НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

КАФЕДРА «Информатика и процессы управления» (№ 17)

Методические указания по курсу «Теория управления»

(для студентов групп К5-171,172)

Москва
2009

ТЕМА 2. Способы организации управления и математическое описание непрерывных объектов, процессов и систем.

Раздел 2.3. **Математический аппарат теории управления.** В теории управления используется математический аппарат, основанный на двух различных подходах к описаеию и исследованию линейных динамических систем (ЛДС).

Первый из них относится к операционным методам, при которых уравнения динамики ЛДС переводятся из области оригиналов в область изображений, в которой находится их решение. Затем происходит переход из области изображений в область оригиналов, т.е. во временну́ю область. Этот подход характерен тем, что позволяет использовать частотные представления при исследовании систем.

Во втором подходе используется описаеие и исследование ЛДС непосредственно во временно́й области. Это, прежде всего, методы теории пространства состояний. Их достоинством является компактность данных и решения уравнений сложных систем с применением компьютеров.

Общие положения. Формирование уравнений динамики процессов, объектов и систем в пространстве состояний.

Пусть динамика процессов, объектов и систем описывается обыкновенным линейным дифференциальным уравнением n-го порядка вида

$$\begin{gathered} a_n\frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}x(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dx(t)}{dt} + a_0x(t) = \\ b_m\frac{d^m g(t)}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1}g(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1\frac{dg(t)}{dt} + b_0g(t)\,; \end{gathered} \tag{2.1}$$

$$m \le n$$

с начальными условиями

$$x(0), x'(0),\ \ldots, x^{(n-1)}(0).$$

Применение операционных методов описания систем проводится в разделах 3.1 — 3.3.

Обратимся к рассмотрению формы записи уравнений динамики ЛДС в пространстве состояний.

ЛДС при скалярном режиме управления имеет вид

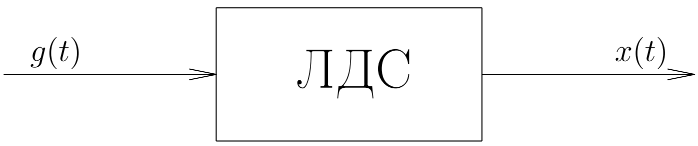


Рис. 2.1

Тогда уравнение состояния системы будет представленно в виде

$$\frac{d\,\bar{\mathsf{x}}(t)}{dt} = A\bar{\mathsf{x}}(t) + \bar{b}g(t), \tag{2.2}$$

а уравнение выхода

$$x(t) = \bar{c}^T\bar{\mathsf{x}}(t) + dg(t). \tag{2.3}$$

Здесь

$g(t)$ – входное воздействие;
$x(t)$ – выходной сигнал системы;
$\bar{\mathsf{x}}(t)$ – вектор состояния размерности $(n \times 1)$;
A – матрица размерности $(n \times n)$;
$\bar{b}$ – вектор размерности $(n \times 1)$;
$\bar{c}^T$ – вектор выхода размерности $(1 \times n)$;
d – скаляр.

Вектор начальных условий $\bar{\mathsf{x}}(0) = \bar{\mathsf{x}}_0$ размерности $(n \times 1)$.

2.3.1. *Дифференциальное уравнение первого порядка.* Уравнение первого порядка ($n = 1$). Ему соответствует ЛДС

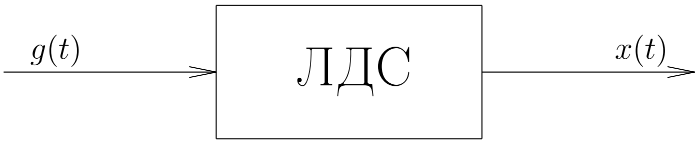


Рис. 2.2

$$T\frac{dx(t)}{dt} + x(t) = kg(t), \quad x(0) = x_0. \tag{2.4}$$

или

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\frac{1}{T}x(t) + \frac{k}{T}g(t).$$

Основным способом формирования уравнений состояния является представление исходного дифференциального уравнения в виде схемы с использованием интегрирующих звеньев (интеграторов). Интегратор в общем виде представлен на рис. 2.3.

Рис. 2.3

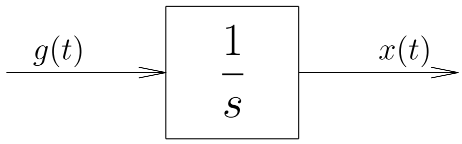


Рис. 2.4

Интегратор в терминах операционного исчисления принято условно изображать в виде оператора $1/s$, где s - оператор Лапласа, как показано на рис. 2.4.

Тогда дифференциальное уравнение (2.4) будет отражено в виде схемы:

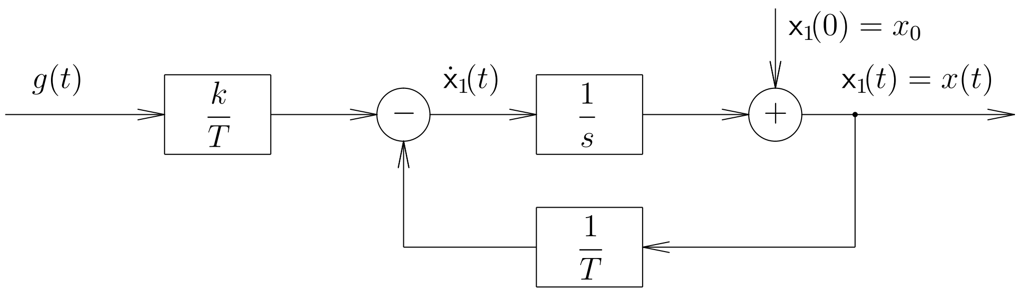


Рис. 2.5

где символ $\ominus$ обозначает элемент вычитания, а символ $\oplus$ – элемент суммирования.

Уравнения состояния в этом случае запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d\,\mathsf{x}_1(t)}{dt} &= A\mathsf{x}_1(t) + \bar{b}g(t); \\ x(t) &= \bar{c}^T\mathsf{x}_1(t) + dg(t), \end{aligned} \tag{2.5}$$

где матрица A размерности (1×1) равна $a_{11} = -\dfrac{1}{T}$;
вектор $\bar{b}$ размерности (1×1) равен $b_1 = \dfrac{k}{T}$;
вектор $\bar{c}^T$ размерности (1×1) равен $c_1 = 1$;
скаляр $d = 0$.

