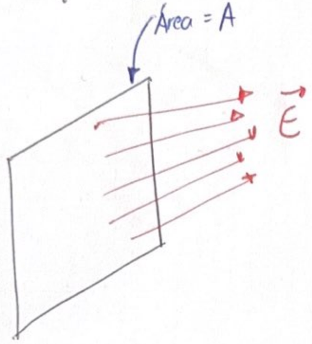
• Flujo eléctrico.

→ Consideremos un campo eléctrico uniforme tanto en magnitud como en dirección. Las líneas del campo atraviesan una superficie rectangular de área A, cuyo plano tiene una orientación perpendicular al campo.



→ Recordemos que el número de líneas ~~es proporcional~~ por unidad de área es proporcional a la magnitud del campo.

→ El total de líneas que atraviesan la superficie es proporcional al producto EA.

→ Definimos el flujo eléctrico como:

$$\Phi_E = EA$$

campo eléctrico

Área superficial perpendicular al campo.

→ Las unidades son

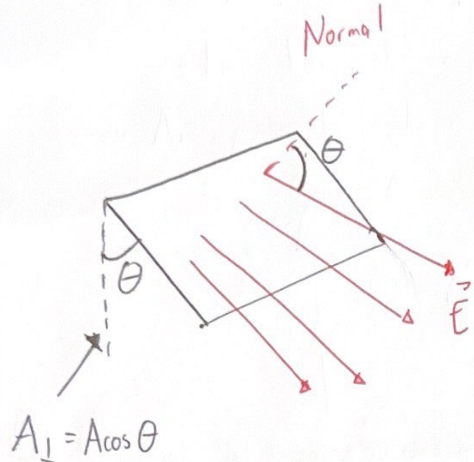
$$[\Phi_E] = \frac{N \cdot m^2}{C}$$

⇒ El flujo eléctrico es proporcional al número de líneas de campo eléctrico que atraviesan una superficie.

18 de febrero de 2024.

→ Si la superficie no es perpendicular al campo, el flujo es menor y se calcula como

$$\Phi_E = EA\cos\theta$$



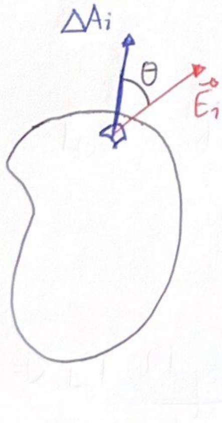
→ Hemos proyectado A a un plano perpendicular al campo.

• Pregunta. ¿Cuándo se tiene el máximo flujo? Cuando el área y el campo son perpendiculares

$$\theta = 0 \rightarrow \cos\theta = 1$$

• Pregunta. ¿Cuándo es cero el flujo? Cuando el plano y el campo son paralelos. $\theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow \cos\theta = 0$

→ En situaciones más generales, cuando el campo no es uniforme y varía sobre la superficie, debemos considerar un ΔA o bien un elemento pequeño.



→ Elegimos un elemento pequeño porque estamos suponiendo que ahí el campo es uniforme.

→ El flujo eléctrico sobre este elemento pequeño es

$$\Delta\Phi_E = E_i \Delta A_i \cos\theta_i = \vec{E_i}\cdot\underbrace{\vec{\Delta A_i}}_{\text{vector perpendicular a la superficie.}}$$

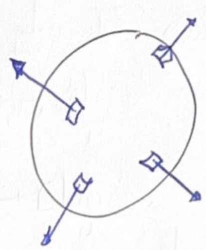
→ El flujo total es:

$$\Phi_E \simeq \sum \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{A}_i \quad ; \quad \Phi_E = \int_{\text{superficie}} \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

La integral es sobre la superficie que estamos considerando.

→ Veamos la siguiente definición que nos será útil más tarde: uns superficie cerrada es aquella que divide el espacio en una región exterior y una interior. Un ejemplo de esto es la superficie de una esfera.

→ En este ejemplo (sup. cerrada), se toma por convención que los vectores normales a la superficie apuntan hacia afuera.



