} - \frac{1}{3}D^aUD^{aT} & -D^s \\ -D^{sT} & R_d + S_d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e \\ \int_0^1 \tilde{\phi}(\alpha)d\alpha \end{pmatrix} \quad (3.2.46)$$

其中 $\tilde{\Delta} = \Delta - ME(-F(t))\Gamma_E - \Gamma_E^T(-F^T(t))E^T M^T$

消去 U 后, 可知 (3.2.27b) 成立, 如果

$$\Upsilon - \begin{pmatrix} ME(-F(t))\Gamma_E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Gamma_E^T(-F^T(t))E^T M^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} > 0 \quad (3.2.47)$$

其中 Υ 是 (3.2.37) 的左边部分。

由引理 3.2.2 得, (3.2.47) 成立的一个充分条件是: 存在 $\varepsilon > 0$ 满足

$$\Upsilon - \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1}MEE^T M^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \varepsilon\Gamma_E^T\Gamma_E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} > 0 \quad (3.2.48)$$

应用 Schur 补性质 (Boyd, El Ghaoui, Feron & Balakrishnan, 1994), 我们发现 (3.2.48) 和 (3.2.43) 是等价的。□

注 3.2.3: 本节方法中, 中立时滞系数矩阵是允许时变不确定的。然而, 已有的离散化 Lyapunov 方法不能处理这种情况。这些方法中 (Han, Yu & Gu, 2004, 和 Han, 2005), 需要计算偏差算子: $x(t) - C(t)x(t-r)$ 的导数。可是当 $C(t)$ 为时变不确定时, 这个导数是无法计算的。而本节的离散化 Lyapunov 泛函方法采用前面得到的一种新完全 Lyapunov-Krasovskii 泛函。在这个泛函中, 两个状态导数二次项被加入。从而, 可处理 $C(t)$ 为时变不确定的情况。

在本节最后, 给出一个数值例子。

例 3.2.1: 考虑下面不确定中立系统

$$\dot{x}(t) - C(t)\dot{x}(t-r) = A(t)x(t) + B(t)x(t-r)$$

其中 $A(t) = A + EF(t)E_A$, $B(t) = B + EF(t)E_B$, $C(t) = C + EF(t)E_C$, $F(t)$ 是未知时变的, 满足 $\|F(t)\| \leq 1$,

$$A = \begin{pmatrix} -0.9 & 0.2 \\ 0.1 & -0.9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1.1 & -0.2 \\ -0.1 & -1.1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -0.2 & 0 \\ 0.2 & -0.1 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix}, E_A = E_B = E_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

由定理 3.2.4, 得到不同分段情况下的最大稳定时滞上界, 见下表。而已有离散化 Lyapunov 泛函方法必须限定 $C(t)$ 为常数矩阵。

表 3.2.1. 例 3.2.1 中的最大稳定时滞上界

Table 3.2.1 The upper bound on delay for the stability in example 3.2.1

| r_{\max} | N=1 | N=2 | N=3 |
|------------|-------|-------|-------|
| 定理 3.2.4 | 1.674 | 1.685 | 1.686 |

3.3 含混合时滞的中立系统稳定性分析

前一节中, 我们介绍了中立型时滞系统稳定性的研究方法。我们知道中立系统目前已得到广泛的关注。可是目前的绝大多数研究是针对简单的情况(中立时滞和离散时滞是同一个时滞)。而做为中立系统一类更一般的情况, 混合型中立系统却很少被研究。

这里我们先简单介绍一下已有的关于混合型时滞系统的研究情况。He, Wu, She & Liu (2004a)应用简单型 Lyapunov 泛函研究了混合中立系统的稳定性。不过由于是采用简单型 Lyapunov 泛函, 所得的结果是相对保守的。

前一节中, 我们知道在相关文献(Kharitonov, 2005 和 Rodriguez, Kharitonov, Dion & Gugard, 2004)研究了非混合型中立系统的完全 Lyapunov-Krasovskii 泛函。可是关于混合型中立系统还没有这样的报道。这是因为混合型中立系统要比非混合型中立系统复杂许多。

Han (2005)采用离散化 Lyapunov 泛函方法分析了混合中立型时滞系统稳定性。虽然 Han (2005)中的 Lyapunov-Krasovskii 泛函还不能证明是完全型的。但该方法已是目前保守性最低的时域分析方法。

而其它方法, 如频域方法和代数方法虽然可以检测给定时滞时系统的稳定性。但这些方法由于是基于系统特征方程的, 不能分析系统含不确定参数的情况。因此, Han (2005)的方法是目前最有效的混合型中立系统鲁棒稳定性分析工具。

可是, Han (2005)的结果和解析结果还有一定的误差。此外, Han (2005)是中立时滞不相关的。我们很自然的会希望得到一个中立时滞相关的结论, 尤其当中立时滞很小的时候。

本节的任务就是寻求比 Han (2005)方法更好的稳定判据。首先我们提出一个新的离散化 Lyapunov 泛函方法。这个方法是中立时滞相关的并且要比已有的方法保守性低很多。通过仿真可见, 本节方法可非常接近于解析结果。此外, 该方法可比之前的方法处理一类更广的鲁棒性分析问题。

本节符号说明： A^T 和 A^{-1} 分别代表矩阵 A 的转置和逆矩阵。 $A > 0$ ($A < 0$) 指 A 正定 (负定)。 $*$ 表示由对称性可直接推定的矩阵块。 I 为单位阵。如不特殊说明, 矩阵都认为是具有合适维数的。

考虑下面的含混时滞的中立系统

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) - C\dot{x}(t-\tau) &= Ax(t) + Bx(t-r) \\ x(t) &= \phi(t), t \in [-\max\{\tau, r\}, 0]\end{aligned}\quad (3.3.1)$$

其中 A , B 和 C 为给定常数矩阵, $\tau > 0$ 为中立时滞, $r > 0$ 是离散时滞, $\phi(t)$ 为初始条件。

本节中我们假定

A1) $|\lambda_i(C)| < 1$, ($i=1, 2, \dots, n$), 其中 $\lambda_i(C)$ 表示 $n \times n$ 维矩阵 C 的第 i 个特征值。上述假定是系统稳定的必要条件 (Hale & Lunel 1993)。
对系统 (3.3.1) 选取下面的 Lyapunov-Krasovskii 泛函

$$\begin{aligned}V(x_t) &= \begin{pmatrix} x(t) \\ x(t-\tau) \\ x(t-r) \end{pmatrix}^T P \begin{pmatrix} x(t) \\ x(t-\tau) \\ x(t-r) \end{pmatrix} \\ &+ 2 \begin{pmatrix} x^T(t) & x^T(t-\tau) & x^T(t-r) \end{pmatrix} \left(\int_{-\tau}^0 Q_\tau(\xi) x(t+\xi) d\xi + \int_{-r}^0 Q_r(\xi) x(t+\xi) d\xi \right) \\ &+ \int_{-\tau}^0 \left[\int_{-\tau}^0 x^T(t+\xi) R_\tau(\xi, \eta) x(t+\eta) d\eta \right] d\xi + \int_{-r}^0 \left[\int_{-r}^0 x^T(t+\xi) R_r(\xi, \eta) x(t+\eta) d\eta \right] d\xi \\ &+ \int_{-\tau}^0 x^T(t+\xi) S_\tau(\xi) x(t+\xi) d\xi + \int_{-r}^0 x^T(t+\xi) S_r(\xi) x(t+\xi) d\xi \\ &+ \int_{-\tau}^0 \dot{x}^T(t+\xi) L_\tau \dot{x}(t+\xi) d\xi + \int_{-r}^0 \dot{x}^T(t+\xi) L_r \dot{x}(t+\xi) d\xi\end{aligned}\quad (3.3.2)$$

其中 $x_t = x(t+\theta)$, $-\max\{\tau, r\} \leq \theta \leq 0$

$$P = P^T = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ * & P_{22} & P_{23} \\ * & * & P_{33} \end{pmatrix}, \quad Q_\tau(\xi) = \begin{pmatrix} Q_{\tau 1}(\xi) \\ Q_{\tau 2}(\xi) \\ Q_{\tau 3}(\xi) \end{pmatrix}, \quad Q_r(\xi) = \begin{pmatrix} Q_{r 1}(\xi) \\ Q_{r 2}(\xi) \\ Q_{r 3}(\xi) \end{pmatrix}.$$

(3.3.2) 的导数为

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x_t) = & 2 \begin{pmatrix} x^T(t) & x^T(t-\tau) & x^T(t-r) \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}(t-\tau) \\ \dot{x}(t-r) \end{pmatrix} \\
& + 2 \begin{pmatrix} x^T(t) & x^T(t-\tau) & x^T(t-r) \end{pmatrix} \left(\int_{-\tau}^0 Q_\tau(\xi) \dot{x}(t+\xi) d\xi + \int_{-r}^0 Q_r(\xi) \dot{x}(t+\xi) d\xi \right) \\
& + 2 \begin{pmatrix} \dot{x}^T(t) & \dot{x}^T(t-\tau) & \dot{x}^T(t-r) \end{pmatrix} \left(\int_{-\tau}^0 Q_\tau(\xi) x(t+\xi) d\xi + \int_{-r}^0 Q_r(\xi) x(t+\xi) d\xi \right) \\
& + 2 \int_{-\tau}^0 \left[\int_{-\tau}^0 x^T(t+\xi) R_\tau(\xi, \eta) \dot{x}(t+\eta) d\eta \right] d\xi + 2 \int_{-r}^0 \left[\int_{-r}^0 x^T(t+\xi) R_r(\xi, \eta) \dot{x}(t+\eta) d\eta \right] d\xi \\
& + 2 \int_{-\tau}^0 x^T(t+\xi) S_\tau(\xi) \dot{x}(t+\xi) d\xi + 2 \int_{-r}^0 x^T(t+\xi) S_r(\xi) \dot{x}(t+\xi) d\xi \\
& + \dot{x}^T(t) (L_\tau + L_r) \dot{x}(t) - \dot{x}^T(t-\tau) L_\tau \dot{x}(t-\tau) - \dot{x}^T(t-r) L_r \dot{x}(t-r) + \gamma
\end{aligned} \tag{3.3.3}$$

其中

$$\begin{aligned}
\gamma = & 2 \begin{pmatrix} x^T(t) & x^T(t-\tau) & x^T(t-r) & \dot{x}^T(t) & \dot{x}^T(t-\tau) & \dot{x}^T(t-r) \end{pmatrix} \times \\
& M \times [\dot{x}(t) - C\dot{x}(t-\tau) - Ax(t) - Bx(t-r)] = 0
\end{aligned}$$

$M^T = (M_1^T \ M_2^T \ M_3^T \ M_4^T \ M_5^T \ M_6^T)$, $M_i (i=1, \dots, 6)$ 是任意矩阵。

由分步积分得

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x_t) = & -e^T \Delta e + 2 \begin{pmatrix} \dot{x}^T(t) & \dot{x}^T(t-\tau) & \dot{x}^T(t-r) \end{pmatrix} \left(\int_{-\tau}^0 Q_\tau(\xi) x(t+\xi) d\xi + \int_{-r}^0 Q_r(\xi) x(t+\xi) d\xi \right) \\
& - 2 \begin{pmatrix} x^T(t) & x^T(t-\tau) & x^T(t-r) \end{pmatrix} \left(\int_{-\tau}^0 \dot{Q}_\tau(\xi) x(t+\xi) d\xi + \int_{-r}^0 \dot{Q}_r(\xi) x(t+\xi) d\xi \right) \\
& - \int_{-\tau}^0 x^T(t+\xi) \dot{S}_\tau(\xi) x(t+\xi) d\xi - \int_{-r}^0 x^T(t+\xi) \dot{S}_r(\xi) x(t+\xi) d\xi \\
& - \int_{-\tau}^0 d\xi \int_{-\tau}^0 x^T(t+\xi) \left[\frac{\partial}{\partial \xi} R_\tau(\xi, \eta) + \frac{\partial}{\partial \eta} R_\tau(\xi, \eta) \right] x(t+\eta) d\eta \\
& - \int_{-r}^0 d\xi \int_{-r}^0 x^T(t+\xi) \left[\frac{\partial}{\partial \xi} R_r(\xi, \eta) + \frac{\partial}{\partial \eta} R_r(\xi, \eta) \right] x(t+\eta) d\eta \\
& + 2x^T(t) \int_{-\tau}^0 R_\tau(0, \xi) x(t+\xi) d\xi + 2x^T(t-\tau) \int_{-\tau}^0 -R_\tau(-r, \xi) x(t+\xi) d\xi \\
& + 2x^T(t) \int_{-r}^0 R_r(0, \xi) x(t+\xi) d\xi + 2x^T(t-r) \int_{-r}^0 -R_r(-r, \xi) x(t+\xi) d\xi
\end{aligned} \tag{3.3.4}$$

其中 $e^T = (x^T(t) \ x^T(t-\tau) \ x^T(t-r) \ \dot{x}^T(t) \ \dot{x}^T(t-\tau) \ \dot{x}^T(t-r))$
 $\dot{Q}_\tau(\xi)$, $\dot{Q}_r(\xi)$, $\dot{S}_\tau(\xi)$ 和 $\dot{S}_r(\xi)$ 表示对 ξ 的导数。

$$\Delta = - \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} & \Delta_{14} & \Delta_{15} & \Delta_{16} \\ * & \Delta_{22} & \Delta_{23} & \Delta_{24} & \Delta_{25} & \Delta_{26} \\ * & * & \Delta_{33} & \Delta_{34} & \Delta_{35} & \Delta_{36} \\ * & * & * & \Delta_{44} & \Delta_{45} & \Delta_{46} \\ * & * & * & * & \Delta_{55} & \Delta_{56} \\ * & * & * & * & * & \Delta_{66} \end{pmatrix}$$

$$\Delta_{11} = Q_{r1}(0) + Q_{r1}(0) + Q_{r1}^T(0) + Q_{r1}^T(0) + S_r(0) + S_r(0) - M_1 A - A^T M_1^T$$

$$\Delta_{12} = -Q_{r1}(-\tau) + Q_{r2}^T(0) + Q_{r2}^T(0) - A^T M_2^T$$

$$\Delta_{13} = -M_1 B - A^T M_3^T - Q_{r1}(-r) + Q_{r3}^T(0) + Q_{r3}^T(0)$$

$$\Delta_{14} = M_1 - A^T M_4^T + P_{11}$$

$$\Delta_{15} = -M_1 C - A^T M_5^T + P_{12}$$

$$\Delta_{16} = -A^T M_6^T + P_{13}$$

$$\Delta_{22} = -Q_{r2}(-\tau) - Q_{r2}^T(-\tau) - S_r(-\tau)$$

$$\Delta_{23} = -M_2 B - Q_{r2}(-r) - Q_{r3}^T(-\tau)$$

$$\Delta_{24} = M_2 + P_{12}^T$$

$$\Delta_{25} = -M_2 C + P_{22}$$

$$\Delta_{26} = P_{23}$$

$$\Delta_{33} = -M_3 B - B^T M_3^T - Q_{r3}(-r) - Q_{r3}^T(-r) - S_r(-r)$$

$$\Delta_{34} = M_3 - B^T M_4^T + P_{13}^T$$

$$\Delta_{35} = -M_3 C - B^T M_5^T + P_{23}^T$$

$$\Delta_{36} = -B^T M_6^T + P_{33}$$

$$\Delta_{44} = M_4 + M_4^T + L_r + L_r$$

$$\Delta_{45} = -M_4 C + M_5^T$$

$$\Delta_{46} = M_6^T$$

$$\Delta_{55} = -M_5 C - C^T M_5^T - L_r$$

$$\Delta_{56} = -C^T M_6^T$$

$$\Delta_{66} = -L_r$$

对 $Q_r(\xi)$, $Q_r(\xi)$, $R_r(\xi, \eta)$, $R_r(\xi, \eta)$, $S_r(\xi)$ 和 $S_r(\xi)$ 进行离散化。将区间 $[-r, 0]$ ($[-\tau, 0]$) 分成具有等长 $h_r = r/N$ ($h_r = \tau/N$) 的 N 个区间 $[\theta_{rp}, \theta_{rp-1}]$ ($[\theta_{rp}, \theta_{rp-1}]$), ($p=1, \dots, N$), 其中 $\theta_{rp} = -ph_r$ ($\theta_{rp} = -ph_r$)。将正方形 $[-r, 0] \times [-r, 0]$ ($[-\tau, 0] \times [-\tau, 0]$) 分成 $N \times N$ 个 $[\theta_{rp}, \theta_{rp-1}] \times [\theta_{rq}, \theta_{rq-1}]$ ($[\theta_{rp}, \theta_{rp-1}] \times [\theta_{rq}, \theta_{rq-1}]$) ($p, q=1, \dots, N$) 区间, 并且每个区间再分成两个三角。

矩阵函数 $Q_r(\xi)$ 和 $S_r(\xi)$ ($Q_r(\xi)$ 和 $S_r(\xi)$) 选定为在每个区间内线性的。矩阵函数 $R_r(\xi, \eta)$ ($R_r(\xi, \eta)$) 选定为在每个三角内线性。

$$Q_r^T(\theta_{rp} + \alpha h_r) = \begin{pmatrix} Q_{r1}^T(\theta_{rp} + \alpha h_r) & Q_{r2}^T(\theta_{rp} + \alpha h_r) & Q_{r3}^T(\theta_{rp} + \alpha h_r) \end{pmatrix}, \quad Q_{ri}(\theta_{rp} + \alpha h_r) = (1 - \alpha)Q_{riP} + \alpha Q_{ri, P-1}$$

$$, (i=1, 2, 3), \alpha \in [0, 1], \quad S_r(\theta_{rp} + \alpha h_r) = (1 - \alpha)S_{rp} + \alpha S_{rp-1}, \alpha \in [0, 1]$$

$$R_r(\theta_{\tau p} + \alpha h_r, \theta_{\tau q} + \beta h_r) = \begin{cases} (1-\alpha)R_{\tau p, q} + \beta R_{\tau p-1, q-1} + (\alpha-\beta)R_{\tau p-1, q}, \alpha \geq \beta \\ (1-\beta)R_{\tau p, q} + \alpha R_{\tau p-1, q-1} + (\beta-\alpha)R_{\tau p, q-1}, \alpha < \beta \end{cases}, \alpha \in [0, 1], \beta \in [0, 1]$$

$$Q_\tau^T(\theta_{\tau p} + \alpha h_\tau) = (Q_{\tau 1}^T(\theta_{\tau p} + \alpha h_\tau) \quad Q_{\tau 2}^T(\theta_{\tau p} + \alpha h_\tau) \quad Q_{\tau 3}^T(\theta_{\tau p} + \alpha h_\tau)), \quad Q_{\tau a}(\theta_{\tau p} + \alpha h_\tau) = (1-\alpha)Q_{\tau a p} + \alpha Q_{\tau a, p-1},$$

$$(i=1, 2, 3), \alpha \in [0, 1], \quad S_\tau(\theta_{\tau p} + \alpha h_\tau) = (1-\alpha)S_{\tau p} + \alpha S_{\tau p-1}, \alpha \in [0, 1]$$

$$R_\tau(\theta_{\tau p} + \alpha h_\tau, \theta_{\tau q} + \beta h_\tau) = \begin{cases} (1-\alpha)R_{\tau p, q} + \beta R_{\tau p-1, q-1} + (\alpha-\beta)R_{\tau p-1, q}, \alpha \geq \beta \\ (1-\beta)R_{\tau p, q} + \alpha R_{\tau p-1, q-1} + (\beta-\alpha)R_{\tau p, q-1}, \alpha < \beta \end{cases}, \alpha \in [0, 1], \beta \in [0, 1]$$

沿 Han (2005) 中 Proposition 2 证明的线路, 我们得到对任意的 U_τ 和 U_r , 下面成立

$$\dot{V}(x_t) \leq - \left(e^T \int_0^1 \tilde{x}_\tau(\alpha) d\alpha \quad \int_0^1 \tilde{x}_r(\alpha) d\alpha \right) \begin{pmatrix} \Delta - \frac{1}{3} D_\tau^a U_\tau D_\tau^{aT} - \frac{1}{3} D_r^a U_r D_r^{aT} & -D_\tau^s & -D_r^s \\ * & R_{\tau d} + S_{\tau d} & 0 \\ * & * & R_{rd} + S_{rd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ \int_0^1 \tilde{x}_\tau(\alpha) d\alpha \\ \int_0^1 \tilde{x}_r(\alpha) d\alpha \end{pmatrix} \quad (3.3.5)$$

其中

$$\tilde{x}_\tau^T(\alpha) = (x_\tau^{(1)T}(\alpha) \quad x_\tau^{(2)T}(\alpha) \quad \cdots \quad x_\tau^{(N)T}(\alpha)), \quad x_\tau^{(p)}(\alpha) = x(t + \theta_{\tau p} + \alpha h_\tau),$$

$$\tilde{x}_r^T(\alpha) = (x_r^{(1)T}(\alpha) \quad x_r^{(2)T}(\alpha) \quad \cdots \quad x_r^{(N)T}(\alpha)), \quad x_r^{(p)}(\alpha) = x(t + \theta_{rp} + \alpha h_r)$$

$$S_{\tau d} = \text{diag}(S_{\tau d1} \quad S_{\tau d2} \quad \cdots \quad S_{\tau dN}), \quad S_{\tau dp} = S_{\tau p-1} - S_{\tau p}$$

$$S_{rd} = \text{diag}(S_{rd1} \quad S_{rd2} \quad \cdots \quad S_{rdN}), \quad S_{rdp} = S_{rp-1} - S_{rp}$$

$$R_{\tau d} = \begin{pmatrix} R_{\tau d11} & R_{\tau d12} & \cdots & R_{\tau d1N} \\ R_{\tau d21} & R_{\tau d22} & \cdots & R_{\tau d2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{\tau dN1} & R_{\tau dN2} & \cdots & R_{\tau dNN} \end{pmatrix}, \quad R_{\tau dpq} = h_\tau(R_{\tau p-1, q-1} - R_{\tau p, q})$$

$$R_{rd} = \begin{pmatrix} R_{rd11} & R_{rd12} & \cdots & R_{rd1N} \\ R_{rd21} & R_{rd22} & \cdots & R_{rd2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{rdN1} & R_{rdN2} & \cdots & R_{rdNN} \end{pmatrix}, \quad R_{rdpq} = h_r(R_{rp-1, q-1} - R_{rp, q})$$

$$D_{\tau p}^s = \begin{pmatrix} -(Q_{\tau 1 p-1} - Q_{\tau 1 p}) + \frac{h_\tau}{2}(R_{\tau 0 p-1} + R_{\tau 0 p}) \\ -(Q_{\tau 2 p-1} - Q_{\tau 2 p}) - \frac{h_\tau}{2}(R_{\tau N p-1} + R_{\tau N p}) \\ -(Q_{\tau 3 p-1} - Q_{\tau 3 p}) \\ \frac{h_\tau}{2}(Q_{\tau 1 p-1} + Q_{\tau 1 p}) \\ \frac{h_\tau}{2}(Q_{\tau 2 p-1} + Q_{\tau 2 p}) \\ \frac{h_\tau}{2}(Q_{\tau 3 p-1} + Q_{\tau 3 p}) \end{pmatrix}, D_{\tau p}^a = \begin{pmatrix} -\frac{h_\tau}{2}(R_{\tau 0, p-1} - R_{\tau 0, p}) \\ \frac{h_\tau}{2}(R_{\tau N, p-1} - R_{\tau N, p}) \\ 0 \\ -\frac{h_\tau}{2}(Q_{\tau 1 p-1} - Q_{\tau 1 p}) \\ -\frac{h_\tau}{2}(Q_{\tau 2 p-1} - Q_{\tau 2 p}) \\ -\frac{h_\tau}{2}(Q_{\tau 3 p-1} - Q_{\tau 3 p}) \end{pmatrix}$$

$$D_{rp}^s = \begin{pmatrix} -(Q_{r 1 p-1} - Q_{r 1 p}) + \frac{h_r}{2}(R_{r 0 p-1} + R_{r 0 p}) \\ -(Q_{r 2 p-1} - Q_{r 2 p}) \\ -(Q_{r 3 p-1} - Q_{r 3 p}) - \frac{h_r}{2}(R_{r N p-1} + R_{r N p}) \\ \frac{h_r}{2}(Q_{r 1 p-1} + Q_{r 1 p}) \\ \frac{h_r}{2}(Q_{r 2 p-1} + Q_{r 2 p}) \\ \frac{h_r}{2}(Q_{r 3 p-1} + Q_{r 3 p}) \end{pmatrix}, D_{rp}^a = \begin{pmatrix} -\frac{h_r}{2}(R_{r 0, p-1} - R_{r 0, p}) \\ 0 \\ \frac{h_r}{2}(R_{r N, p-1} - R_{r N, p}) \\ -\frac{h_r}{2}(Q_{r 1 p-1} - Q_{r 1 p}) \\ -\frac{h_r}{2}(Q_{r 2 p-1} - Q_{r 2 p}) \\ -\frac{h_r}{2}(Q_{r 3 p-1} - Q_{r 3 p}) \end{pmatrix}$$

