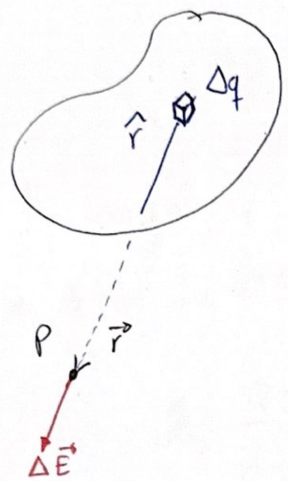
Campo eléctrico de una distribución de carga contina.



→ Se divide la carga total en pequeño elementos de carga

$$\Delta q$$

→ Se aplica la definición de campo eléctrico

$$\Delta\vec{E} = k_e \frac{\Delta q}{r^2}\,\hat{r}$$

→ El campo eléctrico total en P es la suma de todos las contribuciones

$$\vec{E} \simeq k_e \sum_i \frac{\Delta q_i}{r_i^2}\,\hat{r}_i$$

→ Como hemos supuesto que la carga es continua, de cálculo integral sabemos que la suma se convierte en una integral

$$\vec{E} = k_e \lim_{\Delta q_i \to 0} \sum_i \frac{\Delta q_i}{r_i^2}\,\hat{r}_i = k_e \int \frac{dq}{r^2}\,\hat{r}$$

→ Si la carga se distribuye uniformemente en un volumen, se define la densidad de carga volumétrica

$$\rho \equiv \frac{Q}{V} \quad ; \quad [\rho] = \frac{C}{m^3}$$

→ Si la carga Q tiene una distribución uniforme en una superficie de área A, se define la densidad de carga superficial.

$$\sigma \equiv \frac{Q}{A} \quad ; \quad [\sigma] = \frac{C}{m^2}$$

→ Si la carga Q tien una distribución uniforme en una línea de longitud l, se define la ~~densid~~ densidad lineal de carga.

$$\lambda \equiv \frac{Q}{l} \quad ; \quad [\lambda] = \frac{C}{m}$$

→ Si la distribución no es uniforme las cantidades de carga se definen como

$$dq = \rho\, dV \quad ; \quad dq = \sigma\, dA \quad ; \quad dq = \lambda\, dl$$

donde ρ, σ y λ son funciones de otros parámetros.

14 de febrero de 2024.

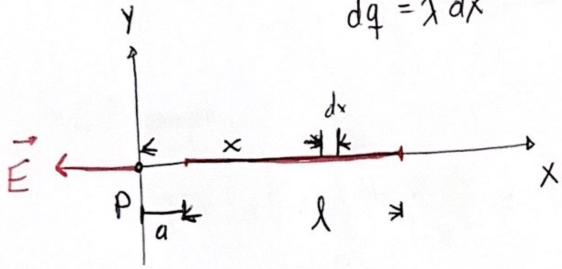
• Ejercicio. Campo eléctrico debido a una barra con carga.

→ Una barra de longitud l tiene una carga positiva uniforme por unidad de longitud λ y una carga total Q. Calcule el campo eléctrico en un punto P que se ubica a lo largo del eje de la barra y a una distancia a desde un extremo.

→ De la definición, debemos considerar una cantidad pequeña de carga

$$dq$$

$$dq = \lambda\, dx$$



→ Como la distribución es uniforme, podemos hacer

$$\lambda = \frac{dq}{dx} \Rightarrow dq = \lambda dx.$$

→ El campo eléctrico producido por dq es:

$$d\vec{E} = k_e \frac{dq}{r^2}\hat{r}$$

→ Como el ~~movimien~~ problema es una sola dimensión, podemos trabajar solo con la magnitud y tenemos

$$dE = k_e \frac{dq}{x^2}$$

→ Como cada segmento de la barra produce un campo eléctrico en la dirección ~~p~~ negativo, la contribución total también será en x negativos para el punto P.

Nota: Las cargas positivas generan campos eléctricos que alejan a las otras cargas $+$, $\vec{E}$.

→ Sustituyendo cuanto vale dq, tenemos

$$dE = Ke \frac{\lambda dx}{x^2}$$

→ Para obtener el campo total, haremos la integral de la expresión anterior. Como ~~Ko~~ queremos saber el que produce la barra, los índices de son:

$$a \longrightarrow l + a.$$

→ El campo es

$$E = \int dE = \int_a^{l+a} Ke \frac{\lambda dx}{x^2} = Ke\lambda \int_a^{a+l} \frac{dx}{x^2} = -\cancel{\lambda} K\lambda \left[\frac{1}{x}\right]\Bigg|_a^{l+a}$$

$$= -K\lambda \left[\frac{1}{l+a} - \frac{1}{a}\right] = K\lambda \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{l+a}\right] = \frac{l+a-a}{a(l+a)} K\lambda$$

$$= K\lambda \frac{l}{a(l+a)}$$; usando que $\lambda = \frac{Q}{l}$ tenemos

$$E = K \frac{Q}{\cancel{l}} \cdot \frac{\cancel{l}}{a(l+a)} = \frac{KQ}{a(l+a)}$$

$$E = \frac{KQ}{a(l+a)}$$

- Ejercicio. ¿Qué le pasa al campo si $\ell \to 0$?

$$\lim_{\ell \to 0} \quad E = \frac{kQ}{a^2}$$; se recupera el campo de una carga puntual.