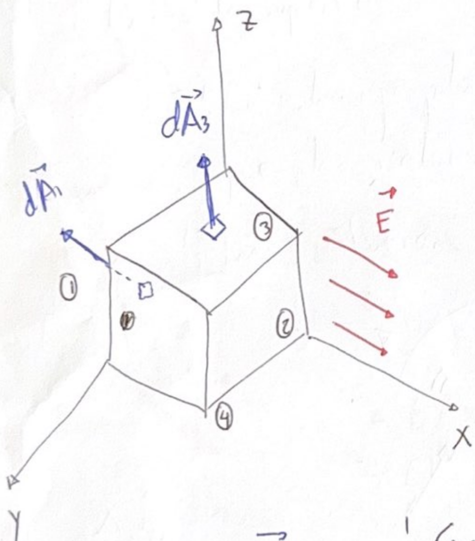
→ Para una superficie cerrada, el flujo se define como

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

→ El flujo neto a través de la superficie es proporcional al número neto de líneas que salen de la superficie menos las que entran.

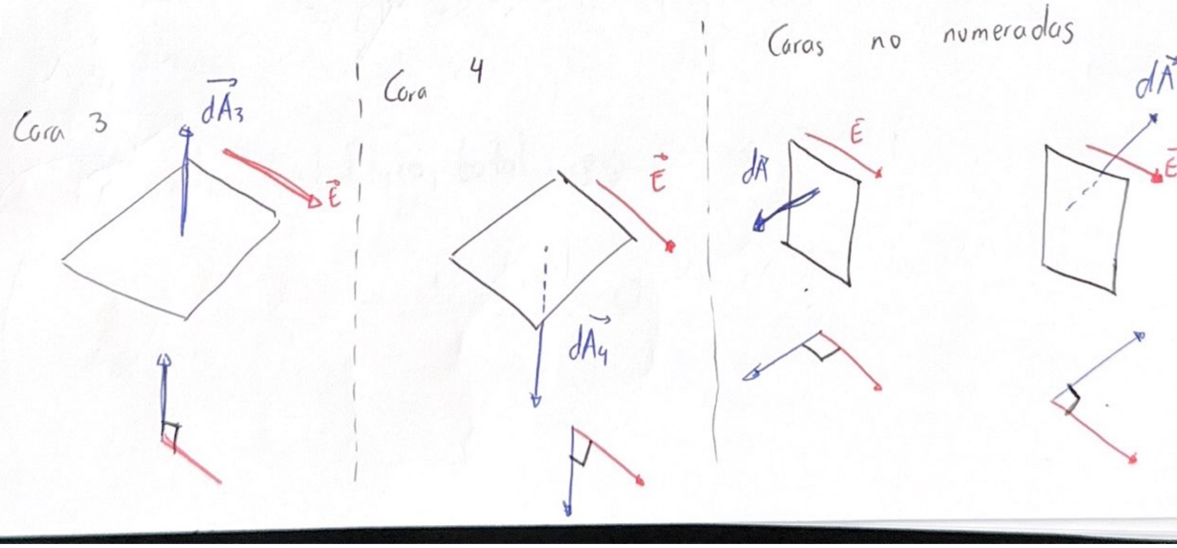
• Ejercicio. Flujo a través de un cubo.

→ Considere un campo eléctrico uniforme $\vec{E}$ orientado en la dirección x en el espacio vacío. Encuentre el flujo eléctrico neto a través de la superficie de un cubo con arista l.



→ El lado 4 es la cara inferior y 1 es el opuesto a 2.

→ El flujo es cero en las caras 3, 4 y los no numerados porque el campo es perpendicular a estos planos, es decir, el vector normal a dichas superficies es perpendicular al campo.

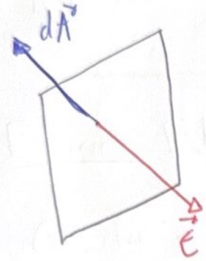


18 de febrero de 2024.

