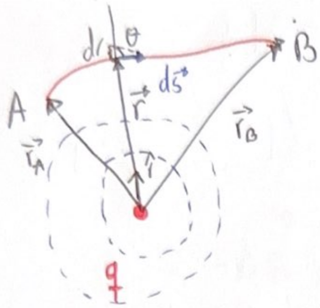
29 de febrero de 2024.

• Potencial eléctrico y energía potencial a causa de cargas puntuales



→ Calcularemos la diferencia de potencial entre los puntos A y B:

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

→ A y B son puntos arbitrarios. Por otro lado, sabemos que, para una carga puntual,

$$\vec{E} = k_e \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

→ Podemos re escribir

$$\vec{E} \cdot d\vec{s} = k_e \frac{q}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{s} = k_e \frac{q}{r^2} \left(\|\hat{r}\| \, ds \cos\theta \right)$$

como $\hat{r}$ es unitario $\Rightarrow \|\hat{r}\| = 1$

$$= k_e \frac{q}{r^2} ds \cos\theta$$

Del diagrama dr θ ds $dr = ds \cos\theta$

$$= k_e \frac{q}{r^2} dr$$

→ Sust. en ~~el po~~ la diferencia de potencial tenemos

$$V_B - V_A = \Delta V = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s} = -K_e q \int_A^B \frac{dr}{r^2}$$

$$= -K_e q \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = -K_e q (-1) \frac{1}{r}\Big|_{r_A}^{r_B} = K_e q \frac{1}{r}\Big|_{r_A}^{r_B}$$

$$= K_e q \left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right]$$

→ Esto significa que $\vec{E}\cdot d\vec{s}$ es independiente de la trayectoria.

→ Análogamente $q_0 \vec{E}\cdot d\vec{s}$ también es independiente de la trayectoria.

→ Si integramos $q_0 \vec{E}\cdot d\vec{s}$ obtenemos el trabajo realizado por la fuerza eléctrica. De esto obtenemos que la fuerza eléctrica es conservativa.

- El campo relacionado con una fuerza conservativa se le llama campo conservativo.

29 de febrero de 2024.

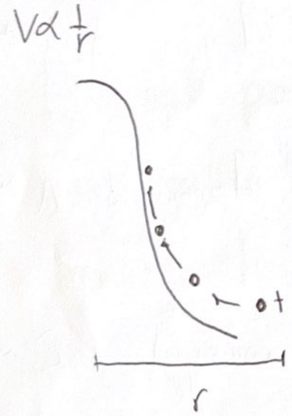
→ Recordemos que, como hablamos de energía potencial necesitamos colocar un punto donde esta valga ceo, es decir, un cero del potencial.

→ Para una carga puntual se elige

$$V(r_A \to \infty) = 0$$

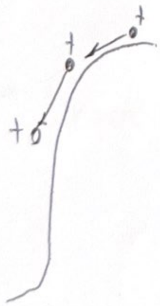
por lo tanto, el potencial eléctrico para una carga puntual en cualquier punto es

$$\underline{\underline{V = K_e \frac{q}{r}}}$$



→ Del potencial vemos (de manera análoga a subir una colina) por qué es difícil acerca una $q_0 > 0$ hacia otro también con carga positivo.

→ ~~Aldedoo~~ Alrededor de una carga negativa tenemos, y con una $q_0 > 0$, que es más fácil acercarla a la carga fuente.



→ Si tenemos dos o más cargas usamos superposición:

$$V = K_e \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

Suma escalar (no vectorial).

→ Por eso, en ocasiones es más fácil calcular V que $\vec{E}$.

→ Veamos la energía potencial para dos partículas, tenemos una q_2 cuyo potencial en algún punto P es V_2. El trabajo que realiza un agente externo para traer otra q_1 desde el infinito hasta P sin aceleración es

$$\begin{aligned} U &= q_1 V_2 \\ &= q_1 \left(K_e \frac{q_2}{r_{12}} \right) \\ &= K_e \frac{q_1 q_2}{} \end{aligned}$$

→ Donde r_{12} es la distancia entre q_1 y q_2.

29 de febrero de 2024.

→ Si q_1 y q_2 tienen el mismo signo, $U > 0$, y un agente externo debe realizar un trabajo positivo ~~al~~ sobre el sistema al acercar las dos cargas porque estas se repelen.

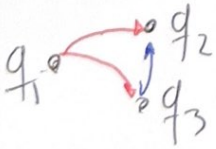
→ Si q_1 y q_2 son de distinto signo, $U < 0$, y el trabajo realizado por el agente, es negativo debido a la fuerza de atracción.

→ Si quitamos q_1 podemos obtener el potencial en P.

$$V = \frac{U}{q_1} = K_e \frac{q_2}{r_{12}}$$

→ Si tenemos más de dos partículas cargadas, la energía potencial se obtiene sumando las U's para cada pareja de cargas:

→ Por ejemplo, si tenemos tres cargas:



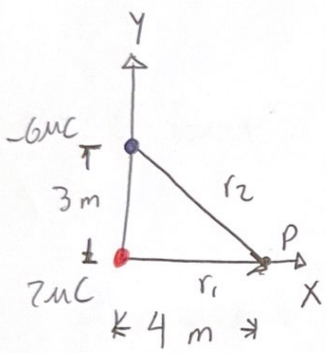
$$U = K_e \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right)$$

Ejercicio. Potencial eléctrico debido a dos cargas puntuales.