由 Gu, Kharitonov & Chen (2003) 中 Proposition B.6, 我们得到 $\dot{V}(x_t) \leq 0$ 如果

$$\begin{pmatrix} \Delta & -D_\tau^s & -D_r^s & -D_\tau^a & -D_r^a \\ * & R_{\tau d} + S_{\tau d} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & R_{rd} + S_{rd} & 0 & 0 \\ * & * & * & 3S_{\tau d} & 0 \\ * & * & * & * & 3S_{rd} \end{pmatrix} > 0 \quad (3.3.6)$$

另一方面, 由 Jensen 不等式 (Gu, Kharitonov & Chen 2003) 得

$$V(x_t) \geq \varsigma^T (\tilde{P} + \tilde{L}_\tau + \tilde{L}_r) \varsigma + 2\varsigma^T \sum_{p=1}^N (V_{\tau Q^p} + V_{rQ^p}) + \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N (V_{\tau R^{pq}} + V_{rR^{pq}}) + \sum_{p=1}^N (V_{\tau S^p} + V_{rS^p}) \quad (3.3.7)$$

其中

$$\varsigma^T = (x^T(t) \quad x^T(t-\tau) \quad x^T(t-r))$$

$$V_{\tau Q^p} = \int_0^1 Q_\tau^{(p)}(\alpha) x_\tau^{(p)}(\alpha) h_\tau d\alpha, \quad V_{rQ^p} = \int_0^1 Q_r^{(p)}(\alpha) x_r^{(p)}(\alpha) h_r d\alpha$$

$$V_{\tau R^{pq}} = \int_0^1 \int_0^1 x_{\tau}^{(p)T}(\alpha) R_{\tau}^{(pq)}(\alpha, \beta) x_{\tau}^{(q)}(\beta) h_{\tau} d\beta h_{\tau} d\alpha$$

$$V_{rR^{pq}} = \int_0^1 \int_0^1 x_r^{(p)T}(\alpha) R_r^{(pq)}(\alpha, \beta) x_r^{(q)}(\beta) h_r d\beta h_r d\alpha$$

$$V_{\tau S^p} = \int_0^1 x_{\tau}^{(p)T}(\alpha) S_{\tau}^{(p)}(\alpha) x_{\tau}^{(p)}(\alpha) h_{\tau} d\alpha, V_{rS^p} = \int_0^1 x_r^{(p)T}(\alpha) S_r^{(p)}(\alpha) x_r^{(p)}(\alpha) h_r d\alpha$$

$$Q_{\tau}^{(p)}(\alpha) = Q_{\tau}(\theta_{\tau p} + \alpha h_{\tau}), Q_r^{(p)}(\alpha) = Q_r(\theta_{rp} + \alpha h_r)$$

$$S_{\tau}^{(p)}(\alpha) = S_{\tau}(\theta_{\tau p} + \alpha h_{\tau}), S_r^{(p)}(\alpha) = S_r(\theta_{rp} + \alpha h_r)$$

$$R_{\tau}^{(pq)}(\alpha, \beta) = R_{\tau}(\theta_{\tau p} + \alpha h_{\tau}, \theta_{\tau q} + \beta h_{\tau}), R_r^{(pq)}(\alpha, \beta) = R_r(\theta_{rp} + \alpha h_r, \theta_{rq} + \beta h_r)$$

$$\tilde{L}_{\tau} = \begin{pmatrix} L_{\tau}/\tau & -L_{\tau}/\tau & 0 \\ -L_{\tau}/\tau & L_{\tau}/\tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tilde{L}_r = \begin{pmatrix} L_r/r & 0 & -L_r/r \\ 0 & 0 & 0 \\ -L_r/r & 0 & L_r/r \end{pmatrix}$$

进一步

$$V(x_i) \geq \int_0^1 \begin{pmatrix} \zeta^T & \psi_{\tau}^T(\alpha) & \psi_r^T(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P + \tilde{L}_{\tau} + \tilde{L}_r & \tilde{Q}_{\tau} & \tilde{Q}_r \\ * & \tilde{R}_{\tau} + \tilde{S}_{\tau} & 0 \\ * & * & \tilde{R}_r + \tilde{S}_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta \\ \psi_{\tau}(\alpha) \\ \psi_r(\alpha) \end{pmatrix} d\alpha \quad (3.3.8)$$

其中

$$\tilde{Q}_{\tau} = (Q_{\tau 0} \quad Q_{\tau 1} \quad \cdots \quad Q_{\tau N}), \tilde{Q}_r = (Q_{r 0} \quad Q_{r 1} \quad \cdots \quad Q_{r N})$$

$$\tilde{R}_{\tau} = \begin{pmatrix} R_{\tau 00} & R_{\tau 01} & \cdots & R_{\tau 0N} \\ R_{\tau 10} & R_{\tau 11} & \cdots & R_{\tau 1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{\tau N0} & R_{\tau N1} & \cdots & R_{\tau NN} \end{pmatrix}, \tilde{R}_r = \begin{pmatrix} R_{r 00} & R_{r 01} & \cdots & R_{r 0N} \\ R_{r 10} & R_{r 11} & \cdots & R_{r 1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{r N0} & R_{r N1} & \cdots & R_{r NN} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{S}_{\tau} = \text{diag}(S_{\tau 0}/h_{\tau} \quad S_{\tau 1}/h_{\tau} \quad \cdots \quad S_{\tau N}/h_{\tau}), \tilde{S}_r = \text{diag}(S_{r 0}/h_r \quad S_{r 1}/h_r \quad \cdots \quad S_{r N}/h_r)。$$

$$\psi_{\tau}(\alpha) = \begin{pmatrix} \psi_{\tau(0)}(\alpha) \\ \psi_{\tau(1)}(\alpha) \\ \psi_{\tau(2)}(\alpha) \\ \vdots \\ \psi_{\tau(N-1)}(\alpha) \\ \psi_{\tau(N)}(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{\tau(1)}(\alpha) \\ \varphi_{\tau(2)}(\alpha) + \varphi_{\tau}^{(1)}(\alpha) \\ \varphi_{\tau(3)}(\alpha) + \varphi_{\tau}^{(2)}(\alpha) \\ \vdots \\ \varphi_{\tau(N)}(\alpha) + \varphi_{\tau}^{(N-1)}(\alpha) \\ \varphi_{\tau}^{(N)}(\alpha) \end{pmatrix}, \psi_r(\alpha) = \begin{pmatrix} \psi_{r(0)}(\alpha) \\ \psi_{r(1)}(\alpha) \\ \psi_{r(2)}(\alpha) \\ \vdots \\ \psi_{r(N-1)}(\alpha) \\ \psi_{r(N)}(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{r(1)}(\alpha) \\ \varphi_{r(2)}(\alpha) + \varphi_r^{(1)}(\alpha) \\ \varphi_{r(3)}(\alpha) + \varphi_r^{(2)}(\alpha) \\ \vdots \\ \varphi_{r(N)}(\alpha) + \varphi_r^{(N-1)}(\alpha) \\ \varphi_r^{(N)}(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\varphi_{\tau}^{(p)}(\alpha) = h_{\tau} \int_0^{\alpha} x_{\tau}^{(p)}(\beta) d\beta, \varphi_{\tau(p)}(\alpha) = h_{\tau} \int_{\alpha}^1 x_{\tau}^{(p)}(\beta) d\beta,$$

$$\varphi_r^{(p)}(\alpha) = h_r \int_0^\alpha x_r^{(p)}(\beta) d\beta, \quad \varphi_{r(p)}(\alpha) = h_r \int_\alpha^1 x_r^{(p)}(\beta) d\beta.$$

这样, 由 (3.3.5), (3.3.6) 和 (3.3.8), 我们得到系统 (3.3.1) 的稳定判据。

定理 3.3.1: 系统 (3.3.1) 渐近稳定, 如果存在矩阵 $P, Q_{\tau_p}, Q_{\tau_r}, S_{\tau_p} > 0, S_{\tau_r} > 0, R_{\tau_p, q}, R_{\tau_r, q} (p, q = 0, 1, \dots, N), L_\tau > 0, L_r > 0$ 和 $M_i (i = 1, \dots, 6)$ 满足 (3.3.6) 和下面的线性矩阵不等式

$$\begin{pmatrix} P + \tilde{L}_\tau + \tilde{L}_r & \tilde{Q}_\tau & \tilde{Q}_r \\ * & \tilde{R}_\tau + \tilde{S}_\tau & 0 \\ * & * & \tilde{R}_r + \tilde{S}_r \end{pmatrix} > 0 \quad (3.3.9)$$

注 3.3.1: Han (2005) 中的方法是中立时滞不相关的而本节提出的方法是中立时滞相关的。可以预见本节的方法比 Han (2005) 中的方法保守性更低, 尤其当中立时滞比较小的时候。并且注意, Han (2005) 中的方法不易直接改进为中立时滞相关条件, 因为 Han (2005) 中的 Lyapunov-Krasovskii 泛函为一种含有偏差算子: $x(t) - Cx(t - \tau)$ 的结构。而本节采用的 Lyapunov-Krasovskii 泛函为一种增广形式。这样的结构使得中立时滞相关型的稳定判据可解。此外, 通过仿真可见, 本方法的结构相当接近于解析结果。

下面我接着考虑当系统含不确定参数时的情况。考虑下面的中立系统

$$\dot{x}(t) - C(t)\dot{x}(t - \tau) = A(t)x(t) + B(t)x(t - r) \quad (3.3.10)$$

其中 $A(t), B(t)$ 和 $C(t)$ 是不确定矩阵, 假定:

$$A(t) = A + \Delta A(t), \quad B(t) = B + \Delta B(t), \quad C(t) = C + \Delta C(t)$$

$$[\Delta A(t) \quad \Delta B(t) \quad \Delta C(t)] = EF(t)[E_A \quad E_B \quad E_C]$$

其中 A, B, C, E, E_A, E_B 和 E_C 是已知常数矩阵, $F(t)$ 是未知时变矩阵满足, $\|F(t)\| \leq 1$ 。假定 $\|C(t)\| < 1$ 。

下面给出一个鲁棒性分析中常用的引理。

引理 3.3.1 (Wang, Xie & de Souza 1992): 对任意 $D, E, F (F^T F \leq I)$ 和标量 $\varepsilon > 0$, 下面不等式成立:

$$DFE + E^T F^T D^T \leq \varepsilon DD^T + \varepsilon^{-1} E^T E \quad (3.3.11)$$

定理 3.3.2: 系统 (3.3.10) 一致渐近稳定, 如果存在矩阵 $P, Q_{\tau_p}, Q_{\tau_r}, S_{\tau_p} > 0, S_{\tau_r} > 0, R_{\tau_p, q}, R_{\tau_r, q} (p, q = 0, 1, \dots, N), L_\tau > 0, L_r > 0, M_i (i = 1, \dots, 6)$ 和一个标量 $\varepsilon > 0$ 满足 (3.3.9) 和下面的线性矩阵不等式

$$\begin{pmatrix} \Delta' & -D_\tau^s & -D_r^s & -D_\tau^a & -D_r^a & ME \\ * & R_{\tau d} + S_{\tau d} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & R_{rd} + S_{rd} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 3S_{\tau d} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & 3S_{rd} & 0 \\ * & * & * & * & * & \varepsilon I \end{pmatrix} > 0 \quad (3.3.12)$$

其中

$$\Delta' = \Delta - \varepsilon \Gamma_E^T \Gamma_E, \quad \Gamma_E = [E_A \quad 0 \quad E_B \quad 0 \quad E_C \quad 0]$$

证明： 根据 (3.3.8), 我们知道 Lyapunov-Krasovskii 泛函条件成立如果 (3.3.9) 满足。我们接着证明 Lyapunov-Krasovskii 泛函导数条件。

如果考虑系统不确定性, γ 将被替换为

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma} = & 2 \begin{pmatrix} x^T(t) & x^T(t-\tau) & x^T(t-r) & \dot{x}^T(t) & \dot{x}^T(t-\tau) & \dot{x}^T(t-r) \end{pmatrix} \times M \\ & \times [\dot{x}(t) - (C + EF(t)E_C)\dot{x}(t-\tau) - (A + EF(t)E_A)x(t) - (B + EF(t)E_B)x(t-r)] = 0 \end{aligned}$$

相应地, (3.3.2) 的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) = & 2 \begin{pmatrix} x^T(t) & x^T(t-\tau) & x^T(t-r) \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}(t-\tau) \\ \dot{x}(t-r) \end{pmatrix} \\ & + 2 \begin{pmatrix} x^T(t) & x^T(t-\tau) & x^T(t-r) \end{pmatrix} \left(\int_{-\tau}^0 Q_\tau(\xi) \dot{x}(t+\xi) d\xi + \int_{-r}^0 Q_r(\xi) \dot{x}(t+\xi) d\xi \right) \\ & + 2 \begin{pmatrix} \dot{x}^T(t) & \dot{x}^T(t-\tau) & \dot{x}^T(t-r) \end{pmatrix} \left(\int_{-\tau}^0 Q_\tau(\xi) x(t+\xi) d\xi + \int_{-r}^0 Q_r(\xi) x(t+\xi) d\xi \right) \\ & + 2 \int_{-\tau}^0 \left[\int_{-\tau}^0 x^T(t+\xi) R_\tau(\xi, \eta) \dot{x}(t+\eta) d\eta \right] d\xi + 2 \int_{-r}^0 \left[\int_{-r}^0 x^T(t+\xi) R_r(\xi, \eta) \dot{x}(t+\eta) d\eta \right] d\xi \\ & + 2 \int_{-\tau}^0 x^T(t+\xi) S_\tau(\xi) \dot{x}(t+\xi) d\xi + 2 \int_{-r}^0 x^T(t+\xi) S_r(\xi) \dot{x}(t+\xi) d\xi \\ & + \dot{x}^T(t)(L_\tau + L_r)\dot{x}(t) - \dot{x}^T(t-\tau)L_\tau\dot{x}(t-\tau) - \dot{x}^T(t-r)L_r\dot{x}(t-r) + \tilde{\gamma} \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

类似于定理 3.3.1 的思路, 下面的关系成立

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) \leq & - \left(e^T \int_0^1 \tilde{x}_\tau(\alpha) d\alpha \quad \int_0^1 \tilde{x}_r(\alpha) d\alpha \right) \\ & \begin{pmatrix} \tilde{\Delta} - \frac{1}{3} D_\tau^a U_\tau D_\tau^{aT} - \frac{1}{3} D_r^a U_r D_r^{aT} & -D_\tau^s & -D_r^s \\ * & R_{\tau d} + S_{\tau d} & 0 \\ * & * & R_{rd} + S_{rd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ \int_0^1 \tilde{x}_\tau(\alpha) d\alpha \\ \int_0^1 \tilde{x}_r(\alpha) d\alpha \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

其中 $\tilde{\Delta} = \Delta - ME(-F(t))\Gamma_E - \Gamma_E^T(-F^T(t))E^T M^T$

由消去任意矩阵 U_τ 和 U_r (利用 Gu, Kharitonov & Chen 2003 中

Proposition B.6), 我们得到 Lyapunov-Krasovskii 泛函导数条件成立, 如果

$$\Upsilon - \begin{pmatrix} ME(-F(t))\Gamma_E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Gamma_E^T(-F^T(t))E^T M^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} > 0 \quad (3.3.15)$$

其中 Υ 为 (3.3.6) 左边部分。

由引理 3.3.1, 得 (3.3.15) 成立的充分条件是存在标量 $\varepsilon > 0$ 满足

$$\Upsilon - \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1} M E E^T M^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \varepsilon \Gamma_E^T \Gamma_E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} > 0 \quad (3.3.16)$$

应用 Schur 补性质 (Boyd, El Ghaoui, Feron & Balakrishnan 1994), 我们发现 (3.3.12) 与 (3.3.16) 是等价的。□

注 3.3.2: 本节的方法允许中立时滞项的系数矩阵为时变不确定的。可是 Han (2005), He, Wu, She & Liu (2004a) 的方法必须限定 $C(t)$ 为常数矩阵。在 Han (2005) 和 He, Wu, She & Liu (2004a) 中, 需要计算偏差算子: $x(t) - C(t)x(t-\tau)$ 的导数。而这个导数在 $C(t)$ 时变不确定时无法计算。

接下来, 给出两个数值仿真例子, 说明本节方法的有效性。

例 3.3.1: 考虑下面系统

$$\dot{x}(t) - C\dot{x}(t-\tau) = Ax(t) + Bx(t-r)$$

令

$$A = \begin{pmatrix} -0.9 & 0.2 \\ 0.1 & -0.9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1.1 & -0.2 \\ -0.1 & -1.1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -0.2 & 0 \\ 0.2 & -0.1 \end{pmatrix}$$

我们要计算可确保系统稳定的最大离散时滞上界。研究三组参数情况。分别应用 Han (2005), He, Wu, She & Liu (2004a) 和 定理 3.3.1 (取 $N=2$) 中的方法求得结果, 见下表。同时还给出了相应的解析结果。

表 3.3.1 由不同方法得到的 r 的时滞上界
Table 3.3.1 delay bound by different methods

| | $\tau = 0.1$ | $\tau = 0.5$ | $\tau = 1$ |
|---------------------------|--------------|--------------|------------|
| Han (2005) | 2.1229 | 2.1229 | 2.1229 |
| He, Wu, She & Liu (2004a) | 1.7100 | 1.6718 | 1.6543 |
| 定理 3.3.1 | 2.2951 | 2.3471 | 2.3752 |
| 解析结果 | 2.2963 | 2.3491 | 2.3775 |

可见, 本节的方法要比已有方法保守性低很多。并且本节的结果已非常接近解

析结果。

在文献 He, Wu, She & Liu (2004a) 中指出了离散时滞和中立时滞的交互关系。He, Wu, She & Liu (2004a) 指出: 离散时滞 r 的上界随中立时滞 τ 的增加而减少。由上表可见, 这个结论是不正确的。

例 3.3.2: 考虑下面中立系统

$$\dot{x}(t) - C(t)\dot{x}(t - \tau) = A(t)x(t) + B(t)x(t - r)$$

令 $A(t) = A + EF(t)E_A$, $B(t) = B + EF(t)E_B$, $C(t) = C + EF(t)E_C$, A , B 和 C 取值同例 3.3.1, $F(t)$ 为时变未知, 满足 $\|F(t)\| \leq 1$,

$$E = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix}, E_A = E_B = E_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

对给定中立时滞 τ , 我们计算可保证系统稳定的最大离散时滞 r 。由定理 3.3.2 (取 $N=2$), 得到: 当 $\tau=0.1$, r 的上界为 1.89。当 $\tau=0.5$, r 的上界为 1.91。当 $\tau=1$, r 的上界为 1.86。

而由前面的分析可知 Han (2005) 和 He, Wu, She & Liu (2004a) 必须限定 $C(t)$ 为常数矩阵。另一方面, 这里的解析结果是由 Li & Zhu 的方法得到的。由于这种方法是基于特征根的方法, 不能分析鲁棒稳定性。

3.4 时滞系统指数估计

论文前面的章节中, 我们主要研究的是时滞系统的稳定性和鲁棒稳定性问题。在这一节, 我们将介绍一类特殊的稳定性问题, 时滞系统的指数估计。

我们知道, 无论在理论研究还是实际应用中, 指数稳定性都具有非常重要的作用。尤其在某些时候, 我们需要知道系统的收敛率, 这个重要的指数稳定指标。对于时滞系统, 文献 Hmamed (1996), Mori, Fukuma & Kuwahara (1982), Niculescu, de Souza, Dugard & Dion (1998), 和 Wang, Chen & Lin (1987) 提出了相应的指数估计方法。其中, Hmamed (1996) 和 Mori, Fukuma & Kuwahara (1982) 采用广义 Bellman-Gronwall 引理方法而 Niculescu, de Souza, Dugard & Dion (1998), 和 Wang, Chen & Lin (1987) 采用矩阵测度方法。可是这些方法不容易应用。另一方面, Kharitonov, Mondié & Collado (2005), Liu (2003), Mondié & Kharitonov (2005) 和 Xu, Lam & Zhong (2006) 采用 Lyapunov-Krasovskii 泛函和线性矩阵不等式的方法。这些方法要比之前的方法容易实现且保守性更低。

本节中, 我们提出一种新的指数估计方法。我们采用离散化 Lyapunov 泛函方法。因为前面介绍的方法采用简单 Lyapunov 泛函方法, 因此本节的方法将大幅降低结论的保守性。并且基于提出的新型完全 Lyapunov-Krasovskii 泛函, 本节的方法可以处理时滞项矩阵为时变不确定的情况。而前面提到的方法必须限定时滞项矩阵为常数矩阵。

本节符号说明: A^T 和 A^{-1} 分别代表矩阵 A 的转置和逆矩阵。 $A > 0$ ($A < 0$)

指 A 正定 (负定)。* 表示由对称性可直接推定的矩阵块。 I 为单位阵。‘.’ 表示对时间 t 求导, 而 ‘.’ 表示对变量 ξ 求导。 $|\cdot|$ 和 $\|\cdot\|$ 分别表示 Euclidean 向量范数和矩阵范数。如不特殊说明, 矩阵都认为是具有合适维数的。

考虑下面的时滞系统

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) - C\dot{x}(t-r) &= Ax(t) + Bx(t-r) \\ x(t) &= \varphi(t), t \in [-r, 0]\end{aligned}\quad (3.4.1)$$

其中 $r > 0$ 为常数时滞, A, B 和 C 是给定常数矩阵, $\varphi(t)$ 为初始条件。

本节中假定

A1) $|\lambda_i(C)| < 1, (i=1, 2, \dots, n)$, 其中 $\lambda_i(C)$ 表示 $n \times n$ 维矩阵 C 的第 i 个特征值。

A1) 是系统 (3.4.1) 稳定的必要条件。

系统 (3.4.1) 是一个中立型时滞系统。如果令 $C=0$, 则系统 (3.4.1) 简化为一个滞后型时滞系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-r) \quad (3.4.2)$$

本节对系统 (3.4.1) 得到的条件同样适合系统 (3.4.2)。因此这里仅对系统 (3.4.1) 进行分析。

定义 3.4.1: 系统 (3.4.1) 指数稳定, 如果存在标量 $\sigma \geq 1$ 和 $\lambda > 0$ 满足 $|x(t)| \leq \sigma e^{-\lambda t} \cdot \max\{|\varphi|_r, |\dot{\varphi}|_r\}$ ($|\varphi|_r = \sup_{-r \leq \theta \leq 0} |\varphi(\theta)|, |\dot{\varphi}|_r = \sup_{-r \leq \theta \leq 0} |\dot{\varphi}(\theta)|$)。标量 λ 和 σ 分别称为收敛率和收敛系数。

本节的任务就是估计出系统 (3.4.1) 的收敛率 λ 。基本的思路是进行下面的变换

$$z(t) = e^{\lambda t} x(t) \quad (3.4.3)$$

由 (3.4.1) 的关系我们得到

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) - \hat{C}\dot{z}(t-r) &= \hat{A}z(t) + \hat{B}z(t-r) \\ z(t) &= \phi(t) = e^{\lambda t} \varphi(t), t \in [-r, 0]\end{aligned}\quad (3.4.4)$$

其中 $\hat{A} = A + \lambda I, \hat{B} = e^{\lambda r} (B - \lambda C), \hat{C} = e^{\lambda r} C$ 。

不难看出, 如果 A1) 满足则对一个充分小的 $\lambda > 0, |\lambda_i(\hat{C})| < 1 (i=1, 2, \dots, n)$ 。

Kharitonov, Mondié & Collado (2005), Liu (2003), Mondié & Kharitonov (2005) 和 Xu, Lam & Zhong (2006) 采用简单 Lyapunov 泛函方法。而本节我们将采用离散化 Lyapunov 泛函方法。这样, 我们的方法可从以下几方面改进已有结论:

1. 本节的方法保守性更低。也就是, 可以估计出系统更大的收敛率。
2. 时滞系统中有一类系统, 当时滞为零的时候系统不稳定, 而当时滞为某一范围内的正值时, 系统稳定。对于这类系统已有的指数估计方法是不能处理的。而本节的方法可以对其分析。并且我们可发现, 系统收敛率不是随时滞的增加而单调减小的。
3. 本节的离散化 Lyapunov 泛函方法采用了新型的完全 Lyapunov-Krasovskii 泛函。从而可比以往的方法处理一类更广的鲁棒稳定性分析问题。

对系统 (3.4.4) 构建如下的 Lyapunov-Krasovskii 泛函

$$V(z_t) = \begin{pmatrix} z^T(t) & z^T(t-r) \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} z(t) \\ z(t-r) \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} z^T(t) & z^T(t-r) \end{pmatrix} \int_{-r}^0 Q(\xi) z(t+\xi) d\xi + \int_{-r}^0 \left[\int_{-r}^0 z^T(t+\xi) R(\xi, \eta) z(t+\eta) d\eta \right] d\xi + \int_{-r}^0 z^T(t+\xi) S(\xi) z(t+\xi) d\xi + \int_{-r}^0 \dot{z}^T(t+\xi) L \dot{z}(t+\xi) d\xi \quad (3.4.5)$$

其中 $P = P^T = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ * & P_3 \end{pmatrix} > 0$, $Q(\xi) = \begin{pmatrix} Q_1(\xi) \\ Q_2(\xi) \end{pmatrix}$, $R(\xi, \eta) > 0$, $S(\xi) > 0$, $L > 0$ 。

