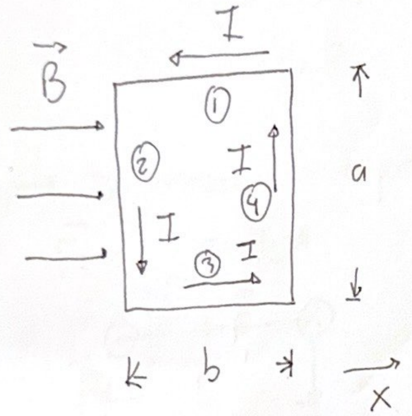
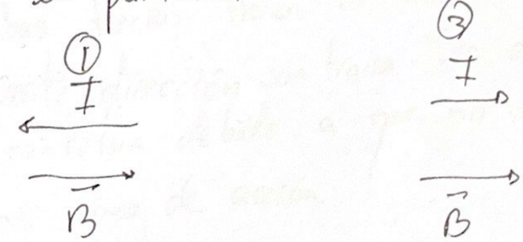
- Momento de torsión sobre una espira de corriente en un campo magnético uniforme.

→ Analicemos ahora qué pasa con una espira de corriente en un campo magnético.

→ Consideremos una espira rectangular con corriente $I$ en un $\vec{B}$ uniforme paralelo al plano de la espira.




→ En los lados 1 y 3 no hay fuerza porque las corrientes y $\vec{B}$ son parlelas.




$$\vec{L} \times \vec{B} = 0$$

→ Para 2 y 4 sí hay fuerzas porque $I$ y $\vec{B}$ son perpendiculares. 4

$$\vec{F_4} = I\vec{L} \times \vec{B}$$
$$= Ia\hat{j} \times \vec{B}$$
$$= Ia\hat{j} \times B\hat{i}$$
$$= IaB\,\hat{j} \times \hat{i}$$
$$= -IaB\hat{k}$$

$$\Rightarrow F_4 = \|\vec{F_4}\| = IaB$$

→ La fuerza entra a la hoja.

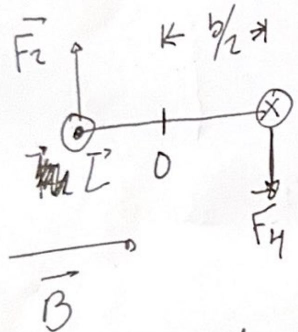
→ Para 2 ~~4~~ tenemos

$$\vec{F}_2 = I\vec{L}\times\vec{B}$$
$$= I(-a\hat{j})\times\vec{B}$$
$$= -aI\,\hat{j}\times B\hat{i}$$
$$=(-aIB)\,\hat{j}\times\hat{i}$$
$$=(-aIB)(-\hat{k})$$
$$= aIB\,\hat{k}$$

$\Rightarrow F_2 = \|\vec{F_2}\| = IaB$

→ La fuerza sale de la hoja.

→ Si vemos la espira desde arriba tenemos




→ Ambas fuerzas tienen la misma magnitud pero ~~diferente~~ dirección contraria. Sin embargo, no se cancelan debido a que no actúan en la misma línea de acción.

→ Suponiendo que la espira pueda girar, las fuerzas producen un momento de torsión haciendo que la espira gire.

→ La torca se define como

$$\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F}$$

→ Como nos interesa la magnitud y $r$ y $F$ son perpendiculares solo estudiaremos $\tau = rF$

→ La torca máxima será, en magnitud,

$$\tau_{max} = \tau_2 + \tau_4$$

$$= F_2 \frac{b}{2} + F_4 \cdot \frac{b}{2}$$ ; $\frac{b}{2}$ es el brazo de palanca.

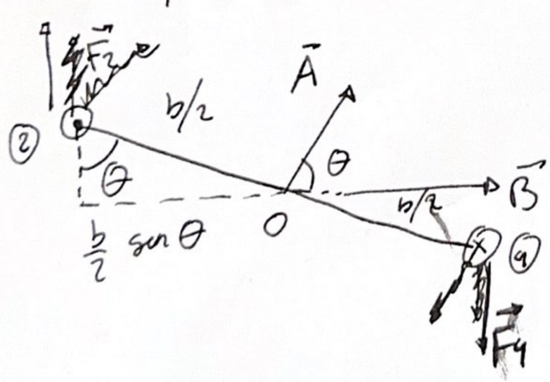
$$= IaB \cdot \frac{b}{2} + IaB \cdot \frac{b}{2}$$

$$= IabB$$ ; como ab es el área, podemos hacer

$$= I\underbrace{A}_{\text{área de la espira.}}B$$

$$\boxed{\tau_{max} = IAB}$$ ← Solo es válida cuando B es paralelo al plano de la espira.