Tenemos una carga $q_1 = 2\,\mu C$ en el origen y una carga $q_2 = -6\,\mu C$ en $(0, 3)\,m$

a) Hallar el potencial eléctrico total en el punto $P = (4, 0)\,m$

→ Por superposición, sabemos que:



$$V_P = k_e\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2}\right)$$

$$= \left(8.99\times10^{9}\,\frac{N\cdot m^2}{C^2}\right)\left(\frac{2\times10^{-6}C}{4\,m} + \frac{(-6\times10^{-6}C)}{\sqrt{3^2+4^2}}\right)$$

$$= -6.29\times10^{3}\,V$$

b) Encuentre el cambio en energía potencial del sistema de dos cargas más una $q_3 = 3\,\mu C$ conforme q_3 se mueve de infinito a P.

→ Hemos dicho que en infinito $V(r\to\infty) = 0$, por lo tanto

$$\Delta U = U_f - \cancel{U_i}^{\,0} = q_3 V_P - \cancel{q_3 V_\infty}^{\,0} = (3\times10^{6}\,C)(-6.29\times10^{3}\,V)$$

$$= -1.89\times10^{-2}\,J.$$

• Obtención del valor del campo eléctrico a partir del potencial eléctrico,

→ Sabemos que la diferencia de potencial entre dos puntos es

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s}$$

→ Si el campo es unidimensional, por decir, solo en x, tenemos

$$\vec{E} \cdot d\vec{s} = E_x \, dx.$$

→ Entonces

$$dV = -E_x \, dx$$

→ y, usando separación de variables tenemos

$$E_x = -\frac{dV}{dx}$$

→ Cuando una q_0 se desplaza un $d\vec{s}$ sobre una superficie equipotencial, $dV=0$. Entonces

$$dV = \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 = E \, ds \cos\theta$$

o múltiplo

→ Si $\vec{E}$ y $d\vec{s}$ no son cero, entonces $\theta = \frac{\pi}{2}$ para que $\cos(\theta) = 0$. Por lo que $\vec{E}$ debe ser perpendicular al desplazamiento $d\vec{s}$ a lo largo de una superficie equipotencial.

⇒ Las superficies equipotenciales siempre deben ser perpendiculares a las líneas de campo eléctrico que pasan a través de ellos.

→ Si tenemos simetría esférica,

$$E_r = -\frac{dV}{dr}$$

→ Veamos, para una carga puntual,

$$V = \frac{k_e q}{r}$$

como el potencial solo depende de r, tenemos simetría esférica.

Por lo tanto, el campo es:

$$E_r = -\frac{d}{dr}\left(k_e \frac{q}{r}\right) = -k_e q\left(-\frac{1}{r^2}\right) = \frac{k_e q}{r^2}$$ ☺

→ En general, el campo va a depender de las tres dimensiones por lo que $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$; $E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$; $E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$

→ Esto se reescribe como $\vec{E} = -\nabla V = -\left(\hat{i}\frac{\partial V}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial V}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial V}{\partial z}\right)$

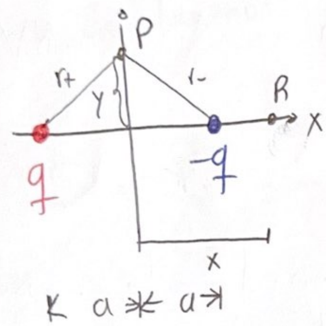
donde $\nabla = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)$ se llama gradiente.

Ejercicio. Potencial eléctrico debido a un dipolo.

Un dipolo consiste de dos cargas de igual magnitud y signo opuesto separadas por una distancia 2a. El dipolo está en el eje x con centro en el origen:

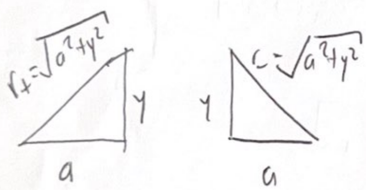
a) Hallé V en el punto P sobre el eje y.

→ Como tenemos dos cargas, usamos superposición,



$$V_p = k_e \frac{q}{r_+} + \frac{k_e(-q)}{r_-}$$

$$= k_e \frac{q}{\sqrt{(a^2)+y^2}} - \frac{k_e q}{\sqrt{a^2+y^2}} = 0$$



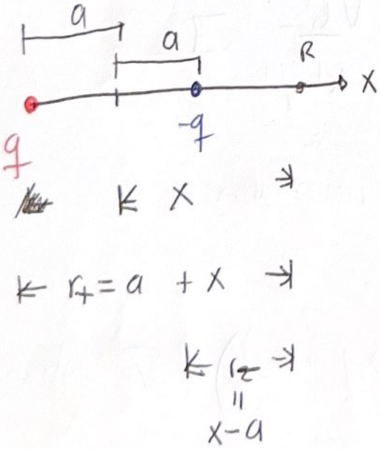
b) Calcule el potencial eléctrico en R

$$V_p = k_e \frac{q}{r_+} + k_e \frac{(-q)}{r_-}$$

$$= k_e \frac{q}{a+x} - k_e \frac{q}{x-a}$$

$$= k_e q \left(\frac{x-a-(a+x)}{x^2-a^2} \right)$$

$$= k_e q \left(\frac{-2a}{x^2-a^2} \right) = -\frac{2k_e q a}{x^2-a^2}$$



c) Calcule V y E_x en un punto sobre x lejos del dipolo.

→ Usemos el resultado anterior con $x >> a$,

$$V_R = \lim_{x>>a} \left(-\frac{2k_e q a}{x^2 - a^2} \right) \approx -\frac{2k_e q a}{x^2}$$

→ Para E_x hagamos $(x >> a)$

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(-\frac{2k_e q a}{x^2} \right) = -\frac{4 k_e q a}{x^3} \qquad (x >> a)$$