将区间 $[t-r, t]$ 分成 N 个等长 ($h = r/N$) 区间 $[\theta_p, \theta_{p+1}]$, ($p = 1, \dots, N$, $\theta_p = t - ph$)。将正方形区间 $[t-r, t] \times [t-r, t]$ 分成 $N \times N$ 个小正方形区间 $[\theta_p, \theta_{p+1}] \times [\theta_q, \theta_{q+1}]$ ($p, q = 1, \dots, N$), 并且每个小正方形区间再分成两个三角。矩阵函数 $Q(\xi)$ 和 $S(\xi)$ 选定为区间内线性, 矩阵函数 $R(\xi, \eta)$ 选定为每个三角内线性。

$$Q^T(\theta_p + \alpha h) = \begin{pmatrix} Q_1^T(\theta_p + \alpha h) & Q_2^T(\theta_p + \alpha h) \end{pmatrix}, Q_i(\theta_p + \alpha h) = (1 - \alpha)Q_{ip} + \alpha Q_{i, p+1}, (i = 1, 2), \alpha \in [0, 1] \quad (3.4.6a)$$

$$S(\theta_p + \alpha h) = (1 - \alpha)S_p + \alpha S_{p+1}, \alpha \in [0, 1] \quad (3.4.6b)$$

$$R(\theta_p + \alpha h, \theta_q + \beta h) = \begin{cases} (1 - \alpha)R_{p,q} + \beta R_{p-1, q-1} + (\alpha - \beta)R_{p-1, q}, & \alpha \geq \beta \\ (1 - \beta)R_{p,q} + \alpha R_{p-1, q-1} + (\beta - \alpha)R_{p, q-1}, & \alpha < \beta \end{cases}, \alpha \in [0, 1], \beta \in [0, 1] \quad (3.4.6c)$$

这样我们得到对 $\theta_p < \xi < \theta_{p+1}$ 和 $\theta_q < \eta < \theta_{q+1}$

$$S'(\xi) = \frac{1}{h}(S_{p+1} - S_p), Q'_i(\xi) = \frac{1}{h}(Q_{ip+1} - Q_{ip}), \frac{\partial R(\xi, \eta)}{\partial \xi} + \frac{\partial R(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{1}{h}(R_{p-1, q-1} - R_{p, q}) \quad (3.4.7)$$

由上面的完全 Lyapunov-Krasovskii 泛函和离散化我们得到下面结论。

定理 3.4.1: 假定 A1) 成立。系统 (3.4.1) 指数稳定并且具有收敛率 λ 如果存在矩阵, $Q_p, S_p > 0$, $R_{p,q}$, ($p, q = 0, 1, \dots, N$), $L > 0$ 和 M 满足下面的线性矩阵不等式:

$$\begin{pmatrix} P + \tilde{L} & \tilde{Q} \\ \tilde{Q}^T & \tilde{R} + \tilde{S} \end{pmatrix} > 0 \quad (3.4.8)$$

$$\begin{pmatrix} \Delta & -D^s & -D^a \\ * & R_d + S_d & 0 \\ * & * & 3S_d \end{pmatrix} > 0 \quad (3.4.9)$$

其中

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} R_{00} & R_{01} & \cdots & R_{0N} \\ R_{10} & R_{11} & \cdots & R_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{N0} & R_{N1} & \cdots & R_{NN} \end{pmatrix}, \tilde{L} = \begin{pmatrix} L/r & -L/r \\ -L/r & L/r \end{pmatrix},$$

$$\tilde{S} = \text{diag}(S_0/h \quad S_1/h \quad \cdots \quad S_N/h), \tilde{Q} = (Q_0 \quad Q_1 \quad \cdots \quad Q_N),$$

$$\Delta = - \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} & \Delta_{14} \\ * & \Delta_{22} & \Delta_{23} & \Delta_{24} \\ * & * & \Delta_{33} & \Delta_{34} \\ * & * & * & \Delta_{44} \end{pmatrix}$$

$$\Delta_{11} = Q_1(0) + Q_1^T(0) + S(0) - M_1 \hat{A} - \hat{A}^T M_1^T$$

$$\Delta_{12} = -Q_1(-r) + Q_2^T(0) - M_1 \hat{B} - \hat{A}^T M_2^T$$

$$\Delta_{13} = P_1 + M_1 - \hat{A}^T M_3^T$$

$$\Delta_{14} = P_2 - M_1 \hat{C} - \hat{A}^T M_4^T$$

$$\Delta_{22} = -Q_2(-r) - Q_2^T(-r) - S(-r) - M_2 \hat{B} - \hat{B}^T M_2^T$$

$$\Delta_{23} = P_2^T + M_2 - \hat{B}^T M_3^T$$

$$\Delta_{24} = P_3 - M_2 \hat{C} - \hat{B}^T M_4^T$$

$$\Delta_{33} = L + M_3 + M_3^T$$

$$\Delta_{34} = -M_3 \hat{C} + M_4^T$$

$$\Delta_{44} = -M_4 \hat{C} - \hat{C}^T M_4^T - L$$

$$R_d = \begin{pmatrix} R_{d11} & R_{d12} & \cdots & R_{d1N} \\ R_{d21} & R_{d22} & \cdots & R_{d2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{dN1} & R_{dN2} & \cdots & R_{dNN} \end{pmatrix}, R_{dpq} = h(R_{p-1,q-1} - R_{p,q}),$$

$$S_d = \text{diag}(S_{d1} \quad S_{d2} \quad \cdots \quad S_{dN}), S_{dp} = S_{p-1} - S_p,$$

$$D^s = (D_1^s \quad D_2^s \quad \cdots \quad D_N^s), D^a = (D_1^a \quad D_2^a \quad \cdots \quad D_N^a),$$

$$D_p^s = \begin{pmatrix} -(Q_{1p-1} - Q_{1p}) + \frac{h}{2}(R_{0,p-1} + R_{0,p}) \\ -(Q_{2p-1} - Q_{2p}) - \frac{h}{2}(R_{N,p-1} + R_{N,p}) \\ \frac{h}{2}(Q_{1p-1} + Q_{1p}) \\ \frac{h}{2}(Q_{2p-1} + Q_{2p}) \end{pmatrix}, D_p^a = \begin{pmatrix} -\frac{h}{2}(R_{0,p-1} - R_{0,p}) \\ \frac{h}{2}(R_{N,p-1} - R_{N,p}) \\ -\frac{h}{2}(Q_{1p-1} - Q_{1p}) \\ -\frac{h}{2}(Q_{2p-1} - Q_{2p}) \end{pmatrix},$$

$$\hat{A} = A + \lambda I, \quad \hat{B} = e^{\lambda r}(B - \lambda C), \quad \hat{C} = e^{\lambda r}C.$$

证明：根据 Jensen 不等式 (Gu, Kharitonov & Chen 2003) 得到

$$\int_{-r}^0 \dot{z}^T(t+\xi) L \dot{z}(t+\xi) d\xi \geq \begin{pmatrix} z^T(t) & z^T(t-r) \end{pmatrix} \tilde{L} \begin{pmatrix} z(t) \\ z(t-r) \end{pmatrix} \quad (3.4.10)$$

和

$$V(z_t) \geq \begin{pmatrix} z^T(t) & z^T(t-r) \end{pmatrix} (P + \tilde{L}) \begin{pmatrix} z(t) \\ z(t-r) \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} z^T(t) & z^T(t-r) \end{pmatrix} \sum_{p=1}^N V_{Q^p} + \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N V_{R^{pq}} + \sum_{p=1}^N V_{S^p} \quad (3.4.11)$$

其中

$$V_{Q^p} = \int_0^1 Q^{(p)}(\alpha) z^{(p)}(\alpha) h d\alpha$$

$$V_{R^{pq}} = \int_0^1 \int_0^1 z^{(p)T}(\alpha) R^{(pq)}(\alpha, \beta) z^{(q)}(\beta) h d\beta h d\alpha$$

$$V_{S^p} = \int_0^1 z^{(p)T}(\alpha) S^{(p)}(\alpha) z^{(p)}(\alpha) h d\alpha$$

$$z^{(p)}(\alpha) = z(\theta_p + \alpha h)$$

$$Q^{(p)}(\alpha) = Q(\theta_p + \alpha h), S^{(p)}(\alpha) = S(\theta_p + \alpha h), R^{(pq)}(\alpha, \beta) = R(\theta_p + \alpha h, \theta_q + \beta h)$$

如果 $S_p > 0$ ($p = 0, 1, \dots, N$), 则

$$V(z_t) \geq \int_0^1 \begin{pmatrix} \varsigma^T & \psi^T(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P + \tilde{L} & \tilde{Q} \\ \tilde{Q}^T & \tilde{R} + \tilde{S} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varsigma \\ \psi(\alpha) \end{pmatrix} d\alpha \quad (3.4.12)$$

其中

$$\varsigma^T = \begin{pmatrix} z^T(t) & z^T(t-r) \end{pmatrix}, \psi(\alpha) = \begin{pmatrix} \psi_{(0)}(\alpha) \\ \psi_{(1)}(\alpha) \\ \psi_{(2)}(\alpha) \\ \vdots \\ \psi_{(N-1)}(\alpha) \\ \psi_{(N)}(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{(1)}(\alpha) \\ \varphi_{(2)}(\alpha) + \varphi^{(1)}(\alpha) \\ \varphi_{(3)}(\alpha) + \varphi^{(2)}(\alpha) \\ \vdots \\ \varphi_{(N)}(\alpha) + \varphi^{(N-1)}(\alpha) \\ \varphi^{(N)}(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\varphi^{(p)}(\alpha) = h \int_0^\alpha z^{(p)}(\beta) d\beta, \varphi_{(p)}(\alpha) = h \int_\alpha^1 z^{(p)}(\beta) d\beta, p = 0, 1, \dots, N.$$

在对 (3.4.5) 求导前, 我们给出下面应用自由权矩阵 (He, Wu, She & Liu 2004a, b) 的表达式

$$\gamma = 2 \begin{pmatrix} z^T(t) & z^T(t-r) & \dot{z}^T(t) & \dot{z}^T(t-r) \end{pmatrix} M [\dot{z}(t) - \hat{C}\dot{z}(t-r) - \hat{A}z(t) - \hat{B}z(t-r)] = 0 \quad (3.4.13)$$

其中 $M^T = (M_1^T \ M_2^T \ M_3^T \ M_4^T)$, M_i ($i = 1, 2, 3, 4$) 为任意矩阵。

(3.4.5) 的导数为

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z_t) = & 2 \begin{pmatrix} z^T(t) & z^T(t-r) \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} \dot{z}(t) \\ \dot{z}(t-r) \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} z^T(t) & z^T(t-r) \end{pmatrix} \int_{-r}^0 Q(\xi) \dot{z}(t+\xi) d\xi \\
& + 2 \begin{pmatrix} \dot{z}^T(t) & \dot{z}^T(t-r) \end{pmatrix} \int_{-r}^0 Q(\xi) z(t+\xi) d\xi + 2 \int_{-r}^0 \left[\int_{-r}^0 z^T(t+\xi) R(\xi, \eta) \dot{z}(t+\eta) d\eta \right] d\xi \\
& + 2 \int_{-r}^0 z^T(t+\xi) S(\xi) \dot{z}(t+\xi) d\xi + \dot{z}^T(t) L \dot{z}(t) - \dot{z}^T(t-r) L \dot{z}(t-r) + \gamma
\end{aligned} \tag{3.4.14}$$

由分步积分得

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z_t) = & -e^T \Delta e + 2 \begin{pmatrix} z^T(t) & z^T(t-r) \end{pmatrix} \int_{-r}^0 Q(\xi) z(t+\xi) d\xi \\
& - 2 \begin{pmatrix} z^T(t) & z^T(t-r) \end{pmatrix} \int_{-r}^0 \dot{Q}(\xi) z(t+\xi) d\xi - \int_{-r}^0 z^T(t+\xi) \dot{S}(\xi) z(t+\xi) d\xi \\
& - \int_{-r}^0 d\xi \int_{-r}^0 z^T(t+\xi) \left[\frac{\partial}{\partial \xi} R(\xi, \eta) + \frac{\partial}{\partial \eta} R(\xi, \eta) \right] z(t+\eta) d\eta \\
& + 2 z^T(t) \int_{-r}^0 R(0, \xi) z(t+\xi) d\xi + 2 z^T(t-r) \int_{-r}^0 -R(-r, \xi) z(t+\xi) d\xi
\end{aligned} \tag{3.4.15}$$

其中 $e^T = \begin{pmatrix} z^T(t) & z^T(t-r) & \dot{z}^T(t) & \dot{z}^T(t-r) \end{pmatrix}$

由于 Q, R 是 S 分段线性的, 因此

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z_t) = & -e^T \Delta e + 2e^T \sum_{p=1}^N \int_0^1 [(1-\alpha)(D_p^s + D_p^a) + \alpha(D_p^s - D_p^a)] z^{(p)}(\alpha) d\alpha \\
& - \sum_{p=1}^N \int_0^1 z^{(p)T}(\alpha) S_{dp} z^{(p)}(\alpha) d\alpha - \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \int_0^1 \int_0^1 z^{(p)T}(\alpha) R_{dpq} z^{(p)}(\beta) d\alpha d\beta
\end{aligned} \tag{3.4.16}$$

或

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z_t) = & -e^T \Delta e + 2e^T \int_0^1 [D^s + (1-2\alpha)D^1] \tilde{z}(\alpha) h d\alpha \\
& - \int_0^1 \tilde{z}^T(\alpha) S_d \tilde{z}(\alpha) d\alpha - \int_0^1 \int_0^1 \tilde{z}^T(\alpha) R_d \tilde{z}(\beta) d\alpha d\beta
\end{aligned} \tag{3.4.17}$$

其中 $\tilde{z}^T(\alpha) = \begin{pmatrix} z^{1T}(\alpha) & z^{2T}(\alpha) & \cdots & z^{NT}(\alpha) \end{pmatrix}$ 。

由 (3.4.17) 我们得到

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z_t) = & - \int_0^1 \left(e^T [D^s + (1-2\alpha)D^a] \tilde{z}^T(\alpha) \right) \begin{pmatrix} U & -I \\ -I & S_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [D^s + (1-2\alpha)D^a]^T e \\ \tilde{z}(\alpha) \end{pmatrix} d\alpha \\
& - e^T [\Delta - D^s U D^{sT} - \frac{1}{3} D^a U D^{aT}] e - \left(\int_0^1 \tilde{z}(\alpha) d\alpha \right)^T R_d \left(\int_0^1 \tilde{z}(\alpha) d\alpha \right)
\end{aligned} \tag{3.4.18}$$

对任意矩阵 U 成立。再由 Jensen 不等式可得

$$\dot{V}(z_t) \leq - \left(e^T \int_0^1 \tilde{z}^T(\alpha) d\alpha \right) \begin{pmatrix} \Delta - \frac{1}{3} D^a U D^{aT} & -D^s \\ -D^{sT} & R_d + S_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ \int_0^1 \tilde{z}(\alpha) d\alpha \end{pmatrix} \tag{3.4.19}$$

这样, 存在标量 $\varepsilon_1 > 0$ 满足 $\dot{V}(z_t) \leq -\varepsilon_1 z^T(t)z(t)$ 如果下式成立

$$\begin{pmatrix} \Delta - \frac{1}{3}D^aUD^{aT} & -D^s \\ -D^{sT} & R_d + S_d \end{pmatrix} > 0 \quad (3.4.20)$$

任意矩阵 U 可由 Gu, Kharitonov & Chen (2003) 中 Proposition B.6 消去, 从而条件 (3.4.9) 可得。进一步条件 (3.4.9) 确保 Lyapunov-Krasovskii 泛函单调减且

$$\begin{aligned} V(z_t) &\leq V(z_0) = \begin{pmatrix} z^T(0) & z^T(-r) \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} z(0) \\ z(-r) \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} z^T(0) & z^T(-r) \end{pmatrix} \int_{-r}^0 Q(\xi) z(\xi) d\xi + \\ &\int_{-r}^0 \left[\int_{-r}^0 z^T(\xi) R(\xi, \eta) z(\eta) d\eta \right] d\xi + \int_{-r}^0 z^T(\xi) S(\xi) z(\xi) d\xi + \int_{-r}^0 \dot{z}^T(\xi) L \dot{z}(\xi) d\xi \\ &\leq k_1 |\phi|_r + k_2 |\dot{\phi}|_r \leq (k_1 + k_2) \max \{ |\phi|_r, |\dot{\phi}|_r \} \end{aligned} \quad (3.4.21)$$

其中

$$k_1 = 2\lambda_{\max}(P) + 2r(\lambda_{\max}(Q_1(\xi)) + \lambda_{\max}(Q_2(\xi))) + r^2\lambda_{\max}(R(\xi, \eta)) + r\lambda_{\max}(S(\xi))$$

$$k_2 = r\lambda_{\max}(L)$$

另一方面由条件 (3.4.8) 可知

$$V(z_t) \geq \lambda_{\min}(P + \tilde{L}) z^T(t) z(t) = e^{2\lambda t} \lambda_{\min}(P + \tilde{L}) x^T(t) x(t) \quad (3.4.22)$$

这里我们用 λ_{\min} 和 λ_{\max} 分别表示一个矩阵的最小和最大特征值。

联立 (3.4.21) 和 (3.4.22) 得

$$|x(t)| \leq \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{\lambda_{\min}(P + \tilde{L})}} \cdot e^{-\lambda t} \cdot \max \{ |\phi|_r, |\dot{\phi}|_r \}$$

定理证毕。□

注 3.4.1: 对滞后型时滞系统 (既 (3.4.1) 中系数矩阵 $C = 0$ 且系统 (3.4.4) 为 $\dot{z}(t) = (A + \lambda I)z(t) + e^{\lambda r} Bz(t-r)$), 以上方法同样适用。相应地, 令 (3.4.5) 中 $L = Q_2(\xi) = P_2 = P_3 = 0$ 并由定理 3.4.1 可得

$$|x(t)| \leq \sqrt{\frac{k_1}{\lambda_{\min}(P)}} \cdot e^{-\lambda t} \cdot |\phi|_r$$

如果 (3.4.8) 和 (3.4.9) 成立。

现在扩展上面的结论到含不确定参数的情况。考虑下面的时滞系统

$$\dot{x}(t) - C(t)\dot{x}(t-r) = A(t)x(t) + B(t)x(t-r) \quad (3.4.23)$$

其中 $A(t)$, $B(t)$ 和 $C(t)$ 为不确定矩阵, 假定可表示为:

$$A(t) = A + \Delta A(t), \quad B(t) = B + \Delta B(t), \quad C(t) = C + \Delta C(t)$$

$$[\Delta A(t) \quad \Delta B(t) \quad \Delta C(t)] = EF(t)[E_A \quad E_B \quad E_C]$$

这里 A, B, C, E, E_A, E_B 和 E_C 为已知常数矩阵, $F(t)$ 是时变未知矩阵, 满足

$\|F(t)\| \leq 1$ 。

这里再次给出鲁棒稳定性分析中常用的引理。

引理 3.4.1 (Wang, Xie & de Souza 1992) : 对任意矩阵 D, E, F ($F^T F \leq I$) 和标量 $\varepsilon > 0$, 下面不等式成立:

$$DFE + E^T F^T D^T \leq \varepsilon DD^T + \varepsilon^{-1} E^T E \quad (3.4.24)$$

定理 3.4.2: 假定 A1) 成立。系统 (3.4.23) 指数稳定且具有收敛率 λ , 如果存在矩阵 $P, Q_p, S_p > 0, R_{p,q}, (p, q = 0, 1, \dots, N), L > 0$, 和标量 $\varepsilon > 0$ 满足 (3.4.8) 和下面的线性矩阵不等式

$$\begin{pmatrix} \Delta' & -D^s & -D^a & ME \\ * & R_d + S_d & 0 & 0 \\ * & * & 3S_d & 0 \\ * & * & * & \varepsilon I \end{pmatrix} > 0 \quad (3.4.25)$$

其中

$$\Delta' = \Delta - \varepsilon \Gamma_E^T \Gamma_E, \quad \Gamma_E = \begin{bmatrix} E_A & e^{\lambda r} (E_B - \lambda E_C) & 0 & e^{\lambda r} E_C \end{bmatrix}$$

证明: 令 $z(t) = e^{\lambda t} x(t)$, 则由 (3.4.23) 我们可知

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) - \hat{C}(t) \dot{z}(t-r) &= \hat{A}(t) z(t) + \hat{B}(t) z(t-r) \\ z(t) &= \phi(t) = e^{\lambda t} \varphi(t), t \in [-r, 0] \end{aligned} \quad (3.4.26)$$

其中 $\hat{A}(t) = \hat{A} + \Delta \hat{A}(t), \hat{B}(t) = \hat{B} + \Delta \hat{B}(t), \hat{C}(t) = \hat{C} + \Delta \hat{C}(t)$

$\hat{A} = A + \lambda I, \hat{B} = e^{\lambda r} (B - \lambda C), \hat{C} = e^{\lambda r} C,$

$$\begin{bmatrix} \Delta \hat{A}(t) & \Delta \hat{B}(t) & \Delta \hat{C}(t) \end{bmatrix} = EF(t) \begin{bmatrix} \hat{E}_A & \hat{E}_B & \hat{E}_C \end{bmatrix},$$

$\hat{E}_A = E_A, \hat{E}_B = e^{\lambda r} (E_B - \lambda E_C), \hat{E}_C = e^{\lambda r} E_C$ 。

如果考虑不确定性, (3.4.13) 将被替换为

$$\tilde{\gamma} = 2 \begin{pmatrix} z^T(t) & z^T(t-r) & \dot{z}^T(t) & \dot{z}^T(t-r) \end{pmatrix} M \times [\dot{z}(t) \dot{z}(t) - \hat{C}(t) \dot{z}(t-r) - \hat{A}(t) z(t) - \hat{B}(t) z(t-r)] = 0 \quad (3.4.27)$$

则 (3.4.26) 稳定, 如果:

$$\Upsilon - \begin{pmatrix} ME(-F(t))\Gamma_E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Gamma_E^T(-F^T(t))E^T M^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} > 0 \quad (3.4.28)$$

其中 Υ 是 (3.4.9) 左半部分。

由引理 3.4.1, (3.4.28) 成立的充分条件为 存在标量 $\varepsilon > 0$ 满足

$$\Upsilon - \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1} MEE^T M^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \varepsilon \Gamma_E^T \Gamma_E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} > 0 \quad (3.4.29)$$

应用 Schur 补性质 (Boyd, El Ghaoui, Feron & Balakrishnan 1994), 我们发

现 (3.4.29) 与 (3.4.25) 等价。再由定理 3.4.1 的方法, 定理可证。□

注 3.4.2: 前面介绍的指数估计方法不适用于系统 (3.4.23)。这些方法必须限定 $C(t)$ 为常数矩阵。本节的方法采用了新型的完全 Lyapunov-Krasovskii 泛函。从而结论可处理一类更广的时滞系统鲁棒稳定性问题。

最后, 给出几个数值仿真说明本节方法的有效性和优势。

例 3.4.1: 考虑下面时滞系统

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -0.5 & 0.1 \\ 0.3 & 0 \end{bmatrix} x(t-r)$$

下表中列出了由 Liu (2003), Mondié & Kharitonov (2005), Xu, Lam & Zhong (2006) 和定理 3.4.1 ($N=4$) 所得到的指数估计。可见本节提出的方法保守性更低。

表 3.4.1 例 3.4.1 中指数估计结果
Table 3.4.1 Estimated results for example 3.4.1

| r | 1.4 | 1.6 | 1.8 | 2.0 |
|-------------------------------|--------|--------|--------|--------|
| Liu (2003) | 0.1813 | 0.0752 | 0.0014 | 0 |
| Mondié & Kharitonov (2005) | 0.5642 | 0.5202 | 0.4818 | 0.4481 |
| Xu, Lam & Zhong (2006) | 0.8115 | 0.6960 | 0.6148 | 0.5494 |
| 定理 3.4.1 | 0.8745 | 0.7520 | 0.6598 | 0.5878 |

例 3.4.2: 考虑如下时滞系统

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0.1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t-r)$$

这个系统当 $r \in (0.1002, 1.7178)$ 时稳定。由定理 3.4.1 ($N=4$), 可对该系统进行指数估计。结果见下表。然而, 已有的基于简单 Lyapunov 泛函的指数估计方法不能对这个系统进行分析。

表 3.4.2 例 3.4.2 中的指数估计
Table 3.4.2 Estimate results for example 3.4.2

| r | 0.5 | 0.75 | 1 | 1.25 | 1.5 |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 定理 3.5.1 | 0.214 | 0.387 | 0.500 | 0.311 | 0.118 |

并且我们发现, 例 3.4.2 不同于例 3.4.1, 系统的收敛率不是随时滞的增大单调减小的。

例 3.4.3: 下面考虑一个中立型时滞系统

$$\dot{x}(t) - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} \dot{x}(t-r) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0.2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t-r)$$

当 $r \in (0.2280, 1.6448)$ 这个系统稳定。类似于例 3.4.2, 这个系统也不能应用简单 Lyapunov 泛函方法分析。我们应用定理 3.4.1 ($N=4$), 对其进行指数估计。结果见表 3.4.3。这个例子中, 收敛率也不是随时滞的增大单调减小的。

