单位代码	10613
学号	0103158[illegible]

西　南　交　通　大　学

研　究　生　学　位　论　文

基于LMI的时滞系统的稳定性研究

年　　级　二〇〇一级

姓　　名　段　平

申请学位级别　硕　士

专　　业　系统工程

指导教师　龙绪明　副教授

二〇〇四年　四月

Classified Index: TP273

Southwest Jiaotong University

Master Degree Thesis

LMI-BASED STABILITY RESEARCH FOR TIME-DELAY SYSTEMS

Grade: 2001
Candidate: Ping Duan
Academic Degree Applied for: Master
Speciality: System Engineering
Supervisor: Associate Prof. Xuming Long

April ,2004

摘 要

在实际系统中，时滞现象是非常普遍的，而时滞的存在会破坏系统的稳定性，影响系统的控制性能，所以对时滞系统的稳定性研究一直是控制界的一个热点问题。对时滞系统稳定性的研究，主要是基于 Lyapunov 稳定性理论，尽管已经取得了一些成果，但是都带有很大保守性，并且推导过程一般都很复杂；另一方面，这些成果主要集中在连续时滞系统方面，而随着数字化的发展，对离散系统的要求越来越高。所以如何得到全面讨论保守性更小的时滞系统的稳定性条件，成为大家关注的问题。

首先，本文就有确定参数的连续和离散时滞系统稳定性进行了研究。在讨论时滞系统稳定性条件时，将稳定性条件分为时滞独立和时滞依赖来进行讨论。基于 Lyapunov 稳定性理论，采用线性矩阵不等式技术，分别给出了线性矩阵不等式（LMI）形式的、保守性更小的连续时滞系统和离散时滞系统时滞独立的稳定性充分条件；同时也给出了 LMI 形式的、保守性更小的离散时滞系统时滞依赖的稳定性充分条件。

其次，本文研究了参数不确定连续和离散时滞系统的稳定性问题。基于李亚普诺夫函数方法，采用 LMI 技术，给出了 LMI 形式的、保守性更小的参数不确定连续和离散时滞系统时滞独立稳定性充分条件；也得到 LMI 形式的、保守性更小的参数不确定离散时滞系统时滞依赖的稳定性充分条件。

最后，本文将文中所有单时滞系统稳定性结论推广到多时滞系统，形成一整套时滞系统稳定性分析方法。

本文所得结论和分析方法，对时滞系统稳定性研究有重要的理论意义，数值仿真的有效性保证了本文方法的可行性。

关键词　时滞系统；稳定性；线性矩阵不等式

Abstract

There generally exist time-delay phenomena in real systems. However, systems stability can be destroyed, even systems performance may be influenced due to time-delay. So the study of time-delay systems stability is always a topic of general interest. As to study of delay systems stability ,most of contributions are based on Lyapunov stability theory ,and all of them are conservative, and furthermore, the processes of reasoning are very complex. But on the other hand, those results are relative to continuous-time delay system.. But with development of digital technique, the role of discrete-time delay system become more and more important. So how to get less conservative results about stability of continuous & discrete time-delay system, attracts considerable attention in the control domain.

First, the stability for continuous and discrete time-delay systems is considered respectively. Both delay-independent and delay-dependent stability conditions are established. Based on Lyapunov stability thoery , the delay-dependent , LMI-based and less conservative sufficient conditions for stability of continuous & discrete time-delay systems are obtained respectively. Also the delay-dependent , LMI-based and less conservative sufficient condition for stability of discrete time-delay systems is given.

Next, the stability for uncertain continuous and discrete time-delay systems is studied respectively. Based on Lyapunov functional method, the delay-independent, LMI-based and less conservative sufficient conditions for stability of uncertain continuous and discrete time-delay systems are presented respectively via LMI technology. In addition, the delay-dependent, LMI-based and less conservative sufficient conditions for stability of uncertain discrete time-delay systems are provided.

Finally, all stability conditions for simple-time delay system are generalized to multiple-time delay system. And a set of analysis approaches for stability of time-delay system are provided.

These conclusions and analysis methods are important to the study for stability of time-delay system. Moreover, the results of numerical examples show that the methods given in this paper are effective.

Key Words: Time-delay;Stability;Linear Matrix Inequalities(LMI)

目 录

第 1 章 绪论

1.1 控制系统稳定性理论的发展与现状

1.1.1 经典控制理论稳定性理论

对大多数情形，稳定是控制系统能够正常运行的前提[1]，稳定性也是控制器设计的基本原则之一。稳定性分析是动态系统理论研究的一个重要问题。离开稳定性谈控制是毫无意义的，所以控制理论的发展史，也就是控制系统稳定性理论的发展史。

17 世纪出现的托里斯利(Torricelli)原理,标志着稳定性概念的诞生。早期拉普拉斯(Laplace)、拉格朗日(Lagrange)、麦克斯威尔(Maxwell)、汤姆逊和德特(Thomson and Tait)、庞加莱(Poincare)等也采用过稳定性概念，但都无精确的数学定义；达郎倍尔、(D'Alambert)、拉格朗日、麦克斯威尔、魏施涅格特斯基、茹可夫斯基以及斯图多(Ctodola)等采用过一次近似方法研究稳定性，但未从数学上严格证明其合理性[2]；1789 年英国瓦特(J.Watt)设计的蒸汽机调速器使用之后，又不断改进，但存在振荡问题；J. C.Maxwel 1868 年用线性常微分方程描述了蒸汽调速系统，并分析了稳定性问题；1877 年 E.J.劳斯和 1895 年霍尔维茨(A.Hurwitz)分别独立提出了高阶线性系统稳定性的代数判据——劳斯判据，简化了系统稳定性分析的计算,但用劳斯判据分析系统的相对稳定性时,必须首先假定系统的开环传递函数无右极点,即开环系统是稳定的,系统是最小相位系统[3]；1892 年李亚普诺夫(A.M. Lyapunov)发表了专著《论运动稳定性的一般问题》，用严格的数学分析方法全面论述了稳定性问题，给出非线性系统的稳定性判据；这一时期所用的数学工具是微分方程解析法。在 19 世纪末和 20 世纪初，发动机和点技术的应用又促进了自动控制技术的发展，反馈控制器已广泛用于电压、电流、和频率的调节、蒸汽锅炉的控制、轮船和飞机的操纵以及工业生产过程的温度、压力和流量的控制，但人们对系统和控制器（包括测量元件以及执行装置）的动态特性不太清楚。1922 年米罗斯基（N.Minorsky）给出了位置控制系统的分析；1932 年奈魁斯特（H.Nyquist）

首先提出了根据频率响应来判断反馈系统稳定性的图解准则，解决了 Black 负反馈放大器的稳定性问题，而且还可以用来分析系统的稳定裕量；1934 年，HaZen 提出了用于位置控制系统的伺服机构的概念；1940 年波德（H. Bode）进一步研究通信系统频域方法并给出了频率响应的对数坐标图描述方法；1942 年齐格勒（J. G. Zigler）和尼科尔斯（N. B. Nichols）又给出了 PID 控制器的最佳参数整定法；1948 年（W. R. Evans）伊文斯提出一种求解微分方程特征根的简便方法——根轨迹法。上述控制理论经过科学家们多年的不断总结和充实提高，已形成了丰富完整的经典控制理论体系，经典控制理论利用幅值增益裕度和相位裕度的概念设计的反馈系统在一定范围内变化时能满足要求的性能。由于充分大的增益和相位裕度，使得系统在具有较大的对象模型摄动时，仍能保证系统性能，并有抑制干扰的能力。负频域方法以及传递函数作为系统数学模型，常利用图表进行分析设计，比求解微分方程简便。它可以通过试验方法建立数学模型，且物理概念清晰，因而至今仍在工程设计中广泛运用，但它只适用于单变量线性定常系统，又对系统内部状态缺少了解，而且采用频域分析和图解方法研究时域特性，得不到精确的结果，并且依赖于被控对象的精确数学模型，局限于解决线性定常单输入/单输出（SISO）控制系统的设计和综合问题。

1.1.2 现代控制理论稳定性理论

20 世纪 50 年代末到 60 年代初，出现了现代控制理论，现代控制理论是基于时域概念在经典控制理论的基础上发展起来的，它以状态空间方法为主，研究控制系统状态的运动规律，并实现最优化设计。主要有 1954 年贝尔曼(R. Bellman)的动态规划理论，1956 年庞特里亚金(Pantriagin)的极大值原理，1960 年卡尔曼(R. E. Kalman)的多变量系统最优控制与最优滤波理论[4]。不足之处是为：忽略了研究对象的不确定性；过高要求研究对象的数学模型。1963 年 Zames 提出的小增益原理为鲁棒稳定性分析奠定了基础；1964 年 Kalman 证明了单输入单输出系统最优 LQ 状态反馈律具有一些很强的鲁棒性，为时域的鲁棒性分析提供了理论基础；1969 年 Rosenbrock 等提出了著名的 INA 方法（Inverse Nyquist Array），将经典的 Nyquist 判定定理推广到多输入多输出系统；1971 年 Belletrutti 和 MacFarlane 提出了多变量系统的完整性问题。完整性是指多变量系统在某些部件（如传感器、执行器）失效时系统仍能保持稳定的特性；1978 年 Kharitonov 提出由四个区间端点作为系数的多项式的稳定性来判断区间多项式族的哈氏定理；

1981 年，Zames 提出了著名的 H_∞控制思想[5]。其用 H_∞范数作性能指标，处理了 LQG 优化无法解决的变功率谱干扰下的系统控问题；1982 年 Vidyasagar 等在提出了同时镇定化问题，这一广义的鲁棒控制可以解决对象多个模型描述的镇定问题；1982 年 Doyle 创立了结构奇异植理论（SSV，Structured Singular Value），又称为μ理论。由μ理论产生的μ方法，其关键是将系统的不确定性部分和摄动部分进行关联重构，进而转化为处理块对角有界摄动问题。μ方法成了判别鲁棒稳定性和鲁棒性能的强有力的工具；1985 年到 1988 年,Francis 发现可以将灵敏度极小化问题、鲁棒镇定问题、混合灵敏度优化问题、跟踪问题以及模型匹配等问题，统一成标准 H_∞控制问题[6]。1988 年 Glover 和 Doyle 等人提出了著名的"2-Riccati 程"的标准 H_∞控制问题的解法，使 H_∞控制理论的研究取得了突破性的进展[7,8]；1989 年 Doyle 等将 H_∞控制问题的求解以及系统存在不确定性时的稳定设计问题赋予了一个清晰的理论；从 1989 年至今。在这段时间里，出现了以微分对策方法[12]和极大值原理方法[9]代表的 H_∞控制时域解法。这两种方法除了可以解决线性时不变系统的 H_∞控制问题，还可用来处理时变系统、非线性系统和奇异摄动系统等的 H_∞控制问题。另外，多目标 H_∞优化问题和奇异 H_∞控制问题也得到了进一步的研究，并提出了相应的解决办法。如多目标 H_∞优化，可用 Glover 和 Mustafa 的极小熵 H_∞控制方法[10]解决；奇异控制问题，可用 LMI[11]等方法来解决。当研究对象是从系统的传递函数或传递函数矩阵出发时，常常采用频域方法（代数方法)。上面提到的 INA 方法、鲁棒 H_∞控制、鲁棒 PID 控制以及鲁棒极点配置方法等在频域方法中都有广泛的应用。频域方法由于其物理概念清楚，且与经典控制方法有天然的联系，目前在实际工程中得到比时域方法更为广泛的应用。尤其是近十几年发展起来的 H_∞控制理论其频域方法已形成了解决鲁棒控制问题比较完善的理论体系，且在工程应用研究领域得到了比较成功的应用。H_∞控制理论正是为了改变近代控制理论过于数学化的倾向以适应工程实际的需要而诞生的，其设计思想的精髓是对系统频域特性进行整形。而这种通过调整系统的频域特性来获得预期特性的做法，正是工程技术人员最为熟悉的设计手段，也是经典控制理论的基本。另外，H_∞标准设计问题的研究也已臻于完善，从工程应用的角度讲，主要问题是如何根据实际被控对象的模型及设计要求，将系统设计问题归结为 H_∞标准设计问题；然后对于给定的增广被控对象，我们可以通过解一个或者两个 Riccati 方程式而得到满足要求的控制器，现在已有了解决此类问题的 Matlab 工具包，因此在工程中已得到大量应用。当研究对象是闭环系统的状态矩阵或特征多项式时，一般转而采用时域方法。时域方法中研究的比较多的是采用 Lyapunov 第二方法来研究不确定时滞系统的鲁棒控制问题。

1.1.3 时滞系统稳定性理论

随着人们对控制理论的认识和现代科学技术的发展的要求，对控制系统的越来越趋向精确化。但在实际的控制系统中,时滞的出现是是普遍存在的,比如在化工过程，网络传输控制，计算机信息和数据的传送过程中，对一个系统而言，稳定性应是被关注的首要问题。然而，众所周知，时滞的存在首先会对系统的稳定性产生很大的影响，因为时滞的存在将改变系统的特征方程，所以时滞成为系统不稳定的重要因素，又由于时滞的存在使得问题的研究变得更为困难，迫于控制系统控制精度的要求，我们不能只对时滞作简单的处理，而是要建立精确的数学模型，因而对时滞系统的研究便作为控制理论的一个分支分离出来。

在现有的时滞系统稳定性条件中，根据是否依赖系统中时滞的大小，可以将稳定性条件分为时滞独立和时滞依赖两种[12]：（1）时滞独立的稳定性条件，即在该条件下，对所有的时滞，系统将是渐进稳定的；（2）时滞依赖的稳定性条件，即在该条件下，对滞后时间的某些值，系统是稳定的；而对滞后时间的另一些值，系统是不稳定的。故系统的稳定性依赖于滞后时间。相应时滞系统稳定性的研究主要成果：时滞独立的系统稳定条件见文献[13-19]；时滞依赖稳定的判据见文献[20-28]。时滞独立的稳定判据的主要特点是简洁、实用,但分析结果往往偏于保守;而时滞相关的判别条件通常需要设计相应的计算程序,但分析结果相对严格些,在一定程度上减小了保守性，有利于分析问题，但是结果还是不尽人意。近年来,不少学者根据系统不稳定特征根的分布而提出的一类时滞依赖稳定判据[22-24]，一般可以大大改进上述方法存在的保守性[29],但检验过程繁复,计算工作量大。

自 1994 年韩国学者 J. H. Lee 在时域中基于状态空间模型,利用 Ricciti 方法，提出时滞系统的无记忆 H_∞控制器设计问题以来，时滞系统的鲁棒稳定性分析和鲁棒控制器设计已取得了很大的进展，极大地推动了动态系统的理论和发展。但目前的研究成果主要是连续时滞系统方面，随着计算机技术的广泛普及和应用，在实际的系统设计中，越来越多地要碰到离散控制系统。而在离散控制系统中，时间滞后更是一个普遍的现象，譬如采样的滞后，数据传输和处理的滞后。另外，随着系统理论研究领域的扩大，离散控制系统理论得到了迅速发展；无论是计算机在线分析与设计还是计算机离线分析与模拟计算，都需要对控制系统进行某种意义下的离散化。

因此，对不确定性离散时滞系统的研究无论是从实际上还是理论上都是具有重要意义的。离散系统理论的概念和方法构成了近代控制论的基础，其重要性已经为人们所认识，离散系统理论正在自动控制工程、通讯、雷达技术、生物医学工程、图象检验技术、电力系统及网络通讯控制等领域中发挥着重要的作用。但是由于离散的 Lyapunov 方程以及系统矩阵的非线性因素，所以很难处理系统中的不确定性，特别是离散时滞系统的 H_∞控制等问题。一般来说，连续时滞系统的相关结果不能直接移植到离散时滞系统中。

另一方面，在实际工程中数学模型不确定性的存在，给时滞系统的研究带来了很大的困难。通常不确定性有两个来源：（1）未知的或不可预计的输入，如作用与被控过程的各种干扰信号、传感器量测噪声等；（2）不可预计的动态特性（未建模动态），如非线性系统的线性化、用低阶的线性定常集中参数模型来代替实际的高阶的非线性时变分布参数系统。另外，除了数学模型不精确外，在控制系统的运行过程中还会出现环境变化、元件老化等问题。因此，在控制系统的设计过程中一个不可回避的问题是：如何设计控制器，来提高系统的鲁棒性?如何描述系统的不确定性，在保证系统鲁棒性和数学可处理的前提下，尽量减少其保守性?

常见的不确定描述可分为非结构不确定性和结构不确定性。非结构不确定性是指那些结构不明确的不确定性。在每一频率下，其频率响应位于负平面的一个集合内；结构不确定性是指那些模型与不确定性之间的相互关系的结构是非常明确的不确定性。在鲁棒控制中，对实际采用的控制对象一般需要覆盖其未建模动态，这自然包括某些非结构的不确定性，这种描述方法虽然带来了数学上处理和分析方法的简单性，但这种描述与实际对象的结构参数无关。

对参数不确定系统的鲁棒性能分析和综合问题，近 20 年来国际控制界提出了一系列结果和方法如，H_∞控制、μ 方法等。在时间域中研究参数不确定系统的鲁棒分析和综合问题，主要是基于 Lyapunov 稳定性理论，早期主要采用 Riccati 方程的处理方法：通过将系统的鲁棒分析和综合问题转化成一个 Riccati 型矩阵方程的可行解问题，进而应用求解 Riccati 方程的方法可以给出系统具有鲁棒性能的条件和鲁棒控制器的设计方法。Riccati 方程的方法利于理论分析，但是解 Riccati 方程或 Riccati 不等式时，有大量的参数和正定对称矩阵需要预先调整，这些参数即影响结论，也影响问题的可解性，并且现有的 Riccati 方程处理方法中还缺乏寻找这些参

数最佳值的方法，参数的人为确定给分析和综合带来了很大的保守性。另一方面求解 Riccati 型矩阵方程还存在问题，目前求解求解 Riccati 型矩阵方程的方法多为迭代法，这些方法的收敛性得不到保证，有时候，即使问题本身是有解的，也找不出问题的解，这给实际应用时问题的解决带来极大不便。然而，内点法提出，并成功用来求解具有线性矩阵不等式约束的凸优化问题，很好地弥补 Riccati 方程方法的上述不足。内点法的主要思想是：利用约束条件定义一个闸函数，该函数在可行域内部是凸的，在可行域外部则定义其为无穷大。通过在目标函数中添加这样一个闸函数，使得原先的约束优化问题转化成一个无约束的优化问题，而后者可以应用求解无约束优化问题的牛顿法来求解，内点法的思路类似于约束优化问题的罚函数法。在解线性矩阵不等式时，不需要预先调整任何参数和正定对称矩阵，并且可以用 Matlab 的 LMI 工具箱，通过计算机进行求解。

1.2 论文的研究方法与主要内容

对时滞系统稳定性的研究，至今是控制界的一个热点，虽然已经取得了很多成果，但是采用不同的研究方法，所得到的结果的精确性是不同的，所以提高精确性、减少时滞系统稳定性判据的保守性始终是这一研究主旨；另一方面，随着研究工具的改进，得到更简单、更方便的时滞系统稳定性判据一直是我们的愿望。本文基于李亚普诺夫理论及时滞系统控制理论，采用线性矩阵不等式（LMI）技术，对时滞系统的稳定性进行了较为系统的研究，分别对连续时滞系统、离散时滞系统稳定性进行了深入的研究，获得了一系列很有意义的结论，形成了一整套基于 LMI 的时滞系统的稳定性判据。主要内容包括：