2.3.2. *Дифференциальное уравнение второго порядка.* Дифференциальное уравнение второго порядка ($n = 2$).

$$
\begin{aligned}
T_1T_2\frac{d^2x(t)}{dt^2} + (T_1+T_2)\frac{dx(t)}{dt} + x(t) = kg(t),\\
x(0) = x_0;\\
\left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=0} = \dot{x}_0.
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

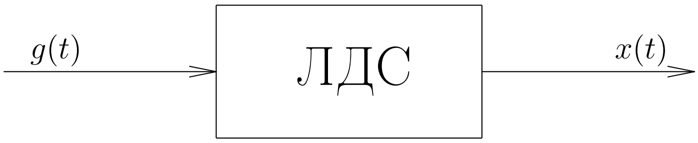


Рис. 2.6

Выберем переменные состояния следующим образом:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{x}_1(t) &= x(t)\,;\\
\mathsf{x}_2(t) &= \frac{dx(t)}{dt}\,.
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

Тогда уравнение (2.6) примет вид:

$$
T_1T_2\frac{d\,\mathsf{x}_2(t)}{dt} + (T_1+T_2)\mathsf{x}_2(t) + \mathsf{x}_1(t) = kg(t).
\tag{2.8}
$$

В результате, с учётом соотношения (2.7) получим:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\,\mathsf{x}_2(t)}{dt} &= -\frac{(T_1+T_2)}{T_1T_2}\mathsf{x}_2(t) - \frac{1}{T_1T_2}\mathsf{x}_1(t) + \frac{k}{T_1T_2}g(t);\\
\frac{d\,\mathsf{x}_1(t)}{dt} &= \mathsf{x}_2(t).
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

Тогда элементы матричных уравнений состояния (2.2), (2.3) примут следующий вид:

$$
\bar{\mathsf{x}}(t) = \begin{bmatrix}\mathsf{x}_1(t)\\ \mathsf{x}_2(t)\end{bmatrix}; \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1\\ -\dfrac{1}{T_1T_2} & -\left(\dfrac{1}{T_1}+\dfrac{1}{T_2}\right)\end{bmatrix};
\tag{2.10}
$$

Вектор начальных условий

$$
\bar{\mathsf{x}}(0) = \begin{bmatrix}\mathsf{x}_1(0)\\ \mathsf{x}_2(0)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x(0)\\ \dot{x}(0)\end{bmatrix}; \qquad \bar{b} = \begin{bmatrix}0\\ \dfrac{k}{T_1T_2}\end{bmatrix}; \qquad \bar{c}^T = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}; \qquad d = 0.
$$

Структурная схема соответствующей ЛДС имеет вид

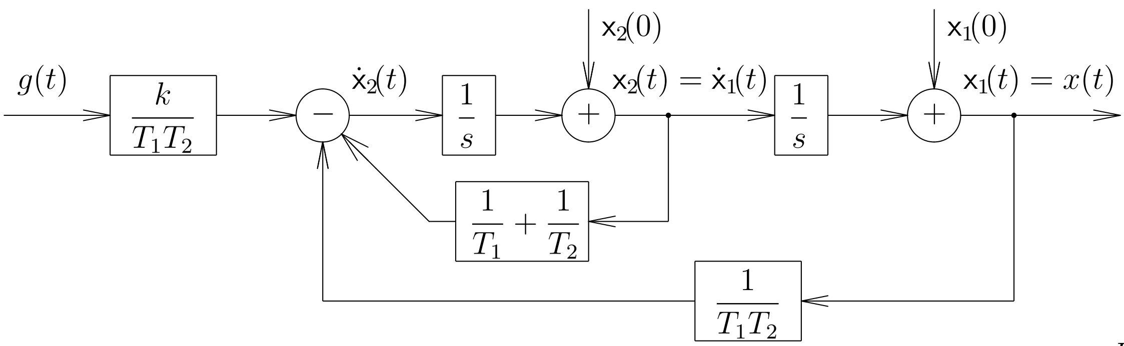


Рис. 2.7

2.3.3. *Дифференциальное уравнение второго порядка со сложной правой частью.* Дифференциальное уравнение второго порядка ($m = 2$).

$$T_1T_2\frac{d^2x(t)}{dt^2} + (T_1+T_2)\frac{dx(t)}{dt} + x(t) = k\left(g(t) + \tau^2\frac{d^2g(t)}{dt^2}\right),$$
$$x(0) = x_0; \tag{2.11}$$
$$\left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=0} = \dot{x}_0.$$

При формировании схемы данной динамической системы учтём, что поскольку операции интегрирования и дифференцирования являются линейными, они обладают свойством коммутативности и их можно поменять местами. Тогда вместо исходного дифференциального уравнения (2.11) используем промежуточное уравнение, по форме записи совпадающее с предыдущим уравнением (2.6).

$$T_1T_2\frac{d^2\tilde{x}(t)}{dt^2} + (T_1+T_2)\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} + \tilde{x}(t) = kg(t); \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned} \mathsf{x}_1(t) &= \tilde{x}(t);\\ \mathsf{x}_2(t) &= \frac{d\tilde{x}(t)}{dt}; \end{aligned} \tag{2.13}$$

$$\bar{\mathsf{x}}(t) = \begin{bmatrix}\mathsf{x}_1(t)\\ \mathsf{x}_2(t)\end{bmatrix};$$

$$\begin{aligned} \frac{d\,\mathsf{x}_1(t)}{dt} &= \mathsf{x}_2(t);\\ \frac{d\,\mathsf{x}_2(t)}{dt} &= -\frac{1}{T_1T_2}\mathsf{x}_1(t) - \left(\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}\right)\mathsf{x}_2(t) + \frac{k}{T_1T_2}g(t). \end{aligned} \tag{2.14}$$

В результате получим матрицу и векторы уравнения состояния:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1\\ -\dfrac{1}{T_1T_2} & -\left(\dfrac{1}{T_1}+\dfrac{1}{T_2}\right)\end{bmatrix}; \qquad \bar{b} = \begin{bmatrix}0\\ \dfrac{k}{T_1T_2}\end{bmatrix}; \qquad \tilde{\bar{c}}^T = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}; \qquad \tilde{d} = 0. \tag{2.15}$$

Для получения нужного выходного сигнала $x(t)$ имеющийся промежуточный сигнал далее необходимо дважды подвергнуть операции дифференциирования в соответствии с правой частью уравнения (2.11) и просуммировать. Тогда получим:

$$x(t) = \tilde{x}(t) + \tau^2\frac{d^2\tilde{x}(t)}{dt^2}. \tag{2.16}$$

С учётом соотношения (2.13) найдём:

$$x(t) = \mathsf{x}_1(t) + \tau^2\frac{d\,\mathsf{x}_2(t)}{dt}. \tag{2.17}$$

Используя последнее уравнение системы (2.14), запишем искомый выходной сигнал $x(t)$ с использованием переменных состояния:

$$x(t) = \mathsf{x}_1(t) + \tau^2\left(\frac{k}{T_1T_2}g(t) - \frac{1}{T_1T_2}\mathsf{x}_1(t) - \left(\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}\right)\mathsf{x}_2(t)\right). \tag{2.18}$$

В результате получим уравнение выхода в виде:

$$\begin{aligned} x(t) &= \bar{c}^T\bar{\mathsf{x}}(t) + dg(t), \quad \text{где}\\ \bar{c}^T &= \begin{bmatrix}\left(1-\dfrac{\tau^2}{T_1T_2}\right) & -\tau^2\left(\dfrac{1}{T_1}+\dfrac{1}{T_2}\right)\end{bmatrix};\\ d &= \frac{k\tau^2}{T_1T_2}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Соответствующая схема линейной динамической системы в пространстве состояний примет вид:

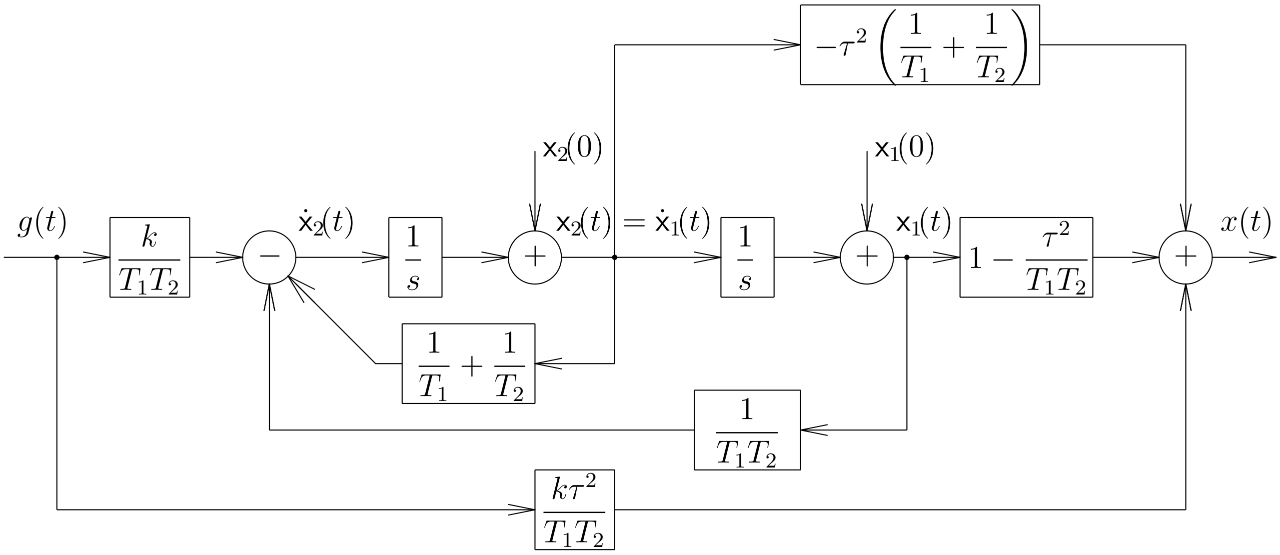


Рис. 2.8

ТЕМА 3. Передаточные, переходные, весовые функции и частотные характеристики линейных динамических систем и типовых звеньев.

Раздел 3.1. Передаточные функции.

Общие положения. Переход к описанию линейных динамических систем из временной области в область изображений с использованием методов операционного исчисления на основе преобразования Лапласа позволяет вводить и использовать передаточные функции систем.

Среди всего многообразия передаточных функций могут быть выделены наиболее часто используемые функции, получившие название типовых звеньев. Из типовых звеньев формируется большинство передаточных функций объектов, процессов и систем управления.

Подраздел 3.1.1. Пусть ЛДС описывается дифференциальным уравнением n-го порядка (2.1). Тогда в области изображений при нулевых начальных условиях получим

$$X(s) = W(s)G(s)\,, \tag{3.1}$$

где $W(s)$ – передаточная функция, равная

$$W(s) = \frac{M(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}\,. \tag{3.2}$$

Подраздел 3.1.2. Используя методы теории пространства состояний, можно получить иное выражение для передаточной функции ЛДС.

В этом случае передаточная функция линейной динамической системы, представленной на рис. 2.1 , описывается уравнениями вида (2.2) и (2.3). Применим к соотношениям (2.2), (2.3) преобразование Лапласа:

$$\begin{aligned} s\,\bar{\mathsf{x}}(s) - \bar{\mathsf{x}}_0 &= A\bar{\mathsf{x}}(s) + \bar{b}\,G(s)\,;\\ X(s) &= \bar{c}^T\bar{\mathsf{x}}(s) + d\,G(s)\,. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Тогда, преобразуя первое из уравнений к виду

$$(sI - A)\bar{\mathsf{x}}(s) = \bar{b}\,G(s) + \bar{\mathsf{x}}_0\,, \tag{3.4}$$

где I – единичная диагональная матрица,

и используя уравнение выхода, получим

$$X(s) = \bar{c}^T(sI - A)^{-1}\,\bar{\mathsf{x}}_0 + \left(\bar{c}^T(sI - A)^{-1}\,\bar{b} + d\right)G(s)\,. \tag{3.5}$$

При нулевых начальных условиях данное соотношение приводит к следующему выражению для передаточной функции

$$W(s) = \left.\frac{X(s)}{G(s)}\right|_{\bar{\mathsf{x}}_0 = 0} = \bar{c}^T(sI - A)^{-1}\,\bar{b} + d\,. \tag{3.6}$$

Формула (3.6) позволяет находить передаточные функции ЛДС, описание которых представлено в пространстве состояний.

Подраздел 3.1.3. Примеры нахождения передаточных функций ЛДС.

Для ЛДС, рассмотренной в подразделе 2.3.1, применение преобразования Лапласса к дифференциальному уравнению первого порядка (2.4) при нулевых начальных условиях даёт

$$TsX(s) + X(s) = kG(s)\,,$$

отсюда получим

$$W(s) = \frac{X(s)}{G(s)} = \frac{k}{(Ts+1)}\,. \tag{3.7}$$

Для ЛДС, рассмотренной в подразделе 2.3.2, применение преобразования Лапласса к дифференциальному уравнению второго порядка (2.6) при нулевых начальных условиях даёт

$$T_1T_2s^2X(s) + (T_1 + T_2)sX(s) + X(s) = kG(s)\,,$$

отсюда получим

$$W(s) = \frac{X(s)}{G(s)} = \frac{k}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}\,. \tag{3.8}$$

Для ЛДС, рассмотренной в подразделе 2.3.3, применение преобразования Лапласса к уравнению (2.11) при нулевых начальных условиях даёт

$$\left(T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2)s + 1\right) X(s) = k\left(1 + \tau^2 s^2\right) G(s)\,,$$

отсюда получим

$$W(s) = \frac{X(s)}{G(s)} = \frac{k(1 + \tau^2 s^2)}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}\,. \tag{3.9}$$

Раздел 3.2. Переходные функции. Используя известную передаточную функцию $W(s)$ можно определить переходную функцию, которая будет равна

$$h(t) = L^{-1}\left[\frac{W(s)}{s}\right]. \tag{3.10}$$

Например, для ЛДС, рассмотренной в подразделе 3.1.3, с передаточной функцией вида (3.7) переходная функция равна

$$h(t) = L^{-1}\left[\frac{k}{s(Ts+1)}\right] = k\left(1 - e^{-t/T}\right). \tag{3.11}$$

Раздел 3.3. Весовые (импульсные переходные) функции.

Подраздел 3.3.1. Для ЛДС с известной передаточной функцией $W(s)$ весовая функция определяется согласно выражению

$$w(t) = L^{-1}\left[W(s)\right]. \tag{3.12}$$

Например, для ЛДС, рассмотренной в подразделе 3.1.3, с передаточной функцией вида (3.7) весовая функция равна

$$w(t) = L^{-1}\left[\frac{k}{(Ts+1)}\right] = \frac{k}{T}\,e^{-t/T}\,. \tag{3.13}$$

Подраздел 3.3.2. Используя весовую функцию $w(t)$ можно определить реакцию ЛДС на входное воздействие.

Поскольку в области изображений имеет место соотношение

$$X(s) = W(s)G(s)\,, \quad \text{то} \quad x(t) = L^{-1}\left[X(s)\right]. \tag{3.14}$$

В области оригиналов ему соответствует свёртка

$$x(t) = \int_0^\infty w(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_0^\infty g(t-\tau)w(\tau)d\tau\,, \tag{3.15}$$

где $w(\tau) \equiv 0$ при $\tau < 0$ по условиям физической реализуемости системы.

Выражение (3.15) даёт возможность определять реакцию ЛДС на задающее воздействие $g(t)$, используя непосредственно весовую функцию.

Пусть $g(t)$ – единичное ступенчатое воздействие. Определим реакцию ЛДС из подраздела 3.1.3, передаточная функция которой имеет вид (3.8), на это воздействие при нулевых начальных условиях.