表 3.4.3 例 3.4.3 中指数估计结果

Table 3.4.3 Estimate results for example 3.4.3

| r | 0.5 | 1 | 1.5 |
|----------|-------|-------|-------|
| 定理 3.4.1 | 0.132 | 0.257 | 0.052 |

例 3.4.4: 下面考虑一个不确定中立系统

$$\dot{x}(t) - C(t)\dot{x}(t-r) = A(t)x(t) + B(t)x(t-r)$$

令 $A(t) = A + EF(t)E_A$, $B(t) = B + EF(t)E_B$, $C(t) = C + EF(t)E_C$,

$$A = \begin{pmatrix} -0.9 & 0.2 \\ 0.1 & -0.9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1.1 & -0.2 \\ -0.1 & -1.1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -0.2 & 0 \\ 0.2 & -0.1 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix}, E_A = E_B = E_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$F(t)$ 为时变不确定, 满足 $\|F(t)\| \leq 1$ 。

我们应用定理 3.4.2 ($N=3$), 对这个系统进行指数估计, 结果见表 3.4.4。由前面的分析可知, 已有的方法必须限定 $C(t)$ 为常数矩阵。

表 3.4.4 例 3.4.4 中指数估计结果

Table 3.4.4 Estimate results for example 3.4.4

| r | 0.5 | 1 | 1.5 |
|----------|------|------|------|
| 定理 3.4.2 | 1.29 | 0.24 | 0.03 |

3.5 含时变时滞的时滞系统稳定性分析

3.5.1 引言

尽管时滞系统的稳定性在过去二十年得到了广泛的关注并取得了很多人激动的成果。但就目前来看, 仍有许多问题还有待我们进一步的深入研究。含时变时滞的时滞系统稳定性就是这样一个问题。

一些基于简单 Lyapunov 泛函的方法(如 Fridman, 2001, He, Wang, Xie & Lin, 2007 和 He, Wang, Lin & Wu 2007)被提出研究了含时变时滞的系统稳定性。而由前面的分析我们知道, 简单 Lyapunov 泛函方法有它的不足。因此我们自然地想应用离散化 Lyapunov 泛函方法处理含时变时滞的系统。可是, 到目前为止还无法直接应用离散化 Lyapunov 泛函方法于时变时滞的情况。对于时变时滞的情况, Fridman & Gil (2007) 提出了一种直接频域方法的分析方法。可是这种方法很难扩展到鲁棒分析和控制器设计。

构建一个完全型 Lyapunov-Krasovskii 泛函需要根据一些泛函微分方程的知识 (Hale & Lunel, 1993)。可是关于时变时滞的这方面知识却非常少。这也是为什么不能直接应用离散化 Lyapunov 泛函方法到时变时滞系统的一个原因。

目前为止, 处理时变时滞最有效的方法为 Lyapunov 泛函方法结合输入-输出方法的分析方法, 见 Fridman & Shaked (2005b), Fridman (2006b) 和 Gu, Kharitonov & Chen (2003)。这种方法的思路是将一个时变时滞系统看做一个标称时滞系统加一个扰动时滞项。这样系统可表示为一个前向系统加一个满足 L_2 增益条件的不确定性反馈的闭环系统。从而根据小增益定理 (Gu, Kharitonov & Chen, 2003) 和离散化方法可得到系统稳定的充分条件。

由以上的分析, 我们很自然地会希望找到一种纯 Lyapunov 分析方法(无需引入输入-输出方法)。因为引入输入-输出方法会增加一些处理步骤。基于此, 本节中我们提出一种改进的离散化 Lyapunov 泛函方法, 从而不需引入输入-输出方法。本节提出的这种纯粹的 Lyapunov 分析方法比已有的分析方法简单许多, 并且通过仿真结果可以看出, 本节的方法保守性更低。

在给出主要结论后, 本节还研究了两个相关的稳定性问题。一个问题是当时滞的下(上)界给定时, 求满足系统稳定的时滞上(下)界。这一类问题可常见于许多实际应用中, 如 Zhang, Branicky & Phillips (2001)。这种问题可以根据本节的结论有效的处理。

另一个问题是求出满足系统渐近稳定的最大时变时滞区间。本节中, 假定系统非零时滞下不稳定, 含某些正时滞时稳定。由前面分析我们知道, 仅离散化 Lyapunov 方法可处理这类问题。由于目前对待这种时变时滞系统的处理是将系统看做一个标称时滞系统部分加一个扰动时变时滞部分。因此, 我们可以预见, 相应的标称时滞系统越稳定, 对应的时滞区间就越大。基于这种考虑, 我们引用收敛率的指标描述系统稳定的程度。这里的指数估计借用前面提出的方法。根据指数估计的结果, 我们发现对应最大收敛率的常数时滞具有最大的稳定时滞区间。可见基于这种思路, 我们可以找到系统最大的时变时滞稳定区间。

本节符号说明: A^T 和 A^{-1} 分别代表矩阵 A 的转置和逆矩阵。 $A > 0$ ($A < 0$) 指 A 正定 (负定)。 $*$ 表示由对称性可直接推定的矩阵块。 I 为单位阵。 $\dot{\cdot}$ 表示对时间 t 求导, 而 $\dot{\cdot}$ 表示对变量 ξ 求导。 $|\cdot|$ 和 $\|\cdot\|$ 分别表示 Euclidean 向量范数和矩阵范数。如不特殊说明, 矩阵都认为是具有合适维数的。

3.5.2 主要结论

考虑下面的时滞系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau(t)) \quad (3.5.1)$$

其中 A 和 B 为给定常数矩阵, 时变时滞 $\tau(t)$ 为分段连续的满足

$$\tau(t) = r + \eta(t), \quad r > 0, \quad |\eta(t)| \leq \mu \leq r \quad (3.5.2)$$

首先考虑针对系统 (3.5.1) 的如下问题。

问题 1. 对含有满足 (3.5.2) 的时变时滞的系统 (3.5.1), 对一给定常数 r 求得最大 μ 满足系统渐近稳定。

由前面的讨论, 我们对系统 (3.5.1) 引入下面的模型转换

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - r) - B \int_{t-\tau(t)}^{t-r} \dot{x}(s) ds \quad (3.5.3)$$

在本节中, 将提出一种 Lyapunov-Krasovskii 方法 (不引入输入-输出方法), 并且得到的稳定条件为线性矩阵不等式形式的。基本的思路是构建如下形式的 Lyapunov-Krasovskii 泛函

$$V(x_t) = V_n(x_t) + V_a(x_t) \quad (3.5.4)$$

其中 $V_n(x_t)$ 对应系统 (3.5.3) 的标称部分, 也就是:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bx(t - r) \\ x(t) &= \varphi(t), t \in [-r, 0] \end{aligned} \quad (3.5.5)$$

$V_a(x_t)$ 对应系统 (3.5.3) 中的扰动部分 $-B \int_{t-\tau(t)}^{t-r} \dot{x}(s) ds$ 。

我们首先给出系统 (3.5.5) 的稳定条件。构建如下完全 Lyapunov-Krasovskii 泛函

$$\begin{aligned} V_n(x_t) &= \begin{pmatrix} x^T(t) & x^T(t-r) \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} x(t) \\ x(t-r) \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} x^T(t) & x^T(t-r) \end{pmatrix} \int_{-r}^0 Q(\xi) x(t+\xi) d\xi + \\ &\int_{-r}^0 \left[\int_{-r}^0 x^T(t+\xi) R(\xi, \eta) x(t+\eta) d\eta \right] d\xi + \int_{-r}^0 x^T(t+\xi) S(\xi) x(t+\xi) d\xi + \int_{-r}^0 \dot{x}^T(t+\xi) L \dot{x}(t+\xi) d\xi \end{aligned} \quad (3.5.6)$$

其中 $P = P^T = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ * & P_3 \end{pmatrix} > 0$, $Q(\xi) = \begin{pmatrix} Q_1(\xi) \\ Q_2(\xi) \end{pmatrix}$, $R(\xi, \eta) > 0$, $S(\xi) > 0$, $L > 0$ 。

将时滞区间 $[t-r, t]$ 分成 N 个具有等长 $h = r/N$ 的区间 $[\theta_p, \theta_{p+1}]$ ($p = 1, \dots, N$, $\theta_p = t - ph$)。将正方形区间 $[t-r, t] \times [t-r, t]$ 分成 $N \times N$ 个小正方形区间 $[\theta_p, \theta_{p+1}] \times [\theta_q, \theta_{q+1}]$ ($p, q = 1, \dots, N$), 并且每一个小正方形区间再分成两个三角形区间。矩阵函数 $Q(\xi)$ 和 $S(\xi)$ 取为每个区间内线性的, 矩阵函数 $R(\xi, \eta)$ 为每个三角区间内线性的。

$$Q^T(\theta_p + \alpha h) = \begin{pmatrix} Q_1^T(\theta_p + \alpha h) & Q_2^T(\theta_p + \alpha h) \end{pmatrix}, \quad Q_i(\theta_p + \alpha h) = (1 - \alpha)Q_{i,p} + \alpha Q_{i,p+1}, \quad (i=1,2), \quad \alpha \in [0,1] \quad (3.5.7a)$$

$$S(\theta_p + \alpha h) = (1 - \alpha)S_p + \alpha S_{p+1}, \quad \alpha \in [0,1] \quad (3.5.7b)$$

$$R(\theta_p + \alpha h, \theta_q + \beta h) = \begin{cases} (1-\alpha)R_{p,q} + \beta R_{p-1,q-1} + (\alpha-\beta)R_{p-1,q}, & \alpha \geq \beta \\ (1-\beta)R_{p,q} + \alpha R_{p-1,q-1} + (\beta-\alpha)R_{p,q-1}, & \alpha < \beta \end{cases}, \alpha \in [0,1], \beta \in [0,1] \quad (3.5.7c)$$

这样, 对 $\theta_p < \xi < \theta_{p-1}$ 和 $\theta_q < \eta < \theta_{q-1}$ 我们得到

$$S'(\xi) = \frac{1}{h}(S_{p-1} - S_p), \quad Q'_i(\xi) = \frac{1}{h}(Q_{ip-1} - Q_{ip}), \quad \frac{\partial R(\xi, \eta)}{\partial \xi} + \frac{\partial R(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{1}{h}(R_{p-1,q-1} - Q_{p,q}) \quad (3.5.8)$$

根据 (3.5.5), 下面含自由权矩阵 (He, Wu, She & Liu, 2004a, b) 的等式成立恒。

$$\gamma_0 = 2 \begin{pmatrix} x^T(t) & x^T(t-r) & \dot{x}^T(t) & \dot{x}^T(t-r) \end{pmatrix} M [\dot{x}(t) - Ax(t) - Bx(t-r)] = 0 \quad (3.5.9)$$

其中 $M^T = (M_1^T \ M_2^T \ M_3^T \ M_4^T)$, $M_i (i=1,2,3,4)$ 为任意矩阵。

引理 3.5.1: 系统 (3.5.5) 渐近稳定如果存在矩阵 $P, Q_p, S_p > 0, R_{p,q}, (p, q=0,1,\dots,N), L > 0$ 和 $M_i (i=1,\dots,4)$ 满足下面的线性矩阵不等式:

$$\begin{pmatrix} P + \tilde{L} & \tilde{Q} \\ \tilde{Q}^T & \tilde{R} + \tilde{S} \end{pmatrix} > 0 \quad (3.5.10)$$

$$\begin{pmatrix} \Delta & -D^s & -D^a \\ * & R_d + S_d & 0 \\ * & * & 3S_d \end{pmatrix} > 0 \quad (3.5.11)$$

其中

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} R_{00} & R_{01} & \cdots & R_{0N} \\ R_{10} & R_{11} & \cdots & R_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{N0} & R_{N1} & \cdots & R_{NN} \end{pmatrix}, \quad \tilde{L} = \begin{pmatrix} L/r & -L/r \\ -L/r & L/r \end{pmatrix},$$

$$\tilde{S} = \text{diag}(S_0/h \ S_1/h \ \cdots \ S_N/h), \quad \tilde{Q} = (Q_0 \ Q_1 \ \cdots \ Q_N),$$

$$\Delta = - \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} & \Delta_{14} \\ * & \Delta_{22} & \Delta_{23} & \Delta_{24} \\ * & * & \Delta_{33} & \Delta_{34} \\ * & * & * & \Delta_{44} \end{pmatrix}$$

$$\Delta_{11} = Q_1(0) + Q_1^T(0) + S(0) - M_1 A - B M_1^T$$

$$\Delta_{12} = -Q_1(-r) + Q_2^T(0) - M_1 B - A^T M_2^T$$

$$\Delta_{13} = P_1 + M_1 - A^T M_3^T$$

$$\Delta_{14} = P_2 - A^T M_4^T$$

$$\Delta_{22} = -Q_2(-r) - Q_2^T(-r) - S(-r) - M_2 B - B^T M_2^T$$

$$\Delta_{23} = P_2^T + M_2 - B^T M_3^T$$

$$\Delta_{24} = P_3 - B M_4^T$$

$$\Delta_{33} = L + M_3 + M_3^T$$

$$\Delta_{34} = M_4^T$$

$$\Delta_{44} = -L$$

$$R_d = \begin{pmatrix} R_{d11} & R_{d12} & \cdots & R_{d1N} \\ R_{d21} & R_{d22} & \cdots & R_{d2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{dN1} & R_{dN2} & \cdots & R_{dNN} \end{pmatrix}, \quad R_{dpq} = h(R_{p-1,q-1} - R_{p,q}),$$

$$S_d = \text{diag}(S_{d1} \quad S_{d2} \quad \cdots \quad S_{dN}), \quad S_{dp} = S_{p-1} - S_p,$$

$$D^s = (D_1^s \quad D_2^s \quad \cdots \quad D_N^s), \quad D^a = (D_1^a \quad D_2^a \quad \cdots \quad D_N^a),$$

$$D_p^s = \begin{pmatrix} -(Q_{1p-1} - Q_{1p}) + \frac{h}{2}(R_{0,p-1} + R_{0,p}) \\ -(Q_{2p-1} - Q_{2p}) - \frac{h}{2}(R_{N,p-1} + R_{N,p}) \\ \frac{h}{2}(Q_{1p-1} + Q_{1p}) \\ \frac{h}{2}(Q_{2p-1} + Q_{2p}) \end{pmatrix}, \quad D_p^a = \begin{pmatrix} -\frac{h}{2}(R_{0,p-1} - R_{0,p}) \\ \frac{h}{2}(R_{N,p-1} - R_{N,p}) \\ -\frac{h}{2}(Q_{1p-1} - Q_{1p}) \\ -\frac{h}{2}(Q_{2p-1} - Q_{2p}) \end{pmatrix}$$

证明：由 Jensen 不等式 (Gu, Kharitonov & Chen, 2003) 得

$$\int_{-r}^0 \dot{x}^T(t+\xi) L \dot{x}(t+\xi) d\xi \geq \begin{pmatrix} x^T(t) & x^T(t-r) \end{pmatrix} \tilde{L} \begin{pmatrix} x(t) \\ x(t-r) \end{pmatrix} \quad (3.5.12)$$

且

$$V_n(x_t) \geq \begin{pmatrix} x^T(t) & x^T(t-r) \end{pmatrix} (P + \tilde{L}) \begin{pmatrix} x(t) \\ x(t-r) \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} x^T(t) & x^T(t-r) \end{pmatrix} \sum_{p=1}^N V_{Q^p} + \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N V_{R^{pq}} + \sum_{p=1}^N V_{S^p} \quad (3.5.13)$$

其中

$$V_{Q^p} = \int_0^1 Q^{(p)}(\alpha) x^{(p)}(\alpha) h d\alpha$$

$$V_{R^{pq}} = \int_0^1 \int_0^1 x^{(p)T}(\alpha) R^{(pq)}(\alpha, \beta) x^{(q)}(\beta) h d\beta h d\alpha$$

$$V_{S^p} = \int_0^1 x^{(p)T}(\alpha) S^{(p)}(\alpha) x^{(p)}(\alpha) h d\alpha$$

$$x^{(p)}(\alpha) = x(\theta_p + \alpha h)$$

$$Q^{(p)}(\alpha) = Q(\theta_p + \alpha h), \quad S^{(p)}(\alpha) = S(\theta_p + \alpha h), \quad R^{(pq)}(\alpha, \beta) = R(\theta_p + \alpha h, \theta_q + \beta h)$$

如 $S_p > 0$ ($p = 0, 1, \dots, N$), 则

$$V_n(x_t) \geq \int_0^1 \left(\zeta^T \quad \psi^T(\alpha) \right) \begin{pmatrix} P + \tilde{L} & \tilde{Q} \\ \tilde{Q}^T & \tilde{R} + \tilde{S} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta \\ \psi(\alpha) \end{pmatrix} d\alpha \quad (3.5.14)$$

其中

$$\zeta^T = \begin{pmatrix} x^T(t) & x^T(t-r) \end{pmatrix}, \quad \psi(\alpha) = \begin{pmatrix} \psi_{(0)}(\alpha) \\ \psi_{(1)}(\alpha) \\ \psi_{(2)}(\alpha) \\ \vdots \\ \psi_{(N-1)}(\alpha) \\ \psi_{(N)}(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{(1)}(\alpha) \\ \varphi_{(2)}(\alpha) + \varphi^{(1)}(\alpha) \\ \varphi_{(3)}(\alpha) + \varphi^{(2)}(\alpha) \\ \vdots \\ \varphi_{(N)}(\alpha) + \varphi^{(N-1)}(\alpha) \\ \varphi^{(N)}(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\varphi^{(p)}(\alpha) = h \int_0^\alpha x^{(p)}(\beta) d\beta, \quad \varphi_{(p)}(\alpha) = h \int_\alpha^1 x^{(p)}(\beta) d\beta, \quad p = 0, 1, \dots, N.$$

(3.5.6) 的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}_n(x_t) = & 2 \begin{pmatrix} x^T(t) & x^T(t-r) \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}(t-r) \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} x^T(t) & x^T(t-r) \end{pmatrix} \int_{-r}^0 Q(\xi) \dot{x}(t+\xi) d\xi \\ & + 2 \begin{pmatrix} x^T(t) & x^T(t-r) \end{pmatrix} \int_{-r}^0 Q(\xi) x(t+\xi) d\xi + 2 \int_{-r}^0 \left[\int_{-r}^0 x^T(t+\xi) R(\xi, \eta) \dot{x}(t+\eta) d\eta \right] d\xi \\ & + 2 \int_{-r}^0 x^T(t+\xi) S(\xi) \dot{x}(t+\xi) d\xi + \dot{x}^T(t) L \dot{x}(t) - \dot{x}^T(t-r) L \dot{x}(t-r) + \gamma_0 \end{aligned} \quad (3.5.15)$$

由分步积分得

$$\begin{aligned} \dot{V}_n(x_t) = & -e^T \Delta e + 2 \begin{pmatrix} \dot{x}^T(t) & \dot{x}^T(t-r) \end{pmatrix} \int_{-r}^0 Q(\xi) x(t+\xi) d\xi \\ & - 2 \begin{pmatrix} x^T(t) & x^T(t-r) \end{pmatrix} \int_{-r}^0 \dot{Q}(\xi) x(t+\xi) d\xi - \int_{-r}^0 x^T(t+\xi) \dot{S}(\xi) x(t+\xi) d\xi \\ & - \int_{-r}^0 d\xi \int_{-r}^0 x^T(t+\xi) \left[\frac{\partial}{\partial \xi} R(\xi, \eta) + \frac{\partial}{\partial \eta} R(\xi, \eta) \right] x(t+\eta) d\eta \\ & + 2x^T(t) \int_{-r}^0 R(0, \xi) x(t+\xi) d\xi + 2x^T(t-r) \int_{-r}^0 -R(-r, \xi) x(t+\xi) d\xi \end{aligned} \quad (3.5.16)$$

$$\text{其中 } e^T = \begin{pmatrix} x^T(t) & x^T(t-r) & \dot{x}^T(t) & \dot{x}^T(t-r) \end{pmatrix}$$

注意 Q , R 和 S 为分段线性的, 所以

$$\begin{aligned} \dot{V}_n(x_t) = & -e^T \Delta e + 2e^T \sum_{p=1}^N \int_0^1 [(1-\alpha)(D_p^s + D_p^a) + \alpha(D_p^s - D_p^a)] x^{(p)}(\alpha) d\alpha \\ & - \sum_{p=1}^N \int_0^1 x^{(p)T}(\alpha) S_{dp} x^{(p)}(\alpha) d\alpha - \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \int_0^1 \int_0^1 x^{(p)T}(\alpha) R_{dpq} x^{(p)}(\beta) d\alpha d\beta \end{aligned} \quad (3.5.17)$$

或

$$\begin{aligned}\dot{V}_n(x_t) = & -e^T \Delta e + 2e^T \int_0^1 [D^s + (1-2\alpha)D^l] \tilde{x}(\alpha) h d\alpha \\ & - \int_0^1 \tilde{x}^T(\alpha) S_d \tilde{x}(\alpha) d\alpha - \int_0^1 \int_0^1 \tilde{x}^T(\alpha) R_d \tilde{x}(\beta) d\alpha d\beta\end{aligned}\quad (3.5.18)$$

其中 $\tilde{x}^T(\alpha) = (x^{1T}(\alpha) \ x^{2T}(\alpha) \ \cdots \ x^{NT}(\alpha))$ 。

再由 (3.5.18) 可得

$$\begin{aligned}\dot{V}_n(x_t) = & - \int_0^1 \left(e^T [D^s + (1-2\alpha)D^a] \ \tilde{x}^T(\alpha) \right) \begin{pmatrix} U & -I \\ -I & S_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [D^s + (1-2\alpha)D^a]^T e \\ \tilde{x}(\alpha) \end{pmatrix} d\alpha \\ & - e^T [\Delta - D^s U D^{sT} - \frac{1}{3} D^a U D^{aT}] e - \left(\int_0^1 \tilde{x}(\alpha) d\alpha \right)^T R_d \left(\int_0^1 \tilde{x}(\alpha) d\alpha \right)\end{aligned}\quad (3.5.19)$$

对任意 U 成立。再根据 Jensen 不等式, 我们得到

$$\dot{V}_n(x_t) \leq - \left(e^T \ \int_0^1 \tilde{x}^T(\alpha) d\alpha \right) \begin{pmatrix} \Delta - \frac{1}{3} D^a U D^{aT} & -D^s \\ -D^{sT} & R_d + S_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ \int_0^1 \tilde{x}(\alpha) d\alpha \end{pmatrix}\quad (3.5.20)$$

这样, 存在标量 $\varepsilon_1 > 0$ 满足 $\dot{V}_n(x_t) \leq -\varepsilon_1 x^T(t)x(t)$ 如果

$$\begin{pmatrix} \Delta - \frac{1}{3} D^a U D^{aT} & -D^s \\ -D^{sT} & R_d + S_d \end{pmatrix} > 0\quad (3.5.21)$$

任意矩阵 U 可由 Gu, Kharitonov & Chen (2003) 中 Proposition B.6 消去, 这样条件 (3.5.11) 可得。定理得证。□

Gu, Kharitonov & Chen (2003) 提出了一种可处理时变时滞的方法。该方法结合离散化 Lyapunov 泛函和输入-输出方法。可是, 该方法需要一些时滞导数的限制。基于同一框架(离散化 Lyapunov 泛函和输入-输出方法), Fridman (2006b) 提出的方法不需要对时滞导数的限制。并且 Fridman (2006b) 采用了描述符技术, 从而结论的保守性更低。

虽然, 以上的两种方法很有效。可是这种分析框架比较复杂。因为我们必须先将一个时滞系统转化为一个输入-输出模型。关于这种方法可参考 Fridman (2006b), Fridman & Shaked (2005b) and Gu, Kharitonov & Chen (2003)。

下面给出本节的方法。

定理 3.5.1: 满足条件 (3.5.2) 的时滞系统 (3.5.1) 渐近稳定, 如果存在矩阵 $P, Q_p, S_p > 0, (p, q = 0, 1, \dots, N), L > 0, X > 0$ 和 $M_i (i = 1, \dots, 5)$ 满足 (3.5.10) 及下面的线性矩阵不等式。

$$\begin{pmatrix} \Delta' & -D^s & -D^a & \widetilde{M}_5 \\ * & R_d + S_d & 0 & 0 \\ * & * & 3S_d & 0 \\ * & * & * & -M_5 B - B^T M_5^T + X/\mu \end{pmatrix} > 0\quad (3.5.22)$$

其中

$$\Delta' = \Delta - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{M}_5 = \begin{pmatrix} -M_1 B + A^T M_5^T \\ -M_2 B + B^T M_5^T \\ -M_3 B - M_5^T \\ -M_4 B \end{pmatrix}$$

证明：首先, 当 $\tau(t) \geq r$ 时. 构建 $V(x_t) = V_n(x_t) + V_a(x_t)$ 形式的 Lyapunov-Krasovskii 泛函. 其中取 $V_n(x_t)$ (3.5.6) 并构建 $V_a(x_t)$

$$V_a(x_t) = \int_{-r-\mu}^{-r} \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s) X \dot{x}(s) ds d\theta \quad (3.5.23)$$

对 $V_a(x_t)$ 求时间导数得

$$\dot{V}_a(x_t) \leq \mu \dot{x}^T(t) X \dot{x}(t) - \int_{-r-\mu}^{-r} \dot{x}^T(\theta) X \dot{x}(\theta) d\theta \quad (3.5.24)$$

由 Jensen 不等式可得

$$\dot{V}_a(x_t) \leq \mu \dot{x}^T(t) X \dot{x}(t) - \left(\int_{-\tau(t)}^{-r} \dot{x}(\theta) d\theta \right)^T \frac{X}{\mu} \left(\int_{-\tau(t)}^{-r} \dot{x}(\theta) d\theta \right) \quad (3.5.25)$$

由 (3.5.3) 我们知道

$$\begin{aligned} \gamma &= 2 \left(x^T(t) \quad x^T(t-r) \quad \dot{x}^T(t) \quad \dot{x}^T(t-r) \quad \int_{t-\tau(t)}^{t-r} \dot{x}^T(s) ds \right) \times M \\ &\times \left[\dot{x}(t) - A x(t) - B x(t-r) + B \int_{t-\tau(t)}^{t-r} \dot{x}(s) ds \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.5.26)$$

其中 $M^T = (M_1^T \quad M_2^T \quad M_3^T \quad M_4^T \quad M_5^T)$, M_i ($i=1, \dots, 5$) 为任意矩阵.