→ El flujo queda como

$$\oint_E = \int_1 \vec{E}\cdot d\vec{A}_1 + \int_2 \vec{E}\cdot d\vec{A}$$

→ Cara 1



$$\oint_1 = \int_1 \vec{E}\cdot d\vec{A}_1 = \int E dA\cos(\pi) = -E\int dA = -E\int_0^l\int_0^l dx\,dy$$

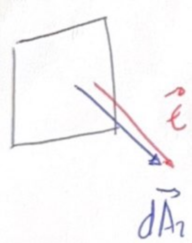
$$= -E\int_0^l dx \int_0^l dy = -E\left[x\Big|_0^l\right]\left[y\Big|_0^l\right] = -l^2 E$$

o bien

$$\phi_1 = -E\int dA = -EA = -El^2$$

→ Cara 2

$$\oint_2 = \int_2 \vec{E}\cdot d\vec{A}_2 = \int E dA\cos\theta = E\int dA = E\int_0^l\int_0^l dx\,dy$$



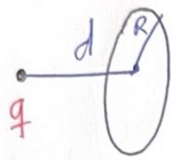
$$= E\left(x\Big|_0^l\right)\left(y\Big|_0^l\right) = El^2$$

→ De lo anterior, el flujo total es:

$$\oint_E = \oint_1 + \oint_2 = -El^2 + El^2 = 0$$

• **Ejercicio.**

→ Una carga q está situada a una distancia d sobre un eje perpendicular que pasa por el centro geométrico de una superficie circular de radio R. Hallar el flujo eléctrico sobre dicha superficie.



→ Para conocer el flujo eléctrico necesitamos conocer el campo eléctrico.

→ Como es una carga, sabemos que

$$\vec{E} = K\frac{q}{r^2}\hat{u}$$

→ Por la simetría del problema, nos conviene usar ~~sim~~ coordenadas polares.

El diferencial de área es

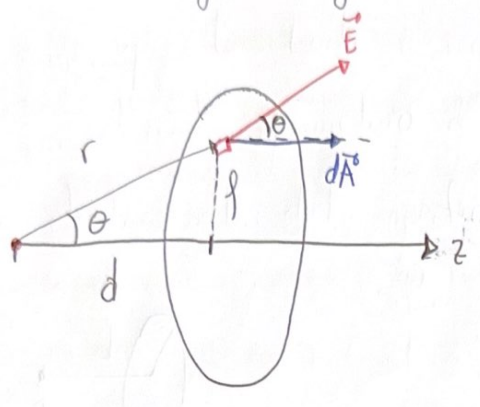
$$d\vec{A} = \rho\, d\rho\, d\phi\, \hat{k}$$

→ Usando la definición tenemos que el flujo es

$$\Phi = \int \frac{kq}{r^2}\rho\, d\rho\, d\phi\, \hat{u}\cdot\hat{k} \quad ; \text{donde } \hat{u}\cdot\hat{k} = \cos\theta$$

$$= \int_0^R\int_0^{2\pi} kq\,\frac{\rho\cos\theta\, d\rho\, d\phi}{r^2}$$

→ Veamos el siguiente diagrama.



→ De aquí tenemos que

$$r = \sqrt{d^2+\rho^2}$$

→ y

$$\cos\theta = \frac{d}{r} = \frac{d}{\sqrt{d^2+\rho^2}}$$

→ Sust. tenemos

$$\Phi_E = Kq\int_0^R\int_0^{2\pi} \rho \cdot \frac{d}{\sqrt{d^2+\rho^2}} \cdot \frac{1}{(d^2+\rho^2)} \cdot d\rho\, d\phi$$

$$= Kqd \int_0^{2\pi} d\phi \cdot \int_0^R \frac{\rho\, d\rho}{(d^2+\rho^2)^{3/2}} \quad ; \quad u = \rho^2+d^2, \; du = 2\rho\, d\rho$$

$$= 2\pi kqd \cdot \frac{1}{2}\int_{d^2}^{R^2+d^2} \frac{du}{u^{3/2}}$$

$$= \pi kqd \int_{d^2}^{R^2+d^2} u^{-3/2}\, du = \pi kqd \left(\frac{1}{-\frac{1}{2}} \cdot u^{-1/2} \Big|_{d^2}^{R^2+d^2} \right)$$

$$= 2\pi kqd \left(\frac{1}{u^{1/2}} \Big|_{R^2+d^2}^{d^2} \right) = 2\pi kqd \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{\sqrt{R^2+d^2}} \right)$$