В этом случае

$$w(t) = \frac{k}{T_1 - T_2}\left(e^{-t/T_1} - e^{-t/T_2}\right) \qquad \text{при } T_1 \neq T_2\,.$$

Тогда

$$x(t) = \int_0^\infty w(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t w(\tau)g(t-\tau)d\tau =$$
$$= \int_0^t \frac{k}{T_1 - T_2}\left(e^{-\tau/T_1} - e^{-\tau/T_2}\right)d\tau = \qquad (3.16)$$
$$= k\left(1 + \frac{T_1}{T_2 - T_1}e^{-t/T_1} + \frac{T_2}{T_1 - T_2}e^{-t/T_2}\right).$$

Отметим, что в этом случае полученая реакция системы (3.16) совпадает с переходной функцией $h(t)$.

Раздел 3.5. Амплитудно-фазовые и логарифмические частотные характеристики. Амплитудно-фазовая частотная характеристика представляет собой годограф

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) \qquad (3.17)$$

на комплексной плоскости при изменении частоты ω в диапазоне от нуля до бесконечности.

Соотношение для частотной характеристики можно получить заменив переменную s на $j\omega$ в выражении для передаточной функции

$$W(j\omega) = W(s)\Big|_{s=j\omega}.$$

При описании ЛДС в пространстве состояний передаточная функция определяется согласно (3.6), тогда выражение для частотной характеристики ЛДС будет иметь вид

$$W(j\omega) = W(s)\Big|_{s=j\omega} = \bar{c}^T(j\omega I - A)^{-1}\,\bar{b} + d\,. \qquad (3.18)$$

Логарифмическая амплитудная частотная характеристика равна

$$L_m(\omega), дБ = 20\lg\left|W(j\omega)\right|. \qquad (3.19)$$

Логарифмическая фазовая частотная характеристика равна

$$\varphi(\omega), град = arg W(j\omega)\,. \qquad (3.20)$$

Здесь частота ω измеряется в декадах.

ТЕМА 4. Устойчивость линейных динамических систем.

Раздел 4.1. Понятие устойчивости линейных динамических систем. Необходимым и достаточным условием устойчивости невозмущённого движения линейных динамических систем является отрицательность вещественных частей всех корней характристического уравнения

$$Re\,\lambda_i < 0; \quad i = 1, \ldots, n.$$

Если ЛДС описывается во временной области уравнениями состояния (2.1) , то характеристическое уравнение примет вид

$$|A - \lambda I| = 0\,, \tag{4.1}$$

и имеет n корней $\lambda_i; \quad i = 1, \ldots, n$. В данном случае корни будут являтся собственными значениями матрицы А. Применение операторных методов анализа ЛДС сводится к использованию передаточной функции $W(s)$ вида (3.2).Приравняв знаменатель передаточной функции $W(s)$ к нулю, также получим характеристическое уравнение

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0\,, \tag{4.2}$$

имеющее n корней $s_i = \lambda_i; \quad i = 1, \ldots, n$.

Определение корней характеристического уравнения вида (4.1) может быть сведено к решению задачи отыскания собственных значений матрицы A с помощью вычислительных процедур. Данный способ требует применения специализированного прикладного програмного обеспечения, имеющегося, как правило, в составе интегрированных пакетов математического назначения.

При использовании характеристического уравнения вида (4.2) для определения законов его корней могут быть применены алгебраические критерии.

Раздел 4.2. Алгебраические критерии устойчивости.

Определение устойчивости системы с известным характеристическим уравнением. Определим устойчивость ЛДС, охваченной отрицательной обратной связью, и имеющей в разомкнутом состоянии функцию:

$$\textbf{а)} \quad W(s) = \frac{k}{s(T_1 s + 1)(T_2 - 1)}\,, \tag{4.3}$$

$$\textbf{б)} \quad W(s) = \frac{k}{s(T_1 s + 1)(T_2 + 1)} \tag{4.4}$$

при $T_1 = 0.1$, $T_2 = 0.2$. Характеристическое уравнение замкнутой системы равно

$$1 + W(s) = 0\,. \tag{4.5}$$

Тогда с учётом отношения $W(s) = \dfrac{M(s)}{D(s)}$ оно может быть представленно в виде

$$D(s) + M(s) = 0\,. \tag{4.6}$$

В результате получим следующие характеристические уравнения:

$$\textbf{а)} \quad s^3 + 5s^2 - 50s + 50k = 0\,; \tag{4.7}$$

$$\textbf{б)} \quad s^3 + 15s^2 + 50s + 50k = 0\,. \tag{4.8}$$

В первом случае не все коэффициенты уравнения положительны. Поэтому среди его корней имеются положительные (критерий Стодолы). В этом случае система неустойчива при любых k.

Во втором случае применение критерия Рауса даёт следующую таблицу

Номер строки	Номер столбца	
	1	2
1	1	50
2	15	$50k$
3	$50-3.33k$	0
4	$50k$	0

При значениях $0 < k < 15$ все коэффициенты первого столбца положительны, система устойчива. При $k > 15$ система неустойчива.

Аналогичный результат даёт применение критерия Гурвица:

$$\Delta_1 = 15 > 0\,;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 15 & 1 \\ 50k & 50 \end{vmatrix} = 750 - 50k > 0\,;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 15 & 1 & 0 \\ 50k & 50 & 15 \\ 0 & 0 & 50k \end{vmatrix} = 37500k > 0\,.$$

Недостатком алгебраических критериев является их неспособность определения степени устойчивости ЛДС. Поэтому на практике получили распространение частотные методы анализа устойчивости. Эти методы позволяют оценивать устойчивость замкнутых ЛДС по их частотным характеристикам $W(j\omega)$ в разомкнутом состоянии.

Раздел 4.3. Частотные критерии устойчивости. Критерий Найквиста.

Анализ устойчивости замкнутых ЛДС частотными методами. Пусть передаточная функция ЛДС в разомкнутом состоянии имеет вид

$$W(s) = \frac{k}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)}\,. \tag{4.9}$$

Проанализируем её устойчивость в замкнутом состоянии, используя критерий Найквиста. Амплитудно-фазовая частотная характеристика равна

$$W(s)\Big|_{s=j\omega} = W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)\,. \tag{4.10}$$

При $k = 20$; $T_1 = 0.1$; $T_2 = 0.2$; $T_3 = 0.3$ она примет вид, показанный на рис. 4.1.