（1）时滞独立时滞系统稳定性条件

本文分别得到了 LMI 形式的判定连续时滞系统时滞独立和离散时滞系统时滞独立的稳定性的充分条件。本文是基于李亚普诺夫方法，采用 LMI 技术进行研究，文中既考虑到用矩阵不等式放缩所带来的保守性，也兼顾到形式的简单化，用 MATLAB 对数值例子仿真的结果说明了该方法的有效性。

（2）时滞依赖时滞系统稳定性条件

本文分别得到了 LMI 形式的判定离散时滞系统时滞依赖的稳定性的充分条件。本文是基于李亚普诺夫方法，采用 LMI 技术进行研究。本文所得到的判定条件主要考虑到保守性问题，仿真所得结果比文献中的结果保守性要小。利用 MATLAB 软件的 LMI 工具箱很容易对所给的 LMI 条件进行数值求解，仿真例子说明了该方法的有效性。

（3）参数不确定时滞系统时滞无关的稳定性

本文分别得到了 LMI 形式的判定参数不确定的连续时滞系统时滞独立和参数不确定离散时滞系统时滞独立的稳定性的充分条件。本文是基于李亚普诺夫方法，采用 LMI 技术，对不确定因素进行了恰当的处理，也利用矩阵不等式等技术，得到形式的简单化 LMI 形式的判定条件，用 MATLAB 对数值例子仿真的结果说明了该结论的有效性。

（4）参数不确定时滞系统时滞依赖的稳定性

本文推导出了 LMI 形式的判定参数不确定离散时滞系统时滞依赖的稳定性的充分条件。本文是基于李亚普诺夫方法，采用 LMI 技术进行推导，对不确定因素进行了恰当的处理，也利用矩阵不等式等技术，着重考虑到减小保守性问题，用 MATLAB 对数值例子进行了仿真，结果表明了该结论的有效性。

（5）多时滞系统稳定性问题

分别对时滞独立时滞系统稳定性条件，时滞依赖时滞系统稳定性条件，参数不确定时滞系统时滞无关的稳定性，参数不确定时滞系统时滞依赖的稳定性进行了合理地推广，将以上条件推广到多时滞系统，从而形成了一整套自成体系的时滞系统的稳定性判定条件。

1.3 本论文的内容安排

第一章是文献的综述，回顾了稳定性理论发展的历史、现状，分析了目前所存在的问题，并简单介绍了本论文所采用的研究方法及主要内容。第二章给出了本论文需要用到的一些数学及控制理论方面的基本知识，包括线性矩阵不等式（LMI）基础、线性矩阵不等式的求解及稳定性理论等。第三章采用线性矩阵不等式技术分别得到了 LMI 形式的判定连续时滞系统时滞独立和离散时滞系统时滞独立的稳定性的充分条件，并分别讨论了时滞独立和时滞依赖的情况，给出了推导过程和数值仿真例子。第四章主要讨论不确定参数的连续时滞系统时滞独立和不确定参数离散时滞系统时滞独立的稳定性，分别就时滞独立和时滞依赖的情况得到了 LMI 形式的稳定性判定条件，并推导后，给出了数值仿真例子。第五章分别就时滞独立时滞系统、时滞依赖时滞系统、参数不确定时滞系统时滞的独立的稳定性，参数不确定时滞系统时滞依赖的稳定性进行了总结后，将其合理地推广到多时滞系统。第六章为引用部分。主要章节为第三、四、五章，形成了一整套自成体系的时滞系统的稳定性判定条件。最后对以小结的的形式对全文进行了总结。

第 2 章 基础准备

2.1 常用状态空间描述中系统参数的不确定模型

本论文主要采用时域方法研究用状态空间描述的不确定时滞系统。因此下面重点介绍一下状态空间描述中系统参数的不确定模型。系统矩阵由下式给出。

$$A(t)=A+\Delta A(t)$$

其中 A 为模型参数，$\Delta A(t)$ 为系统参数的不确定项，一般都假设其为有界的，从描述实际系统的需要出发，或是为了数学处理的方便，以下几种不确定性被广泛采用[12, 30, 31]，

1、秩 1 型分解模型

$$\Delta A=\alpha_1(t)h_1^T g_1+\alpha_2(t)h_2^T g_2+\cdots+\alpha_m(t)h_m^T g_m,$$

其中 $h_i,g_i,i=1,\cdots,m$ 是确定的并具有适当维数的一维实向量，而 $\alpha_i(t)$ 是有界的实标量函数，其是 Lebesgue 可测的且分别满足

$$|\alpha_i(t)|\le\sigma_i,\sigma_i\ge 0,i=1,\cdots m$$

其中 $\sigma_i,i=1,\cdots m$ 为确定的标量。

2、线性不确定模型

$$\Delta A=\alpha_1(t)A_1+\alpha_2(t)A_2+\cdots+\alpha_m(t)A_m$$

其中 $A_i,i=1,\cdots,m$ 都是确定的实矩阵，而 $\alpha_i(t)$ 是有界的实标量函数，其是 Lebesgue 可测的且分别满足

$$|\alpha_i(t)|\le\sigma_i,\sigma_i\ge 0,i=1,\cdots m$$

其中$\sigma_i, i=1,\cdots m$为确定的标量。另外一些研究中还假设不确定参数的变化率是有界的，满足，

$$|\dot{\alpha}_i(t)| \le \theta_i, \theta_i \ge 0, i=1,\cdots m$$

其中$\theta_i, i=1,\cdots m$为确定的标量。

3、范数有界不确定模型

$$\|\Delta A(t)\| \le \alpha$$

其中α为一已知的标量。目前，经常采用如下更具广泛性的形式

$$\Delta A = DF(t)E,$$

其中D,E为具有适当维数的实常数矩阵，$F(t)$为有界的实矩阵函数，其各元素是 Lebesgue 可测的，且满足

$$F(t)^T F(t) \le I$$

4、凸多面体不确定模型

$$\Delta A = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(t) E_i$$

其中E_i为已知的实矩阵，$\alpha_i(t)$为有界的实标量函数，且满足

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i(t) = 1, \alpha_i(t) \ge 0$$

显然可以看出，秩 1 型不确定性可以归为线性不确定性的特例，该模型的提出主要是为了数学处理上的方便。而对由线性不确定模型描述的不确定参数可以转化成如下的范数有界不确定模型

$$D = \begin{bmatrix} \delta_1 A_1 & \delta_2 A_2 & \cdots & \delta_m A_m \end{bmatrix}$$

$$F(t)=\begin{bmatrix} \frac{\alpha_1(t)}{\sigma_1}I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_2(t)}{\sigma_2}I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{\alpha_m(t)}{\sigma_m}I \end{bmatrix}$$

$$E=\begin{bmatrix} I & I & \cdots & I \end{bmatrix}$$

值得往意的是这种转换不是完全等价的，前者是后者的一个子集，这样会带来一定的保守性。

凸多面体不确定参数可以描述不确定参数空间的任意凸多面体，对于任意的范数有界不确定参数，因为它一定是凸的，可以用一定顶点数目的凸多面体参数模型进行任意逼近。针对采用范数有界不确定参数模型描述的不确定系统，要得到有关系统稳定性分析和鲁棒可镇定的充分必要条件往往比较复杂，但结果的计算量往往较小；而采用凸多面体不确定参数模型描述的系统，往往很容易得到相关的充分必要条件，而结果的计算量会随着顶点的数目指数增长，计算量往往会很大。

2.2 线性矩阵不等式

2.2.1 线性矩阵不等式的发展

线性矩阵不等式的方法[32, 33, 40]已有很长的历史，100 多年前，Lyapunov 在相关论文中就提出。20 世纪 40 年代，鲁里叶、Postinkov 等人用 Lyapunov 方法，给出低阶系统稳定判据的 LMI 的解析解[12, 53]。

60 年代，Yakubovic[34, 35],Popov[36, 37],Kalman[38]等人将 LMI 问题转化为简单的图形判据，使用正实引理，得出波波夫判据、圆判据等，这些判据可以用于高阶系统。早期对于简单的线性矩阵不等式问题采用手工的方法来求解，对于二维的线性短阵不等式问题，采用图解法求解。对于 Lyapunov 矩阵不等式和 Riccati 型的矩阵不等式，通过分别将其转化为适当的矩阵方程，从而可以应用求解 Lyapunov 方程和 Riccati 方程的方法来求解 Lyapuoov

矩阵不等式和 Riccati 型的矩阵不等式问题。例如对 Lyapunov 不等式 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}+\mathbf{PA}<\mathbf{0}$，选定一个正定矩阵 $\mathbf{Q}$，通过求解 Lyapunov 方程 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}+\mathbf{PA}=-\mathbf{Q}$ 来得到原来的 Lyapunov 不等式的解。但 Lyapunov 方程 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}+\mathbf{PA}=-\mathbf{Q}$ 的解的存在性依赖于正定矩阵 $\mathbf{Q}$ 的选取对给定的正定矩阵 $\mathbf{Q}$，即使 Lyapunov 方程无解，也不能推出相应的 Lyapunov 不等式无可行解。因此，这种方法具有相当大的保守性和盲目性。

对一般的线性矩阵不等式问题，可以将其列成一个凸优化问题，并采用凸优化技术来进行数值求解，椭球法就是这样一种方法。1988 年，Nesterov 和 Nemirovskii 提出了内点法[39]，并直接用来求解具有线性矩阵不等式约束的凸优化问题，取得了很好的效果。内点法为线性矩阵不等式问题的求解提供了有效的算法。正是内点法的出现，使得线性矩阵不等式成为处理系统与控制问题的一种有效工具。目前，已根据内点算法开发出了很多求解 LMI 问题的工具包，如 Matlab 的 LMI 工具箱。如今，由于 LMI 可以通过计算机进行求解，所以在系统与控制理论中大量应用。

2.2.2 线性矩阵不等式表示

具有如下形式的矩阵不等式

$$\mathbf{F}_0+\sum_{i=1}^{m}x_i\mathbf{F}_i\geq 0(or>0) \tag{2.1}$$

称为线性矩阵不等式，其中变量 $\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n$，已知常数对称矩阵 $\mathbf{F}_i=\mathbf{F}_i^T\in\mathbf{R}^{n\times n}$，

$i=1,2,\cdots,m$，“$\geq(or>)$”为半正定（或正定），即对所有 $\mathbf{z}\in\mathbf{R}^n$ 都有

$\mathbf{z}^T\mathbf{F}(x)\mathbf{z}\geq 0$。

例2.1：二变量线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} 2x_1+4 & x_1+2x_2 & 2 \\ x_1+2x_2 & x_2+5 & 0 \\ 2 & 0 & 3x_1 \end{bmatrix}>0$$

可化为（2.1）的形式：

$$\begin{bmatrix}4 & 0 & 2\\0 & 5 & 0\\2 & 0 & 0\end{bmatrix}+x_1\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 0 & 3\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}0 & 2 & 0\\2 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}>0$$

2.2.3 控制约束的线性矩阵不等式表示

系统与控制中的许多问题可以通过适当的处理将其转换成具有(2.1)式形式的一个 LMI 问题。

（1）多个线性矩阵不等式约束

$$\mathbf{F}_1(x)<0,\mathbf{F}_2(x)<0,\cdots,\mathbf{F}_m(x)<0$$

可以转化为 $diag(\mathbf{F}_1(x),\mathbf{F}_2(x),\cdots,\mathbf{F}_m(x))<0$ 。

（2）将二次矩阵不等式转化成线性矩阵不等式

在线性矩阵不等式使用之前，许多控制问题是用 Riccati 不等式方法来解决的，而 Riccati 不等式的求解带有一定的保守性。Riccati 不等式是二次矩阵不等式，所以将二次矩阵不等式转化成线性矩阵不等式很有必要和意义，在此转化过程中，矩阵的 Schur 补引理起着诀定性的作用。下面给出 Schur 引理的具体描述。

定理 2.1（Schur 补）[40]：对于给定的对称矩阵 $\mathbf{S}=\begin{bmatrix}\mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12}\\\mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22}\end{bmatrix}$,其中 $\mathbf{S}_{11}$ 是 $r\times r$ 维的。以下三个条件是等价的：

(1) $\mathbf{S}<0$；

(2) $\mathbf{S}_{11}<0$， $\mathbf{S}_{22}-\mathbf{S}_{12}^T\mathbf{S}_{11}^{-1}\mathbf{S}_{12}<0$；

(3) $\mathbf{S}_{22}<0,\mathbf{S}_{11}-\mathbf{S}_{12}\mathbf{S}_{22}^{-1}\mathbf{S}_{12}^T<0$.

上述结论中的所有不等式都是严格不等式，如果遇有非严格的不等式，则用到下列推广了的 Schur 补引理：

定理 2.2：对于给定的对称矩阵$\mathbf{S}=\begin{bmatrix}\mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12}\\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22}\end{bmatrix}$,其中$\mathbf{S}_{11}$是$r\times r$维的。以下三个条件是等价的：

(1)$\mathbf{S}\le 0$；

(2)$\mathbf{S}_{11}\le 0$，$\mathbf{S}_{22}-\mathbf{S}_{12}^{T}\mathbf{S}_{11}^{-1}\mathbf{S}_{12}\le 0$；

(3) $\mathbf{S}_{22}\le 0,\mathbf{S}_{11}-\mathbf{S}_{12}\mathbf{S}_{22}^{-1}\mathbf{S}_{12}^{T}\le 0$.

应用矩阵的 Schur 补性质，一些非线性矩阵不等式可以转化成线性矩阵不等式。而线性矩阵不等式的最大优点是计算的简单性，并且不需要参数调整，可以用 Matlab LMI Toolbox 求解。

2.2.4 有关线性矩阵不等式的几个结论

引理 2.1：A,B,C为适当维的实常数矩阵，$H(t)$是满足$H^{T}(t)H(t)\le I$的矩阵函数，则有下面不等式成立：

1. $A^{T}B+B^{T}A\le \varepsilon A^{T}A+\varepsilon^{-1}B^{T}B,\varepsilon>0$

证明：由于对任意实数矩阵M，有$M^{T}M\ge 0$，则

$[\varepsilon^{1/2}A-\varepsilon^{-1/2}B]^{T}[\varepsilon^{1/2}A-\varepsilon^{-1/2}B]\ge 0$

$\Leftrightarrow A^{T}B+B^{T}A-\varepsilon A^{T}A-\varepsilon^{-1}B^{T}B\le 0$

$\Leftrightarrow A^{T}B+B^{T}A\le \varepsilon A^{T}A+\varepsilon^{-1}B^{T}B,\varepsilon>0$。

2. $AH(t)B+B^{T}H^{T}(t)A^{T}\le \eta^{-2}A^{T}A+\eta^{2}B^{T}B,\eta>0$

引理 2.2（S-procedure）：(1)对$\sigma_1(y)=y^{T}Q_1y+2s_1^{T}y+r_1\ge 0,$，假定存在一个$\tilde{y}\in\mathbf{R}^{m}$,使得$\sigma_1(\tilde{y})>0$,则以下两个条件是等价的：

$S_1^{(1)}$：对使得$\sigma_1(y)>0$,的所有$y\in\mathbf{R}^m$, $\sigma_0(y)=y^TQ_0y+2s_0^Ty+r_0\geq 0$;

$S_{21}^{(1)}$：存在使得以下的线性矩阵不等式是可行的：

$$\begin{bmatrix} Q_0 & s_0 \\ s_0^T & r_0 \end{bmatrix}+\tau\begin{bmatrix} Q_1 & s_1 \\ s_1^T & r_1 \end{bmatrix}\geq 0.$$

（2）对$\sigma_1(y)=y^TQ_1y\geq 0$,，假定存在一个$\tilde{y}\in\mathbf{R}^m$,使得$\sigma_1(\tilde{y})>0$,则以下两个条件是等价的：

$S_1^{(2)}$：对使得$\sigma_1(y)>0$,的所有非零$y\in\mathbf{R}^m$, $y^TQ_0y>0$;

$S_{21}^{(2)}$：存在$\tau\geq 0$,使得$Q_0-\tau Q_1>0$.　S-procedure 可以将不是凸约束的问题转化为线性矩阵不等式约束。

2.2.5 几个标准的线性矩阵不等式问题

（1）可行性问题（LMIP）：

检验是否存在满足线性矩阵不等式$\mathbf{F(x)}<0$的$\mathbf{x}$，若满足则此线性矩阵不等式是可行的，否则是不可行的。

可行性问题，在 Matlab LMI Toolbox 中用 feasp 函数可以求得：
对线性矩阵不等式$A(x)<B(x)+\lambda I$, feasp 函数将在其约束下搜索决策变量x,使得满足约束的λ最小，若$\lambda_{\min}<0$,则线性矩阵不等式$A(x)<B(x)$有解，对应x即为一组可行解。

（2）特征值问题（Eigenvalue Problem）：

在线性矩阵不等式约束下，求矩阵$\mathbf{G(x)}$的最大特征值的最小化问题。
一般表示为：

$$\begin{aligned} &\min\lambda \\ s.t.\quad &\mathbf{G(x)}<\lambda\mathbf{I} \\ &\mathbf{H(x)}<\mathbf{0} \end{aligned}$$

或等价于

$$\min \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$
$$s.t. \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}) < 0$$

（3）广义特征值问题（Generalized Eigenvalue Problems）：

即求

$$\begin{aligned} &\text{minimize}\,\lambda \\ &\lambda\mathbf{B}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}(\mathbf{x}) < 0 \\ &\mathbf{B}(\mathbf{x}) < 0 \\ &\mathbf{C}(\mathbf{x}) < 0 \end{aligned}$$

或等价于

$$\begin{aligned} &\text{minimize}\,\lambda_{\max}(\mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{B}(\mathbf{x})) \\ &\mathbf{B}(\mathbf{x}) < 0 \\ &\mathbf{C}(\mathbf{x}) < 0 \end{aligned}$$

对称矩阵 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ 仿射依赖于 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$。

2.3 系统的稳定性问题

稳定性是动力系统最重要和最基本的性质[41]，对大多数情形，稳定是控制系统能够正常运行的前提[1]。

2.3.1 李雅普诺夫意义下稳定性的基本概念

俄国力学家李雅普诺夫在 1892 年提出运动稳定性的一般理论，把由常微分方程组描述的动力学系统的稳定性分析方法区分为本质不同的两种方法，现在称为李雅普诺夫第一方法和李雅普诺夫第二方法。李雅普诺夫方法同时适应于线性系统和非线性系统、时变系统和时不变系统、连续时间系统和离散时间系统。

李雅普诺夫第一方法也称为李雅普诺夫间接法，属于小范围稳定性分析方法。李雅普诺夫第二方法也称为李雅普诺夫直接法，属于直接根据系统结构判断内部稳定性的方法。李雅普诺夫第二方法直接面对非线性系统，引入具有广义能量属性的李雅普诺夫函数，然后分析李雅普诺夫函数导数

的定号性，建立判断系统稳定性的相应结论。系统运动的稳定性实质是归结为系统平衡状态的稳定性，即偏离平衡状态的受扰运动能否只依靠系统内部的结构因素，或者使之限制在平衡状态的有限临域内，或者使之同时最终返回到平衡状态，故以下的研究都是对自治系统而言。

定义 1：不受外界影响即没有输入作用的动态系统，称为自治系统。

对连续非线性时变系统，一般表示为：

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t),t), \\ x(t_0) = x_0, t \in [x_0, \infty] \end{cases} \tag{2.2}$$

其中 x 为 n 维状态，$f(x(t),t)$ 时间变量 t 的 n 维向量函数。其状态方程：

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x, \\ x(t_0) = x_0, t \in [x_0, \infty] \end{cases} \tag{2.3}$$

对时不变系统方程为 $\dot{x}(t) = f(x)$, 其状态方程:

$$\dot{x} = Ax\,.$$

定义 2：状态空间中满足属性 $\dot{x}_e = f(x_e,t) = 0, \forall t \in [t_0, \infty)$ 的状态 x_e，称为自治系统(2.2)的平衡状态。

定义 3：称 x_e 为李雅普诺夫意义下稳定，若对实数 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon, t_0) > 0$，使得满足 $\|x_0 - x_e\| \le \delta(\varepsilon, t_0)$ 的 $\forall x_0$ 出发的受扰运动 $\phi(t; x_0, t_0)$ 都满足 $\|\phi(t; x_0, t_0) - x_e\| \le \varepsilon, \forall t \ge t_0$.