再对 $V(x_t)$ 求时间导数可得

$$\dot{V}(x_t) \leq - \left(e^T \quad \int_0^1 \tilde{x}^T(\alpha) d\alpha \quad \int_{-\tau(t)}^{-r} \dot{x}^T(\theta) d\theta \right) \begin{pmatrix} \Delta' - \frac{1}{3} D^a U D^{aT} & -D^s & \widetilde{M}_5 \\ * & R_d + S_d & 0 \\ * & * & -M_5 B - B^T M_5^T + \frac{X}{\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ \int_0^1 \tilde{x}(\alpha) d\alpha \\ \int_{-\tau(t)}^{-r} \dot{x}(\theta) d\theta \end{pmatrix} \quad (3.5.27)$$

这样我们知道, 存在一个标量 $\varepsilon_2 > 0$ 满足 $\dot{V}(x_t) \leq -\varepsilon_2 x^T(t) x(t)$ 如果

$$\begin{pmatrix} \Delta' - \frac{1}{3} D^a U D^{aT} & -D^s & \widetilde{M}_5 \\ * & R_d + S_d & 0 \\ * & * & -M_5 B - B^T M_5^T + \frac{X}{\mu} \end{pmatrix} > 0 \quad (3.5.28)$$

到这里 Lyapunov 导数条件 (3.5.22) 可由 Gu, Kharitonov & Chen (2003) 中 Proposition B.6 得到

同样地, 当 $\tau(t) < r$ 构建 $V_a(x_t)$ 为

$$V_a(x_t) = \int_{-r}^{-r+\mu} \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s) X \dot{x}(s) ds d\theta$$

也可得到同样结论。定理得证。□

这里给出一个例子说明定理 3.5.1 的有效性。

例 3.5.1: 考虑下面系统

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0.1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t - \tau(t)) \quad (3.5.29)$$

其中 $\tau(t) = r + \eta(t)$, $r > 0$, $|\eta(t)| \leq \mu \leq r$ 。

(3.5.29) 的标称系统当零时滞时是不稳定的, 因此简单 Lyapunov 泛函方法是无效的。并且这个例子中没有额外的时滞导数信息。下表给出了由两种方法(离散段数都取 $N = 4$)得到的可确保系统稳定的最大 μ 值。

表 3.5.1 不同方法得到的稳定区间 μ

Table 3.5.1 Stable interval μ by different methods

| r | 0.5 | 1 | 1.5 |
|-----------------|------|------|------|
| Fridman (2006b) | 0.26 | 0.41 | 0.14 |
| 定理 3.5.1 | 0.37 | 0.59 | 0.21 |

注 3.5.1: 可以看出本节的方法保守性更低, 并且该方法要比应用输入-输出方法的分析简单得多。

当依据 Fridman (2006b) 的方法进行仿真比较时, 请注意该文献中有一处小错误。在 Fridman (2006b) 中 Theorem 3.1 的 (16h) 为:

$$D_p^s = \begin{pmatrix} (R_{0,p-1} + R_{0,p}) - (Q_{p-1} - Q_p) \\ \frac{h}{2}(Q_{p-1} + Q_p) \\ -\frac{h}{2}(Q_{Np-1} + Q_{Np}) \end{pmatrix}$$

这一项应该为

$$D_p^s = \begin{pmatrix} \frac{h}{2}(R_{0,p-1} + R_{0,p}) - (Q_{p-1} - Q_p) \\ \frac{h}{2}(Q_{p-1} + Q_p) \\ -\frac{h}{2}(Q_{Np-1} + Q_{Np}) \end{pmatrix}$$

问题 2

在一些实际问题中, 系统的时滞具有上(下)界, 例如 Zhang, Branicky & Phillips (2001) 中网络控制的例子。这里我们给出另一种时滞系统的稳定性问题(问题 2)。

问题 2. a. 系统 (3.5.1) 中时滞假定满足 $\tau(t) \geq \tau_m \geq 0$ 。求时滞上界 τ_M 满足 $\tau_M \geq \tau(t) \geq \tau_m$ 时系统渐近稳定。

问题 2. b. 系统 (3.5.1) 中时滞假定满足 $\tau(t) \leq \tau_M$ 。求时滞下界 τ_m 满足 $\tau_M \geq \tau(t) \geq \tau_m$ 时系统渐近稳定。

对于问题 2, 一些文献报道了基于简单 Lyapunov 泛函方法的研究, 例如 He, Wang, Lin & Wu (2007)。然而, 简单 Lyapunov 泛函方法的结论有它的不足。实际上, 定理 3.5.1 的结论可用来研究问题 2。见如下推论。

推论 3.5.1: 对给定时滞 τ_m 和 τ_M , 系统 (3.5.1) 对 $\tau_M \geq \tau(t) \geq \tau_m$ 渐近稳定, 如果存在矩阵 $P, Q_p, S_p > 0, R_{p,q}, (p, q = 0, 1, \dots, N), L > 0, X > 0$ 和 $M_i (i = 1, \dots, 5)$ 满足线性矩阵不等式 (3.5.10) 和 (3.5.22)。其中令 $r = (\tau_m + \tau_M)/2, \mu = (\tau_M - \tau_m)/2$ 。

推论 3.5.1 本身并不是一个新的结论。由于问题 2 是一类实际中常遇到的问题, 因此我们将它做为一个独立的结论给出。

问题 3

接下来, 我们考虑一类之前未被考虑的问题。在问题 1 和问题 2 中, 或者一个时滞中心给定, 或者一个时滞上(下)界已知。而实际上, 这些数值有时候是我们设计的(例如通过设计网络控制系统的通讯协议, 缓冲, 采样时间等)。这时, 我们通常想得到一个可以确保系统稳定的最大时滞区间。可见, 下面提出的问题具有非常重要的理论和实际价值。

问题 3. 对于含时变时滞的系统 (3.5.1), 求得可以确保系统渐近稳定的最大时滞区间 ($\tau_M - \tau_m$ 的最大值, $\tau(t) \in [\tau_m, \tau_M]$)。

由前面的分析, 我们知道, 无论输入-输出方法还是本节提出的方法, 都是基于下面的基本思路:

将一个系统进行模型转换, 其中 $-B \int_{t-\tau(t)}^{t-r} \dot{x}(s) ds$ 被认为是干扰。既然 $-B \int_{t-\tau(t)}^{t-r} \dot{x}(s) ds$ 被认为是干扰, 则我们可以设想如果标称部分越稳定, 则系统可承受越大的干扰(即越大的时滞区间 $[\tau_m, \tau_M]$)。

在余下的部分, 我们将采用系统收敛率做为一个系统稳定程度的指标。这样越大的收敛率可得到越大的时滞区间。由后面的仿真可见, 这种方法是有效的。为方便起见, 这里再给出关于指数收敛的定义。

定义 3.5.1: 系统 (3.5.5) 是指数稳定的, 如果存在标量 $\sigma \geq 1$ 和 $\lambda > 0$ 满足 $|x(t)| \leq \sigma e^{-\lambda t} \cdot |\varphi|_r$ ($|\varphi|_r = \sup_{-r \leq \theta \leq 0} |\varphi(\theta)|$)。标量 λ 和 σ 分别称为收敛率和收敛系数。由于前面给出了关于指数估计的相关研究, 这里直接给出下面结论。

定理 3.5.2: 系统 (3.5.5) 指数收敛且收敛率为 λ 如果存在矩阵 $P, Q'_p, S_p > 0, R_{p,q}, (p, q = 0, 1, \dots, N)$ 满足下面线性矩阵不等式。

$$\begin{pmatrix} P & \tilde{Q}' \\ * & \tilde{R} + \tilde{S} \end{pmatrix} > 0 \quad (3.5.30)$$

$$\begin{pmatrix} \Delta'' & -\hat{D}^s & -\hat{D}^a \\ * & R_d + S_d & 0 \\ * & * & 3S_d \end{pmatrix} > 0 \quad (3.5.31)$$

其中

$$\Delta'' = \begin{pmatrix} \Delta''_{00} & \Delta''_{01} \\ * & \Delta''_{11} \end{pmatrix}$$

$$\Delta''_{00} = -P\hat{A} - \hat{A}^T P - Q'_0 - Q_0'^T - S_0$$

$$\Delta''_{01} = Q'_N - P\hat{B}$$

$$\Delta''_{11} = S_N$$

$$\hat{A} = A + \lambda I, \hat{B} = e^{\lambda r} B$$

$$\hat{D}^s = \begin{pmatrix} \hat{D}_1^s & \hat{D}_2^s & \dots & \hat{D}_N^s \end{pmatrix}, \hat{D}^a = \begin{pmatrix} \hat{D}_1^a & \hat{D}_2^a & \dots & \hat{D}_N^a \end{pmatrix},$$

$$\hat{D}_p^s = \begin{pmatrix} \frac{h}{2} \hat{A}^T (Q'_{p-1} + Q'_p) + \frac{h}{2} (R_{0,p-1} + R_{0,p}) - (Q'_{p-1} - Q'_p) \\ \frac{h}{2} \hat{B}^T (Q'_{p-1} + Q'_p) - \frac{h}{2} (R_{N,p-1} + R_{N,p}) \end{pmatrix},$$

$$\hat{D}_p^a = \begin{pmatrix} -\frac{h}{2} \hat{A}^T (Q'_{p-1} - Q'_p) - \frac{h}{2} (R_{0,p-1} - R_{0,p}) \\ -\frac{h}{2} \hat{B}^T (Q'_{p-1} - Q'_p) + \frac{h}{2} (R_{N,p-1} - R_{N,p}) \end{pmatrix}$$

$$\tilde{Q}' = (Q'_0 \quad Q'_1 \quad \dots \quad Q'_N)$$

证明: 令 $z(t) = e^{\lambda t} x(t)$, 则由 (3.5.5) 得

$$\dot{z}(t) = \hat{A}z(t) + \hat{B}z(t-r) \quad (3.5.32)$$

根据离散化 Lyapunov 方法我们可得到: 系统 (3.5.32) 渐近稳定, 如果 (3.5.30) 和 (3.5.31) 成立。

进一步, 根据选取的 Lyapunov-Krasovskii 泛函 $V'(z_t)$ 单调递减且满足

$$\begin{aligned} V'(z_t) \leq V'(z_0) &= z^T(0)Pz(0) + 2z^T(0) \int_{-r}^0 Q'(\xi)z(\xi)d\xi + \\ &\int_{-r}^0 \left[\int_{-r}^0 z^T(\xi)R(\xi,\eta)z(\eta)d\eta \right] d\xi + \int_{-r}^0 z^T(\xi)S(\xi)z(\xi)d\xi \leq k_1 \|\phi\|_r \end{aligned} \quad (3.5.33)$$

其中 $k_1 = 2\lambda_{\max}(P) + 2r\lambda_{\max}(Q'(\xi)) + r^2\lambda_{\max}(R(\xi,\eta)) + r\lambda_{\max}(S(\xi))$

另一方面

$$V'(z_t) \geq \lambda_{\min}(P) z^T(t) z(t) = e^{2\lambda t} \lambda_{\min}(P) x^T(t) x(t) \quad (3.5.34)$$

这里, λ_{\min} 和 λ_{\max} 分别表示一个矩阵的最小和最大特征值。

联立 (3.5.33) 和 (3.5.34) 得

$$|x(t)| \leq \sqrt{\frac{k_1}{\lambda_{\min}(P)}} \cdot e^{-\lambda t} \cdot |\varphi|_r$$

定理得证。□

注 3.5.2: 由上面的介绍, 我们认为一个越大的收敛率可对应 (3.5.2) 中越大的 μ 值。

下面给出一个数字例子。

例 3.5.2: 考虑 (3.5.29) 的标称系统

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0.1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t-r) \quad (3.5.35)$$

这个系统当 $r \in (0.1002, 1.7178)$ 时渐近稳定。由定理 3.5.2 (取 $N=4$), 可得到不同时滞下的指数估计 (见下表)。而简单 Lyapunov 泛函方法是不能研究这个系统的。最大的指数估计为 $r = (0.1002 + 1.7178) / 2 = 0.909$ 时, 收敛率为 0.502。

表 3.5.2 指数估计

Table 3.5.2 Estimates of the decay rates

| r | 0.5 | 0.75 | 0.909 | 1 | 1.25 | 1.5 |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 定理 3.5.2 | 0.214 | 0.387 | 0.502 | 0.500 | 0.312 | 0.118 |

接下来, 根据定理 3.5.1 计算不同时滞下的时滞区间。由结论可以看出 (见下表), 越大的收敛率的确对应越大的时滞区间。

表 3.5.3 稳定区间 μ

Table 3.5.3 Stable interval μ

| r | 0.5 | 0.75 | 0.909 | 1 | 1.25 | 1.5 |
|----------|------|------|-------|------|------|------|
| 定理 3.5.1 | 0.37 | 0.54 | 0.60 | 0.59 | 0.44 | 0.21 |

这样我们可以得到最大的时滞区间为当 $r = 0.909$ 时, $\mu = 0.60$ 。也就是, 系统 (3.5.29) 当 $\tau(t) \in [0.309, 1.509]$ 渐近稳定。

3.6 小结

由本章的分析可以看出, 离散化 Lyapunov 泛函方法较简单 Lyapunov 泛函方法有两方面的优点。

1, 离散化 Lyapunov 泛函方法保守性很小。所得到的结果可以非常接近于实

际结果。并且如果我们愿意增加计算量(增加离散化段数), 所得结论可以无限接近于实际结果。

2, 离散化 Lyapunov 方法是 1997 年美国 Southern Illinois University Edwardsville 的 Gu Keqin 教授首次提出。此后, 该方法由 Gu Keqin 教授及其它学者(如 Han Qinglong 和 Emilia Fridman)完善并扩展。关于离散化 Lyapunov 泛函方法目前普遍的观点是该方法有两大优点: 1, 保守性低(如上所诉)。2, 可处理非零时滞系统不稳定的情况。因为这时简单 Lyapunov 泛函方法不能处理。

事实上, 作者通过结合非时域方法的研究中发现, 离散化 Lyapunov 泛函方法可处理更多简单 Lyapunov 泛函方法不能处理的问题。这里简单做一说明。

简单 Lyapunov 方法只能处理最简单形式的时滞稳定区间, 也就是 $[0, \bar{\tau})$ 形式的区间。而在后面的分析中我们会了解到, 对于一个时滞系统可能存在不只一个稳定区间。比如一个系统可能存在两个时滞稳定区间 (τ_1, τ_2) 和 (τ_3, τ_4) 。这时对于 (τ_3, τ_4) 这个区间, 简单 Lyapunov 泛函方法是不能处理的。如果是对一个多时滞的时滞系统, 则可能存在很多稳定域。对于这些情况, 简单 Lyapunov 泛函方法都无法处理。可是, 对于这些时域框架下很少研究的问题, 作者发现, 离散化 Lyapunov 泛函方法还是有效的。

关于这种现象, 可以这样的理解: 对于一个时滞系统, 无论它在什么情况下渐近稳定, 稳定的充分必要条件是存在一个完全形式的 Lyapunov-Krasovskii 泛函。而离散化 Lyapunov 泛函方法可以非常接近这个充分必要条件。从而即使在一些复杂的情况下, 由离散化 Lyapunov 泛函方法也可以很好的验证系统的稳定状态。

此外, 虽然对于时不变时滞系统目前有一些有效的方法可以得到充分必要的稳定条件。但是这些方法由于是基于系统特征方程的分析方法, 它们不能处理时滞系统的鲁棒性分析问题。就作者所知, 对于时滞系统的鲁棒分析, 离散化 Lyapunov 方法是最为有效的分析工具。

第四章 时滞系统稳定性分析：一种混合代数、频域方法

4.1 引言

在论文的前部分, 主要介绍时滞系统分析中常用的时域方法。当前的时域分析框架主要是基于 Lyapunov-Krasovskii 泛函结合线性矩阵不等式技术。根据所采用的泛函形式又可分为简单 Lyapunov 泛函方法(Fridman & Shaked, 2002a, b 和 He, Wu, She & Liu, 2004a, b)和离散化 Lyapunov 泛函方法(Gu, 1997)。另外还有通过解边值问题构建完全 Lyapunov-Krasovskii 泛函的分析方法(Kharitonov & Zhabko, 2003)。在这里, 简单的总结一下时域方法的特点。该方法可有效地分析鲁棒稳定性, 时变时滞情况, 分布时滞情况和综合问题。该方法的不足是仅能得到充分(非必要)的稳定条件且结论的保守性不可避免。更多关于时域方法的介绍和分析可参考 Gu, Kharitonov & Chen(2003)。

在这里, 再介绍两种有效的分析时滞系统稳定性的方法: 频域方法和代数方法。这两种方法都是基于时滞系统(retarded型或neutral型)的特征方程分析的。一个时滞系统的特征方程为准多项式。而这个准多项式具有无穷多个根。因此, 我们很难直接应用已有针对多项式的分析方法处理准多项式。

这里, 我们主要介绍文献 Chen (1995), Fu, Niculescu & Chen (2006)及 Gu, Kharitonov & Chen(2003)中的频域方法。频域方法分析时滞系统稳定性的主要思路是根据检测系统的虚根和依据系统特征根的连续性。这里所讲的连续是指, 系统的特征虚根是关于时滞参数连续的。也就是说, 如果随着时滞的增加系统中有特征根从复平面的左(右)半平面运动至复平面的右(左)半平面。由连续性可知, 这期间这个特征根必然经过虚轴。由于检测系统的虚根是可能的(目前还没有有效的检测一般特征根的方法), 因此目前大多数非时域研究方法都基于系统的虚根为研究点。对于含相称时滞的线性时滞系统, 已有的频域方法可检测出所有的特征虚根并求得对应的时滞值。这些时滞值也称为临界时滞, 因为在这些时滞的情况下, 系统具有纯虚特征根。

在这里先做一个简单的说明。在临界时滞值上, 系统具有纯虚根。当这个临界时滞变化时, 对应的虚根将有相应的变化(运动)。我们更关心的是, 这个虚根是往左半平面运动还是往右半平面运动。因为这个方向(左或右)直接决定这个特征根对稳定性的影响。当向左运动这个根为稳定的特征根, 而向右运动则这个特征根则为不稳定的特征根。目前, 针对这个临界虚根的变化研究在有些文献和论文的后面将有介绍。在本章中, 由于我们采用的方法可以不考虑虚根穿越方向, 所有仅在这里对相关的概念简单介绍。

而对于含非相称时滞的系统, 频域方法仅能给出充分不必要稳定条件(见 Gu, Kharitonov & Chen, 2003 中 Chapter 3)。此外, 即使对一个相称时滞系统, 频域方法也不能直接判断对一个给定时滞, 系统是否稳定。Chen (1995) 和 Olgac &

Sipahi (2002) 提出一些检验系统稳定行为的方法, 可是这些方法不适用于非相称时滞系统。

代数方法从一个不同的角度处理时滞系统的特征方程。首先, 假定系统存在含非负实部的特征根。然后求得包含所有可能不稳定根的一个闭区域。最后, 通过检验这个区域边界上特征函数幅角变化情况验证给定时滞下系统的稳定性。这个闭区域可以利用矩阵测度和矩阵范数确定为长方形 (Hu & Liu, 2007) 或半圆形 (Hu, Hu & Zou, 2004)。对于给定时滞, 不管系统是相称型或非相称型, 系统的稳定性都可以准确的判断。可是, 代数方法不能给出一个区间型的稳定结果。代数方法仅能逐点判断系统稳定性。

在本章中, 我们提出一种新的方法, 一种混合代数、频域方法。该方法可以弥补代数方法和频域方法的不足。首先, 提出一种可以处理非相称时滞的新型频域扫描方法。结合这个频域扫描方法和代数方法, 我们得到这个混合代数、频域方法。这个方法可以得出比已有方法更好的稳定结果。由后面给出的仿真例子, 可以看出对已有方法的改进。

本章的符号说明: $\Re s$ 和 $\Im s$ 分别代表一个复数 s 的实部和虚部。复平面上的单位圆表示为 $\partial \mathbf{D}$ 。对一个矩阵 A , $\mu(A)$ 表示矩阵测度, $\|A\|$ 表示矩阵范数。对于一个矩阵对 (A, B) , $\lambda_i(A, B)$ 和 $\sigma(A, B)$ 分别表示其第 i 个广义特征值和广义谱。定义: $\rho(A, B) := \min\{|\lambda| \mid \det(A - \lambda B) = 0\}$ 。如不特殊说明, 矩阵都认为是具有合适维数的。

4.2 主要结论

考虑如下含非相称时滞的时滞系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{j=1}^m [B_j x(t - \tau_j) + C_j \dot{x}(t - \tau_j)] \quad (4.1)$$

其中 A , B_j 和 C_j 为常数矩阵, τ_j 为常数时滞 ($j=1, \dots, m$)。

系统 (4.1) 的特征方程为

$$P(s) = \det[sI - A - \sum_{j=1}^m (B_j + sC_j)e^{-s\tau_j}] \quad (4.2)$$

这个方程的根称为系统特征根。

系统 (4.1) 渐近稳定的充分必要条件是 $\sup\{\Re s : P(s) = 0\} < 0$ (Hale & Verduyn Lunel, 1993)。

需要注意的是, 系统 (4.2) 具有无穷多个特征根。并且估计所有特征根的分布是不实际的。

在这里假定 $\sum_{j=1}^m \|C_j\| < 1$ 。这个假设是系统 (4.1) 渐近稳定的必要条件。并且这个假

定可确保系统 (4.1) 的稳定指数关于时滞 $\tau_j \geq 0$ ($j=1, \dots, m$) 连续。

在给出一个频域方法的结论前, 我们对系统具有纯虚根的情况做一个简单说明。对于时滞系统来说, 系统含有纯虚根时 (假定不含有其它不稳定根) 的稳定定义目前还不是非常明确。细心的读者会发现, 很多已有的文献都没有讨论这种情况。简单地说, 当系统具有纯虚根时, 系统不满足渐近稳定定义, 因此我们可以说系统不是渐近稳定的。但是, 在没有明确定义或更进一步分析的情况下, 我们不能说此时系统是不稳定的。因此, 在本章中, 我们可以认为纯虚根是一种临界状态。或便于分析和不引起歧义, 我们也可假定不存在某一个特征根随时滞变化的轨迹与虚轴相切的情况。这样, 我们给出下面的定理。

定理 4.1: 对给定时滞 τ_j ($j=1, \dots, m-1$), 系统 (4.1) 对所有 $\tau_m \geq 0$ 是渐近稳定 (不稳定) 的, 如果系统 (4.1) 在 $\tau_m = 0$ 时渐近稳定 (不稳定) 且

$$\underline{\rho}(j\omega I - A - \sum_{j=1}^{m-1} (B_j + j\omega C_j)e^{-j\omega\tau_j}, B_m + j\omega C_m) > 1, \quad \forall \omega \in (0, \infty) \quad (4.3)$$

证明: 当 $\omega > 0$, $B_m + j\omega C_m$ 的秩为常数。这样

$$\lambda_i(j\omega I - A - \sum_{j=1}^{m-1} (B_j + j\omega C_j)e^{-j\omega\tau_j}, B_m + j\omega C_m)$$

是关于 $j\omega I - A - \sum_{j=1}^{m-1} (B_j + j\omega C_j)e^{-j\omega\tau_j}$ 和 $B_m + j\omega C_m$ 连续的。

因此, 如果存在一个 $\omega' > 0$ 满足

$$\underline{\rho}(j\omega' I - A - \sum_{j=1}^{m-1} (B_j + j\omega' C_j)e^{-j\omega'\tau_j}, B_m + j\omega' C_m) < 1,$$

$\underline{\rho}(j\omega I - A - \sum_{j=1}^{m-1} (B_j + j\omega C_j)e^{-j\omega\tau_j}, B_m + j\omega C_m)$ 将不可避免大于 1, 因为它是关于 ω 连

续的。可见, (4.3) 表明对于 $\omega > 0$,

$$\det(j\omega I - A - \sum_{j=1}^{m-1} (B_j + j\omega C_j)e^{-j\omega\tau_j} - (B_m + j\omega C_m)e^{-j\omega\tau_m}) \neq 0。$$