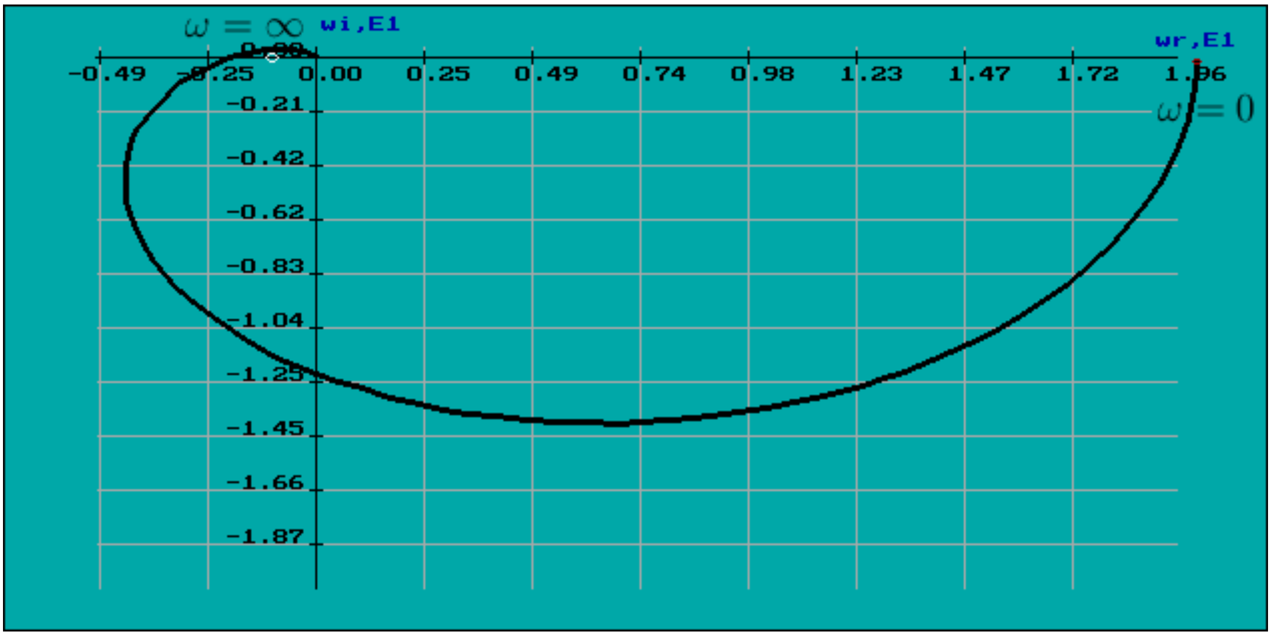


Рис. 4.1 (Белым кружком на рисунках выделена точка с координатами $(-1; j0)$.)

Здесь число пересечений годографом отрезка действительной оси $(-\infty; -1)$ равно -1. Поскольку $-1 \neq 0/2$, критерий не выполняется и система в замкнутом состоянии неустойчива.

Снизим коэффициент усиления до $k = 5$.

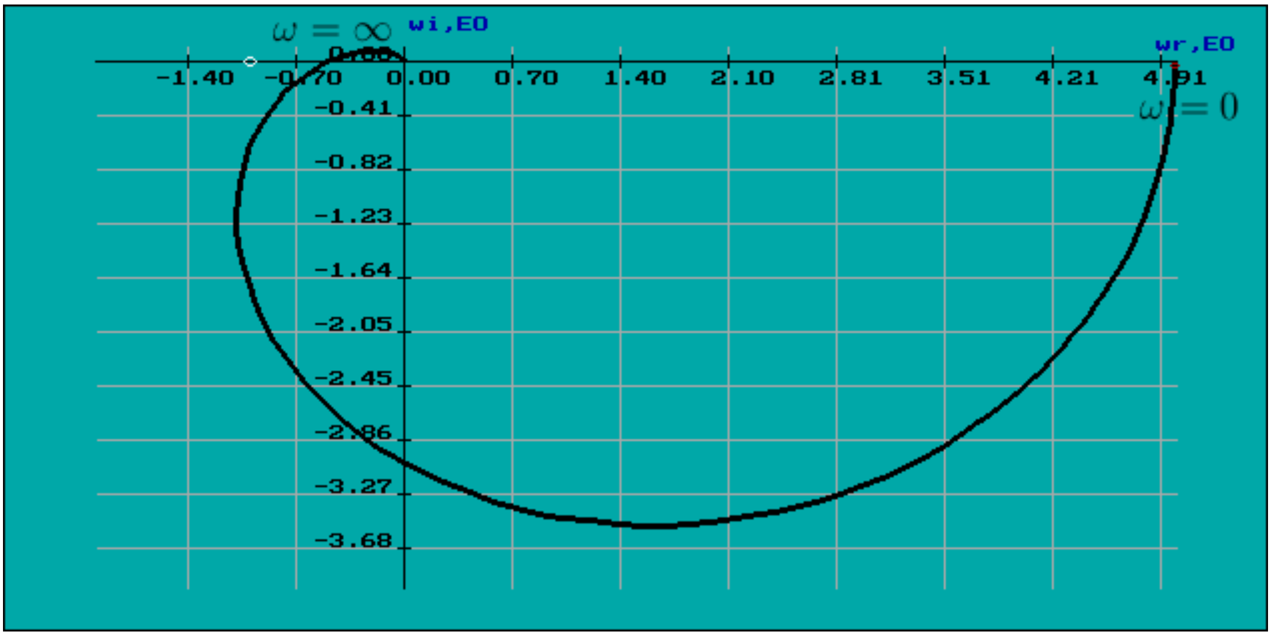


Рис. 4.2

Пересечения годографом отрезка $(-\infty; -1)$ отсутствуют. Поэтому $0 \neq 0/2$, критерий выполняется и, следовательно, система (4.9) устойчива в замкнутом состоянии.

Аналогичные результаты получаются при использовании логарифмических амплитудно-фазовых частотных характеристик. При $k = 20$

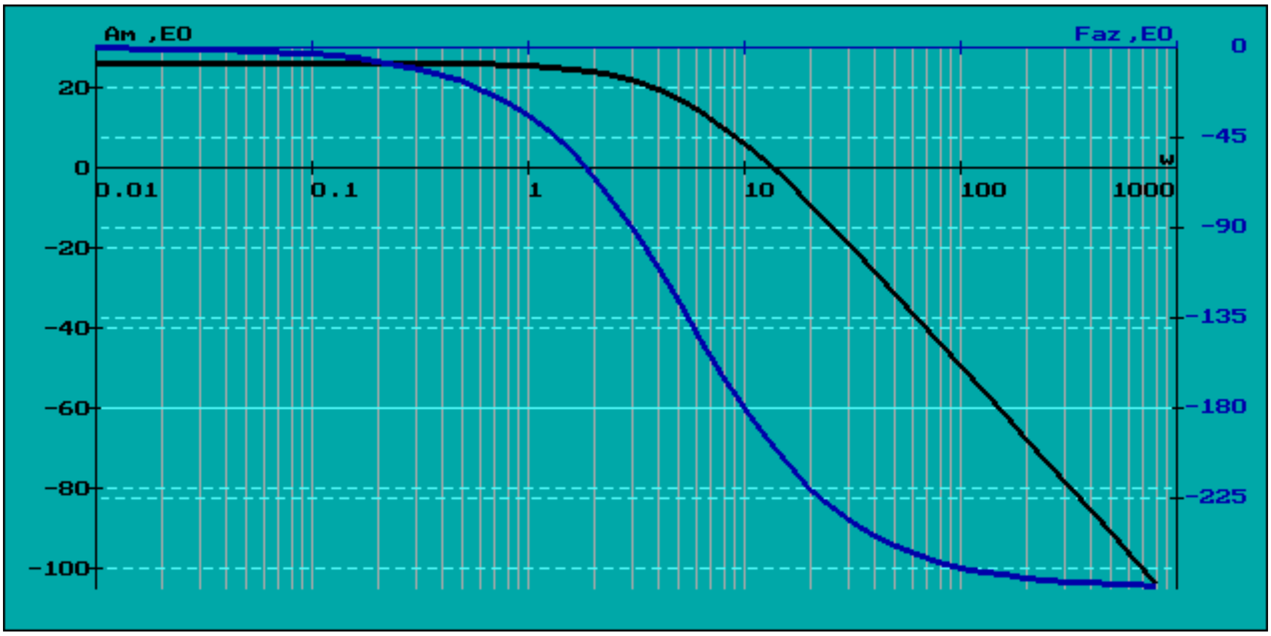


Рис. 4.3

замкнутая система неустойчива, т.к. фазовая характеристика $\varphi(\omega)$ на рис. 4.3 пересекает прямую -180°, где $L(\omega) > 0$.