定义 4：称 x_e 为李雅普诺夫意义下渐近稳定，满足：(1) x_e 为李雅普诺夫意义下稳定;(2) 对实数 $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ 和实数 $\forall \mu > 0, \exists T(\mu, \delta, t_0) > 0$ 使得满足 $\|x_0 - x_e\| \le \delta(\varepsilon, t_0)$ 的 $\forall x_0$ 出发的受扰运动 $\phi(t; x_0, t_0)$ 也同时满足 $\|\phi(t; x_0, t_0) - x_e\| \le \mu, \forall t \ge t_0 + T(\mu, \delta, t_0)$.

若 $\forall 0 \neq x_0 \in R^n, x_e = 0$ 为渐近稳定，则称为大范围渐近稳定（全局渐近稳定）。

2.3.2 李雅普诺夫基本稳定性定理

（1）考虑连续时间非线性时变自治系统：

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t),t) \\ f(0,t) = 0, t \in [x_0, \infty] \end{cases} \tag{2.4}$$

其中 x 为 n 维状态。

引理 2.3：系统(2.4)若可构造 x 和 t 具有连续一阶偏导数的一个标量函数 $V(x,t), V(0,t) = 0,$ 且对状态空间 R^n 中所有非零状态点 x 满足如下条件，则称其在 $x = 0$ 为大范围一致渐近稳定：

（i）　$V(x,t)$ 正定有界；

（ii）　$V(x,t)$ 对时间 t 的导数 $\dot{V}(x,t)$ 负定有界。

（iii）　$\|x\| \to \infty, V(x,t) \to \infty$ 。

（2）考虑连续时间非线性时不变自治系统：

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), t \geq 0 \\ f(0,t) = 0, t \in [0, \infty] \end{cases} \tag{2.5}$$

其中 x 为 n 维状态。

引理 2.4：系统(2.5)若可构造 x 和 t 具有连续一阶偏导数的一个标量函数 $V(x), V(0) = 0,$ 且对状态空间 R^n 中所有非零状态点 x 满足如下条件，则称其在 $x = 0$ 为大范围渐近稳定：

（i）　$V(x)$ 正定；

（ii）　$V(x,t)$ 对时间 t 的导数 $\dot{V}(x,t)$ 负定。

（iii）　$\|x\| \to \infty, V(x) \to \infty$ 。

（3）考虑连续时间线性时不变系统自治状态方程：

$$\dot{x} = Ax, x(0) = x_0, t \geq 0 \tag{2.6}$$

其中 x 为 n 维状态，状态空间原点 $x = 0$ 为系统的一个平衡状态。

引理 2.5：对系统(2.6)，原点平衡状态 $x = 0$ 是渐近稳定的充分必要条件是矩阵 A 的特征值均具有负实部。

（4）考虑离散系统：

$$x(k+1) = f(x(k)), f(0) = 0 \tag{2.7}$$

其中 x 为 n 维状态。

引理 2. 6：对系统(2.7)，若标量函数 $V(x)$ 在 x 处连续，使得

（i） $V(x) > 0, x \neq 0$；

$\Delta V(x) < 0, x \neq 0,$

（ii） $\Delta V(x(k)) = V(x(k+1)) - V(x(k))$

$= V(f(x(k+1))) - V(f(x(k)));$

（iii） $V(x) = 0, x \neq 0$

（iv） $\|x\| \to \infty, V(x) \to \infty$

则平衡状态 $x = 0$ 是大范围渐近稳定的，且 $V(x)$ 是一个李雅普诺夫函数。

（5）考虑离散时间系统自治状态方程[42]：

$$x(k+1) = Gx(k), x(0) = x_0, k = 0,1,2,\cdots \tag{2.8}$$

其中 x 为 n 维状态， $Gx_e = 0$ 的解状态 x_e 为系统平衡状态。若 G 为奇异，则除 $x_e = 0$ 还有非零平衡状态；若 G 非奇异，则只有唯一平衡状态 $x_e = 0$ 。

引理 2.5：对系统(2.8)，原点平衡状态 $x = 0$ 是李雅普诺夫意义下稳定的充分必要条件是矩阵 G 的全部特征值 $\lambda_i(G)(i = 1,2,\cdots,n)$ 的幅值均小于 1。

2.3.3 李雅普诺夫函数构造[52]

并没有构造 Lyapunov 函数的一般规律，很多成功构造出来的 V 函数往往有它的背景，例如，某些力学物理模型推演出来的方程，相应的 V 函数有明确的物理意义，如力学保守系统，它的相应的动能和势能的总和便为合适的 V 函数。可以用线性类别方法，即对非线性微分方程组，首先找出它相应的线性微分方程组的二次型正定 V 函数，然后考虑非线性特性而构造出相类似的 V 函数来。

有三种构造 Lyapunov 函数的原则性的方法，然而都是试探性的，并不一定保证成功。

（1）原则性的方法是先试探构造出一个正定的 Lyapunov 函数，然后寻求沿方程组解的导数 $\frac{dV}{dt}$，看方程组的右端已给的条件能否保证 $\frac{dV}{dt}$ 负定，或半负定。如能保证，则可断定渐进稳定性、稳定性。如不能保证 $\frac{dV}{dt}$ 负定、半负定，则任何稳定性给结论也无法获得，只得重新寻找别的方法。这种方法是几乎所有稳定性专著中普遍采用的方法，成功的例子很多，例如 1）二次型；2）平方和；3）线性加权型；4）绝对值加权型；5）二次型加非线性型积分项型等等。

（2）先令 $\frac{dV}{dt}$ 满足负定（半负定）条件，然后积分而求得 V，看是否能由方程组右端的条件而保证 V 是正定的，如能，则可断定某种渐进稳定性、稳定性，否则，任何结论也得不到，只得另找方法，沿第二种方法的方向有所谓梯度方法，以及构造梯度的选取不同而派生出来的所谓变梯度法、积分法、能量度量法等等。

（3）所谓的微分矩阵法，即同时构造 V 及 $\frac{dV}{dt}$。

2.3.4 李雅普诺夫稳定性与线性矩阵不等式

在状态空间下针对形如 $\dot{x}(t)=Ax(t)$ 的线性时不变系统，选 Lyapunov 能

量函数 $L(x,t)=x^T(t)Px(t)$，则系统稳定当且仅当存在正定对称矩阵 P 满足 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}+\mathbf{PA}<\mathbf{0}$；对形如 $\dot{x}(t)=(A+\Delta A(t))x(t)$ 的线性时变不确定系统，由二次稳定概念，则系统稳定如果存在正定对称矩阵 P 满足

$(A+\Delta A(t))^T P+P(A+\Delta A(t))<0$。

针对形如 $\dot{x}(t)=Ax(t)+A_\tau x(t-\tau)$ 的线性时滞系统，一般也可选择 Lyapunov 能量函数 $L(x,t)=x^T(t)Px(t)+\int_{-d}^{t} x^T(s)Qx(s)ds$，则系统稳定如果存在正定对称矩阵 P 和 Q 满足 $\begin{bmatrix} A^T P+PA+Q & PA_\tau \\ A_\tau^T & -Q \end{bmatrix}<0$。对于其它诸如非线性等复杂系统，进行一定的变换后同样可用线性理论的方法来处理，显然最后也可归结为 LMI 问题。

第 3 章 基于 LMI 的时滞系统的稳定性分析

3.1 引言

在现实工业生产中，时滞现象是经常遇到的。如加长管道进料或皮带传输、缓慢的化学反应过程、复杂的在线分析仪以及电路系统[43]等，均会产生时滞现象；系统中原料或信息的传输也往往导致时滞现象的产生。故时滞系统是及其普遍的，如通信系统、传送系统、化工过程系统、冶金过程系统、环境系统、电力系统等都是典型的时滞系统。

而对一个系统来说，稳定性问题是最基本的、首要的问题。时滞的存在会导致系统不稳定、抖动或性能降低。时滞的存在使得系统的分析和综合变得更加复杂和困难。正是由于时滞系统在实际中的大量存在，以及时滞系统的稳定性分析一直是时滞系统的一个难点，使得时滞系统的分析和综合至今还是控制理论和控制工程领域中研究的一个热点问题[54, 55]。

本章对连续和离散时滞系统分别就时滞独立和时滞依赖的稳定性条件进行讨论。

3.2 时滞独立稳定性的充分条件

关于时滞系统（3.1）时滞独立的稳定性国内外学者们已作过许多研究。并且得出了很多时滞系统（3.1）时滞独立稳定条件，在一定程度上都带有很大的保守性，并且形式较复杂。本节利用基于 Lyapunov 稳定性理论，得到一个线性矩阵不等式形式表示的、简单的、连续和离散时滞系统稳定性判断的充分条件。

3.2.1 连续时滞系统

考虑下面有确定参数的连续时滞系统

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}\mathbf{x}(t)+\mathbf{A}_d\mathbf{x}(t-d), d>0 \tag{3.1}$$

其中：$\mathbf{x}(t)\in\mathbf{R}^n$ 是系统的状态向量，$\mathbf{A},\mathbf{A}_d\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 是已知的常数矩阵，$d>0$ 是时滞常数。

对系统（3.1），设存在对称正定矩阵 $\mathbf{P}$，定义如下 Lyapunov 函数：

$$V(x(t))=x^T(t)Px(t)+\int_{-d}^{t}x^T(s)A_d^TPA_dx(s)ds$$

沿系统（3.1）的任意轨线，对 V 关于时间求导数，则有：

$$\dot{V}(x(t))=\dot{x}^T(t)Px(t)+x^T(t)P\dot{x}(t)+x^T(t)A_d^TPA_dx(t)-x^T(t-d)A_d^TPA_dx(t-d)$$
$$\because \dot{x}(t)=Ax(t)+A_dx(t-d)$$
$$\therefore \dot{x}^T(t)=x^T(t)A^T+x^T(t-d)A_d^T$$

$$\begin{aligned}\dot{V}(x(t))&=[x^T(t)A^T+x^T(t-d)A_d^T]Px(t)+x^T(t)P[Ax(t)+A_dx(t-d)]\\&\quad+x^T(t)A_d^TPA_dx(t)-x^T(t-d)A_d^TPA_dx(t-d)\\&=x^T(t)A^TPx(t)+x^T(t-d)A_d^TPx(t)+x^T(t)PAx(t)+x^T(t)PA_dx(t-d)\\&\quad+x^T(t)A_d^TPA_dx(t)-x^T(t-d)A_d^TPA_dx(t-d)\\&=x^T(t)\left[A^TP+PA+A_d^TPA_d\right]x(t)-x^T(t-d)A_d^TPA_dx(t-d)\\&\quad+x^T(t-d)A_d^TPx(t)+x^T(t)PA_dx(t-d)\\&=\begin{bmatrix}x(t)\\x(t-d)\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}A^TP+PA+A_d^TPA_d & PA_d\\A_d^TP & -A_d^TPA_d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\x(t-d)\end{bmatrix}\end{aligned}$$

若

$$\begin{bmatrix}A^TP+PA+A_d^TPA_d & PA_d\\A_d^TP & -A_d^TPA_d\end{bmatrix}<0$$

结论 3.1：　对系统（3.1），如果存在某个对称正定的矩阵 $P\in\mathbf{R}^{n\times n}$，使得

$$\begin{bmatrix}A^TP+PA+A_d^TPA_d & PA_d\\A_d^TP & -A_d^TPA_d\end{bmatrix}<0 \tag{3.2}$$

成立，则系统（3.1）是时滞独立渐进稳定的。

若令 $P=W^TW$,即对 P 作平方分解，则有

$$
\begin{aligned}
\dot{V}(x(t)) &= x^T(t)\left[A^TP + PA + A_d^TPA_d\right]x(t) - x^T(t-d)A_d^TPA_dx(t-d) \\
&\quad + x^T(t-d)A_d^TPx(t) + x^T(t)PA_dx(t-d) \\
&= x^T(t)\left[A^TP + PA + A_d^TPA_d\right]x(t) - x^T(t-d)A_d^TPA_dx(t-d) \\
&\quad + x^T(t-d)A_d^TW^TWx(t) + x^T(t)W^TWA_dx(t-d)
\end{aligned}
$$

又因为对适当维矩阵 E,F ,下述矩阵不等式成立

$$EF^T + FE^T \le EE^T + FF^T$$

若令 $E = x^T(t-d)A_d^TW^T, F = x^T(t)W^T$

则

$$
\begin{aligned}
\dot{V}(x(t)) &= x^T(t)\left[A^TP + PA + A_d^TPA_d\right]x(t) - x^T(t-d)A_d^TPA_dx(t-d) \\
&\quad + x^T(t-d)A_d^TW^TWx(t) + x^T(t)W^TWA_dx(t-d) \\
&\le x^T(t)\left[A^TP + PA + A_d^TPA_d\right]x(t) - x^T(t-d)A_d^TPA_dx(t-d) \\
&\quad + x^T(t-d)A_d^TW^TWA_dx(t) + x^T(t)W^TWA_dx(t-d) \\
&= x^T(t)\left[A^TP + PA + A_d^TPA_d\right]x(t) - x^T(t-d)A_d^TPA_dx(t-d) \\
&\quad + x^T(t-d)A_d^TW^TWA_dx(t-d) + x^T(t)W^TWx(t) \\
&= x^T(t)\left[A^TP + PA + A_d^TPA_d + P\right]x(t)
\end{aligned}
$$

若 $A^TP + PA + A_d^TPA_d + P < 0$

则根据 Lyapunov 定理可知系统（3.1）是渐近稳定的[44]。

由 Schur 补引理（2.1）得：

$$
\begin{aligned}
& A^TP + PA + A_d^TPA_d + P < 0 \\
\Leftrightarrow\ & A^TP + PA + P + A_d^TPP^{-1}PA_d < 0
\end{aligned}
$$

$$
\Leftrightarrow \begin{bmatrix} PA + A^TP + P & PA_d \\ A_d^TP & -P \end{bmatrix} < 0
$$

即

$$\dot{V}(x(t)) < 0$$

根据 Lyapunov 稳定定理，系统（3.1）是大范围渐近稳定的。可以看出这种形式更为简单，但是因为应用不等式放大，所以保守性相对增大。

值得一提的是，用运放缩法，有利于问题简单化，将在以后章结中多次用到，这也是运用 Lyapunov 稳定性理论处理问题的普遍方法。总结上述可得到如下结论：

结论 3.2：对系统（3.1），如果存在某个对称正定的矩阵 $P \in \mathbf{R}^{n \times n}$，使得

$$\begin{bmatrix} PA + A^T P + P & PA_d \\ A_d^T P & -P \end{bmatrix} < 0 \tag{3.3}$$

成立，则系统（3.1）是时滞独立渐进稳定的。

可以看出，式（3.2）、（3.3）是关于矩阵变量 P 的线性矩阵不等式。结论（3.1）、（3.2）用 LMI 形式给出了系统（3.1）渐进稳定的充分条件，故可用 LMI 工具箱中求解线性矩阵不等式可行性问题求解器 feasp 来判断系统（3.1）是否满足此条件。

3.2.2 数值例子

例 3.1： 考虑时滞系统

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -3 & -1.6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0.4 \\ -0.4 & -0.3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t-d)$$

当 $d = 0$ 时，用 MATLAB 可以算出，系统的特征值是-2.3062 和-0.6938，故系统是渐进稳定的。当存在时滞时，根据结论（3.2），可得可行解：

$$P = \begin{bmatrix} 1.4389 & 1.1185 \\ 1.1185 & 1.5713 \end{bmatrix}$$

结果表明该系统是渐进稳定的。求解 LMI 的 Matlab 程序与附录 A 中例(3.3）类似。

3.2.3 离散时滞系统

考虑下面有确定参数的离散时滞系统

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k-d), d > 0 \tag{3.4}$$

其中：$\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n$ 是系统的状态，$\mathbf{A},\mathbf{A}_d\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 是已知的实常数矩阵，$d>0$ 是系统时滞常数。

对系统（3.4），设存在对称正定矩阵 $\mathbf{P}$，定义如下 Lyapunov 函数：

$$V(x(k))=x^T(k)Px(k)+\sum_{\alpha=k-d}^{k-1}x^T(\alpha)A_d^TPA_dx(\alpha)$$

则 $V(x(k))$ 是正定的，沿系统（3.4）的任意轨线，对 V 的前向差分为：

$$\begin{aligned}
&\Delta V[x(k)]=V[x(k+1)]-V[x(k)]\\
&=x^T(k+1)Px(k+1)+\sum_{\alpha=k+1-d}^{k}x^T(\alpha)A_d^TPA_dx(\alpha)\\
&-x^T(k)Px(k)-\sum_{\alpha=k-d}^{k-1}x^T(\alpha)A_d^TPA_dx(\alpha)\\
&=x^T(k+1)Px(k+1)-x^T(k)Px(k)+\sum_{\alpha=k+1-d}^{k-1}x^T(\alpha)A_d^TPA_dx(\alpha)\\
&+x^T(k)A_d^TPA_dx(k)-\sum_{\alpha=k+1-d}^{k-1}x^T(\alpha)A_d^TPA_dx(\alpha)-x^T(k-d)A_d^TPA_dx(k-d)\\
&=x^T(k+1)Px(k+1)-x^T(k)Px(k)+x^T(k)A_d^TPA_dx(k)-x^T(k-d)A_d^TPA_dx(k-d)
\end{aligned}$$

又因为

$$\because x(k+1)=Ax(k)+A_dx(k-d)$$
$$\therefore x^T(k+1)=x^T(k)A^T+x^T(k-d)A_d^T$$

$$\begin{aligned}
&\therefore x^T(k+1)Px(k+1)-x^T(k)Px(k)+x^T(k)A_d^TPA_dx(k)\\
&-x^T(k-d)A_d^TPA_dx(k-d)\\
&=[x^T(k)A^T+x^T(k-d)A_d^T]P[Ax(k)+A_dx(k-d)]\\
&-x^T(k)Px(k)+x^T(k)A_d^TPA_dx(k)-x^T(k-d)A_d^TPA_dx(k-d)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&=x^T(k)A^TPAx(k)+x^T(k)A^TPA_dx(k-d)+x^T(k-d)A_d^TPAx(k)\\
&+x^T(k-d)A_d^TPA_dx(k-d)-x^T(k)Px(k)\\
&+x^T(k)A_d^TPA_dx(k)-x^T(k-d)A_d^TPA_dx(k-d)
\end{aligned}$$

$$=x^T(k)[A^TPA+A_d^TPA_d-P]x(k)+x^T(k)A^TPA_dx(k-d)+x^T(k-d)A_d^TPAx(k)$$

$$=\begin{bmatrix}x(k)\\x(k-d)\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}A^TPA+A_d^TPA_d-P & A^TPA_d\\ A_d^TPA & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(k)\\x(k-d)\end{bmatrix}$$