也就是说, 系统 (4.1) 无虚根。

如果系统不含虚根且当 $\tau_m = 0$ 时渐近稳定。则根据稳定指数的连续性, 对所有 $\tau_m \geq 0$, 系统将没有不稳定根。

同理, 如果当 $\tau_m = 0$ 时系统不稳定, 则 $\tau_m = 0$ 时刻的不稳定根将一直留在右半平面。从而, 对所有 $\tau_m \geq 0$, 系统将不稳定。

我们知道, 对于我们现在研究的系统, 特征根是成共轭对出现的。因此我们仅考虑正频率的情况就可以。到此定理得证。□。

如果 (4.3) 不成立, 则假定存在 t 个 ω_k ($k=1, \dots, t$) 满足

$$\det[sI - A - \sum_{j=1}^{m-1} (B_j + j\omega_k C_j) e^{-j\omega_k \tau_j} - (B_m + j\omega_k C_m) e^{-j\theta_k}] = 0 \quad (4.4)$$

其中 $\theta_k \in [0, 2\pi]$ 。对于一个 ω_k ，可得到一组 τ_{kn} 满足

$$\det[sI - A - \sum_{j=1}^{m-1} (B_j + j\omega_k C_j) e^{-j\omega_k \tau_j} - (B_m + j\omega_k C_m) e^{-j\omega_k \tau_{kn}}] = 0 \quad (4.5)$$

其中 $\tau_{mkn} = \frac{\theta_k + 2n\pi}{\omega_k}$, $n = 0, 1, 2, \dots$

定理 4.2: 对给定 $\tau_j (j=1, \dots, m-1)$ ，系统 (4.1) 具有虚根当且仅当存在 $\omega_k \in [0, \infty)$ 满足

$$\sigma(j\omega_k I - A - \sum_{j=1}^{m-1} (B_j + j\omega_k C_j) e^{-j\omega_k \tau_j}, B_m + j\omega_k C_m) \cap \partial D \neq \emptyset \quad (4.6)$$

如果 $\omega_k = 0$ 满足 (4.6)，则对所有 $\tau_j (j=1, \dots, m-1)$ 存在一个特征根 $s = 0 + 0i$ 。否则，

所有的临界时滞值为 $\tau_{mkn} = \frac{\theta_k + 2n\pi}{\omega_k}$, $k=1, \dots, t$, $n=0, 1, \dots, \infty$ 。其中

$$e^{-j\theta_k} = \sigma(j\omega_k I - A - \sum_{j=1}^{m-1} (B_j + j\omega_k C_j) e^{-j\omega_k \tau_j}, B_m + j\omega_k C_m) \cap \partial D$$

定理的结论是比较明显的，这里证明省略。

注 4.1: 上面的频域方法是与时滞 $\tau_j (j=1, \dots, m-1)$ 相关的，因此可以应用于含非相称时滞的时滞系统。而 Gu, Kharitonov & Chen (2003) 中的频域扫描方法和 Chen (1995), Fu, Niculescu & Chen (2006) 和 Gu, Kharitonov & Chen (2003) 中的 Matrix pencil 方法仅适用于含相称时滞的时滞系统。

由上面给出频域扫描方法，我们可获得所有的特征虚根和对应的时滞值。这些临界时滞值将时滞区间 $[0, \infty)$ 分割成了无穷多个小区间。频域方法的优势是可以得到所有的这些小区间。可是由频域方法我们不易判定每个区间的稳定性。接下来，我们以两个引理的形式给出另一种有效的分析工具，代数方法。

引理 4.1 (Hu & Liu 2007): 假定 $\sum_{j=1}^m \|C_j\| < 1$ 。令 p 为特征方程 (4.2) 的一个特征根。并且假定 $\Re p \geq 0$ ，则下面的不等式成立

$$0 \leq \Re p \leq E \quad (4.7)$$

和

$$-F \leq \Im p \leq F \quad (4.8)$$

其中

$$E = \mu[A] + \sum_{j=1}^m \|B_j\| + X$$

$$F = \mu[-iA] + \sum_{j=1}^m \|B_j\| + X$$

$$X = \frac{\sum_{j=1}^m \|C_j A\| + \sum_{j=1}^m (\sum_{k=1}^m \|C_j B_k\|)}{1 - \sum_{j=1}^m \|C_j\|}$$

如果 $E > 0$ 且 $F > 0$, 我们用 l_a, l_b, l_c 和 l_d 表示端点分别为 $(0, F)$ 和 $(0, -F)$, $(0, -F)$ 和 $(E, -F)$, $(E, -F)$ 和 (E, F) , (E, F) 和 $(0, F)$ 的四条线段。进一步, 我们令 $l = l_a \cup l_b \cup l_c \cup l_d$, D 为 l 围成的长方形区间。并且令 $\bar{D} = D \cup l$ 。

下面给出一个便于计算的稳定性判据。

引理 4.2 (Hu & Liu 2007): 假定 $\sum_{j=1}^m \|C_j\| < 1$ 。系统 (4.1) 渐近稳定当且仅当对

$s \in l$, $P(s) \neq 0$ 并且 $\Delta_l \arg P(s) = 0$ 或 \bar{D} 为空集。这里 $\Delta_l \arg P(s) = 0$ 表示沿 l , $P(s)$ 的幅角变化。

令 $s = x + iy$, $P(s) = U(x, y) + iV(x, y)$ 。则 $|P(s)|^2 = |U(x, y)|^2 + |V(x, y)|^2$ 。在 l_a 和 l_c 上, s 的实部为常数; 在 l_b 和 l_d 上, s 的虚部为常数。因此, $|P(s)|^2$ 仅有一个变量 x (y) 当在 l_b 和 l_d (l_a 和 l_c) 上时。可见, 我们可容易地求得当 $s \in l$ 时 $P(s)$ 的情况。

由前面介绍的结论, 我们现在给出混合代数、频域方法。这个方法由三个步骤组成。

混合代数、频域方法:

步骤 1. 应用引理 4.1 求得区域 D 的边界 l 。如果 \bar{D} 为空集, 则系统 (4.1) 为时滞 $\tau_j (j=1, \dots, m)$ 无关稳定的。否则执行下面步骤分析时滞相关型稳定性。

步骤 2. 对给定时滞 $\tau_j (j=1, \dots, m-1)$, 采用频域扫描方法获得所有临界时滞。有以下三种可能情况:

情况 1: 无临界时滞

情况 2: 存在 t 个 $\omega_k \neq 0$ ($k=1, \dots, t$)。我们可以进一步得到所有临界时滞

$$\tau_{mkn} = \frac{\theta_k + 2n\pi}{\omega_k} \quad (k=1, \dots, t, n=0, 1, \dots, \infty)。$$

情况 3: 存在一个零值交叉频率。

步骤 3: 根据步骤 2 得到的结果, 分析系统的稳定性。

对情况 1: 根据引理 4.2 检验系统 $\tau_m = 0$ 时的稳定情况。如 $\tau_m = 0$ 时系统渐近稳定, 则系统时滞 τ_m 无关渐近稳定。如 $\tau_m = 0$ 时系统不稳定, 则系统时滞 τ_m 无关不稳定。

对情况 2: 由引理 4.2 检验被临界时滞分割出的开区间中任意一个时滞的系统稳定性。如果对于这个时滞, 在 l 上 $|P(s)|^2 \neq 0$ 且 $\Delta_l \arg P(s) = 0$, 则对于在该开区间上的所有时滞 τ_m 和给定 $\tau_j (j=1, \dots, m-1)$, 系统是渐近稳定的。否则, 对该开区间上

的所有时滞 τ_m 和给定 $\tau_j (j=1, \dots, m-1)$, 系统不是渐近稳定的。对于一些相连的非渐近稳定的区间, 我们可以将其连成一个大的闭区间, 并且我们可以说在这个大的闭区间上, 系统不是渐近稳定的。

对情况 3: 对于所有 $\tau_j (j=1, \dots, m-1)$, 系统都存在一特征根 $s = 0 + 0i$ 。

以上的方法是基于联合前面介绍的代数方法和频域方法得到的。

注 4.2: Gu, Kharitonov & Chen (2003) 中指出, 频域扫描方法仅需要对一个有限的频域区间扫描即可。事实上, 我们可以根据代数方法得到这个有限区间 $[0, F]$ 。因为根据引理 4.1, 一个含非负实部的虚根必须位于区间 \bar{D} 中。

注 4.3: 如果系统 (4.1) 简化为一个相称时滞系统, 比如

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{j=1}^m [B_j x(t - j\tau) + C_j \dot{x}(t - j\tau)] \quad (4.9)$$

其中 τ 为常数时滞。这种情况下, 我们可以采用 Fu, Niculescu & Chen (2006) 中的 Matrix Pencil 方法。这种方法可有效地求得系统的临界时滞值。可是, 该方法仅适用于相称时滞的情况。

此外频域方法不能处理一个给定时滞下的系统稳定性。最近 Chen, Fu, & Niculescu (2006) 和 Olgac & Sipahi (2002) 提出了一些检验给定时滞下系统稳定性的方法。可是, 这些方法同样不能处理非相称时滞的情况。另一方面, 代数方法不能给出可以满足系统稳定的时滞区间。可见代数方法和频域方法有各自的不足。而本章中提出混合代数、频域方法有效地弥补了这些方法的缺点。

4.3 数值仿真

这节中给出两个仿真例子说明本章方法的有效性。为简便, 我们仅考虑含两个时滞的情况。而本章的方法可以处理含更多时滞的系统。

例 4.1: 考虑下面的中立系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{j=1}^2 [B_j x(t - \tau_j) + C_j \dot{x}(t - \tau_j)]$$

令

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0.5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.4 \\ 0.4 & -1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} -0.3 & 0.2 \\ 0.2 & -0.3 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

由 Hu & Liu (2007) 的代数方法, 得到这个系统对以下这些时滞对 $\{\tau_1, \tau_2\} = \{0.99, 2\}, \{0.99, 3\}, \{0.99, 5\}, \{0.99, 10\}, \{1, 2\}, \{1.2, 2\}, \{1.4, 2\},$

$\{1.6, 2\}$, $\{1.8, 2\}$ 和 $\{10, 2\}$ 渐近稳定。可是该方法不能确定是否在某个连续的时滞区间内系统稳定。

现在我们应用本章的混合代数、频域方法分析。

由 步骤 1, 我们可确定这个系统不是时滞无关渐近稳定的, 因为 $E = 2.0048$, $F = 3.2358$ 。

首先, 考虑 $\tau_1 = 0.99$ 的情况。执行步骤 2, 我们得到 $\rho(j\omega I - A - (B_1 + j\omega C_1)e^{-j\omega\tau_1}, B_2 + j\omega C_2) > 1$, $\forall \omega \in (0, \infty)$ 。因此根据步骤 3, 检验时滞对 $\{0.99, 0\}$ 的系统稳定性。因系统当 $\tau_1 = 0.99$ 且 $\tau_2 = 0$ 时渐近稳定, 这个系统是当 $\tau_1 = 0.99$ 时, τ_2 无关渐近稳定的。同理我们得到, 当 $\tau_2 = 2$ 时系统 τ_1 无关渐近稳定。

例 4.2: 下面考虑一个具有混合时滞的中立系统

$$\dot{x}(t) - C\dot{x}(t - \tau) = Ax(t) + Bx(t - r)$$

令

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0.2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix}, \tau = 0.3$$

当 $r = 0$, 时这个系统是不稳定的。如前所述, 频域方法 Fu, Niculescu & Chen (2006) 仅能分析当系统时滞为零时的稳定情况。所以, 应用频域方法不能分析这个例子。并且简单 Lyapunov 泛函方法也不能处理这个例子。而离散化 Lyapunov 方法虽然可以研究这个系统, 但是很难取得很好的效果。一方面, 时域方法保守性是不可避免的。另一方面, 针对混合型中立系统, 目前还为找到相应的完全型 Lyapunov-Krasovskii 泛函。目前仅有关于非混合时滞中立系统的相关报道 (Kharitonov, 2005)。

下面我们采用本章的方法研究这个系统。由混合代数、频域方法我们得到两组 r 的临界时滞 $0.236 + \frac{2n\pi}{1.607}$ 和 $1.472 + \frac{2n\pi}{1.769}$ ($n = 0, 1, \dots, \infty$)。检验时滞对

$\{0.3, r_1\}$, $\{0.3, r_2\}$ 和 $\{0.3, r_3\}$ 的系统稳定性。其中 r_1 , r_2 和 r_3 为满足

$0 \leq r_1 < 0.236$, $0.236 < r_2 < 1.472$ 和 $1.472 < r_3 < 5.024$ 的任意时滞。进而我们可得到,

当 $\tau = 0.3$ 时, 对所有 $0.236 < r < 1.472$ 系统渐近稳定。

可见, 本章提出的方法优于已有的分析方法。

4.4 小结

本章提出了一种新的时滞系统稳定性分析方法, 混合代数、频域方法。该方法弥补了代数方法和频域方法的不足又结合了各自方法的长处。利用这种混合代数、频域方法, 我们可以有效地得到时滞系统的时滞稳定区间。而频域方法仅能分析

系统零时滞下稳定的情况。至于代数方法，我们不能用来获得区间型的稳定结果。而利用时域方法求得的结果不可避免的存在保守性。本章中还提到了一些有效的分析方法。可是这些方法仅能处理具有相称时滞的时滞系统。可见，本章提出的混合代数、频域方法可以得到已有方法得不到的结论。该方法可以有效地用来分析多时滞系统的稳定性。

第五章 线性时不变系统完全稳定性

5.1 引言

我们知道一个线性时不变时滞系统的稳定性是完全由它的特征方程决定的。时滞系统的特征方程为一个准多项式。并且该特征方程具有无穷多个特征根。就目前来看, 要求得所有特征根的分布是不实际的。

尽管想完全, 准确地计算一个准多项式的所有特征根, 目前是不可能的。但我们可以通过检验系统是否存在具有非负实部的特征根来确定系统的渐近稳定性。例如, 可以采用已有的方法如: 频域方法(Chen, 1995 和 Fu, Niculescu & Chen, 2006)和代数方法(Hu & Liu, 2007)。如果系统不含具有非负实部的特征根, 则系统是渐近稳定的。然而, 这些方法还是有一些不足的。比如, 代数方法不能给出区间型的时滞稳定结果。频域方法不能分析系统零时滞不稳定的情况。

这里需要提及时滞系统分析中常用的Lyapunov方法, 如: 简单Lyapunov泛函方法(He, Wu, She & Liu, 2004a, b)和离散化Lyapunov泛函方法(Gu, 1997)。更多关于Lyapunov方法的介绍可参考 Gu, Kharitonov & Chen (2003) 和 Niculescu (2001)。由Lyapunov方法, 我们可以有效地研究时滞系统的鲁棒稳定性和综合问题。可是, 该方法不可避免的具有保守性。

在Cooke & Driessche (1986)中, 一类简单形式的准多项式被研究并得到了一些关于系统零点的非常重要的性质。基于这些性质, 系统虚根的穿越方向(从左半平面穿越到右半平面或从右半平面穿越到左半平面)可直接根据虚根的大小顺序得到。此外Cooke & Driessche (1986)还指出, 一旦系统具有特征虚根, 当时滞逐渐增大时, 系统可能发生有限次的稳定性切换, 并且系统将是最终不稳定的。这样我们可确定系统的完全稳定性。

很自然地, 我们会希望类似的性质可以扩展到一般形式的时滞系统中。可是, 到目前为止, 还没有这样的报道。沿Cooke & Driessche (1986)的思路的研究主要还是针对一些简单形式的准多项式, 如: Boese (1998), Boese (1999)和 Malakhovskii & Mirkin (2006)。

最近, 文献Olgac & Sipahi (2002)提出了一种新颖的分析方法, 特征根聚类方法(CTCR)。文献中证明了, 对一般形式的时滞系统, 虚根的穿越方向是和对应的时滞无关的。此外, 虚根的计算采用Rekasius变换(Rekasius, 1980)和Routh-Hurwitz判据(Thowsen, 1981)得到。到目前为止, CTCR方法是分析系统完全稳定性最有效的方法。而其它已有的方法中, 可以给出时滞系统完全稳定区间的方法非常少(Walton & Marshall, 1987)。

本章中, 我们提出了一种全新的分析时滞系统完全稳定性的方法。首先, 给出一些关于时滞系统虚根穿越方向的性质。这些性质是类似于Cooke & Driessche (1986)中所得关于简单准多项式的性质。展开来说, 对于一般时滞系统, 虚根的穿越方向也可以直接由系统虚根的某种大小顺序确定。当然, 相应的规律要比简单时滞系统要复杂一些。我们需要知道一种结构信息(哪些虚根属于同一个子准多项

式)。此外,一旦系统具有虚根,我们也可证明,随着时滞的增大,系统将是最终不稳定的。并且系统可发生有限次稳定性切换。

以上的结果需要确定系统的结构信息。这个结构信息是很难由已有的方法获得的。基于此,我们提出了一种频域扫描方法。由这个频域扫描方法,可以有效的检测系统的虚根。更重要的是,可以获得需要的结构信息。从而,虚根穿越方向可以直接得到。进一步,可描绘出系统的完全稳定区间。

由后面的数值仿真可见,本章的方法要比已有的方法简单许多。尤其当系统很复杂时(比如系统维数高,时滞个数多时),本章的方法将明显简化系统的完全稳定性分析。

本章的结构如下:在 5.2 节中简单的回顾了相关的基本知识。在 5.3 节中,研究了时滞系统的虚根穿越方向和系统的完全稳定性。在 5.4 节中给提出了一种频域扫描方法。最后给出一些数值仿真。

5.2 预备知识

考虑下面的一般形式的时滞系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau) \quad (5.1)$$

其中 A 和 B 是已知常数矩阵, $\tau \geq 0$ 为常数时滞。

系统 (5.1) 的特征方程为

$$\det(sI - A - Be^{-\tau s}) = 0$$

其具体形式为

$$CE(s, \tau) = a_n(s)e^{-n\tau s} + a_{n-1}(s)e^{-(n-1)\tau s} + \cdots + a_0(s) = \sum_{k=0}^n a_k(s)e^{-k\tau s} = 0 \quad (5.2)$$

其中 $a_k(s)$ 为 $n-k$ 次 s 的实系数多项式。 $a_0(s)$ 具有 s 的次数最高,并且与时滞无关。准多项式 (5.2) 含 n 重相称时滞。系统 (5.1) 是渐近稳定的,当且仅当 (5.2) 的所有特征根都位于复平面的开左半平面, Hale & Verduyn Lunel (1993)。

由 Hale & Verduyn Lunel (1993) 知,这类系统对所有时滞 $\tau \geq 0$ 含有限个正交叉频率。我们表示这个集合为

$$\{\omega_c\} = \{\omega_{c,1}, \omega_{c,2}, \cdots, \omega_{c,m}\}$$

对每一个虚根 $\omega_{c,k}i$ ($k=1, \cdots, m$) 都具有无穷多个相应的时滞值。这里 i 为虚部。我们表示这个集合为

$$\{\tau_k\} = \{\tau_{k1}, \tau_{k2}, \cdots, \tau_{k\infty}\}$$

并且满足 $\tau_{k,l+1} - \tau_{k,l} = 2\pi / \omega_{ck}$ 。

一个虚根的穿越方向(CDIR)可定义为

$$CDIR|_{s=\omega_{ck}i} = \text{sgn}[\text{Re}(\frac{ds}{d\tau}|_{s=\omega_{ck}i})]$$

其中

$$\frac{ds}{d\tau}|_{s=\omega_{ck}i} = -\frac{(\frac{\partial CE(s,\tau)}{\partial \tau})}{(\frac{\partial CE(s,\tau)}{\partial s})} = \frac{\sum_{j=0}^n a_j(s)js e^{-j\tau s}}{\sum_{j=0}^n (\frac{da_j(s)}{ds} - ja_j(s)\tau)e^{-j\tau s}}$$

随着时滞的增加, 一个虚根 $\omega_{c,k}i$ 从左半平面穿越到右半平面 (从右半平面穿越到左半平面) 如果 $CDIR|_{s=\omega_{ck}i} = +1$ ($CDIR|_{s=\omega_{ck}i} = -1$)。

在本章中, 假定系统的虚根不存在重根。对于一个重根, $ds/d\tau = 0$ (见 Cooke & Driessche (1986) 和 Olgac & Sipahi (2002))。关于重根情况的说明可参考 Cooke & Driessche (1986) 和 Lee & Hsu (1969)。

5.3 时滞系统完全稳定性

观察准多项式 (5.2), 我们将其改写为

$$CE(s, z) = a_n(s)z^n + a_{n-1}(s)z^{n-1} + \cdots + a_0(s) = \sum_{k=0}^n a_k(s)z^k = 0 \quad (5.3)$$

其中 $z = e^{-\tau s}$ 。

进一步, 对给定 $a_k(s)$ ($k=0, \dots, n$), 存在连续的多项式 $L_l(s)$ ($l=1, \dots, n$) 满足系统状态方程可等价于

$$CE(s, z) = a_n(s) \prod_{l=1}^n CE_l = a_n(s) \prod_{l=1}^n (z + L_l(s)) \quad (5.4)$$

其中 $a_n(s)$ 为常数, $L_l(s)$ 满足

$$\sum_{k=0}^n (a_k(s)/a_n(s))(-L_l(s))^k = 0$$

这里我们不要求出多项式 $L_l(s)$ 。因为 s 和 z 为复数, $CE(s, z) = 0$ 当且仅当一个子准多项式 $(z + L_l(s))$ ($l=1, \dots, n$) 等于零。

对于一个子准多项式 $(z + L_l(s))$, 我们假定它具有 ol 个正交叉频率, 并表示这个集合为 $\omega_l = \{\omega_{l,1}, \dots, \omega_{l,ol}\}$ 。这样, 所有的正交叉频率可以表示为 n 个集合 ω_l ($l=1, \dots, n$), 其中每个 ω_l 表示为 $\omega_l = \{\omega_{l,1}, \dots, \omega_{l,ol}\}$ 。

对每一个正虚根 $s = \omega_{l,m}i$ ($m=1, \dots, ol$), 存在无穷多个时滞值 $\tau_{l,m,r}$ ($r=1, \dots, \infty$) 满足 $CE(\omega_{l,m}i, \tau_{l,m,r}) = 0$ 。表示这个集合为 $\tau_{l,m} = \{\tau_{l,m,1}, \dots, \tau_{l,m,\infty}\}$, 并满足 $\tau_{l,m,r+1} - \tau_{l,m,r} = 2\pi / \omega_{l,m}$ 。

进一步, 我们将每一个集合 ω_l 按大小顺序排列表示:

$$\omega_l = \{\omega_{l,1}, \dots, \omega_{l,ol}\}$$

满足 $\omega_{l,1} > \omega_{l,2} > \dots > \omega_{l,ol-1} > \omega_{l,ol}$

现在, 我们给出一个关于时滞系统 (5.1) 虚根穿越方向的重要性质。

定理 5.1: 对一个虚根 $s = \omega_{l,m}i$ (其相应的时滞属于 $\tau_{l,m}$), 下面的性质成立:

- 1) 对于 $\tau \in \tau_{l,m}$, 虚根穿越方向总是从左向右, 如果 m 为奇数。
- 2) 对于 $\tau \in \tau_{l,m}$, 虚根穿越方向总是从右向左, 如果 m 为偶数。

证明: 由 (5.4) 得

$$\left. \frac{ds}{d\tau} \right|_{s=\omega_{l,m}i} = - \frac{\frac{\partial(\prod_{j=1}^n CE_j)}{\partial \tau}}{\frac{\partial(\prod_{j=1}^n CE_j)}{\partial s}} \bigg|_{s=\omega_{l,m}i} = - \frac{\frac{\partial(CE_l)}{\partial \tau} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^n CE_j + CE_l (\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^n \frac{\partial(CE_j)}{\partial \tau}) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq l, k \neq j}}^n CE_k}{\frac{\partial(CE_l)}{\partial s} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^n CE_j + CE_l (\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^n \frac{\partial(CE_j)}{\partial s}) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq l, k \neq j}}^n CE_k} \bigg|_{s=\omega_{l,m}i}$$

因对 $s = \omega_{l,m}i$, $CE_l = 0$, 所以

$$CDIR|_{s=\omega_{l,m}i} = CDIR_{l,m}$$

其中

$$CDIR_{l,m} = \operatorname{sgn}(\operatorname{Re}(\frac{\frac{\partial CE_l}{\partial \tau}}{\frac{\partial CE_l}{\partial s}} \bigg|_{s=\omega_{l,m}i}))$$

对于一个子准多项式 $(z + L_l(s))$, 存在复根 z 满足 $|z|=1$ 当且仅当

$$F_l(\omega) = |L_l(\omega i)|^2 - 1 = 0 \quad (5.5)$$

其中

$$|L_l(\omega i)|^2 = L_{lR}^2(\omega) + L_{lI}^2(\omega)$$

$L_{lR}(\omega)$ 和 $L_{lI}(\omega)$ 分别为 $L_l(\omega i)$ 的实部和虚部。

因为 $\pm \omega_{l,j}i$ ($j=1, \dots, ol$) 是子准多项式 $(z + L_l(s))$ 的单虚根, 则 $\pm \omega_{l,j}$ ($j=1, \dots, ol$) 为 $F_l(\omega)$ 的单实根。因此 $F_l(\omega)$ 可以表达为下面的形式

$$F_l(\omega) = F_{l0}(\omega) F_{l1}(\omega) \quad (5.6)$$

其中

$$F_{l0}(\omega) = \prod_{j=1}^{ol} (\omega^2 - \omega_{l,j}^2)^{\frac{1}{n_{l,j}}} \quad (n_{l,j} \geq 1 \text{ 为正整数}), \quad F_{l1}(\omega) = \frac{F_l(\omega)}{F_{l0}(\omega)}$$