При $k = 5$ (рис. 4.4)

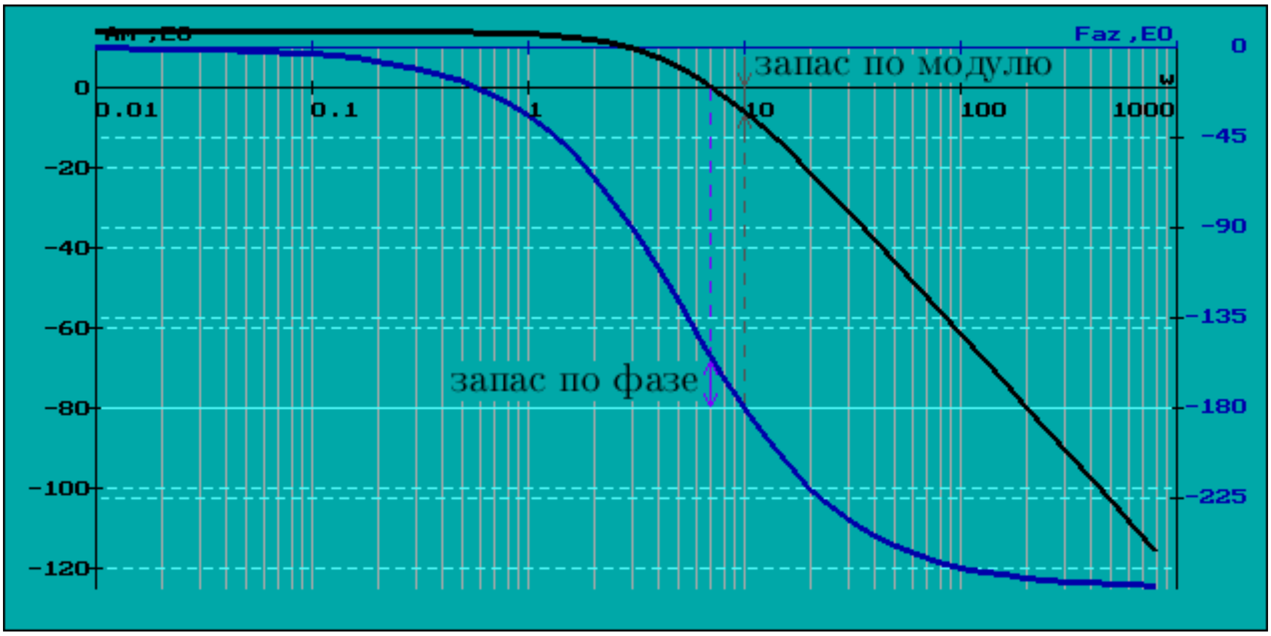


Рис. 4.4

система устойчива и имеет запас по фазе 30° и запас по модулю 5 *Дб*.

Анализ устойчивости замкнутой ЛДС, неустойчивой в разомкнутом состоянии. Возьмём передаточную функцию ЛДС в разомкнутом состоянии вида

$$W(s) = \frac{k}{s(Ts-1)}\,. \tag{4.11}$$

Поскольку здесь один из корней $\lambda = 1$ положителен и находится в правой полуплоскости, система вида (4.11) неустойчива в разомкнутом состоянии.

При $k = 1$; $T = 0.9$; частотный годограф на комплексной плоскости примет вид, показанный на рис. 4.5.

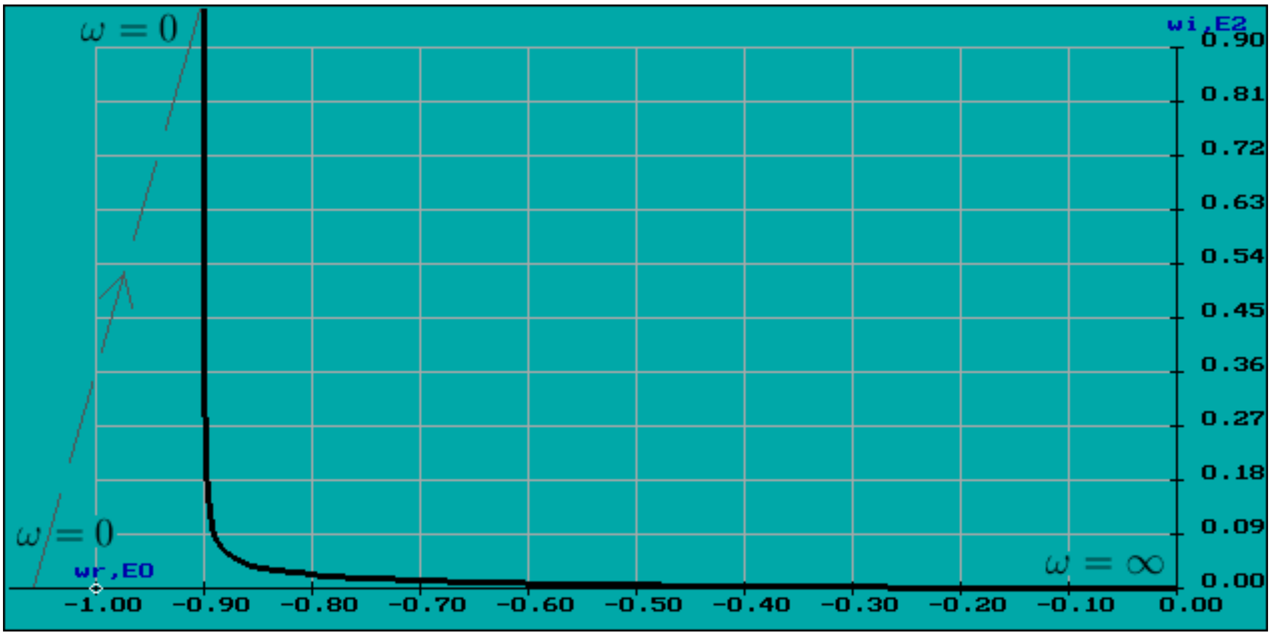


Рис. 4.5

Годограф при $\omega = 0$ необходимо доопределить. Поэтому число пересечений им отрезка $(-\infty; -1)$ равно $-1/2$. В данном случае $-1/2 \neq 1/2$, критерий не выполняется и система в замкнутом состоянии будет также неустойчива при любых k и T.

При использовании логорифмических частотных характеристик получим зависимости, показанные на рис. 4.6.