若

$$\begin{bmatrix} A^TPA+A_d^TPA_d-P & A^TPA_d \\ A_d^TPA & 0 \end{bmatrix}<0$$

即

$$\Delta V[x(k)]<0\text{时，}$$

根据 Lyapunov 稳定定理，系统（3.4）是渐近稳定的。由此我们可以得到如下结论：

结论 3.3：系统（3.4），如果存在某个对称正定的矩阵 $P\in R^{n\times n}$，使得

$$\begin{bmatrix} A^TPA+A_d^TPA_d-P & A^TPA_d \\ A_d^TPA & 0 \end{bmatrix}<0 \tag{3.5}$$

成立，则系统（3.4）是时滞独立渐进稳定的。

式（3.5）是一个线性矩阵不等式，可以用 MATLAB 软件中的 LMI 工具箱求其可行解。

3.2.4 数值例子

例 3.2：考虑离散时滞系统（3.4）

$$A=\begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}, A_d=\begin{bmatrix} 0.3 & 0.6 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$

当系统无时滞时，用 MATLAB 可以算出，A 系统的特征值 $\lambda(A)=0.2838,0.9162\in[0,1)$，故系统是渐进稳定的。当存在时滞时，根据结论（3.3），可得可行解：

$$P=10^{-8}\times\begin{bmatrix} 0.1359 & -0.1042 \\ -0.1042 & 0.0767 \end{bmatrix}$$

结果表明离散时滞系统（3.4）是渐近稳定的。求解 LMI 的 Matlab 程序与附录 A 中例（3.3）类似。

注：

1. 本节基于 Lyapunov 稳定性理论，采用线性矩阵不等式技术，将判定时滞系统时滞独立的稳定性转化为判断一个线性矩阵不等式可行解的问题。采用矩阵不等式变换处理方法，得到形式更为简单的时滞系统时滞独立的稳定性条件。

2. 本节成功地将连续时滞系统时滞独立的稳定性条件，推广到离散时滞系统。这种思路在后面的章节中还会用到。

3. 对小时滞来说，时滞独立的稳定性条件是非常保守的，但是它比较简单，并且不需要知道系统时滞的精确信息。

3.3 时滞依赖稳定性的充分条件

和时滞独立的稳定性条件相比，时滞依赖的稳定条件更复杂，更难得到。目前文献中所见大多数是连续时滞系统时滞依赖的稳定条件，并且从推导来看，为简单起见，一般都应用(3. 6)式的各种推论，经过多次放大，这给结果带来了很大保守性。然而有关离散时滞系统时滞依赖的稳定性条件更为少见。本节基于 Lyapunov 稳定性理论，采用线性矩阵不等式技术，将连续时滞系统时滞依赖的稳定条件(3.7)式推广到离散时滞系统，导出离散系统时滞依赖的稳定性条件。

3.3.1 连续时滞系统

引理 3. 1[12]：对任意适当维的向量 a、b 和矩阵 N、X、Y、Z 其中 X 和 Z 是对称的，若 $\begin{bmatrix} X & Y \\ Y^T & Z \end{bmatrix} \geq 0$，则

$$-2a^T Nb \leq \inf_{X,Y,Z} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X & Y-N \\ Y^T-N^T & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \geq 0 \qquad (3.6)$$

证明：由定理条件得：

$$
\begin{aligned}
-2a^T Nb &\le \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & -N \\ -N^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \\
&\le \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & -N \\ -N^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X & Y \\ Y^T & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X & Y-N \\ Y^T-N^T & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

故引理得证。

结论 3. 4：对时滞系统(3. 1)，如果存在矩阵

$P>0, Q>0, P=P^T, Q=Q^T, X=X^T, Z=Z^T$，使得

$$
\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T P + PA + dX + Y + Y^T + Q & -Y + PA_d & dA^T Z \\ -Y^T + A_d^T P & -Q & dA_d^T Z \\ dZA & dZA_d & -dZ \end{bmatrix} < 0 \tag{3.7}
$$

$$
\begin{bmatrix} X & Y \\ Y^T & Z \end{bmatrix} \ge \mathbf{0}
$$

成立，则系统（3. 1）是时滞依赖渐近稳定的。

证明：见参考文献[45]，上述结论的推导中用到引理（3. 1），故该结论具有较小的保守性。

3.3.2 离散时滞系统

对于离散时滞系统(3.4),可以用下述方法进行研究：

考虑系统(3. 4)

$$
\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k-d)
$$

可以得到

$$\mathbf{x}(k)-x(k-1)=\mathbf{A}\mathbf{x}(k-1)+\mathbf{A}_d\mathbf{x}(k-1-d)-x(k-1)=\Delta x(k-1)$$
$$\mathbf{x}(k-1)-x(k-2)=\mathbf{A}\mathbf{x}(k-2)+\mathbf{A}_d\mathbf{x}(k-2-d)-x(k-2)=\Delta x(k-2)$$
$$\vdots$$
$$\mathbf{x}(k-d+1)-x(k-d)=\mathbf{A}\mathbf{x}(k-d)+\mathbf{A}_d\mathbf{x}(k-2d)-x(k-d)=\Delta x(k-d)$$

故

$$x(k)-x(k-d)=\sum_{\theta=-d}^{-1}\Delta x(k+\theta) \tag{3.8}$$
$$x(k-d)=x(k)-\sum_{\theta=-d}^{-1}\Delta x(k+\theta)$$

由式(3.4)和式(3.8)得

$$x(k+1)=Ax(k)+A_dx(k-d)$$
$$x(k+1)=Ax(k)+A_d[x(k)-\sum_{\theta=-d}^{-1}\Delta x(k+\theta)] \tag{3.9}$$
$$=(A+A_d)x(k)-A_d\sum_{\theta=-d}^{-1}\Delta x(k+\theta)$$

引入如下离散型 Lyapunov 函数

$$V[x(k)]=V_1[x(k)]+V_2[x(k)]+V_3[x(k)]$$
$$V_1[x(k)]=x^T(k)Px(k)$$
$$V_2[x(k)]=\sum_{i=-d}^{-1}\sum_{j=k+i}^{k-1}[\Delta x^T(j)Z\Delta x(j)]$$
$$V_3[x(k)]=\sum_{\theta=k-d}^{k-1}[\Delta x^T(\theta)Q\Delta x(\theta)]$$

则沿（3.9）$V_1[x(k)]$的前向差分为

$$\Delta V_1[x(k)]=V_1[x(k+1)]-V_1[x(k)]$$
$$=x^T(k+1)Px(k+1)-x^T(k)Px(k)$$

$$\because x(k)-x(k-d)=\sum_{\theta=-d}^{-1}\Delta x(k+\theta)$$
$$x^T(k+1)=x^T(k)(A+A_d)^T-\sum_{\theta=-d}^{-1}\Delta x^T(k+\theta)A_d^T$$

$$\therefore \Delta V_1[x(k)] = x^T(k)(A+A_d)^T P(A+A_d)x(k)$$

$$-x^T(k)(A+A_d)^T PA_d \sum_{\theta=-d}^{-1}\Delta x(k+\theta) - \sum_{\theta=-d}^{-1}\Delta x^T(k+\theta)A_d^T P(A+A_d)x(k)$$

$$+\sum_{\theta=-d}^{-1}\Delta x^T(k+\theta)A_d^T PA_d \sum_{\theta=-d}^{-1}\Delta x(k+\theta) - x^T(k)Px(k)$$

$$= x^T(k)(A+A_d)^T P(A+A_d)x(k) - 2x^T(k)(A+A_d)^T PA_d \sum_{\theta=-d}^{-1}\Delta x(k+\theta)$$

$$+[x^T(k)-x^T(k-d)]A_d^T PA_d[x(k)-x(k-d)] - x^T(k)Px(k)$$

$$= x^T(k)(A+A_d)^T P(A+A_d)x(k) + x^T(k)A_d^T PA_d x(k) - x^T(k)A_d^T PA_d x(k-d)$$

$$-x^T(k-d)A_d^T PA_d x(k) + x^T(k-d)A_d^T PA_d x(k-d)$$

$$-2x^T(k)(A+A_d)^T PA_d \sum_{\theta=-d}^{-1}\Delta x(k+\theta) - x^T(k)Px(k)$$

$$= x^T(k)(A+A_d)^T P(A+A_d)x(k) + x^T(k)A_d^T PA_d x(k) - 2x^T(k)A_d^T PA_d x(k-d)$$

$$+x^T(k-d)A_d^T PA_d x(k-d) - 2x^T(k)(A+A_d)^T PA_d \sum_{\theta=-d}^{-1}\Delta x(k+\theta) - x^T(k)Px(k)$$

$$= x^T(k)[(A+A_d)^T P(A+A_d) + A_d^T PA_d - P]x(k) - 2x^T(k)A_d^T PA_d x(k-d)$$

$$+x^T(k-d)A_d^T PA_d x(k-d) - 2x^T(k)(A+A_d)^T PA_d \sum_{\theta=-d}^{-1}\Delta x(k+\theta) - x^T(k)Px(k)$$

在上式中令 $a = x(k), N = (A+A_d)^T PA_d, b = \Delta x(k+\theta)$,应用式(3.6) 得:

$$-2x^T(k)(A+A_d)^T PA_d \sum_{\theta=-d}^{-1}\Delta x(k+\theta)$$

$$\le \sum_{\theta=-d}^{-1}\Big\{x^T(k)Xx(k) + x^T(k)\big[Y-(A+A_d)^T PA_d\big]\Delta x(k+\theta)$$

$$+\Delta x^T(k+\theta)\big[Y^T - A_d^T P(A+A_d)\big]x(k) + \Delta x^T(k+\theta)Z\Delta x(k+\theta)\Big\}$$

$$= dx^T(k)Xx(k) + 2x^T(k)\big[Y-(A+A_d)^T PA_d\big]\sum_{\theta=-d}^{-1}\Delta x(k+\theta)$$

$$+\sum_{\theta=-d}^{-1}\Delta x^T(k+\theta)Z\Delta x(k+\theta)$$

$$= dx^T(k)Xx(k) + 2x^T(k)\left[Y - (A + A_d)^T PA_d\right][x(k) - x(k-d)]$$

$$+ \sum_{\theta=-d}^{-1} \Delta x^T(k+\theta) Z \Delta x(k+\theta)$$

$$= dx^T(k)Xx(k) + 2x^T(k)Yx(k) - 2x^T(k)Yx(k-d) - 2x^T(k)(A + A_d)^T PA_d x(k)$$

$$+ 2x^T(k)(A + A_d)^T PA_d x(k-d) + \sum_{\theta=-d}^{-1} \Delta x^T(k+\theta) Z \Delta x(k+\theta)$$

$$= x^T(k)\left[dX + 2Y - 2(A + A_d)^T PA_d\right]x(k) - 2x^T(k)Yx(k-d)$$

$$+ 2x^T(k)(A + A_d)^T PA_d x(k-d) + \sum_{\theta=-d}^{-1} \Delta x^T(k+\theta) Z \Delta x(k+\theta)$$

故利用上面放大结果得:

$$\Delta V_1 \le x^T(k)[dX + 2Y + A^T PA - P]x(k) + x^T(k)[-2Y + 2A^T PA_d]x(k-d)$$

$$+ x^T(k-d)A_d^T PA_d x(k-d) + \sum_{\theta=-d}^{-1}[\Delta x^T(k+\theta) Z \Delta x(k+\theta)]$$

$V_2[x(k)]$的前向差分为

$$\Delta V_2[x(k)] = V_2[x(k+1)] - V_2[x(k)]$$

$$= \sum_{i=-d}^{-1} \sum_{j=k+1+i}^{k} [\Delta x^T(j) Z \Delta x(j)] - \sum_{i=-d}^{-1} \sum_{j=k+i}^{k-1} [\Delta x^T(j) Z \Delta x(j)]$$

$$= \sum_{i=-d}^{-1} \left\{ \sum_{j=k+1+i}^{k-1} [\Delta x^T(j) Z \Delta x(j)] + \Delta x^T(k) Z \Delta x(k) \right.$$

$$\left. - \sum_{j=k+i+1}^{k-1} [\Delta x^T(j) Z \Delta x(j)] - \Delta x^T(k+i)) Z \Delta x(k+i) \right\}$$

$$= \sum_{i=-d}^{-1} \Delta x^T(j) Z \Delta x(j) - \sum_{i=-d}^{-1} \Delta x^T(k+i) Z \Delta x(k+i)$$

$$\because \Delta x(k) = x(k+1) - x(k) = Ax(k) + A_d x(k-d) - x(k)$$

$$\therefore \Delta x^T(k) = x^T(k)A^T + x^T(k-d)A_d^T - x^T(k)$$

故

$$\Delta x^T(k)Z\Delta x(k)=\left[x^T(k)A^T+x^T(k-d)A_d^T-x^T(k)\right]Z\left[Ax(k)+A_dx(k-d)-x(k)\right]$$
$$=x^T(k)A^TZAx(k)+2x^T(k)A^TZA_dx(k-d)-x^T(k)A^TZx(k)+x^T(k-d)A_d^TZAx(k)$$
$$+x^T(k-d)A_d^TZA_dx(k-d)-x^T(k-d)A_d^TZx(k)-x^T(k)ZAx(k)$$
$$-2x^T(k)ZA_dx(k-d)+x^T(k)Zx(k)$$

$$=x^T(k)A^TZAx(k)+2x^T(k)A^TZA_dx(k-d)-x^T(k)A^TZx(k)+x^T(k-d)A_d^TZA_dx(k-d)$$
$$-x^T(k)ZAx(k)-2x^T(k)ZA_dx(k-d)+x^T(k)Zx(k)$$

故

$$\Delta V_2[x(k)]=V_2[x(k+1)]-V_2[x(k)]$$
$$=\sum_{i=-d}^{-1}\Delta x^T(k)Z\Delta x(k)-\sum_{i=-d}^{-1}\Delta x^T(k+i)Z\Delta x(k+i)$$
$$=d\Delta x^T(k)Z\Delta x(k)-\sum_{i=-d}^{-1}\Delta x^T(k+i)Z\Delta x(k+i)$$
$$=dx^T(k)[A^TZA-A^TZ-ZA+Z]x(k)$$
$$+dx^T(k)[2A^TZA_d-2ZA_d]x(k-d)$$
$$+dx^T(k-d)A_d^TZA_dx(k-d)-\sum_{i=-d}^{-1}\Delta x^T(k+i)Z\Delta x(k+i)$$

$V_3[x(k)]$的前向差分为

$$\Delta V_3[x(k)]=V_3[x(k+1)]-V_3[x(k)]$$
$$=\sum_{i=k+1-d}^{k}[x^T(i)Qx(i)]-\sum_{i=k-d}^{k-1}[x^T(i)Qx(i)]$$
$$=\sum_{i=k+1-d}^{k-1}[x^T(i)Qx(i)]+x^T(k)Qx(k)-\sum_{i=k+1-d}^{k-1}[x^T(i)Qx(i)]-x^T(k-d)Qx(k-d)$$
$$=x^T(k)Qx(k)-x^T(k-d)Qx(k-d)$$

故

$$\Delta V[x(k)]=\Delta V_1[x(k)]+\Delta V_2[x(k)]+\Delta V_3[x(k)]$$

$$\le x^T(k)\Pi x(k)+2x^T(k)\left[-Y+\mathbf{A}^TPA_d+dA^TZA_d-dZA_d\right]x(k-d)$$
$$+x^T(k-d)\left[A_d^TPA_d+A_d^TZA_d-Q\right]x(k-d)$$
$$\le\begin{bmatrix}x(k)\\x(k-d)\end{bmatrix}^T\times\begin{bmatrix}\Pi & -Y+\mathbf{A}^TPA_d+dA^TZA_d-dZA_d\\-Y^T+A_d^TPA+dA_d^TZA-dA_d^TZ & A_d^TPA_d+A_d^TZA_d-Q\end{bmatrix}$$
$$\times\begin{bmatrix}x(k)\\x(k-d)\end{bmatrix}$$

其中$\Pi=dX+Y^T+Y+\mathbf{A}^TPA+dA^TZA-dA^TZ-dZA+dZ+Q-P,d>0,$

若

$$\begin{bmatrix}\Pi & -Y+\mathbf{A}^TPA_d+dA^TZA_d-dZA_d\\-Y^T+A_d^TPA+dA_d^TZA-dA_d^TZ & A_d^TPA_d+A_d^TZA_d-Q\end{bmatrix}<0 \quad \text{成立}$$

则可得$\Delta V[x(k)]<0$, 故由 Lyapunov 稳定性定理知系统(3.4)是时滞依赖渐近稳定的。总结以上过程，可得到如下结论：

结论 3.5：离散时滞系统(3.4), 如果存在标量$d>0$，矩阵

$P>0,Q>0,P=P^T,Q=Q^T,X=X^T,Z=Z^T$, 对称矩阵$Y$使得

$$\begin{bmatrix}\Pi & -Y+\mathbf{A}^TPA_d+dA^TZA_d-dZA_d\\-Y^T+A_d^TPA+dA_d^TZA-dA_d^TZ & A_d^TPA_d+A_d^TZA_d-Q\end{bmatrix}<0 \tag{3.10}$$

$$\begin{bmatrix}X & Y\\Y^T & Z\end{bmatrix}\ge\mathbf{0} \tag{3.11}$$

其中$\Pi=dX+Y^T+Y+\mathbf{A}^TPA+dA^TZA-dA^TZ-dZA+dZ+Q-P$, 则对任意时滞$d$, 离散系统（3.4）是时滞依赖渐近稳定的。

可以看出，结论中得矩阵不等式是矩阵P,Q,P,Q,X,Z和常数d的标准的线性矩阵不等式。由此，就可以 MATLAB 中的 LMI 工具箱求解。

3.3.3 数值例子

例 3. 3：考虑离散时滞系统（3.4）

$$A=\begin{bmatrix}0.4 & 0.3\\ -0.1 & 0.7\end{bmatrix}, A_d=\begin{bmatrix}0.2 & -0.2\\ 0.25 & -0.1\end{bmatrix}$$