→ Ahora, veamos el caso en que $\vec{B}$ no es paralelo, es decir, forma un ángulo $\theta < 90$ con una línea perpendicular al plano de la espira.




→ $\vec{F_1}$ y $\vec{F_3}$ se cancelan porque tienen la misma magnitud pero en sentido contrario.

→ Para las fuerzas $\vec{F_2}$ y $\vec{F_4}$, como ya no son perpendiculares a $r$ tenemos que

$$\|\vec{\tau}\| = \|\vec{r} \times \vec{F}\| = r F \operatorname{sen}\theta$$

por lo que

$$\tau_{max} = \tau_2 + \tau_4$$

$$= F_2 \frac{b}{2} \operatorname{sen}\theta + F_4 \frac{b}{2} \operatorname{sen}\theta$$

$$= I a B \cdot \frac{b}{2} \operatorname{sen}\theta + I a B \cdot \frac{b}{2} \cdot \operatorname{sen}\theta = I a b B \operatorname{sen}\theta$$

$$= I A B \operatorname{sen}\theta$$

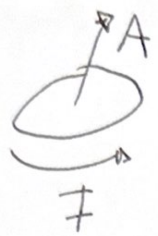
→ Luegos tenemos que podemos expresar

$$\cancel{\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times (I \vec{L} \times \vec{B})}$$

$$\vec{\tau} = I \vec{A} \times \vec{B}$$

→ donde $\vec{A}$ es perpendicular al plano de la espira y su magnitud es el área.

→ Aplicamos la ~~direcci~~ regla de la mano derecha para saber la dirección de $\vec{A}$.




→ Definimos el momento dipolar magnético $\vec{\mu}$ (momento magnético) de la espira como:

$$\vec{\mu} \equiv I\vec{A}$$

$$[\mu] = A \cdot m^2$$

→ Si el arreglo (bobina) contiene $N$ espiras con la misma área tenemos:

$$\vec{\mu}_{bobina} = N I \vec{A}$$

→ De esta forma la torca se define como:

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$ } Sirve para cualquier espira.

→ que es análoga a la del dipolo eléctrico:

$$\vec{\tau}_E = \vec{p} \times \vec{E}$$

→ La energía potencial de un sistema dipolo magnético — campo magnético depende de la orientación del dipolo en dicho campo, y está dada por.

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

• La energía es mínima cuando $\vec{\mu}$ y $\vec{B}$ tienen la misma dirección

$$U_{min} = -\mu B$$

• La energía es máxima cuand $\vec{\mu}$ apunta en la dirección opuesta de $\vec{B}$:

$$U_{max} = \mu B$$

→ La torca en la espira la hace girar. Este es el principio de los motores eléctricos.

• Ejercicio. Momento dipolar magnético de una bobina,

→ Una bobina rectangular con dimensiones de 5.4 cm × 8.5 cm consiste en 25 vueltas de alambre y conduce una corriente de 15.0 mA. Se aplica un campo magnético de 0.35 T paralelo al plano de la bobina.

a) Calcular la magnitud del momento dipolar magnética

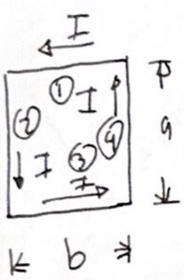
$$\mu = NIA = (25 \text{ vueltas})(15 \times 10^{-3} A)(0.054 \text{ m})(0.085 \text{ m})$$
$$= 1.72 \times 10^{-3} \ A \cdot m^2$$

b) ¿Cuál es la magnitud del momento de torsión que actía sobre la espira?

$$\tau = \mu B = (1.72 \times 10^{-3} A \cdot m^2)(0.35\,T)$$
$$= 6.02 \times 10^{-4}\, N.m.$$

*Para el lunes.