此外, 由于 $|L_l(\omega i)|$ 为实值函数 (因为它代表的 $|L_l(\omega i)|$ 模), $F_l(\omega)$ 是一个实值函数。因此, $n_{l,j} = 1$ 。也就是

$$F_{l0}(\omega) = \prod_{j=1}^{ol} (\omega^2 - \omega_{l,j}^2)$$

关于 $n_{l,j} = 1$ 也可以从另外一个角度得到。如果 $n_{l,j} > 1$, 由下面的分析我们发现

$F'_l(\omega)|_{\omega=\omega_{l,m}}$ 将具有零分母。这将会和时滞系统的根关于时滞参数连续这个性质相矛盾。

另一方面

$$\left. \frac{ds}{d\tau} \right|_{s=\omega_{l,m}i} = \left. \frac{s}{\frac{dL_l(s)}{ds} e^{\tau s} - \tau} \right|_{s=\omega_{l,m}i}$$

且

$$\left(\left. \frac{ds}{d\tau} \right|_{s=\omega_{l,m}i} \right)^{-1} = - \left. \frac{\frac{dL_l(s)}{ds}}{sL_l(s)} - \frac{\tau}{s} \right|_{s=\omega_{l,m}i}$$

这样,

$$CDIR_{l,m} = \operatorname{sgn} \left\{ \operatorname{Re} \left(\left. \frac{ds}{d\tau} \right|_{s=\omega_{l,m}i} \right)^{-1} \right\} = - \operatorname{sgn} \operatorname{Im} \left(\left. \frac{L'_l(\omega i)}{\omega L_l(\omega i)} \right) \right|_{\omega=\omega_{l,m}}$$

其中

$$L'_l(\omega i) = L'_{lR}(\omega) - iL'_{lI}(\omega)$$

这样

$$CDIR_{l,m} = \operatorname{sgn} (L_{lR}(\omega)L'_{lR}(\omega) + L_{lI}(\omega)L'_{lI}(\omega)) \Big|_{\omega=\omega_{l,m}}$$

另一方面由 (5.5) 得

$$F'_l(\omega) = 2(L_{lR}(\omega)L'_{lR}(\omega) + L_{lI}(\omega)L'_{lI}(\omega))$$

因此

$$CDIR_{l,m} = \operatorname{sgn}(F'_l(\omega)) \Big|_{\omega=\omega_{l,m}}$$

再由 (5.6) 可知

$$F_l'(\omega)|_{\omega=\omega_{l,m}} = 2\omega_{l,m} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^{ol} (\omega_{l,m}^2 - \omega_{l,j}^2) F_{l1}(\omega)$$

因为 $F_{l1}(\omega)$ 是连续的并且对所有实 ω , $F_{l1}(\omega) \neq 0$, 因此对 $\omega \in (-\infty, +\infty)$ $F_{l1}(\omega)$ 要么一直为正数要么一直为复数。

由(5.3)我们可得当 $s = \omega i$ 时, $\lim_{\omega \rightarrow \infty} |z| = \infty$ 。显然存在一个充分大的 ω^* 满足 $F_l(\omega^*) > 0$

且 $F_{l0}(\omega^*) > 0$ 。进而存在 $F_{l1}(\omega^*) > 0$ 。这样我们知道对 $\omega \in (-\infty, +\infty)$, $F_{l1}(\omega) > 0$ 。

现在我们得到

$$CDIR|_{s=\omega_{l,m}i} = (-1)^{m+1}$$

到此, 定理得证。□

注 5.1: 由上可知时滞系统的虚根穿越方向是与时滞无关的。它仅与相应的交叉频率相关。

注 5.2: 目前有一些专门关于时滞系统虚根穿越方向的研究, 见 Chen, Fu & Niculescu (2006) 和 Niculescu, Fu & Chen (2006)。在 Chen, Fu & Niculescu (2006) 和 Niculescu, Fu & Chen (2006) 中引入了算子扰动方法 Kato (1995)。然而这种方法要求级数展开, 并且结果中总是含有余项。由定理 5.1, 我们可以直接知道系统的虚根穿越方向而无需相应的计算 Olgac & Sipahi (2002) 或采用 Chen, Fu & Niculescu (2006) 和 Niculescu, Fu & Chen (2006) 中的方法。

定理 5.2: 如果系统 (5.1) 含有至少一个虚根, 则存在一个时滞值 τ^* 满足当 $\tau > \tau^*$, 系统是不稳定的。对于 $0 < \tau < \tau^*$, 系统可能发生有限次的稳定性切换。

证明: 对于每一组 $\omega_l = \{\omega_{l,1}, \dots, \omega_{l,ol}\}$, 其中 $\omega_{l,1} > \omega_{l,2} > \dots > \omega_{l,ol-1} > \omega_{l,ol}$ 。相应的时滞周期分别为 $2\pi/\omega_{l,1}, \dots, 2\pi/\omega_{l,ol}$ 。因此, 总的来看, 虚根进入右半平面的频率要大于虚根离开右半平面的频率。可以预见, 存在一个值 τ^* , 对于 $\tau > \tau^*$, 系统总是具有至少一个不稳定根。定理得证。□

推论 5.1: 如果对于 $\tau \geq 0$ 系统 (5.1) 没有特征虚根, 则:

- 1) 系统对所有 $\tau \geq 0$ 渐近稳定, 如果当 $\tau = 0$ 时系统渐近稳定。
- 2) 系统对所有 $\tau \geq 0$ 不稳定, 如果当 $\tau = 0$ 时系统不稳定。

证明: 系统的稳定性变化仅发生在系统具有虚根的情况下, 因为一个线性时不变系统的特征根是关于时滞参数连续的。因此, 如果系统无虚根, 系统将保持它初始时刻的稳定状态。定理得证。□

如果所研究的时滞系统不是时不变的, 则以上的结论可能不成立。例如, Beretta & Kuang (2002) 中研究的时滞相关参数系统是最终稳定的。

以上的研究结果对于理论和实际都具有重要意义。由定理 5.1, 我们可以容易地研究一个时滞系统的完全稳定性。定理 5.2 则可以帮助我们更好的认识和了解一个一般形式的时滞系统。比如: 在 Olgac & Sipahi (2002) 中有这样一个例子。在一个小的时滞区间内, 增加时滞会使得原来稳定的系统不稳定。而继续增加时滞, 系统又可恢复稳定。对于这种现象, 我们可能会有一些疑问:

会不会还存在一些时滞值很大的时滞区间满足系统渐近稳定呢? 因为, 逐点检测 $\tau \in [0, \infty)$ 这个区间系统的稳定性是不可能的。虽然 Olgac & Sipahi (2002) 中的例子可以验证不存在这样的情况。但对于其它的时滞系统呢? 是否存在一些普

遍性的规律呢?

由此可见, 定理 5.2 可以很好的回答上面的疑问。我们可以确定, 只要一个线性时不变时滞系统具有虚根, 那么这个系统最终不稳定。

5.4 一种频域扫描方法

由前一节的分析我们知道, 一个时滞系统的虚根穿越方向可以直接由一些关系(哪些虚根属于同一个子准多项式)获得。这里, 我们称这样的关系为系统的结构信息。为获得这个结构信息, 本节提出一种频域扫描方法。并且我们知道, 为分析时滞系统(5.1)的稳定性, 首先需要获得系统的特征虚根。由这个频域扫描方法, 可以得到相应的虚根和时滞值。这个方法如下。

频域扫描方法: 对 ω 从 0 到一个正数 $\bar{\omega}$ 进行扫描。对每一个 $s = \omega i$, 系统 (5.3) 具有 n 个 z 的复根, z_1, z_2, \dots, z_n 。并且对 $\omega \in [0, \bar{\omega}]$ 描绘 $|z_1|, |z_2|, \dots, |z_n|$ 与 ω 的关系图, 其中 $| \cdot |$ 表示模。这样我们可得到 n 个 2 维图形, 其中横坐标代表频率, 纵坐标代表相应复根的模 $|z_1|, |z_2|, \dots, |z_n|$ 。

定理 5.3: 采用频域扫描方法, 如果存在点 $|z_l| = 1$ ($l = 1, \dots, n$), 则对应的 ω 为系统交叉频率。也就是说, $s = \omega i$ 是 (5.2) 的一个虚根。在一个 $|z_l|$ 与 ω 的关系图中, 如果存在 $\omega_{l,1}, \dots, \omega_{l,o_l}$ 对应 $|z_l| = 1$, 则这些虚根 $s = \omega_{l,1}i, \dots, s = \omega_{l,o_l}i$ 属于同一个子准多项式。

证明: 如果对一个频率 ω 存在一个系统 (5.3) 的模为 1 的复根 z , 那么 $CE(\omega i, z) = a_n(\omega i)z^n + a_{n-1}(\omega i)z^{n-1} + \dots + a_0(\omega i) = 0$ 。

因 $|z| = 1$, 则存在无穷多个 τ 满足 $e^{-\tau s} = z$ 。也就是存在一个 ω 和无穷多 τ 满足

$$CE(\omega i, \tau) = a_n(\omega i)e^{-n\tau\omega i} + a_{n-1}(\omega i)e^{-(n-1)\tau\omega i} + \dots + a_0(\omega i) = 0$$

因此, 我们知道系统的虚根可以由频域扫描方法检测到。

观察系统 (5.2) 的一个子准多项式 $(z + L_l(s))$ ($l = 1, \dots, n$)。这个子准多项式的根 z 是由 $L_l(s)$ 确定的。 z 的模可见于 $|z_l|$ 与 ω 的关系图。并且很明显, $(z + L_l(s))$ 的虚根就对应于图中 $|z_l| = 1$ 的点。定理证毕。□

对应一个虚根 $s = \omega i$, 相应的时滞值可由下面的步骤得到:

将 $s = \omega i$ 带入 (5.3), 计算零点 z 。选定模为 1 的根, $x + yi$ 。计算满足 $e^{-\theta i} = x + yi$ 的 θ 值 ($\theta \in [0, 2\pi)$)。其中 θ 满足:

$$\theta = \arctan\left(-\frac{y}{x}\right) \quad \text{如果 } x > 0, y < 0$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{如果 } x = 0, y = -1$$

$$\theta = \arctan\left(-\frac{y}{x}\right) + 2\pi \quad \text{如果 } x > 0, y > 0$$

$$\theta = \frac{3\pi}{2} \quad \text{如果 } x = 0, y = 1$$

$$\theta = \arctan\left(-\frac{y}{x}\right) + \pi \quad \text{如果 } x < 0$$

这样, 时滞值为 $\frac{\theta}{\omega} + \frac{2r\pi}{\omega}$ ($r = 0, 1, \dots, \infty$)

注 5.3: 我们可以发现, 当 ω 从零增加至无穷大的过程中, z 的模也趋向无无穷大变化。因此, 我们仅需要从 0 到一个正值 $\bar{\omega}$ 扫描即可。更确切地, 一个理论上界 $\bar{\omega}$ 可由 Hu & Liu (2007) 中定理 3.1 得到。

注 5.4: 本章提出的频域扫描方法不同于 Gu, Kharitonov & Chen (2003) 中的频域扫描方法。Gu, Kharitonov & Chen (2003) 中的方法基于广义特征值。两种方法都可以有效地检测系统特征虚根。但在本章的框架内, 本章提出的方法要更有优势, 因为它可以得到系统的结构信息。

本章的频域扫描方法可以很容易的实现。基于一些常用软件, 如 Matlab, 我们可以方便的画出想要的图形。

到这里, 分析时滞完全稳定性的方法 (一些性质结合频域扫描方法) 已完全给出。这个方法可以概括为下面的三个步骤:

步骤 1: 应用频域扫描方法得到系统交叉频率和结构信息。这样系统的虚根穿越方向可以直接根据定理 5.1 获得

步骤 2: 对于交叉频率, 计算相应的时滞值。

步骤 3: 根据前两个步骤得到的信息, 计算当时滞增加时系统的不稳定根个数。不含不稳定根的区间, 系统渐近稳定。这样, 我们可以刻画系统的完全稳定区间。

本章第二节的内容为完全稳定性分析的理论基础。第三节的频域扫描方法为工具。为找到系统的完全稳定区间, 我们仅需要执行频域扫描方法即可。

5.5 数值仿真

本节给出几个数值仿真说明本章方法的有效性和优势。

例 5.1: 考虑一个 Gu, Kharitonov & Chen (2003) 中的系统

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0.1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x(t-\tau)$$

该系统的特征方程为

$$s^2 - 0.1s + 2 - e^{-\tau s} = 0。$$

执行频域扫描方法产生 $|z|$ 与 ω 关系图, 见图 5.1。由图可知, 该系统有两个交叉频率 1.0025 和 1.7277。将 $s = 1.0025i$ 带入特征方程得 $e^{-\tau s} = 0.9950 - 0.1003i$ 。这样我们得到, 对应于频率 1.0025 的时滞为 $0.1002 + 2r\pi/1.0025$ ($r = 0, 1, \dots, \infty$)。同理, 对应于频率 1.7277 的时滞为 $1.7178 + 2r\pi/1.7277$ ($n = r, 1, \dots, \infty$)。

当 $\tau = 0$ 时, 系统为渐近稳定的 (两个特征根为 $0.0500 \pm 1.4133i$)。并且注意, 两个虚根属于同一个准多项式。由定理 5.1 得, 对于虚根 $s = 1.0025i$ ($s = 1.7277i$),

虚根穿越方向为从右向左（从左向右）。

从左向右的穿越对应于时滞为 1.7178, 5.3545, 8.9913, 12.6280, ... 的时刻。而从右向左的穿越对应于时滞为 0.1002, 62.8066, 125.5131, 188.2195, ... 的时刻。这个系统当 $\tau \in (0.1002, 1.7178)$ 时渐近稳定。

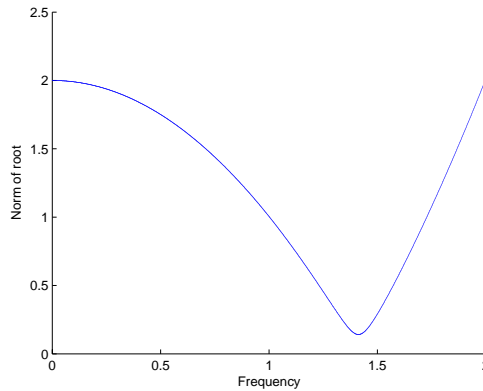


图. 5.1 例 5.1 中 z 的模

Table 5.1 Norm of z in example 5.1

例 5.2: 考虑下面准多项式

$$4e^{-2\tau s} + (4s + 5.4762)e^{-\tau s} + s^2 + 2.7381s + 1.7436 = 0$$

当时滞为零时, 这个系统是渐近稳定的 (两个特征根为 $-3.3691 \pm 1.6147i$)。执行频域扫描得到图 5.2 和图 5.3。由图可知, 系统有两个正虚根, 对应于两个子准多项式。因此, 由定理 5.1, 两个虚根的穿越方向都是从左向右。从而, 随着时滞增加, 一旦系统有特征虚根, 系统将不再稳定。这个系统当 $\tau \in [0, 1.2148)$ 时渐近稳定。

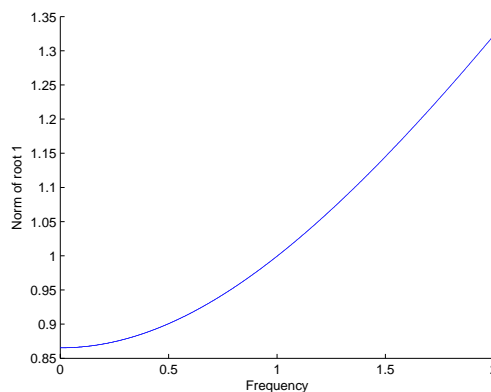


图. 5.2 例 5.2 中 z_1 的模

Table 5.2 Norm of z_1 in example 5.2

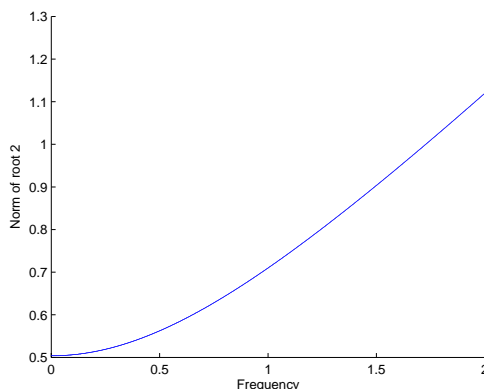


图. 5.3 例 5.2 中 z_2 的模
Table 5.3 Norm of z_2 in example 5.2

观察例 5.1 和 例 5.2, 我们发现这两个系统具有相同的虚根情况但稳定行为却不同。这是因为两个系统具有不同结构信息。对于例 5.1, 两个虚根属于同一个子准多项式。从而根据定理 5.1, 对于比较大的虚根, 穿越方向从左向右。而对于比较小的虚根, 穿越方向从右向左。而在例 5.2 中, 两个虚根属于两个子准多项式。也就是说, 它们都是其子准多项式对应的最大虚根, 因而它们的穿越方向都是从左向右。

通过两个例子的比较, 我们可以看出结构信息在系统稳定性中的重要作用。应用结构信息, 一些针对简单准多项式的性质可以扩展至一般的时滞系统。

例 5.3: 现在我们研究一个比较复杂的情况。考虑系统 (5.1), 令

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 13.5 & -1 \\ -3 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5.9 & 7.1 & -70.3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

系统的特征方程为

$$a_3(s)e^{-3\tau s} + a_2(s)e^{-2\tau s} + a_1(s)e^{-\tau s} + a_0(s) = 0$$

其中

$$a_3(s) = 119.4$$

$$a_2(s) = 90.9s - 185.1$$

$$a_1(s) = 0.9s^2 - 116.8s - 22.1$$

$$a_0(s) = s^3 + 6s^2 + 45.5s + 111.0$$

这个系统具有两个稳定区间。到目前为止, Olgac & Sipahi (2002) 的方法是最有效的分析完全稳定性的方法。而已有的其它方法大多分析不了一个时滞系统的完全稳定性。例如, Lyapunov 方法会不可避免的带来结论的保守性。代数方法不能给出区间型的稳定结论。频域方法不能处理当系统有多个稳定区间的情况。

现在应用本章的方法进行分析。首先, 由频域扫描方法得到图 5.4, 图 5.5 和图 5.6。进而由图可得三组交叉频率

$$\omega_1 = \{2.1109\}$$

$$\omega_2 = \{3.0347, 2.9123\}$$

$$\omega_3 = \{15.5032, 0.8407\}$$

由定理 5.1 可直接得到

$$CDIR|_{s=2.1109i} = +1$$

$$CDIR|_{s=3.0347i} = +1, CDIR|_{s=2.9123i} = -1$$

$$CDIR|_{s=15.5032i} = +1, CDIR|_{s=0.8407i} = -1$$

由步骤 2, 可计算出相应的时滞值。对应于频率 2.1109, 3.0347, 2.9123, 15.5032 和 0.8407 的时滞值分别为 $0.8725 + 2r\pi/2.1109$, $0.1624 + 2r\pi/3.0347$, $0.1859 + 2r\pi/2.9123$, $0.2219 + 2r\pi/15.5032$ 和 $7.208 + 2r\pi/0.8407$ ($r = 0, 1, \dots, \infty$)。这个系统当时滞为零时是渐近稳定的。这样, 我们得到系统的两个稳定区间 $0 \leq \tau < 0.1624$ 和 $0.1859 < \tau < 0.222$ 。

这个结果与 Olgac & Sipahi (2002) 中的结果一致。可是, 本章的方法要简单许多。Olgac & Sipahi (2002) 的方法需要计算虚根 (利用 Resius 替换和分析 Routh 列 Olgac & Sipahi (2006))。当系统复杂时, 这将是一个工作量很大的任务。并且还需要计算每个虚根的穿越方向。而本章的方法, 仅需要执行频域扫描即可。可见本章的方法明显简化了时滞系统完全稳定性的分析。

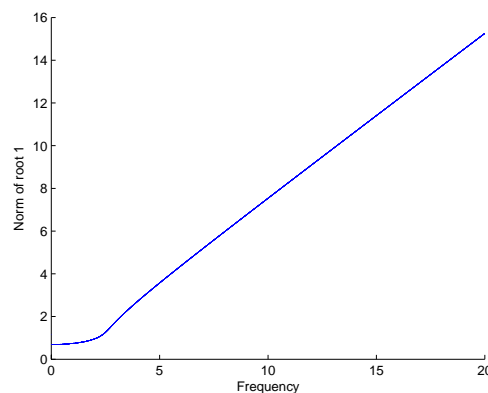


图. 5.4. 例 5.3 中 z_1 的模

Table 5.4 Norm of z_1 in example 5.3

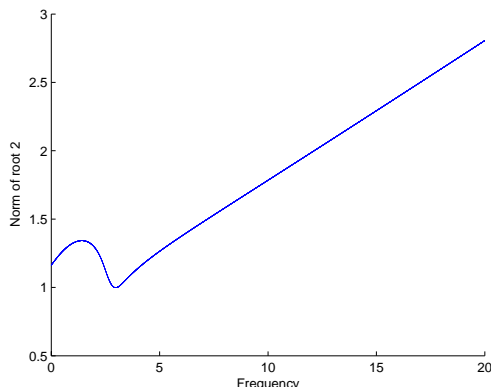


图. 5.5. 例 5.3 中 z_2 的模
Table 5.5 Norm of z_2 in example 5.3

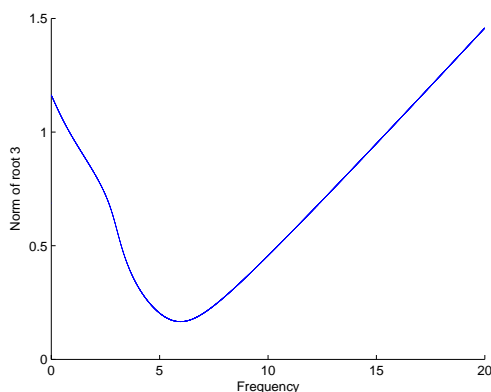


图. 5.6. 例 5.3 中 z_3 的模
Table 5.6 Norm of z_3 in example 5.3

5.6 小结

在本章中提出了一种新的分析时滞系统完全稳定性的方法。首先分析了时滞系统虚根穿越方向的性质。我们发现对于一般形式的时滞系统, 虚根的穿越方向可直接由系统的结构信息确定。并且由这个性质我们可以进一步得到, 如果一个线性时不变时滞系统有至少一个虚根时, 该系统随时滞的增大将最终不稳定。

为获得所需要的结构信息, 在本章中提出了一种频域扫描方法。该扫描方法可以得到系统的特征虚根, 并可以指出哪些特征虚根属于同一个子准多项式。这也就给出了可以判断系统虚根穿越方向的结构信息。并且根据所检测到的虚根, 我们可以进一步求得所对应的临界时滞值。

本章得出的关于虚根穿越方向的性质和频域扫描方法构成了一个新的分析含相称时滞的时滞系统完全稳定性的框架。其中关于虚根穿越方向的性质为这个方法的理论基础; 频域扫描方法做为分析工具。要分析一个时滞系统的完全稳定性, 我们仅需要执行频域扫描方法即可。通过数值仿真可以看出, 本章的方法要比已有方法简单得多。尤其当系统比较复杂时, 该方法可大幅的降低所需要的工作量。

第六章 总结与展望

6.1 总结

论文介绍了作者关于时滞系统稳定性研究的若干工作。作者从两类大的方法(时域方法和特征根方法)对时滞系统稳定性进行了研究。其中时域方法中又分别应用简单Lyapunov泛函方法和离散化Lyapunov泛函方法。在特征根方法这个框架内,作者提出了两种新的研究方法(混合代数、频域方法和新的完全稳定性分析方法)。

论文的第二章介绍了基于简单Lyapunov泛函方法的三部分工作:1)一种新的时滞系统稳定性分析方法:积分等式方法。2)含分布时滞中立系统的稳定性分析。3)网络控制系统的控制器设计。

论文的第三章介绍了基于离散化Lyapunov泛函方法的四部分工作:1)中立系统稳定性分析。2)含混合时滞的中立系统稳定性分析。3)时滞系统指数估计。4)含时变时滞的时滞系统稳定性分析。

在论文的第四章,提出了一种新的时滞系统稳定性分析方法:混合代数、频域分析方法。该方法可有效、准确地分析非相称型多时滞系统稳定性。该方法优于已有的一些分析方法。

在论文的第五章,分析了时滞系统的完全稳定性。首先给出了一些关于虚根穿越方向的新的性质(虚根方向可由结构信息确定)。根据这些新的性质,可以进一步确定系统的最终稳定性。此外,提出了一种可有效获得结构信息的方法:频域扫描方法。从而我们得到一个分析时滞系统完全稳定性的全新方法。该方法可简单有效地求得时滞系统全部稳定性区间。