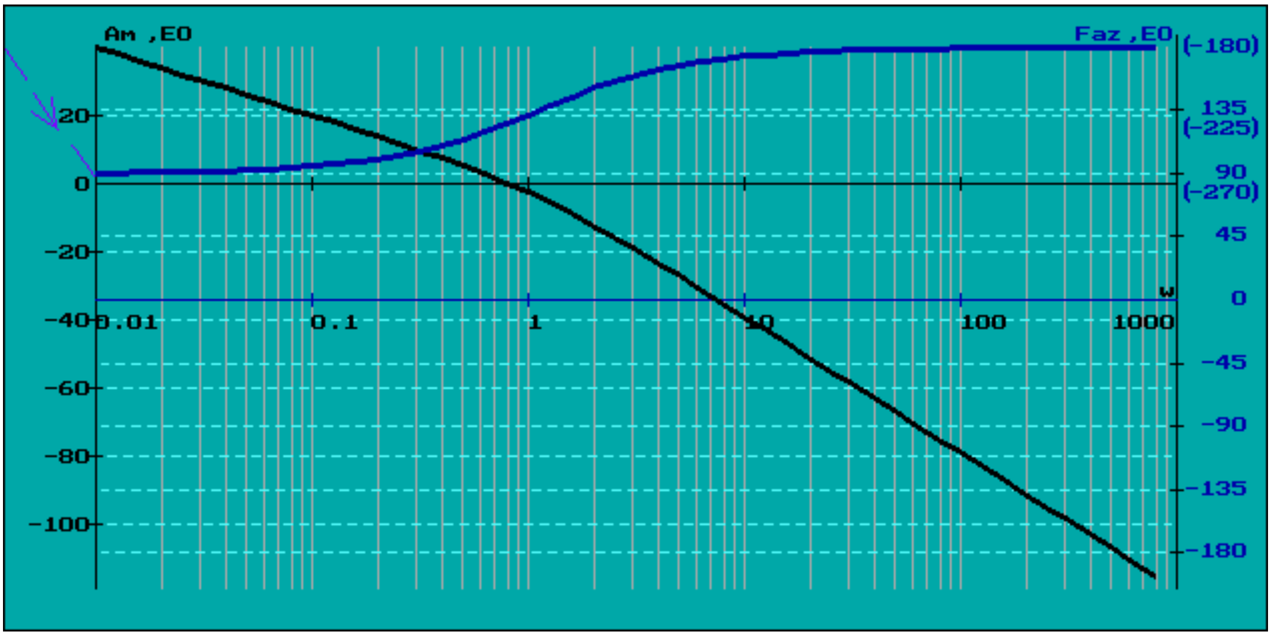


Рис. 4.6

Здесь с учётом доопределения годографа при $\omega = 0$ получим число пересечений фазовой характеристикой $\varphi(\omega)$ прямой -180° также $-1/2$. Поэтому $-1/2 \neq 1/2$, система неустойчива в замкнутом состоянии.

ТЕМА 5. Показатели качества процессов управления.

Раздел 5.1. Время регулирования и перерегулирование. Показатели качества характеризуют поведение выходнолй координаты $x(t)$ в течение переходного процесса.

При использовании единичного ступенчатого задающего воздействия могут быть определены следующие показатели качества:

$$\begin{aligned} t_p \; &– \; \text{время регулирования и} \\ \sigma_{max} \; &– \; \text{перерегулирование.} \end{aligned}$$

Используются также показатели, основанные на расположении полюсов (корней) $\lambda = \alpha + j\omega$ замкнутой системы:

$$\text{степень устойчивости} \quad \eta = |\alpha|_{min} \ ,$$

$$\text{колебательность} \quad \mu = \frac{\omega}{\alpha} \ ,$$

$$\text{логарифмический декремент затухания} \quad d = \frac{2\pi\alpha}{\omega} \ .$$

В тех случаях, когда имеет место доминирующий плюс, $t_p \approx \dfrac{3}{|\lambda|_{min}}$.

На величину σ_{max} оказывают большое влияеие имеющиеся запасы по фазе γ_c и модулю h_m . С их падением величина σ_{max} возрастает.

ТЕМА 6. Показатели точности процессов управления.

Показатели точности характеризуют поведение системы в установившемся режиме.

Раздел 6.1. **Коэффициенты добротности, статизм и астатизм.** В качестве показателей точности могут быть использованы коэффициенты добротности системы

$$\begin{array}{ll} k_p & - \text{ по положению,} \\ k_v & - \text{ по скорости,} \\ k_a & - \text{ по ускорению.} \end{array}$$

Тогда при $t > t_p$ для статической системы при ступенчатом воздействии вида $g(t) = g_0[1](t)$ величина ошибки равна

$$e(t) = \frac{g_0}{1+k_p} \ .$$

Для системы с астатизмом первого порядка при линейно-нарастающем задающем воздействии вида $g(t) = g_1 t$

$$e(t) = \frac{g_1}{k_v} \ .$$

Для системы с астатизмом второго порядка при параболическом задающем воздействии вида $g(t) = \dfrac{g_2 t^2}{2}$

$$e(t) = \frac{g_2}{k_a} \ .$$

Раздел 6.2. **Коэффициенты ошибок.** При различных задающих воздействиях $g(t)$ в установившемся режиме ошибка $e(t)$ может быть представлена в виде

$$e(t) = C_0 g(t) + \frac{C_1}{1!} \cdot \frac{dg(t)}{dt} + \frac{C_2}{2!} \cdot \frac{d^2 g(t)}{dt^2} + \cdots \ , \tag{6.1}$$

где $C_0, C_1, C_2, \ldots$ – коэффициенты ошибок.

Данные показатели показатели точности могут быть вычислены по формуле

$$C_n = \left. \frac{d^n \Phi_e(s)}{ds^n} \right|_{s=0} ; \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \ , \tag{6.2}$$

где $\Phi_e(s)$ – передаточная функция замкнутой системы относительно ошибки.

Здесь имеют место соотношения:

$$k_p = \frac{1}{C_0} \ , \qquad k_v = \frac{1}{C_1} \ , \qquad k_a = \frac{1}{C_2} \ . \tag{6.3}$$

ТЕМА 7. Синтез законов управления частотными методами.

Общие положения. В тех случаях, когда управляемая система относится к классу непрерывных динамических систем, закон управления в скалярном режиме управления может быть представлен в виде соотношения

$$u(t) = C[e(t)] \ , \qquad (7.1)$$

где сигнал ошибки $e(t) = g(t) - x(t)$, $u(t)$ – управляющее воздействие, а оператор $C[\,\cdot\,]$ осуществляет требуемое функциональное преобразование. Оно может быть непрерывным или дискретным, линейным или нелинейным, с постоянными или переменными параметрами и т.д.

Если закон управления является линейным и непрерывным, то вся система управления в целом будет также относиться к классу непрерывных динамических систем.

Закон управления обычно выбирается так, чтобы обеспечить придание системе требуемых динамических свойств, задаваемых, как правило, с использованием показателей качества и точности.

Рассмотрим частотные методы синтеза, применяемые в случае стационарных непрерывных линейных динамических систем.

Раздел 7.1. **Формирование желаемой частотной характеристики разомкнутой системы по заданным значениям показателей качества и точности.** В инженерной практике большое распространение получили частотные методы синтеза. При их использовании вначале необходимо сформировать желаемые частотные характеристики системы в низкочастотной и среднечастотной областях.

Обычно построение желаемой частотной характеристики начинается с определения частоты среза ω_c. При заданном времени регулирования t_p имеем

$$\omega_c \geqslant \frac{2\pi}{t_p} \ . \qquad (7.2)$$

Исходя из условия обеспечения запасов устойчивости, участок частотной характеристики на частоте среза должен иметь наклон -20 *дБ/дек*. При этом, чем шире частотный диапазон этого участка, тем больше будут запасы.

С целью достижения хороших динамических свойств системы необходимо в среднечастотной части характеристики иметь участок с наклоном -40 *дБ/дек*, сопрягаемый с построенным ранее участком на частоте ω_2. Таким образом на частоте $\omega < \omega_2$ частотная характеристика будет иметь наклон -40 *дБ/дек*. Этот участок будет простираться до частоты ω_1, ниже которой будет переходить в участок с наклоном -20 *дБ/дек*, чтобы в системе обеспечивался астатизм первого порядка.

Построенные таким образом логарифмические частотные характеристики приведены на рис. 7.1.