- Ejercicio ¿Qué pasa si P está muy lejos de la barra?

Si P está muy lejos de la barra, se considera

$$a >> \ell$$

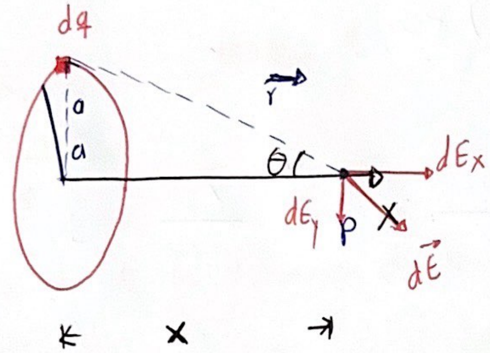
por lo tanto

$$E = \frac{kQ}{a(\ell + a)} \longrightarrow \frac{kQ}{a^2}$$

→ Esto significa que, si estamos muy lejos, ~~vercom~~ veremos a la barra como si fuera una carga puntual.

• Ejercicio. Campo eléctrico de un anillo de carga uniforme.

→ Un anillo de radio a porta una carga total positiva distribuida uniformemente. Calcule el campo eléctrico debido al anillo en un punto P que se encuentra a una distancia x de su centro, a lo largo del eje central perpendicular al plano del anillo.

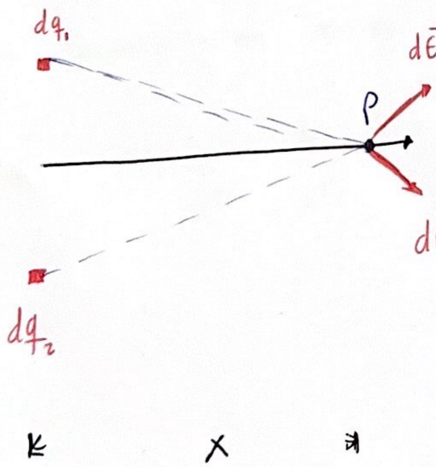


→ Analicemos el problema, como la carga es positiva, la dirección del campo es la misma que la del vector $\vec{r}$.

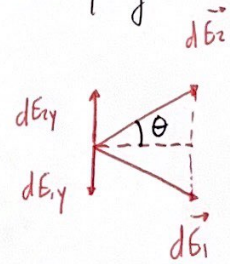
→ Para facilitar el estudio, podemos dividir el campo $\vec{dE}$ producido por dq en sus componentes dE_x, dE_y.

→ ¿Qué pasa si consideramos otra carga dq opuesta ~~a la car~~ (en posición) a la carga que consideramos originalmente? Veamos

$dq_1 = dq_2$

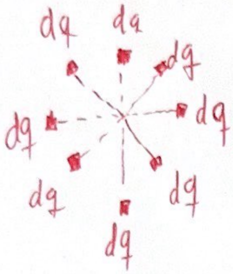


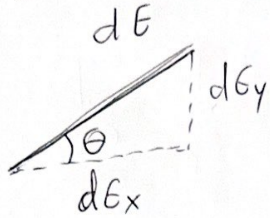
→ Descompongamos cada componente



→ Como $dq_1 = dq_2 = dq$, el campo producido (en magnitud) es el mismo. Por lo tanto, las componentes en y tienen la misma magnitud pero en dirección contraria.

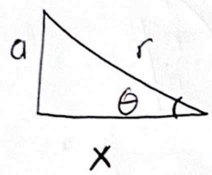
→ Entonces, las componentes en y se anulan y solo debemos calcular la componente del campo eléctrico en x.





; $dE_x = dE\cos\theta$

→ Por otro lado,



$\cos\theta = \frac{x}{r}$ y $r = \sqrt{a^2+x^2}$

→ Entonces, de la definición de campo eléctrico:

$$dE = k\frac{dq}{r^2} = \frac{k\,dq}{a^2+x^2}$$

→ Luego $dq = \lambda a\,d\theta$. ~~Integrando tenemos~~

$\cancel{\vec{E} = \int k\,dq}$

→ La componente en x es:

$$dE_x = dE\cos\theta = \frac{k\,dq}{a^2+x^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{kx}{\sqrt{a^2+x^2}}\cdot dq = \frac{kx}{(a^2+x^2)^{3/2}}\lambda a\,d\theta$$

$\frac{dq}{dx} = \lambda \quad dq = \lambda dx$

14 de febrero de 2024.

→ Integrando la expresión anterior tenemos

$$E_x = \int_0^{2\pi} \frac{Kx}{(a^2+x^2)^{3/2}} \lambda a \, d\theta = \frac{Kx\lambda a}{(a^2+x^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{Kx}{(a^2+x^2)^{3/2}} \cdot (\lambda a 2\pi)$$

$$\Rightarrow E_x = \frac{Kx}{(a^2+x^2)^{3/2}} \cdot Q$$

→ Algo similar se había obtenido al hacer:

$$E_x = \frac{Kx}{(a^2+x^2)^{3/2}} \int_0^{Q} dQ = \frac{KxQ}{(a^2+x^2)^{3/2}}$$