当系统无时滞时，用 MATLAB 可以算出 $\lambda(A+A_d)=0.7225,0.4775\in[0,1)$ 故系统是渐进稳定的。根据结论（3.5），当存在时滞 $d=11$ 时，得到可行解：

$$P=\begin{bmatrix}9.1038 & -5.5597\\ -5.5597 & 9.4794\end{bmatrix}>0,\quad Q=\begin{bmatrix}1.7518 & -0.5940\\ -0.5940 & 1.0322\end{bmatrix}>0,$$

$$X=\begin{bmatrix}0.3036 & -0.2773\\ -0.2773 & 0.2756\end{bmatrix}>0,\quad Z=\begin{bmatrix}0.4314 & -0.2651\\ -0.2651 & 1.0476\end{bmatrix}>0,$$

$$Y=\begin{bmatrix}-0.0906 & 0.0877\\ 0.0877 & -0.1717\end{bmatrix}$$

结果表明离散时滞系统（3.4）是渐近稳定的。求解 LMI 的 Matlab 程序在附录 A 中列出。

3.4 小结

本章考虑了有确定参数的时滞系统稳定性问题，基于 Lyapunov 函数方法，就连续时滞系统和离散时滞系统，分别从时滞独立和时滞依赖两个方面进行了讨论。

首先根据 Lyapunov 第二方法导出了连续时滞系统时滞独立稳定性的一个矩阵不等式条件，利用 Schur 补引理和矩阵变化将其转化为一个标准的线性矩阵不等式；同时选择了恰当的 Lyapunov 函数，导出了离散时滞系统时滞独立稳定性的充分条件。其次，运用离散型 Lyapunov 函数方法，将时滞 d 引入矩阵，运用引理 3. 1 放缩、凑零等数学技巧，将一个复杂的矩阵

不等式化为一个标准的线性矩阵不等式。本章采用线性矩阵不等式技术，将判定时滞系统时滞依赖的稳定性的问题转化为判断线性矩阵不等式的可行解问题，从而方便运用 MATLAB 进行求解。

在推导离散时滞系统时滞依赖的稳定性条件过程中，只对式中的一项用了不等式放缩，这大大减小了该结论的保守性，在国内外文献中还未见到。本章所给出的结论都对数值例子进行了仿真，结果表明了结论的正确性。

第 4 章 参数不确定时滞系统的稳定性

4.1 引言

在实际系统中，不确定性和时滞是不可避免的，这严重破坏了系统的稳定性和性能，成为控制界的一个难题，因而对不确定时滞系统的研究具有重要的理论和实际意义，历来是控制理论研究的热点之一。近年来有很多关于不确定连续时滞系统时滞依赖的稳定性研究[45, 46, 49, 50, 51, 58]，也有很多离散时滞系统的研究结果[47, 59, 60]。

本章基于 Lyapunov 稳定性理论，采用 LMI 技术，给出了保守性较小的参数不确定连续、离散时滞系统时滞独立的稳定性的判据，并给了详细的证明，通过数值仿真例子进一步说明了结论的正确性；将文献中参数不确定连续时滞系统时滞依赖的稳定性判据推广到参数不确定离散时滞系统，得到了参数不确定离散时滞系统时滞依赖的稳定性判据，此结论保守性较小。以上判据均以 LMI 形式给出，将判定时滞系统时滞独立的稳定性问题的转化为一个判断线性矩阵不等式的可行解问题，利用 MATLAB 软件中的 Toolbox 很容易得到结果。

4.2 参数不确定时滞系统时滞独立的稳定性

4.2.1 参数不确定连续时滞系统

问题描述：考虑如下不确定时滞系统

$$\dot{x}(t)=[A+\Delta A(t)]x(t)+[A_d+\Delta A_d(t)]x(t-d) \tag{4.1}$$

其中 $x(t)\in R^n$ 表示状态向量，d 表示系统时滞，A,A_d 为适当维数的已知常数矩阵，$\begin{bmatrix}\Delta A(t) & \Delta A_d(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}DF(t)E & D_1F_1(t)E_1\end{bmatrix}$,其中 D,D_1,E,E_1,是适当

维数的已知常数实矩阵，$F(t)\in R^{i\times j},F_1(t)\in R^{i_1\times j_1}$ 表示未知的实值时变矩阵，其元素勒贝格可测且有界，且

$$\|F(t)\|\le 1,\|F_1(t)\|\le 1,\forall t\ge 0$$

若将系统（4.1）写成

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)&=[A+\Delta A(t)]x(t)+[A_d+\Delta A_d(t)]x(t-d)\\&=\overline{A}x(t)+\overline{A}_dx(t-d)\end{aligned}$$

则可以看出它的形式与系统（3.1）

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+A_dx(t-d),d>0$$

形式相似。

故将结论(3.2)中 A 换为 $A+DFE$, A_d 换为 $A_d+D_1F_1E_1$. 则

$$\begin{bmatrix}P(A+DFE)+(A+DFE)^TP+P & P(A_d+D_1F_1E_1)\\(A_d+D_1F_1E_1)^TP & -P\end{bmatrix}<0$$

$$\begin{bmatrix}(1,1) & (1,2)\\(2,1) & (2,2)\end{bmatrix}<0$$

$$(1,1)=A^TP+PA+P+E^TF^TD^TP+PDFE;$$

$$(1,2)=PA_d+PD_1F_1E_1;$$

$$(2,1)=A_d^TP+E_1^TF_1^TD_1^TP;$$

$$(2,2)=-P.$$

上式两边分别左、右乘向量 $x_i,i=1,2.$ 得

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}(1,1) & (1,2)\\(2,1) & (2,2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}<0$$

$$x_1^T\left[A^TP+PA+P+E^TF^TD^TP+PDFE\right]x_1+x_1^T\left[PA_d+PD_1F_1E_1\right]x_2$$
$$+x_2^T\left[A_d^TP+E_1^TF_1^TD_1^TP\right]x_1-x_2^TPx_2<0$$
$$x_1^T\left[A^TP+PA+P\right]x_1+x_1^TE^TF^TD^TPx_1+x_1^TPDFEx_1+x_1^TPA_dx_2$$
$$+x_1^TPD_1F_1E_1x_2+x_2^TA_d^TPx_1+x_2^TE_1^TF_1^TD_1^TPx_1-x_2^TPx_2<0$$

令 $p=FEx_1,q=F_1E_1x_2$,则上式化为:

$$x_1^T\left[A^TP+PA+P\right]x_1+x_1^TPDp+p^TD^TPx_1+x_1^TPA_dx_2$$
$$+x_1^TPD_1q+x_2^TA_d^TPx_1+q^TD_1^TPx_1-x_2^TPx_2<0$$

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\p\\q\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}A^TP+PA+P & PA_d & PD & PD_1\\ A_d^TP & -P & 0 & 0\\ D^TP & 0 & 0 & 0\\ D_1^TP & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\p\\q\end{bmatrix}<0$$

$$\because p=FEx_1,q=F_1E_1x_2,$$

$$\therefore \|p\|=\|FEx_1\|,\|q\|=\|F_1E_1x_2\|,$$

由 $\|F(t)\|\le 1,\|F_1(t)\|\le 1,\forall t\ge 0$ 得

$$p^Tp\le x_1^TE^TEx_1,q^Tq\le x_2^TE_1^TE_1x_2,$$

应用引理 2.2（S-procedure）,可得式:

$$\begin{bmatrix}A^TP+PA+P+\varepsilon_1E^TE & PA_d & PD & PD_1\\ A_d^TP & -P+\varepsilon_2E_1^TE & 0 & 0\\ D^TP & 0 & -\varepsilon_1I & 0\\ D_1^TP & 0 & 0 & -\varepsilon_2I\end{bmatrix}<0 \qquad (4.2)$$

故由结论（3.2）知，系统(4.1)是渐近稳定的。式(4.2)是以矩阵 P，标量 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 为变量的标准的线性矩阵不等式。

由上面的分析可以得出如下结论:

结论 4.1： 参数不确定的连续时滞系统(4.1)，如果存在某个对称正定的

矩阵 $P \in \mathbf{R}^{n\times n}$，标量 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \geq 0$ 使得

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + P + \varepsilon_1 E^T E & PA_d & PD & PD_1 \\ A_d^T P & -P + \varepsilon_2 E_1^T E & 0 & 0 \\ D^T P & 0 & -\varepsilon_1 I & 0 \\ D_1^T P & 0 & 0 & -\varepsilon_2 I \end{bmatrix} < 0$$

成立，则系统（4.1）是时滞独立渐进稳定的。

4.2.2 数值例子

例 4.1： 时滞系统(4.1)中：

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, D = D_1 = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.1 \end{bmatrix}, A_d = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.8 \\ -0.2 & -0.1 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.4 \end{bmatrix}^T, E_1 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.3 \end{bmatrix}^T$$

当 $d=0$ 时，用 MATLAB 可以算出，A 系统的特征值 $\lambda(A) = -2, -1 < 0$，故系统(4.1)是渐进稳定的。当存在时滞时，利用 LMI 工具箱，由结论 4.1 有 $\varepsilon_1 = 0.7325, \varepsilon_2 = 0.8297$，可行解

$$P = \begin{bmatrix} 0.3734 & 0.4033 \\ 0.4033 & 0.8426 \end{bmatrix}$$

结果表明系统(4.1)是渐进稳定的。求解 LMI 的 Matlab 程序与附录 B 中例（4.3）相类似。

4.2.3 参数不确定离散时滞系统

考虑下面参数确定的离散时滞系统

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= [\mathbf{A} + DF(k)E]\mathbf{x}(k) + [\mathbf{A}_d + D_1 F_1(k) E_1]\mathbf{x}(k-d) \\ &= \overline{A}x(k) + \overline{A}_d x(k-d), d > 0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

其中：$\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n$ 是系统的状态，$\mathbf{A},\mathbf{A}_d\in\mathbf{R}^{n\times n}$，其中 D,D_1,E,E_1，是适当维数的已知常数实矩阵，$F(k)\in R^{i\times j},F_1(k)\in R^{i_1\times j_1}$ 表示未知的实值时变矩阵，其元素勒贝格可测且有界，且

$$\|F(k)\|\le 1,\|F_1(k)\|\le 1,\forall k$$

$d>0$ 是系统时滞常数。

研究有确定参数的离散时滞系统（4.3），假设存在对称正定矩阵 P,Q，可定义如下 Lyapunov 函数：

$$V(x(k))=x^T(k)Px(k)+\sum_{\alpha=k-d}^{k-1}x^T(\alpha)Qx(\alpha)$$

则 $V(x(k))$ 是正定的，沿系统（4.3）的任意轨线，对 V 求前向差分:

$$\Delta V[x(k)]=V[x(k+1)]-V[x(k)]$$

$$=x^T(k+1)Px(k+1)+\sum_{\alpha=k+1-d}^{k}x^T(\alpha)Qx(\alpha)-x^T(k)Px(k)-\sum_{\alpha=k-d}^{k-1}x^T(\alpha)Qx(\alpha)$$

$$\because x(k+1)=\overline{A}x(k)+\overline{A}_dx(k-d)$$

$$\therefore x^T(k+1)=x^T(k)\overline{A}^T+x^T(k-d)\overline{A}_d^T$$

$$\Delta V[x(k)]=[x^T(k)\overline{A}^T+x^T(k-d)\overline{A}_d^T]P[\overline{A}x(k)+\overline{A}_dx(k-d)]+\sum_{\alpha=k+1-d}^{k-1}x^T(\alpha)Qx(\alpha)$$

$$+x^T(k)Qx(k)-\sum_{\alpha=k+1-d}^{k-1}x^T(\alpha)Qx(\alpha)-x^T(k-d)Qx(k-d)$$

$$=x^T(k)[\overline{A}^TP\overline{A}-P+Q]x(k)+x^T(k)\overline{A}^TP\overline{A}_dx(k-d)$$

$$+x^T(k-d)\overline{A}_d^TP\overline{A}x(k)-x^T(k-d)(Q-\overline{A}_d^TP\overline{A}_d)x(k-d)$$

$$=\begin{bmatrix}x(k)\\x(k-d)\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}\overline{A}^TP\overline{A}-P+Q & \overline{A}^TP\overline{A}_d\\ \overline{A}_d^TP\overline{A} & -(Q-\overline{A}_d^TP\overline{A}_d)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(k)\\x(k-d)\end{bmatrix}$$

若

$$\begin{bmatrix}\overline{A}^TP\overline{A}-P+Q & \overline{A}^TP\overline{A}_d\\ \overline{A}_d^TP\overline{A} & -(Q-\overline{A}_d^TP\overline{A}_d)\end{bmatrix}<0$$

成立，则由 Lyapunov 稳定性定理知系统(4.3)是渐近稳定的。

将上式用两次 Schur 补，得

$$\begin{bmatrix} \overline{A}^T P \overline{A} - P + Q & \overline{A}^T P \overline{A}_d \\ \overline{A}_d^T P \overline{A} & -Q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \overline{A}_d^T \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} 0 & \overline{A}_d \end{bmatrix} < 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc:c} \overline{A}^T P \overline{A} - P + Q & \overline{A}^T P \overline{A}_d & 0 \\ \overline{A}_d^T P \overline{A} & -Q & \overline{A}_d^T \\ \hdashline 0 & \overline{A}_d & -P^{-1} \end{array}\right] < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -P + Q & \overline{A}^T P \overline{A}_d & 0 \\ \overline{A}_d^T P \overline{A} & -Q & \overline{A}_d^T \\ 0 & \overline{A}_d & -P^{-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{A}^T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} \overline{A} & 0 & 0 \end{bmatrix} < 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} -P + Q & \overline{A}^T P \overline{A}_d & 0 & \overline{A}^T \\ \overline{A}_d^T P \overline{A} & -Q & \overline{A}_d^T & 0 \\ 0 & \overline{A}_d & -P^{-1} & 0 \\ \hdashline \overline{A} & 0 & 0 & -P^{-1} \end{array}\right] < 0$$

这不是一个标准的线性矩阵不等式，故作如下变换：上式左、右分别乘以$T = diag[I \quad I \quad P \quad P]$得：

$$\begin{bmatrix} -P + Q & \overline{A}^T P \overline{A}_d & 0 & \overline{A}^T P \\ \overline{A}_d^T P \overline{A} & -Q & \overline{A}_d^T P & 0 \\ 0 & P \overline{A}_d & -P & 0 \\ P \overline{A} & 0 & 0 & -P \end{bmatrix} < 0$$

左、右乘向量$[x_1^T \quad x_2^T \quad x_3^T \quad x_4^T],[x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4]^T$，

将$\overline{A}$换为$A + DFE$，$\overline{A}_d$换为$A_d + D_1F_1E_1$. 令

$$p = FEx_1, q = F_1E_1x_2,$$

$$\begin{aligned}
& x_1^T[-P+Q]x_1 + x_1^T \overline{A}^T P \overline{A}_d x_2 + x_1^T \overline{A}^T P x_4 + x_2^T \overline{A}_d^T P \overline{A} x_1 - x_2^T Q x_2 + x_2^T \overline{A}_d^T P x_3 \\
& + x_3^T P \overline{A}_d x_2 - x_3^T P x_3 + x_4^T P \overline{A} x_1 - x_4^T P x_4 \\
& = x_1^T[-P+Q]x_1 + x_1^T(A^T + E^T F^T D^T)P(A_d + D_1F_1E_1)x_2 + x_1^T(A^T + E^T F^T D^T)Px_4 \\
& + x_2^T(A_d + D_1F_1E_1)^T P(A + DFE)x_1 - x_2^T Q x_2 + x_2^T(A_d + D_1F_1E_1)^T P x_3 \\
& + x_3^T P(A_d + D_1F_1E_1)x_2 - x_3^T P x_3 + x_4^T P(A + DFE)x_1 - x_4^T P x_4
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= x_1^T[-P+Q]x_1 + x_1^T(A^TPA_d + A^TPD_1F_1E_1 + E^TF^TD^TPA_d + E^TF^TD^TPD_1F_1E_1)x_2 \\
&+ x_1^TA^TPx_4 + x_1^TE^TF^TD^TPx_4 + x_2^T(A_d^TPA + A_d^TPDFE + E_1^TF_1^TD_1^TPA \\
&+ E_1^TF_1^TD_1^TPDFE)x_1 - x_2^TQx_2 + x_2^TA_d^TPx_3 + x_2^TE_1^TF_1^TD_1^TPx_3 \\
&+ x_3^TPA_dx_2 + x_3^TPD_1F_1E_1x_2 - x_3^TPx_3 + x_4^TPAx_1 + x_4^TPDFEx_1 - x_4^TPx_4 \\
&= x_1^T[-P+Q]x_1 + x_1^TA^TPA_dx_2 + x_1^TA^TPD_1q + p^TD^TPA_dx_2 + p^TD^TPD_1q \\
&+ x_1^TA^TPx_4 + p^TD^TPx_4 + x_2^TA_d^TPAx_1 + x_2^TA_d^TPDp + q^TD_1^TPAx_1 + q^TD_1^TPDp - x_2^TQx_2 \\
&+ x_2^TA_d^TPx_3 + q^TD_1^TPx_3 + x_3^TPA_dx_2 + x_3^TPD_1q - x_3^TPx_3 + x_4^TPAx_1 + x_4^TPDp - x_4^TPx_4 \\
&< 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ p \\ q \end{bmatrix}^T
\begin{bmatrix}
-P+Q & A^TPA_d & 0 & A^TP & 0 & A^TPD_1 \\
A_d^TPA & -Q & A_d^TP & 0 & A_d^TPD & 0 \\
0 & PA_d & -P & 0 & 0 & PD_1 \\
PA & 0 & 0 & -P & PD & 0 \\
0 & D^TPA_d & 0 & DP^T & 0 & D^TPD_1 \\
D_1^TPA & 0 & D_1^TP & 0 & D_1^TPD & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ p \\ q \end{bmatrix} < 0 \qquad (4.4)
$$

由$\|F(t)\| \le 1, \|F_1(t)\| \le 1, \forall t \ge 0$得

$$
p^Tp \le x_1^TE^TEx_1, q^Tq \le x_2^TE_1^TE_1x_2, \qquad (4.5)
$$

应用两次引理 2.2（S-procedure），可以得出如下结论：

结论 4.2 ： 对系统（4.3），如果存在某个对称正定的矩阵$P, Q \in R^{n \times n}$，使得满足（4.5）的所有$x_1 \ne 0, x_2 \ne 0, p, q,$不等式（4.4）成立当且仅当存在标量$\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ge 0$和对称矩阵使得$P, Q,$使得

$$
\begin{bmatrix}
-P+Q+\varepsilon_1E^TE & A^TPA_d & 0 & A^TP & 0 & A^TPD_1 \\
A_d^TPA & -Q+\varepsilon_2E_1^TE_1 & A_d^TP & 0 & A_d^TPD & 0 \\
0 & PA_d & -P & 0 & 0 & PD_1 \\
PA & 0 & 0 & -P & PD & 0 \\
0 & D^TPA_d & 0 & DP^T & -\varepsilon_1I & D^TPD_1 \\
D_1^TPA & 0 & D_1^TP & 0 & D_1^TPD & -\varepsilon_2I
\end{bmatrix} < 0 \qquad (4.6)
$$

成立，则系统（4.3）是时滞独立渐进稳定的。

式（4.6）是一个关于矩阵 P,Q，标量 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 为变量的线性矩阵不等式，所以用（4.6）可以将判定系统稳定性的问题转化为一个求解线性矩阵不等式的可行解问题。

4.2.4 数值例子

例 4.2 ：离散时滞系统(4.3)中：

$$A=\begin{bmatrix}0.1 & 0 & -0.1\\ 0.05 & 0.3 & 0\\ 0 & 0.2 & 0.6\end{bmatrix}, D=D_1=\begin{bmatrix}0.1\\ 0\\ 0.2\end{bmatrix}, A_d=\begin{bmatrix}-0.2 & 0 & 0\\ 0 & -0.1 & 0.1\\ 0 & 0 & -0.2\end{bmatrix},$$

$$E=\begin{bmatrix}0.2 & 0 & 0.3\end{bmatrix}, E_1=\begin{bmatrix}0.4 & 0 & 0.1\end{bmatrix}$$