在未来的研究中,作者将继续深入已有的研究并计划尝试解决一些时滞领域其它的难点问题,如多时滞系统的完全稳定性问题。

6.2 展望

如前所述,虽然人们对时滞系统的研究从半个世纪前就已开始,可是关于这个学科还是有许许多多的问题等待我们去进一步的探讨。一个时滞系统的结构看起来很简单,它仅仅是系统的某些变量加上时滞参数。可是时滞系统却具有非常复杂的特性。至今人们对时滞系统的了解和认知也仅能算得上冰山的一角。即使对一

个最简单形式的时滞系统, 研究它的稳定性, 也还远远谈不上研究的透彻。相反, 随着研究和认知的深入, 有更多的问题出现在我们面前。可见, 时滞系统的研究和其它学科的研究一样, 将是漫长而艰苦的。每一个难题的攻关都是伴随着刻苦的钻研和慎密的思考。只有致力于时滞系统研究的学者不断的努力才能让这个学科持续的向前发展。而当前我们要做的可以概括为说起来容易做起来难的一句话: 基于前人的成果做对后人有益的工作。

参考文献

- Bellman, R., & Cooke, K. L. (1963). *Differential Difference Equations*. Academic Press: New York.
- Beretta, E., & Kuang, Y. (2002). Geometric stability switch criteria in delay differential systems with delay dependent parameters. *SIAM J. Math. Anal.*, vol.33, no.5, 1144-1165.
- Boese, F. G. (1998). Stability with respect to the delay: on a paper of K. L. Cooke and P. van den Driessche. *J. Math. Anal. Appl.*, 228, 293-321.
- Boese, F. G. (1999). Two extreme examples of stability switching. *J. Math. Anal. Appl.*, 233, 99-807.
- Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E., & Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Philadelphia, PA: SIAM.
- Brown, J. W., & Churchill, R. V. (2004). *Complex variables and application*. McGraw-Hill: Beijing.
- Chen, J. (1995). On computing the maximal delay intervals for stability of linear delay systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, vol.40, no.6, 1087-1093.
- Chen, J. Fu, P. & Niculescu, S.-I. (2006). Asymptotic behavior of imaginary zeros of linear systems with commensurate delays. *Proc. 45th IEEE Conf. Decision Control*, San Diego, CA, 1375-1380.
- Chen, J., Gu, G., & Nett, N. C. (1995). A new method for computing delay margins for stability of linear delay systems. *Syst. Control Lett.*, 26, 107-117.
- Chen, W.-H., & Zheng, W. X. (2007). Delay-dependent robust stabilization for uncertain neutral systems with distributed delays. *Automatica*, 43, 95-104.
- Cooke, K. L., & van den Driessche, P. (1986). On zeros of some transcendental equations. *Funkcialaj Ekvacioj*, 29, 77-90.
- Cooke, K. L., & Grossman, Z. (1982). Discrete delay, distributed delay and stability switches. *J. Math. Anal. Appl.*, 86, 592-627.
- Curtain, R., & Pritchard, A. J. (1978). *Infinite dimensional linear systems theory*. Berlin: Springer.
- El ghaoui, L., Oustry, F., & AitRami, M. (1997). A cone complementarity linearization algorithm for static output-feedback and retarded problems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 42, 1171-1176.
- Ergenc, A. F., Olgac, N., & Fazelinia, H. (2007). Extended kronecker summation for cluster treatment of LTI systems with multiple delays. *SIAM J. Control Optim.*, 46, 143-155.
- Fazelinia, H., Sipahi, R., & Olgac, N. (2007). Stability robustness analysis of multiple time-delayed systems using “building block” concept. *IEEE Trans. Autom. Control*, 52, 799-810.
- Fiagbedzi, Y. A., & Pearson, A. E. (1987). A multistage reduction technique for feedback stabilizing distributed time-lag systems. *Automatica*, 23, 311-326.
- Fridman, E. (2001). New Lyapunov-Krasovskii functionals for stability of linear retarded and neutral type systems. *Syst. Control Lett.*, 43, 309-319.
- Fridman, E. (2006a). Stability of systems with uncertain delays: a new “complete” Lyapunov-Krasovskii functional. *IEEE Trans. Autom. Control*, 51, 885-890.
- Fridman, E. (2006b). Descriptor discretized Lyapunov functional method: analysis and design. *IEEE Trans. Autom. Control*, 51, 890-897.
- Fridman, E. (2006c). A new Lyapunov technique for robust control of systems with uncertain

- non-small delays. *IMA J. Math. Control Inf.*, 23, 165-179.
- Fridman,E., & Gil,E.(2007).Stability of linear systems with time-varying delays: a direct frequency domain approach. *J. Comput. Appl. Math.*, 200, 61-66.
- Fridman,E.,Seuret,A., & Richard,J.-P.(2004).Robust sampled-data stabilization of linear systems: an input delay approach.*Automatica*,40,1441-1446.
- Fridman,E., & Shaked,U. (2001). New bounded real lemma representation for time-delay systems and their application. *IEEE Trans. Autom. Control*, 46, 1973-1979.
- Fridman,E., & Shaked,U. (2002a). A descriptor system approach to H_∞ control of linear time-delay systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 47, 253-270.
- Fridman,E., & Shaked,U.(2002b).An improved stabilization method for linear time-delay systems. *IEEE Trans. Autom. Control*,47,1931-1937.
- Fridman,E., & Shaked,U.(2005a).Input-Output delay approach to robust sampled-data H_∞ control. *Syst. Control Lett.*,54,271-282.
- Fridman,E., & Shaked,U.(2005b).Input-Output approach to the control of time-delayed systems. *Proceedings of the 13th Mediterranean Conference on Control and Automation*,1556-1560.
- Fridman,E., & Shaked,U.(2006).Input-Output approach to stability and L_2 -gain analysis of systems with time-varying delays. *Syst. Control Lett.*,55,1041-1053.
- Fu,P., Niculescu,S.-I., & Chen,J.(2006).Stability of linear neutral time-delay systems: Exact conditions via matrix pencil solutions. *IEEE Trans. Autom. Control*, 51, 1063-1069.
- Gao, H., Lam, J., & Wang,Z.(2007). Discrete bilinear stochastic systems with time-varying delay: Stability analysis and control synthesis. *Chaos, Solitons & Fractals*, 34, 394-404.
- Gao,H., & Wang,C.(2003).Comments and further results on “a descriptor systems approach to H_∞ control of linear time-delay systems”. *IEEE Trans. Autom. Control*, 48, 520-525.
- Goubet-Bartholoméüs,A.,Dambrine,M., & Richard,J.P.(1997).Stability of perturbed systems with time-varying delays. *Syst. Control Lett.*,31,155-163.
- Gu,K.(1997).Discretized LMI set in the stability problem of linear time delay systems. *Int. J. Control*,68, 923-934.
- Gu, K. (1999).Partial solution of LMI in stability problem of time-delay systems. *Proceedings of the 38th IEEE conference on decision and control*,227-232.
- Gu,K.(2001).A further refinement of discretized Lyapunov functional method for the stability of time delay-systems. *Int. J. Control*,74, 967-976.
- Gu,K.(2003a).An improved stability criterion for systems with distributed delays. *Int. J. Robust Nonlinear Control*,13,819-831.
- Gu,K.(2003b).Refined discretized Lyapuno functional method for systems with multiple delays. *Int. J. Robust Nonlinear Control*,13,1017-1033.
- Gu,K., Han, Q.-L., Luo, A.C. J., & Niculescu,S.-I. (2001). Discretized Lyapunov functional for systems with distributed delay and piecewise constant coefficients. *Int. J. Control*, 74,737-744.
- Gu,K., Kharitonov,V.L., & Chen,J.(2003).*Stability of time-delay systems*. Boston: Birkhäuser.
- Gu,K., Niculescu, S.-I., & Chen,J.(2005). On stability crossing curves for general systems with two delays. *J. Math., Anal., Appl.*, 231-253.
- Guan, X.-P., & Chen C.-L.(2004) .Delay-dependent guaranteed cost control for T-S fuzzy systems with time delays. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 12, 236-249.

- Hale, J.K., & Verduyn Lunel, S.M. (1993). *Introduction to functional differential equations*. New York: Springer.
- Han, Q.-L. (2004). A descriptor system approach to robust stability of uncertain neutral systems with discrete and distributed delays. *Automatica*, 40, 1791-1796.
- Han, Q.-L. (2005). On stability of linear neutral systems with mixed time delays: A Discretized Lyapunov functional approach. *Automatica*, 41, 1209-1218.
- Han, Q.-L., & Gu, K. (2001). On robust stability of time-delay systems with norm-bounded uncertainty. *IEEE Trans. Autom. Control*, 46, 1426-1431.
- Han, Q.-L., Gu, K., & Yu, X. (2003). An improved estimate of the robust stability bound of time-delay systems with norm-bounded uncertainty. *IEEE Trans. Autom. Control*, 48, 1629-1634.
- Han, Q.-L., Yu, X., & Gu, K. (2004). On computing the maximum time-delay bound for stability of linear neutral systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 49, 2281-2285.
- He, Y., Wang, Q.-G., Lin, C., & Wu, M. (2005). Augmented Lyapunov functional and delay-dependent stability criteria for neutral systems. *Int. J. Robust Nonlinear Control*, 15, 923-933.
- He, Y., Wang, Q.-G., Lin, C., & Wu, M. (2007). Delay-range-dependent stability for systems with time-varying delay. *Automatica*, 43, 371-376.
- He, Y., Wang, Q.-G., Xie, L., & Lin, C. (2007). Further improvement of free-weighting matrices technique for systems with time-varying delay. *IEEE Trans. Autom. Control*, 52, 293-299.
- He, Y., Wu, M., She, J.-H., & Liu, G.-P. (2004a). Delay-dependent robust stability criteria for uncertain neutral systems with mixed delays. *Syst. Control Lett.*, 51, 57-65.
- He, Y., Wu, M., She, J.-H., & Liu, G.-P. (2004b). Parameter-dependent Lyapunov functional for stability of time-delay systems with polytopic-type uncertainties. *IEEE Trans. Autom. Control*, 49, 828-832.
- Hmamed, A. (1996). Comments on 'On an estimate of the decay rate for stable linear delay systems'. *Int. J. Control*, vol. 42, 539-540.
- Hu, G.-D., & Liu, M. (2007). Stability criteria of linear neutral systems with multiple delays. *IEEE Trans. Autom. Control*, 52, 720-724.
- Hu, G.-D., & Hu, G.-D. (1997). Stability of neutral delay-differential systems: boundary criteria. *Appl. Math. Comput.*, 87, 247-259.
- Hu, G.-D., Hu, G.-D., & Zou, X. (2004). Stability of linear neutral systems with multiple delays: boundary criteria. *Appl. Math. Comput.*, vol. 148, 707-715.
- Hu, G.-D., & Hu, G.-D. (1996). Stability of Discrete-delay systems: boundary criteria. *Appl. Math. Comput.*, 80, 95-104.
- Hu, L.-S., Bai, T. Shi, P., & Wu, Z. (2007). Sampled-data control of networked linear control systems. *Automatica*, 43, 903-911.
- Huang, W. (1989). Generalization of Liapunov's theorem in a linear delay system. *J. Math. Anal. Appl.*, 142, 83-94.
- Jiang, X., & Han, Q.-L. (2005). On H_∞ control for linear systems with interval time-varying delay. *Automatica*, 41, 2099-2106.
- Jiang, X., & Han, Q.-L. (2006). Delay-dependent robust stability for uncertain linear systems with interval time-varying delay. *Automatica*, 42, 1059-1065.
- Kato, T. (1995). *Perturbation Theory for Linear Operations*. Springer-Verlag: Berlin.
- Kharitonov, V.L. (2005). Lyapunov functionals and Lyapunov matrices for neutral type time delay systems: a single delay case. *Int. J. Control*, 78, 783-800.

- Kharitonov,V.L. (2006).Lyapunov matrices for a class of time delay systems. *Syst. Control Lett.*,55,610-617.
- Kharitonov,V.L. & Melchor-Aguilar.D.(2003).Lyapunov-Krasovskii functionals for additional dynamics. *Int. J. Robust Nonlinear Control*,13,793-804.
- Kharitonov,V.L. Mondié,S. & Collado,J.(2005).Exponential estimates for neutral time-delay systems: An LMI approach. *IEEE Trans. Autom. Control*, vol.50,no.5, 666-670.
- Kharitonov,V.L. & Niculescu,S.-I.(2003).On the stability of linear systems with uncertain delay. *IEEE Trans. Autom. Control*, 48, 127-132.
- Kharitonov,V.L., & Plischke,E.(2006).Lyapunov matrices for time-delay systems. *Syst. Control Lett.*,55,697-706.
- Kharitonov,V.L. & Zhabko,A. (2003).Lyapunov-Krasovskii approach to the robust stability analysis of time-delay systems. *Automatica*, 39, 15-20.
- Kim,D.-S.,Lee,Y.S.,Kwon, & Park,H.S.(2003).Maximum allowable delay bounds of networked control systems. *Control Engineering Practice*,11,1301-1313.
- Kim,J.-H.(2001).Delay and its time-derivative dependent robust stability of time-delayed linear systems with uncertainty. *IEEE Trans. Autom. Control*, 46, 789-792.
- Lancaster,P., & Tismenetsky,M. (1985). *The theory of Matrices*. Academic Press,Orlando, Florida.
- Lee,M. S., & Hsu,C. S. (1969).On the τ -decomposition method of stability analysis for retarded dynamical systems. *SIAM J. Control*, 7, 249-259.
- Lee,Y.S., Moon,Y.S., Kwon,W.H., & Park,P.G. (2004). Delay-dependent robust H_∞ control for uncertain systems with a state-delay. *Automatica*,40,65-72.
- Li,X.-G., & Zhu,X.-J. (2007). Comments on “Delay-dependent robust H_∞ control for uncertain systems with a state-delay”. *Automatica*,43,571.
- Li,X.-G., & Zhu,X.-J. Stability of time-delay systems: a mixed algebra and frequency method, *To appear*.
- Lin,C.,Wang,Q.-G., & Lee,T.H.(2006). A less conservative robust stability test for linear uncertain time-delay systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 51, 87-91.
- Liu,P.-L. (2003). Exponential stability for linear time-delay systems with delay dependence. *J. Franklin Inst.*, vol.340, 481-488.
- Malakhovskii,E., & Mirkin,L. (2006).On stability of second-order quasipolynomials with a single delay. *Automatica*, 42, 1041-1047.
- Mastellone,S.,Abdallah, C.T., & Dorato, P. (2005).Stability and finite-time stability analysis of discrete-time nonlinear networked control systems. *Proc of American Control Conference*, Portland, 239-1244.
- Michiels,W, & Niculescu, S.-I. (2007a). Characterization of delay-independent stability and delay interference phenomena. *SIAM J. Control Optim.*, 45,2138-2155.
- Michiels,W, & Niculescu, S.-I. (2007b). *Stability and stabilization of time-delay systems: An eigenvalue-based approach*. SIAM: Philadelphia.
- Michiels,W, & Roose,D. (2003). An eigenvalue based approach for the robust stabilization of linear time-delay systems. *Int. J. Control*. 76, 678-686.
- Michiels,W, Van Assche,V., & Niculescu, S.-I. (2005).Stabilization of time-delay systems with a controlled time-varying delay and applications. *IEEE Trans. Autom. Control*, 50, 493-504.
- Michiels,W., & Vyhlidal,T.(2005).An eigenvalue based approach for the stabilization of linear time-delay systems of neutral type. *Automatica*,41,991-998.

- Mondié, S., & Kharitonov, V.L. (2005). Exponential estimates for retarded time-delay systems: An LMI approach. *IEEE Trans. Autom. Control*, vol.50, no.2, 268-273.
- Mondié, S., Kharitonov, V.L., & Santos, O. (2005). Complete type Lyapunov-Krasovskii functionals with a given cross term in the time derivative. *Proceedings of the 44th European Control Conference. Seville, Spain*, 5060-5064.
- Moon, Y. S., Park, P., Kwon, W. H., & Lee, Y. S. (2001). Delay-dependent robust stabilization of uncertain state-delayed systems. *Int. J. Control*, 74, 1447-1455.
- Mori, T., Fukuma, N., & Kuwahara, M. (1982). On an estimate of the decay rate for stable linear delay systems. *Int. J. Control*, vol.36, 95-97.
- Morse, A. (1976). Ring models for delay differential systems. *Automatica*, 12, 529-531.
- Mullhaupt, Ph., Buccieri, D., & Bonvin, D. (2007). A numerical sufficiency test for the asymptotic stability of linear time-varying systems. *Automatica*, 43, 631-638.
- Niculescu, S.-I. (2001). *Delay Effects on Stability: A Robust Control Approach*. Springer-Verlag: Heidelberg.
- Niculescu, S.-I., de Souza, C.E., Dugard, L., & Dion, J.-M. (1998). Robust exponential stability of uncertain systems with time-varying delays. *IEEE Trans. Autom. Control*, vol.43, no.5, 743-748.
- Niculescu, S.-I., Fu, P., & Chen, J. (2006). On the stability of linear delay-differential algebraic systems: exact conditions via matrix pencil solutions. *Proc. 45th IEEE Conf. Decision Control, San Diego, CA*, pp.834-839.
- Olgac, N., & Sipahi, R. (2002). An exact method for the stability analysis of time-delayed linear time-invariant (LTI) systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, vol.47, no.5, 793-797.
- Olgac, N., & Sipahi, R. (2005). The cluster treatment of characteristic roots and the neutral type time-delayed systems. *ASME J. Dyna., Syst., Measure. Control*, vol.127, no.1, 88-97.
- Olgac, N., & Sipahi, R. (2006). An improved procedure in detecting the stability robustness of systems with uncertain delay. *IEEE Trans. Autom. Control*, vol.51, no.7, 1164-1165.
- Papachristodoulou, A., Peet, M., & Sanjay, L. (2005). Constructing Lyapunov-Krasovskii functionals for linear time delay system. *American Control Conferences. Portland, OR, USA*, 2845-2850.
- Park, P. (1999). A delay-dependent stability criterion for systems with uncertain time-invariant delays. *IEEE Trans. Autom. Control*, 44, 876-877.
- Peet, M.M. (2006). *Stability and control of functional differential equations*. Ph.D. dissertation, department of aeronautics and astronautics, Stanford University.
- Rekasius, Z. V. (1980). A stability test for systems with delays. *Proc. Joint Automatic Control Conf.*, Paper No. TP9-A.
- Richard, J.-P. (2003). Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems. *Automatica*, 39, 1667-1694.
- Rodriguez, S.A., Kharitonov, V.L., Dion, J.-M., & Dugard, L. (2004). Robust stability of neutral systems: a Lyapunov-Krasovskii constructive approach. *Int. J. Robust Nonlinear Control*, 14, 1345-1358.
- Sipahi, R., & Olgac, N. (2005). Complete stability robustness of third-order LTI multiple time-delay systems. *Automatica*, 41, 1413-1422.
- Sipahi, R., & Olgac, N. (2006a). A unique methodology for the stability robustness of multiple time delay systems. *Syst. Control Lett.*, 55, 819-825.
- Sipahi, R., & Olgac, N. (2006b). Stability robustness of retarded LTI systems with single delay and exhaustive determination of their imaginary spectra. *SIAM J. Control Optim.*, 45, 1680-1696.

- Teel,A.R.,& Nešić,D.(2004).Input-to-state stability of networked control systems.*Automatica*, 40,2121-2128.
- Thowsen,A.(1981). The Routh-Hurwitz method for stability determination of linear differential-differences systems. *Int. J. Control*, 33, 991-995.
- Walsh,G.C.,Beldiman,O.,& Bushnell,L.G.(2001).Asymptotic behavior of nonlinear networked control systems. *IEEE Trans. Autom. Control*,46,1093-1097.
- Walsh,G.C.,Ye,H., & Bushnell,L.G.(2002).Stability analysis of networked control systems. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*,10,438-446.
- Walton,K., & Marshall,J.E.(1987).Direct method for TDS stability analysis. *IEE Proceedings Control Theory and Applications, Part D*, 134, 101-107.
- Wang,S.S. Chen,B.S. & Lin,T.P. (1987).Robust stability of uncertain time-delay systems. *Int. J.Control*,vol.46, 963-976.
- Wang,Y,Xie,L., & de Souza,C.E.(1992).Robust control for a class of uncertain nonlinear systems. *Syst. Control Lett.*,19,139-149.
- Wu, M., He, Y., & She,J.-H.(2004).New delay-dependent stability criteria and stabilizing method for neutral systems. *IEEE Trans. Autom. Control*,49,2266-2271.
- Xu,S. Lam, J. & Zhong,M.(2006).New exponential estimates for time-delay systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, vol.51,no.9, 1501-1505.
- Xu,S. Lam, J. & Zou,Y.(2006).New results on delay-dependent robust H_{∞} control for systems with time-varying delays.*Automatica*, 42,343-348.
- Yu,M.,Wang,L., & Chu,T.(2005).Robust stabilization of nonlinear sampled-data systems. *American Control Conference, Portland, OR,USA*,3421-3426.
- Yu,M.,Wang,L.,Chu,T.,& Hao,P.(2004).An LMI approach to networked control systems with data packet dropout and transmission delays. *43rd IEEE Conference on Decision and Control. Atlantis,Paradise Island,Bahamas*,3545-3550.
- Yu, M.,Wang, L., Chu, T., & Xie,G. (2004).Stabilization of networked control systems with data packet dropout and network delays via switching system approach. *Proc of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control, Atlantis*, 3539-3544.
- Yue,D.(2004).Robust stabilization of uncertain systems with unknown input delay. *Automatica*, 331-336.
- Yue,D., & Han,Q.-L.(2005).Delay feedback control of uncertain systems with time-varying input delay.*Automatica*,233-240.
- Yue,D.,Han,Q.-L., & Lam,J.(2005).Networked-based robust H_{∞} control of systems with uncertainty. (2005). *Automatica*,41,999-1007.
- Yue,D.,Han,Q.-L., & Peng,C.(2004).State feedback controller design of networked control systems.*IEEE Transactions on Circuits and Systems- II*,51,640-644.
- Zhang, L., & Hristu-Varakelis, D. (2006). Communication and control co-design for networked control systems. *Automatica*, 953-958.
- Zhang,W.,Branicky,M.S., & Phillips,S.M.(2001).Stability of networked control systems. *IEEE Control Systems Magazine*,84-99.
- Zhang,X.-M.,Wu,M.,She,J.-H., & He,Y.(2005).Delay-dependent stabilization of linear systems with time-varying state and input delays.*Automatica*,41,1405-1412.

致 谢

本论文是在我的导师朱新坚教授的精心指导和悉心关怀下完成的。攻读博士学位这三年来,无论是选题,开题,中期考核还是最后的论文完成都离不开朱老师的指导和鼓励。朱老师渊博的知识,严谨的治学态度和平易近人的作风给我留下了深刻的印象并使我受益终身。在此谨向我的导师朱新坚教授表示衷心的感谢和崇高的敬意。

衷心感谢曹广益教授。曹教授深厚的理论功底、广博的知识、求实的科学态度我将终身难忘。

感谢洪雪英老师在学习和生活上给予的关心和帮助。

此外,感谢实验室众多师兄师姐师弟师妹们。与你们在一起,我度过了三年难忘的博士求学时光。

感谢我的硕士导师,东北大学信息科学与工程学院张化光教授。还有感谢众多东北大学的老师,亲人和朋友。感谢你们多年来对我的关怀与呵护。

这里要特别感谢美国 Southern Illinois University Edwardsville 的 Gu Keqin 教授。Gu Keqin 教授是时滞系统领域的权威专家,这里由衷感谢 Gu 教授在百忙之中给予的细心指导及大力帮助。

这里还要感谢法国 Laboratoire des Signaux et Systèmes 的 Silviu-Iulian Niculescu 教授给予的支持与帮助。

李旭光

2007 年 10 月于上海交通大学

攻读博士学位期间发表或录用的论文目录

- 1 Stability analysis of neutral systems with distributed delays. *Automatica* (录用)
- 2 Stability analysis of neutral systems with mixed delays. *Automatica* (基本录用)
- 3 Comments on “Delay-dependent robust H_∞ control for uncertain systems with a state-delay”. *Automatica*, 43,571,2007.
- 4 时滞系统稳定性分析：一种积分等式方法。《控制与决策》 (录用)
- 5 含状态和输入时滞的网络控制系统镇定。《控制与决策》 22 (7), 825—828, 835, 2007
- 6 Complete stability of linear time-invariant systems with commensurate delays (已投)
- 7 Stability analysis of linear systems with time-varying delays: A discretized Lyapunov functional method (已投)
- 8 On exponential estimates for time-delay systems (已投)
- 9 Robust stability of neutral systems: A discretized Lyapunov method (已投)
- 10 Stability of time-delay system: A mixed algebra and frequency method (已投)

以上论文全部为作者以第一作者身份完成。其中论文 6-10 目前分别在投：
IEEE Transactions on Automatic Control, *IET Control Theory & Applications*, *Journal of the Franklin Institute*, *Journal of Shanghai Jiaotong University (English Edition)*。