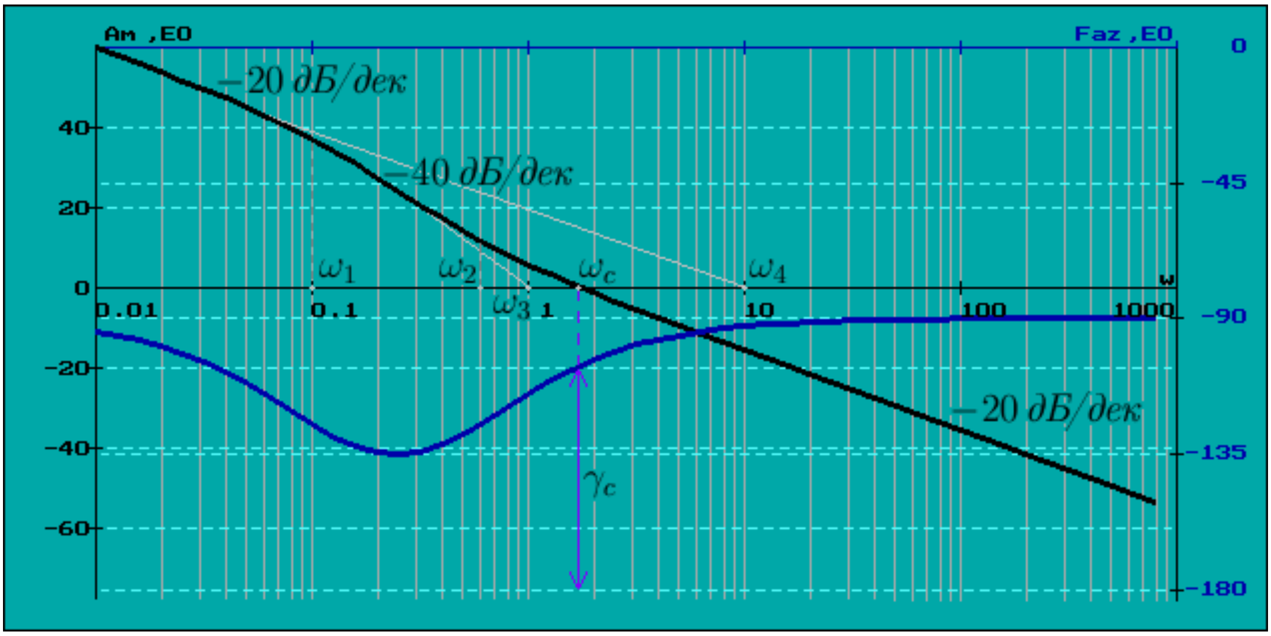


Рис. 7.1

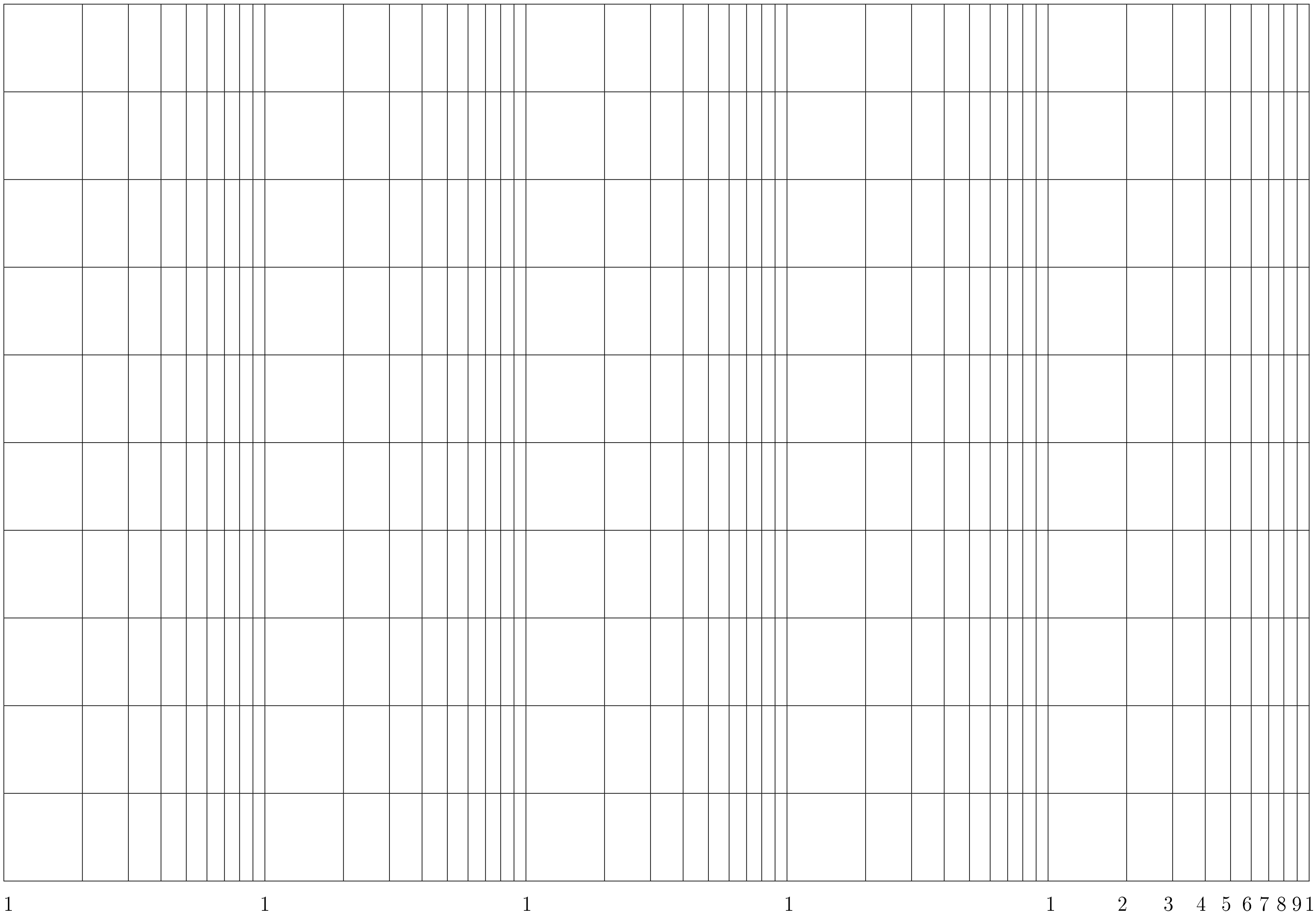
Здесь следует отметить также точку пересечения низкочастотной асимптоты $-20\ дБ/дек$ с осью частот – это значение добротности системы по скорости $\omega_4 = k_v$, точку пересечения среднечастотной асимптоты $-40\ дБ/дек$ с осью частот – $\omega_3 = \sqrt{k_a}$. Здесь же показан запас по фазе γ_c, влияющий на перерегулирование σ_{max}.

Данной частотной характеристики соответствует передаточная функция

$$W(s) = \frac{k(T_2 s + 1)}{s(T_1 s + 1)}\ , \tag{7.3}$$

где $k = k_v\ ;\qquad T_1 = \dfrac{1}{\omega_1}\ ;\qquad T_2 = \dfrac{1}{\omega_2}\ .$

Замыкание этой системы единичной обратной связью позволяет вычислить точное значение величин t_p и σ_{max}. Для их нахождения можно использовать вычислительный модуль.


1 1 1 1 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1