当 $d=0$ 时，用 MATLAB 可以算出，A 系统的特征值：$\lambda(A)=[0.0906,0.3163,0.5931]\in[0,1)$，故系统(4.3)是渐进稳定的。当存在时滞时，利用 LMI 工具箱，由结论（4.2）有 $\varepsilon_1=1.0414,\varepsilon_2=1.1317$，可行解

$$P=\begin{bmatrix}1.6966 & 0.0146 & 0.1064\\ 0.0146 & 1.6065 & 0.0552\\ 0.1064 & 0.0552 & 1.2738\end{bmatrix}>0, Q=\begin{bmatrix}0.9433 & -0.0072 & 0.0520\\ -0.0072 & 0.7066 & -0.0606\\ 0.0520 & -0.0606 & 0.4041\end{bmatrix}>0.$$

结果表明系统(4.3)是渐进稳定的。求解 LMI 的 Matlab 程序与附录 B 中例（4.3）相类似。

注：

1. 结论（4.1）的推导中用到结论（3.2），实质上是结论（3.2）的推广，虽然形式非常简单，并且非常适合于大时滞的情况，但对小时滞而言具有很大的保守性。

2. 结论(3.2)的推广具有普遍性，在第五章中将其推广到多时滞参数不确定时滞无关连续时滞系统。

3. 本节中推导中利用了 Schur 补引理、S-procedure、矩阵不等式的运算等数学技术，巧妙处理了不确定的参数，将非线性不等式转化为线性矩阵不等式（LMI）。

4.3 参数不确定时滞系统时滞依赖的稳定性

本节基于 Lyapunov 稳定性理论，采用线性矩阵不等式技术，给出了保守性较小的参数不确定离散时滞系统时滞依赖的稳定性的充分条件，以下结论以 LMI 组形式给出，便于利用 MATLAB 软件工具箱 LMI 求解。

4.3.1 参数不确定连续时滞系统时滞依赖的稳定性

考虑如下不确定时滞系统

$$\dot{x}(t)=[A+DF(t)E]x(t)+[A_d+D_1F_1(t)E_1]x(t-d) \tag{4.7}$$

其中 $x(t)\in R^n$ 表示状态向量，d 表示系统时滞，A,A_d 为适当维数的已知常数矩阵,其中 D,E,E_1 是适当维数的已知常数实矩阵，$F(t)\in R^{i\times j},F_1(t)\in R^{i_1\times j_1}$ 表示未知的实值时变矩阵，且

$$F_i(t)^TF_i(t)\le I,i=1,2,\forall t\ge 0$$

定理 4.3：对时滞系统(4.1)，如果存在对称正定矩阵 P,Q,X,Y,Z 和标量 $e_1\ge 0,e_2\ge 0$ 使得

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & -Y+PA_d & dA^TZ & PD & PD_1 \\ -Y^T+A_d^TP & -Q+e_2E_1^TE_1 & dA_d^TZ & 0 & 0 \\ dZA & dZA_d & -dZ & dZD & dZA_d \\ D^TP & 0 & dD^TZ & -e_1I & 0 \\ D_1^TP & 0 & dD_1^TZ & 0 & -e_2I \end{bmatrix}<0 \tag{4.8}$$

其中 $Y_{11}=\mathbf{A}^TP+PA+dX+Y+Y^T+Q+e_1E^TE$

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ Y^T & Z \end{bmatrix}\ge \mathbf{0} \tag{4.9}$$

成立，则系统（4.7）是时滞依赖渐近稳定的。

证明：参考文献[45]。

4.3.2 参数不确定离散时滞系统时滞依赖的稳定性

考虑如下不确定时滞系统

$$x(k+1)=[A+DF(t)E]x(k)+[A_d+D_1F_1(t)E_1]x(k-d) \tag{4.10}$$

其中 $x(t)\in R^n$ 表示状态向量，d 表示系统时滞，A,A_d 为适当维数的已知常数矩阵，其中 D,E,E_1 是适当维数的已知常数实矩阵，$F(k)\in R^{i\times j},F_1(k)\in R^{i_1\times j_1}$ 表示未知的实值时变矩阵，且

$$F_i(k)^T F_i(k)\le I,i=1,2,\forall k$$

研究参数不确定离散时滞系统(4.10)，如果分别用 $A+DF(t)E,A_d+D_1F_1(t)E_1$ 代换(3.10)中 A,A_d，为区别起见，下面用 $\overline{A},\overline{A}_d$，来表示。然后分别用向量 $x_i,i=1,2.$ 左乘、右乘得：

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Pi & -Y+\overline{\mathbf{A}}^T P\overline{A}_d+d\overline{A}^T Z\overline{A}_d-dZ\overline{A}_d \\ -Y^T+\overline{A}_d^T P\overline{A}+d\overline{A}_d^T Z\overline{A}-d\overline{A}_d^T Z & \overline{A}_d^T P\overline{A}_d+\overline{A}_d^T Z\overline{A}_d-Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}<0$$

（式中 $\Pi=dX+Y^T+Y+\overline{\mathbf{A}}^T P\overline{A}+d\overline{A}^T Z\overline{A}-d\overline{A}^T Z-dZ\overline{A}+dZ+Q-P$）

$$
\begin{aligned}
&x_1^T[dX+Y^T+Y+(A+DFE)^T P(A+DFE)+d(A+DFE)^T Z(A+DFE)\\
&-d(A+DFE)^T Z-dZ(A+DFE)+dZ+Q-P]x_1\\
&+x_1^T[-Y+(A+DFE)^T P(A_d+D_1F_1E_1)+d(A+DFE)^T Z(A_d+D_1F_1E_1)\\
&-dZ(A_d+D_1F_1E_1)]x_2\\
&+x_2^T[-Y^T+(A^T+E^TF^TD^T)P(A+DFE)+d(A^T+E^TF^TD^T)Z(A+DFE)\\
&-d(A^T+E^TF^TD^T)Z]x_1+x_2^T[(A_d^T+E_1^TF_1^TD_1^T)P(A_d+D_1F_1E_1)\\
&+(A_d^T+E_1^TF_1^TD_1^T)Z(A_d+D_1F_1E_1)-Q]x_2\\
&<0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&x_1^T[dX+Y^T+Y+dZ+Q]x_1+x_1^T[A^TPA+A^TPDFE+E^TF^TD^TPA\\
&+E^TF^TD^TPDFE+dA^TZA+dA^TZDFE+dE^TF^TD^TZA+dE^TF^TD^TZDFE_1\\
&-dA^TZ-dE^TF^TD^TZ-dZA-dZDFE]x_1+x_1^TYx_2+x_1^T[A^TPA_d+A^TPD_1F_1E_1\\
&+E^TF^TD^TPA_d+E^TF^TD^TPD_1F_1E_1]x_2+x_2^TY^Tx_1+x_2^T[A_d^TPA+A_d^TPDFE\\
&+E_1^TF_1^TD_1^TPA+E_1^TF_1^TD_1^TPDFE]x_1-x_2^TQx_2+x_2^T[A_d^TPA_d+A_d^TPD_1F_1E_1\\
&+E_1^TF_1^TD_1^TPA_d+E_1^TF_1^TD_1^TPD_1F_1E_1+A_d^TZA_d+A_d^TZD_1F_1E_1+E_1^TF_1^TD_1^TZA_d\\
&+E_1^TF_1^TD_1^TZD_1F_1E_1]x_2<0
\end{aligned}
$$

令式中 $p=FEx_1, q=F_1E_1x_2$ 则上式为：

$$
\begin{aligned}
&x_1^T[dX+Y^T+Y+dZ+Q]x_1+x_1^T[A^TPA+A^TPDFE+E^TF^TD^TPA\\
&+E^TF^TD^TPDFE+dA^TZA+dA^TZDFE+dE^TF^TD^TZA+dE^TF^TD^TZDFE_1\\
&-dA^TZ-dE^TF^TD^TZ-dZA-dZDFE]x_1+x_1^TYx_2+x_1^T[A^TPA_d+A^TPD_1F_1E_1\\
&+E^TF^TD^TPA_d+E^TF^TD^TPD_1F_1E_1]x_2+x_2^TY^Tx_1+x_2^T[A_d^TPA+A_d^TPDFE\\
&+E_1^TF_1^TD_1^TPA+E_1^TF_1^TD_1^TPDFE]x_1-x_2^TQx_2+x_2^T[A_d^TPA_d+A_d^TPD_1F_1E_1\\
&+E_1^TF_1^TD_1^TPA_d+E_1^TF_1^TD_1^TPD_1F_1E_1+A_d^TZA_d+A_d^TZD_1F_1E_1+E_1^TF_1^TD_1^TZA_d\\
&+E_1^TF_1^TD_1^TZD_1F_1E_1]x_2<0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& x_1^T[dX+Y^T+Y+dZ+Q+A^TPA+dA^TZA-dA^TZ-dZA]x_1+x_1^TA^TPDp \\
& +p^TD^TPAx_1+p^TD^TPdp+x_1^TdA^TZDp+p^TdD^TZAx_1+p^TdD^TZDP-p^TdD^TZx_1 \\
& -x_1^TdZDp++x_1^T[Y+A^TPA_d]x_2+x_1^TA^TPD_1q+p^TD^TPA_dx_2+p^TD^TPD_1q \\
& +x_2^T[Y^T+A_d^TPA]x_1+x_2^TA_d^TPDp+q^TD_1^TPAx_1+q^TD_1^TPDp \\
& +x_2^T[A_d^TPA_d+A_d^TZA_d-Q]x_2+x_2^TA_d^TPD_1q+q^TD_1^TPA_dx_2+q^TD_1^TPD_1q \\
& +x_2^TA_d^TZD_1q+q^TD_1^TZA_dx_2+q^TD_1^TZD_{11}q \\
& <0
\end{aligned}
$$

即：

$$
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ p \\ q \end{bmatrix}^T \times
\begin{bmatrix}
X_{11} & -Y+A^TPA_d+dA^TZA_d-dZA_d & A^TPD+dA^TZD-\bar{d}ZD & A^TPD_1+dA^TZD_1-dZD_1 \\
-Y^T+A_d^TPA+dA_d^TZA-dA_d^TZ_1 & A_d^TPA_d+dA_d^TZA_d-Q & A_d^TPD+dA_d^TZD & A_d^TPD_1+dA_d^TZD_1 \\
D^TPA+dD^TZA-dD^TZ & D^TPA_d+dD^TZA_d & D^TPD+dD^TZD & D^TPD_1+dD^TZD_1 \\
D_1^TPA+dD_1^TZA-dD_1^TZ & D_1^TPA_d+dD_1^TZA_d & D_1^TPD+dD_1^TZD & dD_1^TZD_1
\end{bmatrix}
\times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ p \\ q \end{bmatrix} < 0
$$

其中

$$
X_{11}=dX+Y+Y^T+\mathbf{A}^TPA+dA^TZA-dA^TZ-dZA+dZ+Q-P
$$

$$
\begin{aligned}
& \because p=FEx_1 \\
& \therefore p^Tp=x_1^TE^TF^TFEx_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \because \|F\|\le 1 \\
& \therefore p^Tp\le x_1^TE^TEx_1
\end{aligned}
$$

$$
\text{同理}\; q^Tq\le x_2^TE_1^TE_1x_2
$$

应用 S-procedure,可得如下结论：

结论 4.4：对离散时滞系统(4.7)，如果存在对称正定矩阵 P,Q,X,Z，对称矩阵 Y 和标量 $\tau_1\ge 0,\tau_2\ge 0$ 使得

$$\begin{bmatrix} X_{11} & -Y+A^TPA_d+dA^iZA_d-dZA_d \\ -Y^T+A_d^TPA+dA_d^TZA-dA_d^TZ & A_d^TPA_d+dA_d^TZA_d-Q+\tau_2E_1^TE_1 \\ D^TPA+dD^TZA-dD^TZ & D^TPA_d+dD^TZA_d \\ D_1^TPA+dD_1^TZA-dD_1^TZ & D_1^TPA_d+dD_1^TZA_d \end{bmatrix.$$

$$\left.\begin{matrix} A^TPD+dA^TZD-dZD & A^TPD_1+dA^TZD_1-dZD_1 \\ A_d^TPD+dA_d^TZD & A_d^TPD_1+dA_d^TZD_1 \\ D^TPD+dD^TZD-\tau_1I & D^TPD_1+dD^TZD_1 \\ D_1^TPD+dD_1^TZD & dD_1^TZD_1-\tau_2I \end{matrix}\right] \tag{4.11}$$

其中

$$X_{11}=dX+Y+Y^T+\mathbf{A}^TPA+dA^TZA-dA^TZ-dZA+dZ+Q-P+\tau_1E^TE$$

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ Y^T & Z \end{bmatrix}\geq 0 \tag{4.12}$$

成立，则系统（4.7）是时滞依赖渐近稳定的。

式（4.11）是关于矩阵P,Q,X,Z,Y和标量τ_1,τ_2为变量的线性矩阵不等式，由结论（4.4）看出，可以通过求解线性矩阵不等式（4.11）、（4.12）的可行解来判定系统（4.7）是否时滞依赖渐近稳定的。这用 MATLAB 中 LMI 工具箱是很容易做到的。

4.3.3 数值例子

例 4.3： 离散时滞系统(4.7)中： A,D,D_1,A_d,E,E_1同例 4.2。

当$d=0$时，用 MATLAB 可以算出，$\lambda(A+Ad)=-0.1074,0.1393,0.4680$，故系统(4.7)是渐进稳定的。当存在时滞$d=9$时，利用 LMI 工具箱，由结论（4.4）有$\tau_1=1.4352,\tau_2=1.2195$，可行解：

$$P=\begin{bmatrix}10.0664 & 0.2349 & -0.0563\\ 0.2349 & 12.9792 & 1.4159\\ -0.0563 & 1.4159 & 3.7409\end{bmatrix}>0, Q=\begin{bmatrix}1.6542 & 0.0346 & 0.0549\\ 0.0346 & 0.9654 & -0.0732\\ 0.0549 & -0.0732 & 0.9712\end{bmatrix}>0,$$

$$X=\begin{bmatrix}0.5721 & -0.0101 & -0.0166\\ -0.0101 & 0.7838 & 0.0539\\ -0.0166 & 0.0539 & 0.0323\end{bmatrix}>0, \quad Y=\begin{bmatrix}0.0497 & -0.0112 & 0.0008\\ -0.0112 & -0.0120 & -0.0264\\ 0.0008 & -0.0264 & -0.0766\end{bmatrix},$$

$$Z=\begin{bmatrix}0.3002 & 0.0248 & -0.0799\\ 0.0248 & 0.7147 & 0.2236\\ -0.0799 & 0.2236 & 0.3811\end{bmatrix}>0.$$

结果表明系统(4.7)是时滞依赖鲁棒渐近稳定的。例(4.3)求解LMI的Matlab程序见附录。

4.4 小结

本章考虑了参数不确定时滞系统稳定性问题，基于Lyapunov函数方法，就参数不确定连续时滞系统和参数不确定离散时滞系统，分别从时滞独立和时滞依赖两个方面进行了讨论。

首先利用范数有界不确定模型引入参数，导出了参数不确定连续时滞系统时滞独立稳定性的一个矩阵不等式条件，然后运用矩阵、向量运算，消去表示不确定因素的参数，利用有界范数进行放缩，再应用 S-procedure, 将一个不是凸约束的问题转化成线性矩阵不等式约束；同时基于 Lyapunov 函数方法，利用范数有界不确定模型，导出了参数不确定离散时滞系统时滞独立的稳定性充分条件矩阵，利用 Schur 补引理进行化简，运用矩阵、向量运算，消去表示不确定因素的参数，利用有界范数进行放缩，再应用 S-procedure 将其转化为一个标准的线性矩阵不等式。本章采用线性矩阵不等式技术，将判定参数不确定离散时滞系统时滞依赖的稳定性问题的转化为判断一个线性矩阵不等式的可行解问题，处理思路与以上相似。本章结论（4.4）中的时滞 d 可以根据设计要求来选择，进而用 LMI 工具箱求出最优可行解。

本章基本思路是采用线性矩阵不等式技术，将判定不确定时滞系统时滞依赖的稳定性问题的转化为判断一个线性矩阵不等式的可行解问题，从而可以方便的运用 MATLAB 软件中 LMI 工具箱进行求解。本章所给出的结论都应用数值例子进行了仿真，结果表明了结论正确性。本章给出的结果减小了不确定时滞系统时滞独立稳定性充分条件的保守性，在国内外文献中还未见到。

第 5 章 多时滞系统的稳定性

5.1 引言

多年来，研究不确定时滞系统的都采用 Riccati 方程方法，该方法便于理论推导，但在实际工程应用中求解最后结果时，要对一些参数进行整定，而参数的选择带有主观性，所以所得结果具有很大的保守性。

本章在第三章、第四章的基础上，基于 Lyapunov 稳定性理论，得到一个线性矩阵不等式形式表示的连续和离散多时滞系统时滞独立和时滞依赖的稳定性充分条件，从而形成了一整套自成体系的时滞系统的稳定性判定条件。

5.2 多时滞连续系统

考虑以下多时滞连续系统

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)&=[A+\Delta A(t)]x(t)+[A_{d1}+\Delta A_{d1}(t)]x(t-d_1)+\cdots+[A_{dr}+\Delta A_{dr}(t)]x(t-d_r)\\&=[A+\Delta A(t)]x(t)+\sum_{j=1}^{r}[A_{dj}+\Delta A_{dj}(t)]x(t-d_j)\end{aligned}\tag{5.1}$$

其中 $x(t)\in R^n$ 表示状态向量， $A\in R^{n\times n},A_{dj}\in R^{n\times n},j=1,2,\cdots,r$ 为实常数矩阵，

$d_j,j=1,2\cdots,r$ 表示系统时滞，不确定矩阵

$$\Delta A(t)\in R^{n\times n},\Delta A_{dj}(t)\in R^{n\times n},j=1,2,\cdots,r$$

表示为

$$\Delta A(t)=DF(t)E,\Delta A_{dj}(t)=D_jF_j(t)E_{dj},\forall j\in[1,r]$$

D,E,D_jE_{dj}，是适当维已知常数矩阵，未知不确定参数矩阵 $F(t)$ 满足

$$F^T(t)F(t) \le I, F_j^T(t)F_j(t) \le I, \forall j \in [1,r], \forall t.$$

5.2.1 时滞独立连续时间系统的稳定性

（1）结论(3.2)可以推广到多时滞有确定参数时滞独立的连续时滞系统。

若在系统(5.1)中令 $D = E = D_j = E_{dj} = 0$, 则系统为多时滞参数确定时滞系统

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \sum_{j=1}^{r} \mathbf{A}_{d_j}\mathbf{x}(t-d_j), d_j > 0 \tag{5.2}$$

研究系统(5.2)：令 Lyapunov 函数

$$V(x(t)) = x^T(t)Px(t) + \sum_{j=1}^{r} \int_{-d_j} x^T(s)A_{d_j}{}^T PA_{d_j}x(s)ds$$

按照结论(3.2)的推导方法，容易得到如下结论：

结论 5.1：对系统(5.2)，若存在对称正定矩阵 $P \in \mathbf{R}^{n\times n}$，使得

$$\begin{bmatrix} P\mathbf{A} + \mathbf{A}^T P + P & P\sum_{j=1}^{r}\mathbf{A}_{dj} \\ \sum_{j=1}^{r}\mathbf{A}_{dj}^T P & -P \end{bmatrix} < \mathbf{0}$$

成立，则系统(5.2)是时滞独立渐进稳定的。

（2）结论(4.1)可以推广到多时滞参数不确定时滞无关连续时滞系统。

选择 Lyapunov 函数

$$V(x(t)) = x^T(t)Px(t) + \sum_{j=1}^{r} \int_{-d_j} x^T(s)(A_{d_j} + D_jF_jE_j)^T P(A_{d_j} + D_jF_jE_j)x(s)ds$$

与结论(4.1)的推导方法相似，可以很容易得到结果。

5.2.2 时滞依赖连续时滞系统的稳定性

（1） 结论(3.4)可以推广到多时滞系统，令 Lyapunov 函数为

$$V(x(t)) = x^T(t)Px(t) + \sum_{j=1}^{r} \int_{-d_j}^{0} \int_{+\beta} \dot{x}^T(\alpha)Z\dot{x}(\alpha)d\alpha d\beta + \sum_{j=1}^{r} \int_{-d_j} x^T(\alpha)Q_jx(\alpha)d\alpha$$

可以得到结论。

（2） 结论(4.3)可以推广到多时滞参数不确定时滞依赖连续时滞系统。推导思路与结论(4.3)的推导相似。

5.3 多时滞离散系统

考虑如下不确定时滞系统

$$\begin{aligned} x(k+1) &= [A+DF(t)E]x(k)+[A_{d_1}+D_1F_1(t)E_1]x(k-d_1)+ \\ &\quad \cdots+[A_{d_j}+D_jF_j(t)E_j]x(k-d_j) \\ &= [A+DF(t)E]x(k)+\sum_{j=1}^{r}[A_{d_j}+D_jF_j(t)E_j]x(k-d_j) \end{aligned} \tag{5.3}$$

其中 $x(k)\in R^n$ 表示状态向量，$d_j, j=1,2,\cdots,r$ 表示系统时滞, $A,D,E,$

$A_{d_j},D_j,E_j j=1,2,\cdots,r$ 是适当维数的已知常数实矩阵，

$F(k)\in R^{n\times m}$，$F_j(k)\in R^{n_j\times m_j}, j=1,2,\cdots,r$ 表示未知的实值时变矩阵，且

$F_j(k)^T F_j(k)\le I, j=1,2,\forall k$

5.3.1 时滞独立离散时滞系统的稳定性

（1）结论(3.3)可以推广到多时滞参数确定时滞无关离散时滞系统。若在系

统(5.3)中令 $D=E=D_j=E_{dj}=0$,则系统为多时滞参数确定离散时滞系统。

$$x(k+1)=Ax(k)+\sum_{j=1}^{r}A_{d_j}x(k-d_j) \tag{5.4}$$

由于系统(5.4)的形式与系统(3.4)的形式相似，故根据(3.2)的推导方法可选择如下 Laypunov 函数：

$$V(x(k))=x^T(k)Px(k)+\sum_{\alpha=k-d}^{k-1}x^T(\alpha)(\sum_{j=1}^{r}A_{d_j}^TPA_{d_j})x(\alpha)$$

容易得出结论：

结论 5.2：对系统(5.4)，如果存在某个对称正定的矩阵 $P\in R^{n\times n}$，使得

$$\begin{bmatrix} A^TPA+\sum_{j=1}^{r}A_{d_j}^TPA_{d_j}-P & A^TP\sum_{j=1}^{r}A_{d_j} \\ \sum_{j=1}^{r}A_{d_j}^TPA & 0 \end{bmatrix}<0 \tag{5.5}$$

成立，则系统(5.4)是时滞独立渐进稳定的。

（2）结论(4.2)可以推广到多时滞参数不确定时滞无关离散时滞系统稳定性

的判定。推广结论表达式与时滞的数目有关，这里不便写出，依照结论(4.2)推导方法可以得出结论。

5.3.2 时滞依赖离散时间系统的稳定性

（1）结论(3.5)可以推广到多时滞系统，现直接给出如下结论：

结论 5.3：离散时滞系统(5.4), 如果存在标量 $\bar{d}_j>0$, 矩阵

$P>0,Q_j>0,P=P^T,Q_j=Q_j^T,X=X^T,Z=Z^T,j=1,2,\cdots,r$，使得

$$\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{r}(Q_j+\bar{d}_jX+Y^T+Y+\mathbf{A}^TPA-\bar{d}_jA^TZA-\bar{d}_jA^TZ-\bar{d}_jZA+-\bar{d}_jZ) & Y+\sum_{j=1}^{r}(\mathbf{A}^TPA_{d_j}+\bar{d}_jA^TZA_{d_j}^T-\bar{d}_jZA_{d_j}^T) \\ Y^T+\sum_{j=1}^{r}(A_{d_j}^TPA+\bar{d}_jA_{d_j}ZA-\bar{d}_jA_{d_j}Z) & \sum_{j=1}^{r}(A_{d_j}^TPA_{d_j}+A_{d_j}^TZA_{d_j}-Q_j) \end{bmatrix}<0 \tag{3.7}$$

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ Y^T & Z \end{bmatrix} \geq 0 \tag{3.8}$$

则对任意时滞$\bar{d}_j > 0$,离散系统（5.4）是时滞依赖渐近稳定的。推导过程与结论(3.5)的推导一致，详细过程略。

（2）结论(4.4)可以推广到多时滞系统时滞依赖稳定性的判定。推广结论表达式与时滞的数目有关，这里不便写出，依照结论(4.4)推导方法可以得出结论。

5.4 小结

不管对连续系统还是离散系统，对时滞依赖稳定性条件的研究一直是一个难点。本章是在第三、四章的基础上对时滞系统稳定性加以讨论。

首先给出多时滞有确定参数时滞独立的连续时滞系统的稳定性条件，从推导过程可以看出结论(3.2)是结论（5.1）的特例。同理，将结论(3.4)、结论(4.1)、结论(4.3)也推广到多时滞系统，它们的推导与单时滞相类似。其次将单时滞离散系统的稳定性条件推广到多时滞系统。在第三、四章给的结论是多时滞的特例。

研究时滞系统稳定性条件时，可以从时滞独立和时滞依赖着手。时滞独立的稳定性条件适合于大时滞系统，对小时滞而言，就具有很大的保守性；而本论文时滞依赖的稳定性条件的时滞因子可以根据设计要求的选择而进行优化，大大减少了保守性。

第 6 章　应用

6.1 引言

采用线性矩阵不等式（LMI）技术，基于李亚普诺夫时滞系统的稳定性理论，主要用于时滞系统的稳定性的理论研究和时滞系统的控制器设计。下面是对飞机纵向运动系统的稳定性分析和其控制器设计的例子。

6.2 模型的建立[62]

飞机运动系统是一个复杂的包含时滞的非线性系统，但作了工程容许的假设之后可作线性化近似。现在一般地，将洗流时差（下洗时延）引起的附加纵向力矩近似为迎角导数$\dot{\alpha}$的函数，而实际上这项附加力矩应是$\alpha(t)-\alpha(t-d)$的函数，d 是下洗时延，而

$$\dot{\alpha} \approx \frac{\alpha(t)-\alpha(t-d)}{d}$$

下洗时延 d 的大小主要取决于飞机的机长和当时的飞行速度。当机身较长，速度较慢时，近似误差较大，不作近似飞机运动系统也是时滞系统；当大仰角飞行时，飞机运动状态也是时滞系统。下面给出受大气紊流干扰下的含有时滞的飞机纵向运动系统的数学模型：

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t-d) + Bu(t) + B_1 w(t) \tag{6.1}$$

其中$x=[v_0 \quad \alpha \quad \theta \quad \omega_z]^T$为飞行状态变量，而$v_0$为空气流速，$\alpha$为气流仰角，$\theta$俯仰角，$\omega_z$为仰角速度；$u=[\delta_p \quad \delta_e]$为控制变量，而$\delta_p$为油门开度，$\delta_e$为升降舵偏角；$w$为外部干扰，$d \ge 0$为时滞；$A, A_d, B, B_1$均为适当维数的常数矩阵，各元素由具体飞机的气动导数决定。

设在大气紊流干扰下，国产某型飞机纵向运动系统模型中常数矩阵分

别为：

$$A=\begin{bmatrix}-0.08 & -0.03 & -0.157 & 0\\ -0.73 & -0.377 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -8.65 & 0 & -0.5\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1.54 & -0.02\\ -0.1 & -0.056\\ 0 & 0\\ 0 & -6.5\end{bmatrix}$$

$$A_d=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, B_1=\begin{bmatrix}1.0000 & 0.1000 & 0.1000 & 3.0000\\ 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

6.3 无扰动的时滞独立鲁棒镇定

若不考虑大气紊流干扰，对上述对象设计无记忆状态反馈控制器：

$$u(t)=Kx(t)$$

将其带入（6.1）得

$$\dot{x}(t)=(A+BK)x(t)+A_d x(t-d)+B_1 w(t)$$

由结论（3.1）得如果存在某个对称正定的矩阵 $P\in\mathbf{R}^{n\times n}$，使得

$$\begin{bmatrix}A^TP+PA+A_d^TPA_d & PA_d\\ A_d^TP & -A_d^TPA_d\end{bmatrix}<0$$

成立，则系统（3. 1）是时滞独立渐进稳定的。

将上式中 A 换为 $A+BK$ 得：

$$\begin{bmatrix}P(A+BK)+(A+BK)^TP+A_d^TPA_d & P\mathbf{A}_d\\ \mathbf{A}_d^TP & -A_d^TPA_d\end{bmatrix}<\mathbf{0}$$

令 $PBK=W$ 则

$$\begin{bmatrix}P\mathbf{A}+W+W^T+\mathbf{A}^TP+\mathbf{A}_d^TP\mathbf{A}_d & P\mathbf{A}_d\\ \mathbf{A}_d^TP & -\mathbf{A}_d^TP\mathbf{A}_d\end{bmatrix}<\mathbf{0} \qquad (6.2)$$

是系统（6.1）渐近稳定的充分条件。

将上面数值带入（6.2），用 MATLAB 中工具箱 LMI 求得其可行解：

$$P = 1.0\times 10^{8}\times\begin{bmatrix} 0.1784 & 0.2481 & 0.2984 & -0.2301 \\ 0.2481 & 3.0885 & -0.0117 & 0.2934 \\ 0.2984 & -0.0117 & -0.0170 & -0.1164 \\ -0.2301 & 0.2934 & -0.1164 & 0.3864 \end{bmatrix}$$

$$W = 1.0\times 10^{8}\times\begin{bmatrix} -2.2623 & 0.0656 & 0.0198 & -0.1827 \\ 0.0656 & -0.5661 & -0.4338 & 0.1420 \\ 0.0198 & -0.4338 & -2.4462 & -0.0339 \\ -0.1827 & 0.1420 & -0.0339 & -2.0012 \end{bmatrix}$$

$$\because W = PBK$$

故可得反馈矩阵

$$K = \begin{bmatrix} -0.5521 & -1.3699 & -4.1382 & 0.8290 \\ -0.1604 & 0.1998 & 0.4098 & 0.2368 \end{bmatrix}$$

6.4 H_∞鲁棒控制器[12]

考虑时滞系统

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + A_d x(t-d) + Bu(t) + B_1 w(t) \\ z(t) &= Cx(t) + B_2 u(t) + Dw(t) \end{aligned} \tag{6.3}$$

其中 $x(t)\in R^n$ 是状态向量，$w(t)\in R^q$ 是有限能量的外部扰动，$z(t)\in R^p$ 是被控输出，A, A_d, B, B_1, C, D 是已知的实数矩阵，d 是时滞常数。

定义 6.1：对给定正常数 γ，若系统（6.3）具有

（1）系统渐近稳定；

（2）从外部扰动 w 到被控制输出 $z(t)$ 的传递矩阵 $G_{wz}(s)$ 的 H_∞ 范数不超过给

定的常数γ，即在零初始条件$x(t)=0$下，$\|z\|_2 \le \gamma^2\|w\|_2, \forall w \in L_2[0,\infty)$,则称系统（6.3）具有$H_\infty$性能$\gamma$。

对系统（6.3），设存在对称正定矩阵**P**，定义如下 Lyapunov 函数：

$$V(x(t)) = x^T(t)Px(t) + \int_{-d} x^T(s)A_d^T PA_d x(s)ds$$

沿系统（6.3）的任意轨线，对V关于时间求导数，则有：

$$\dot{V}(x(t)) = \dot{x}^T(t)Px(t) + x^T(t)P\dot{x}(t) + x^T(t)A_d^T PA_d x(t) - x^T(t-d)A_d^T PA_d x(t-d)$$

$$= \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-d) \\ w(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T P + PA + A_d^T PA_d & PA_d & PB_1 \\ A_d^T P & -A_d^T PA_d & 0 \\ B_1^T P & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-d) \\ w(t) \end{bmatrix}$$

由结论（3.1）知：

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + A_d^T PA_d & PA_d \\ A_d^T P & -A_d^T PA_d \end{bmatrix} < 0$$

即$\dot{V}(x(t)) < 0$

故系统（6.3）渐近稳定。

假设存在$\gamma > 0$,使得$\|z\|_2 \le \gamma^2\|w\|_2$,即$\gamma^{-1}z^T z - \gamma w^T w < 0$，与$\dot{V}(x(t)) < 0$相加得：

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \\ x(t-d) \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} A^T P + PA + A_d^T PA_d & PB_1 & PA_d \\ B_1^T P & 0 & 0 \\ A_d^T P & 0 & -A_d^T PA_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma^{-1}C^T C & \gamma^{-1}C^T D & 0 \\ \gamma^{-1}D^T C & \gamma^{-1}D^T D - \gamma I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \\ x(t-d) \end{bmatrix} < 0$$

$$\left[\begin{array}{c:cc} A^TP+PA+A_d^TPA_d & PB_1 & PA_d \\ B_1^TP & -\gamma I & 0 \\ \hdashline A_d^TP & 0 & -A_d^TPA_d \end{array}\right]+\left[\begin{array}{cc:c} \gamma^{-1}C^TC & \gamma^{-1}C^TD & 0 \\ \gamma^{-1}D^TC & \gamma^{-1}D^TD & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 \end{array}\right]<0$$

用 Schur 补引理得：

$$\begin{bmatrix} A^TP+PA+A_d^TPA_d & PB_1 & PA_d & C^T \\ B_1^TP & -\gamma I & 0 & D^T \\ A_d^TP & 0 & -A_d^TPA_d & 0 \\ C & D & 0 & -\gamma I \end{bmatrix}<0 \qquad (6.4)$$

这就是要寻找的系统（6.3）具有 H_∞ 性能 γ 的条件。

对系统（6.3）设计无记忆状态反馈控制律

$$u(t)=Kx(t)$$

将其带入系统（6.3）得：

$$\begin{aligned} \dot{x}(t)&=(A+BK)x(t)+A_dx(t-d)+B_1w(t) \\ z(t)&=(C+B_2K)x(t)+Dw(t) \end{aligned}$$

将（6.4）式中 A 换为 $A+BK$，C 换为 $C+B_2K$ 得状态反馈 H_∞ 控制律的充分条件：

$$\begin{bmatrix} (A+BK)^TP+P(A+BK)+A_d^TPA_d & PB_1 & PA_d & (C+B_2K)^T \\ B_1^TP & -\gamma I & 0 & D^T \\ A_d^TP & 0 & -A_d^TPA_d & 0 \\ C+B_2K & D & 0 & -\gamma I \end{bmatrix}<0$$

两边同乘以 $\begin{bmatrix} P^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$ 得：

$$\begin{bmatrix} P^{-1}(A+BK)^T+(A+BK)P^{-1}+P^{-1}A_d^TPA_dP^{-1} & B_1 & A_d & P^{-1}(C+B_2K)^T \\ B_1^T & -\gamma I & 0 & D^T \\ A_d^T & 0 & -P^{-1}A_d^TPA_dP^{-1} & 0 \\ (C+B_2K)P^{-1} & D & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} (AX+BY)^T+(AX+BY)+Z & B_1 & A_d & (CX+B_2Y)^T \\ B_1^T & -\gamma I & 0 & D^T \\ A_d^T & 0 & -Z & 0 \\ CX+B_2Y & D & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \tag{6.5}$$

其中 $X=P^{-1}, Y=KP^{-1}, Z=P^{-1}A_d^TPA_dP^{-1}$.

式（6.5）即为状态反馈 H_∞ 控制律的充分条件。

故 $K=YX^{-1}$。

矩阵 A,B,A_d,B_1 数值同上，

$$C=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_2=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1.0000 & 0 \\ 0 & 1.0000 \\ 0 & 0.5000 \end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

将上面数值带入（6.5），用 MATLAB 中工具箱 LMI 求得其可行解：

$$\mu = 89.7703$$

$$X = 1.0\times10^3 \begin{bmatrix} 0.1885 & 0.0065 & -0.1552 & 0.1094 \\ 0.0065 & 0.0083 & 0.0102 & -0.0177 \\ -0.1552 & 0.0102 & 1.2077 & -0.0889 \\ 0.1094 & -0.0177 & -0.0889 & 0.0881 \end{bmatrix}$$

$$Y=\begin{bmatrix}-61.6017 & 15.8934 & 44.3344 & -37.2208\\ -23.6579 & -6.4837 & 6.3795 & 29.6732\end{bmatrix}$$

$$Z=\begin{bmatrix}85.3076 & 0.4891 & -0.0000 & 4.5591\\ 0.4891 & 26.7514 & 0.9598 & 1.7883\\ -0.0000 & 0.9598 & 88.8607 & -1.2351\\ 4.5591 & 1.7883 & -1.2351 & 84.0344\end{bmatrix}$$

故可得反馈矩阵

$$K=YX^{-1}=\begin{bmatrix}0.5602 & -1.5548 & 0.0180 & -1.4112\\ 0.4860 & -2.9814 & 0.0318 & -0.8323\end{bmatrix}$$

6.5 小结

第三、四、五章中得到的结论，主要用于时滞系统的稳定性的判定和时滞系统的控制器设计。本章以国产某型飞机纵向运动系统为例，从稳定性条件出发，设计出了不考虑大气紊流干扰情况下，飞机纵向运动系统无记忆状态反馈控制器；也设计出了干扰情况下，飞机纵向运动系统无记忆状态反馈控制器。并用数值进行了仿真。从以上设计过程可以看出稳定性条件的重要性。

结论和展望

1 结论

本论文在深入研究大量文献的基础上，基于李亚普诺夫稳定性理论及时滞系统控制理论，采用线性矩阵不等式（LMI）技术，对时滞系统的稳定性进行了较为系统的研究，分别对连续时滞系统、离散时滞系统稳定性进行了深入的研究，获得了一系列很有意义的结论，可以作为一整套时滞系统稳定性的判定定理。主要创新点包括：

（1）推导出时滞独立时滞系统稳定性条件

本文是基于李亚普诺夫方法，分别导出了 LMI 形式的判定连续时滞系统时滞独立和离散时滞系统时滞独立的稳定性的充分条件,将判定时滞系统时滞独立的稳定性的转化为判断一个线性矩阵不等式的可行解问题。采用 LMI 技术对所给的结论给予证明，文中考虑即考虑到用矩阵不等式放缩所带来的保守性，也兼顾到形式的简单化，用 MATLAB 对数值例子仿真的结果说明了该方法的有效性。所得结论在第三章，3.2 节中给出。

（2）推出时滞依赖时滞系统稳定性充分条件

本文得出了 LMI 形式的判定离散时滞系统时滞依赖的稳定性的充分条件。本文是基于李亚普诺夫方法，采用 LMI 技术对所给的结论给予推导。获得的离散时滞系统时滞依赖的稳定性条件，在推导过程中，只对式中的一项进行了不等式放缩，这大大的减小该结论的保守性，在国内外文献中还未见到。利用 MATLAB 软件的 LMI 工具箱很容易对所给的 LMI 条件进行数值求解，仿真例子说明了该方法的有效性。所得结论在第三章，3.3 节中给出。

（3）获得参数不确定时滞系统时滞独立的稳定性条件

本文分别给出了 LMI 形式的判定参数不确定的连续时滞系统时滞独立和参数不确定离散时滞系统时滞独立的稳定性的充分条件。本文是基于李亚普诺夫方法，采用 LMI 技术对所给的结论给予证明，对不确定因素进行了恰当的处理，也利用矩阵不等式技术等技术，得到形式的简单化 LMI 形式的判定条件，所得结果便于用 MATLAB 软件的 LMI 工具箱实现。用 MATLAB 对数值例子仿真的结果说明了该方法的有效性。所得结论在第四章，4.2 节中给出。

（4）得到参数不确定时滞系统时滞依赖的稳定性条件

本文推出了 LMI 形式的判定参数不确定离散时滞系统时滞依赖的稳定

性的充分条件。本文是基于李亚普诺夫方法，采用 LMI 技术,利用 Schur 补引理进行化简，运用矩阵、向量运算，消去表示不确定因素的参数，利用有界范数进行放缩，再应用 S-procedure 将其转化为一个标准的线性矩阵不等式减小了该结论的保守性。用 MATLAB 对数值例子进行了仿真，结果表明了该方法的有效性。将判定不确定时滞系统时滞依赖的稳定性问题的转化为判断一个线性矩阵不等式的可行解问题，从而可以方便的运用 MATLAB 软件中 LMI 工具箱进行求解。提出了新的基于 LMI 的时滞系统的稳定性判据。所得结论在第四章，4.4 节中给出。

(5)提出多时滞连续系统稳定性分析方法

将本论文中得出时滞独立时滞系统稳定性条件、时滞依赖时滞系统稳定性条件、参数不确定时滞系统时滞无关的稳定性、参数不确定时滞系统时滞依赖的稳定性推广到多时滞系统，从而形成了一整套自成体系的时滞系统的稳定性判定条件，提出时滞系统稳定性分析的新方法。所得结论在第五章中给出。

2 展望

在基于 Lyapunov 第二方法，采用线性矩阵不等式技术来研究时滞系统的稳定性问题方面虽然已经取得了一些成果，这些成果主要集中在连续时滞系统方面，而在离散系统方面是非常少见的，但是由于在推导过程中都普遍使用了放缩法，所以，所得到的结论往往带有很大的保守性，并且这种保守性很难进行系统的度量。另一方面，并没有构造 Lyapunov 函数的一般规律，很多成功构造出来的 Lyapunov 函数一般都有它的背景，或者带有很大的主观性和偶然性，选取不同的 Lyapunov 函数，往往得到具有不同保守性的结果。所以如何得到时滞系统保守性更小稳定性的条件，尤其是时滞依赖的条件；如何能在离散时滞系统方面取得保守性更小稳定性的条件是一个非常有挑战性的问题。

考虑闭环系统的性能指标 H_∞，将本文得到的开环时滞系统稳定性条件推广到闭环时滞系统，可以得到系统的镇定器；并且可以进一步推广到各种不同类时滞系统鲁棒 H_∞控制设计的研究及应用。

致 谢

首先衷心感谢我的导师龙绪明老师，龙老师严谨治学的态度、平易近人的学者风范、开拓进取的精神必将对我影响深远。龙老师在学习和做人方面给了我大量的指导，这将对我影响终身，在此谨向龙老师表示诚挚的感谢和深深的敬意。

衷心感谢西南交通大学电气学院一直关心和帮助过我的老师、同学。

感谢一直关心和呵护着我的父母，感谢一直关心和支持我的哥哥、姐姐和弟弟及其他们的家人，感谢一直关心和支持我的妻子。

参考文献

1 郑大钟，线性系统理论（第二版）. 清华大学出版社，2002

2 廖晓昕，稳定性的理论、方法和应用，武汉，华中理工大学出版社，1999

3 张晴,线性时滞系统频域控制的若干问题研究，浙江大学博士学位论文，2002

4 Kalman R.E.1960.Contribution to the theory of optimal control.Bol.Soc.Mat.Mex.,5:102-119

5 Zames,G Feedback and optimal sensitivity:model reference transformations,multiplicative seminorms,and approximate inverses.IEEE Trans.Auto.Control,1981,26(2),301-320.

6 Francis B A.A Course in H_∞ Control Theory,Lecture Notes in Contol and Information Science 88.New York:Springer-Verlag,1987.

7 Glover K,Doyle J C.State-space Formular for All Stabilizing Controllers thatSatisfy An H_∞ Norm Bound and Relations to Risk Sensitivity.System and Control Letters,1988,Vol.11,167-172.

8 Control J C,Glover K,Khargonegar,P,Francis B A.State-space solutions to Standard H_2 and H_∞ Control Problems.Problems.IEEE Trans.Auto.Control,1989,Vol.AC-34,831-847.

9 Kimura H,Lu Y,Kawatani R.On The Structure of H_∞ Control Systems and Related Exension,IEEE Trans.Auto.Control,1991,Vol.AC-36,653-667.

10 Glover K,Mustafa D.Derivation of The Maximum Entropy H_∞ Controler and A State-Space Formula for Its Entropy.Int.J.Control,1989,Vol.50:899-961.

11 Gahinet P,Apkarian P.An LMI-Based Parameterization of all H_∞ Controler with Applications.Proc.Of the 32nd conf.On Decision and Control,San Antonio,Texas,1993,656-661.

12 俞立，鲁棒控制——线性矩阵不等式处理方法，清华大学出版社，2002

13 Hmamed A.On the Stability of Time Delay Systems:New Results. Int. J. Control, 1986a, 43:321-324

14 Hmamed A. Stability Conditions of Delay Differential Systems:New

Results. Int. J. Control, 1986b, 46:455-463

15 Hmamed A. Further Resuktd on the Delay Independence Asymptotic Stability of Linear Systems. Int. J. Syst. Sci., 1991, 22:1127-1132

16 Kamen E W. Correction to Linear System swith Commensurate Time Delays:Stability and Stabilization Independent of Delay. IEEE Trans. Autom. Control, 1983, AC-28:248-249

17 Mori T, Fukuma N, Kuwahara M. On an Estimate of the Decay Rate for Stable Linear Delay Systems. Int. J. Control, 1982, 36:95-97

18 Su J H, Fong I K, Tsen C L. Stability Analysis of Linear System with TimeDelay. IEEE Trans. Autom. Control, 1994, AC-39:1341-1344

19 Tissir E, H ammed A. Sufficient Stability Conditions of Interval Time Delay Systems. Adv. Modeling Anal., 1992, C45:1-16

20 MoriT. Criteria for Asymptotic Stability of Linear Time Delay Systems. IEEE Trans. Autom. Control, 1985, AC-30:158-161

21 V. B. Kolmanovskii, S.-I. Niculescu, and J.-P. Richard, "On the Lyapunov - Krasovskii functionals for stability analysis of linear delay systems," Int. J. Contr., vol. 72, no. 4, pp. 374 - 384, 1999.

22 Su I J, d Huang C G. Robust Stability of Delay Dependence for Linear uncertain Systems. IEEE Trans. Autom. Control, 1992, AC-37:1656-1659

23 Xu B Liu Y. An Improved Razumikhin-type Theorem and its Application. IEEE Trans. Autom. Control, 1994, AC-39:839-841

24 Walton K, Marshall J E. Direct Method for TDS Stability Analysis. IEE Proc. PtD, 1987, 134:101-107

25 "Some remarks on the stability of linear systems with delayed state," in Proc. 37th IEEE Conf. Decision and Control, 1998, pp. 299 - 304. 26 Wang S S. Further Results on Stability of. Syst. Control Lett., 1992, 19:165-168

26 X. Li and C. E. Souza, "LMI approach to delay-dependent robust stability and stabilization of uncertain linear delay systems," in Proc. 34th IEEE Conf. Decision and Control, New Orleans, LA, 1995, pp. 3614 - 3619.

27 S. K. Nguang, "Robust H control of a class of nonlinear systems

with delay state and control. A LMI approach," in Proc. 37th IEEE Conf. Decision and Control, 1998, pp. 2384-2389.

28 S.I.Niculescu, J.M.Dion, and L. Dugard, "Delay-dependent stability for linear systems with several delays: An LMI approach," in Proc. 13th IFAC World, 1996, pp. 165-170.

29 Tissir E,H mamed A. Further Results on Stability of.Autom.,1996,32(12):1723-1726

30 Magdi S.Mahmoud,Robust Control And Filtering For Time-delay Systems,Kuwait University Safat,Kuwait,Marcel Dekker,Inc,,2000

31 陈振毅,不确定时滞系统鲁棒控制若干问题研究，浙江大学博士学位论文，2002

32 Skelton R E,Iwasaki T. Increased roles of linear algebra in control education[J].IEEE Control Syst.Mag.,1995,(15):76-89

33 Vandenberghe L,Boyd S. Semidefinite programming[J].SIAM Review,1996,38(1):49-95

34 V.A.Yakubovich,Frequency conditions for the existence of absolutely stable periodic and almost periodic limiting regimes of control systems with many non-stationary elemements.In IFAC World Congress,London,1966

35 V.A.Yakubovich,The method of matrix inequalities in the stability theory of nonlinear control systems,I,II,III,Automation and Remote Control,1967,25-26(4):905-917,577-592,753-763

36 V.M.Popov,Absolute stability of nonlinear systems of automatic control,Automation and Remote Control ,1962,22:857-875

37 V.M.Popov,One problem in the theory of absolute stability of controlled systems,Automation and Remote Control,1964,25(9):1129-1134

38 R.E.Kalman, Lyapunov functions for the problems of Lur's in automatic control,Proc,Nat.Acad.Sci,USA,1963,49:201-205

39 Y.Nesterov and A.Nemirovsky,A general approach to polynomial-time algorithms design for convex programming,Technical report,Centr.Econ.& Math.Inst.,USSR Acad.Sci.,Moscow,USSR,1998

40 Boyd,S.,L.El Ghaoui,E.Fern and V.Balakrishnan,Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory,SIAM Books,Philadelphia,PA,1994

41 廖晓昕，动力系统的稳定性理论和应用，国防工业出版设，2000

42 [日]绪方胜彦，离散时间控制系统，西安交通大学出版社，1990

43 C. Hou, F. Gao, and J. Qian, "Improved delay time estimation of RC ladder networks," IEEE Trans. Circuits Syst. I, vol. 47, pp. 242–246,Feb. 2000.

44 段广仁等，线性时滞系统时滞独立稳定的充分条件，控制与决策，Vol.11 No.3,1996

45 Y. S. Moon,Poogyeon Park, W.H.Kwon and Young Sam Lee, "Delay-dependend robust stabilization of uncertain state-delay systems", Int.J.Control.2001.Vol.74.No. 14.1447-1455

46 N.J.Su,H.Y.Su and Chu,Delay-dependent robust H_∞ control for uncertain time-delay systems,IEE Proc.Control Theory Appl.,Vol.150.No.5.September 2003

47 B.Lee and J.G.Lee,Delay-dependent Stability Criteria for Discrete-time Delay Systems,Proceedings of America Control Conference San Diego,California,June 1999

48 E.Fridman and U.Shaked,New Bounded Real Lemma Representations for Time-delay System and Their Applications,IEEE,Transactions On Automatic Control,Vol.46,No,12,December 2001

49 Li,Xi and Carlos E.de Souza,Criteria for robust stability and stabilization of uncertain linear systems with state delay,Automatica 33,pp. 1657-1662,1997

50 Li,Xi and Carlos E.de Souza,Delay-dependent robust stability and stabilization of uncertain linear delay systems: a linear matrix inequality approach,IEEE Trans.on Automatic Control 42,pp. 1144-1148,1997

51 Y.Y.Cao,Y.X.Sun and J.Lam,Delay-dependent robust H_∞ Control for uncertain systems with time-varying delays,IEE Proc.Control Theory Appl.,Vol.145,No.1,pp. 338-344,May 1998

52 廖晓昕，稳定性的数学理论及应用（第二版），武汉，华中师范大学出版社，2001

53 张友刚，基于 LMI 的一类关联模糊系统的稳定性分析及分散化控制器设计，西南交通大学博士学位论文．2003

54 王德进，H_2和H_∞优化控制理论，哈尔滨，哈尔滨工业大学出版社，2001

55 俞立，一类时滞系统的绝对稳定性问题研究，自动化学报，

Vol.29,No.5,2003

56 Myungsoo Jun and Michael G. Sfonov, Stability Analysis of a System with Time-delayed States, Proceedings of the American Control Conference Chicago, Illinois. June 2000

57 Mao-Lin Ni and Meng Joo Er, Stability of Linear Systems With Delayed Perturbations:An LMI Approach, IEEE TRANSACTIONS ON CIRCUITS AND SYSTEMS—I: FUNDAMENTAL THEORY AND APPLICATIONS, VOL. 49, NO. 1, JANUARY 2002

58 Jun-Juh Yan, Robust stability analysis of uncertain time delay systems with delay-dependence, ELECTRONICS LETTERS 18th January 2001, Vol. 37 No. 2

59 M. Robbé, M. Sadkane, Discrete-time Lyapunov stability of large matrices, Journal of Computational and Applied Mathematics 115 (2000) 479-494

60 S. -J. Chen and J. -L. Lin, Robust stability of discrete time-delay uncertain singular systems, IEE Proc. -Control Theory Appl., Vol. 151, No. 1, January 2004

61 Xu Li Da, Chuwang Cheng , Bingyong Tang, A linear matrix inequality approach for robust control of systems with delayed states, European Journal of Operational Research 124 (2000) 332-341

62 史忠科等，鲁棒控制理论（Robust Control Theory），国防工业出版社，151-152, 2003

附录 A

例子 3.3 求解源程序：

```
A=[0.4,0.3;-0.1,0.7]
Ad=[0.2,-0.2;0.25,-0.1]
e=eig(A+Ad)
d=11

setlmis([]);

P=lmivar(1,[2,1]);
Q=lmivar(1,[2,1]);
X=lmivar(1,[2,1]);
Z=lmivar(1,[2,1]);
Y=lmivar(1,[2,1]);

lmiterm([1 1 1 X],d,1);
lmiterm([1 1 1 Y],1,1,'s');
lmiterm([1 1 1 P],A',A);
lmiterm([1 1 1 Z],d*A',A);
lmiterm([1 1 1 Z],-d*A',1);
lmiterm([1 1 1 Z],-d,A);
lmiterm([1 1 1 Z],d,1);
lmiterm([1 1 1 Q],1,1);
lmiterm([1 1 1 P],-1,1);
lmiterm([1 1 2 Y],-1,1);
lmiterm([1 1 2 P],A',Ad);
lmiterm([1 1 2 Z],d*A',Ad);
lmiterm([1 1 2 Z],-d,Ad);
lmiterm([1 2 2 P],Ad',Ad);
lmiterm([1 2 2 Z],d*Ad',Ad);
```

```
lmiterm([1 2 2 Q],-1,1);
lmiterm([-2 1 1 X],1,1);
lmiterm([-2 2 1 Y],1,1);
lmiterm([-2 2 2 Z],1,1);
system=getlmis;
option=[0 0 0 0 0];
[tminxfeas]=feasp(system,option,0)
%求解结果
P=dec2mat(system,xfeas,P)
Q=dec2mat(system,xfeas,Q)
X=dec2mat(system,xfeas,X)
Y=dec2mat(system,xfeas,Y)
Z=dec2mat(system,xfeas,Z)
```

附录 B

例子 4.3 求解源程序：

```
A=[0.1,0,-0.1;0.05,0.3,0;0,0.2,0.6]
Ad=[-0.2,0,0;0,-0.1,0.1;0,0,-0.2]
D=[0.1;0;0.2]
D1=[0.1;0;0.2]
E=[0.2,0,0.3]
E1=[0.4,0,0.1]
T=eye(3)
d=9

e=eig(A+Ad)

setlmis([]);

P=lmivar(1,[3,1]);
Q=lmivar(1,[3,1]);
t1=lmivar(1,[1,1]);
t2=lmivar(1,[1,1]);
X=lmivar(1,[3,1]);
Z=lmivar(1,[3,1]);
Y=lmivar(1,[3,1]);

lmiterm([1 1 1 X],d,1);
lmiterm([1 1 1 Y],1,1,'s');
lmiterm([1 1 1 P],A',A);
lmiterm([1 1 1 Z],d*A',A);
lmiterm([1 1 1 Z],-d*A',1);
lmiterm([1 1 1 Z],-d,A);
lmiterm([1 1 1 Z],d,1);
```

```
lmiterm([1 1 1 Q],1,1);
lmiterm([1 1 1 P],-1,1)
lmiterm([1 1 1 t1],1,E'*E);

lmiterm([1 1 2 Y],-1,1);
lmiterm([1 1 2 P],A',Ad);
lmiterm([1 1 2 Z],d*A',Ad);
lmiterm([1 1 2 Z],-d,Ad);

lmiterm([1 2 2 P],Ad',Ad);
lmiterm([1 2 2 Z],d*Ad',Ad);
lmiterm([1 2 2 Q],-1,1);
lmiterm([1 2 2 t2],1,E1'*E1);

lmiterm([1 1 3 P],A',D);
lmiterm([1 1 3 Z],d*A',D);
lmiterm([1 1 3 Z],-d,D);

lmiterm([1 2 3 P],Ad',D);
lmiterm([1 2 3 Z],d*Ad',D);

lmiterm([1 3 3 P],D',D)
lmiterm([1 3 3 Z],d*D',D)
lmiterm([1 3 3 t1],-1,1);

lmiterm([1 1 4 P],A',D1);
lmiterm([1 1 4 Z],d*A',D1);
lmiterm([1 1 4 Z],-d,D1);

lmiterm([1 2 4 P],Ad',D1);
lmiterm([1 2 4 Z],d*Ad',D1);

lmiterm([1 3 4 P],D',D1);
```

```
lmiterm([1 3 4 Z],d*D',D1);

lmiterm([1 4 4 Z],d*D1',D1);
lmiterm([1 4 4 t2],-1,1);

lmiterm([-2 1 1 X],1,1);
lmiterm([-2 2 1 Y],1,1);
lmiterm([-2 2 2 Z],1,1);

system=getlmis;
option=[0 0 0 0 0];
[tmin xfeas]=feasp(system,option,0)
  %输出求解结果
t1=dec2mat(system,xfeas,t1)
t2=dec2mat(system,xfeas,t2)
P=dec2mat(system,xfeas,P)
Q=dec2mat(system,xfeas,Q)
X=dec2mat(system,xfeas,X)
Y=dec2mat(system,xfeas,Y)
Z=dec2mat(system,xfeas,Z)
```

攻读硕士学位期间发表的论文及科研成果

段平，龙绪明，凸优化在求解 LMI 问题中的应用，电子工业专用设备，（已录用）