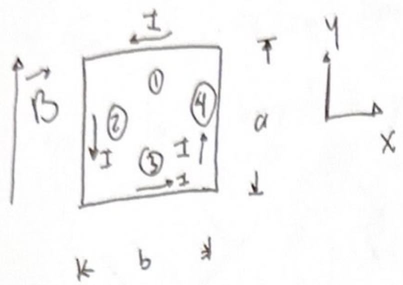
- Ejercicio. Rotación de una bobina.
  Considere la espira de alambre de la figura. Imagine que gira sobre un eje a lo largo del lado ④, que es paralelo al eje z y se amarra de modo que el lado ④ permanece fijo y el resto de la espira cuelga verticalmente pero puede dar vueltas alrededor del lado ④. La masa de la espira es de 50g, y los lados trenen longitudes

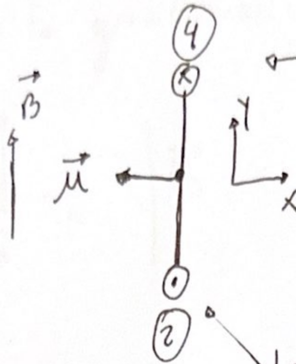



$a = 0.2\,m$ y $b = 0.1\,m$.

La espira conduce una corriente de 3.5 A y se sumerge en un $\vec{B}$ uniforme vertical de 0.01 T de magnitud en la dirección +y. ¿Qué ángulo forma el plano de la espira con la vertical?

5 de mayo de 2024.

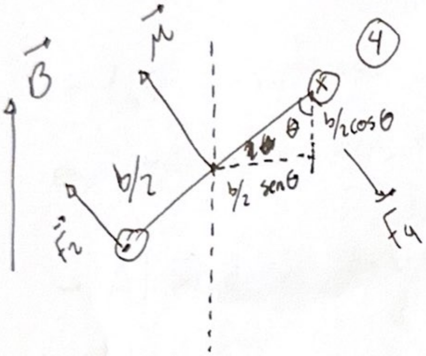


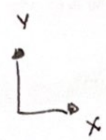




← Suponemos que fijamos la espira de tal forma que el eje de giro es el lado (4).

La espira está en el plano xy

Las corrientes en los lados (2) y (4) se mueven en la dirección $\hat{k}$.

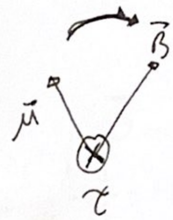


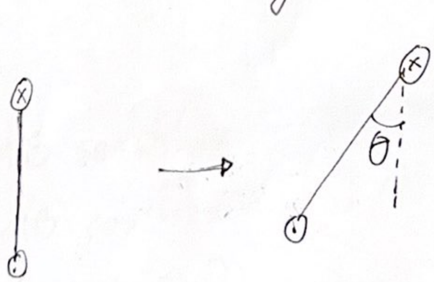

→ Siguiendo la regla de la mano derecha, y de la definición de torca

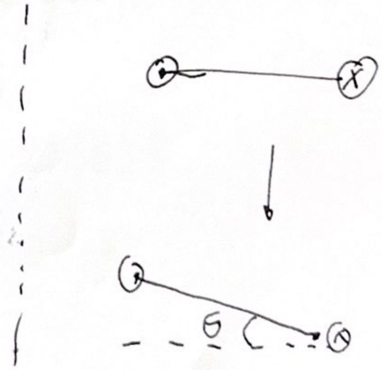
$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

tendremos que el giro de la espira será en el sentido de las manecillas del reloj.



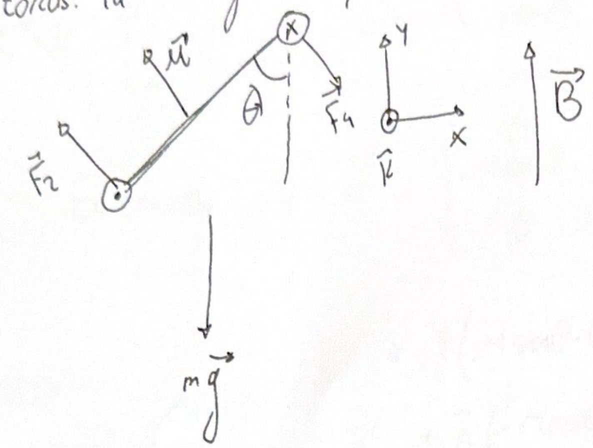

→ Como la espira gira en el sentido horario, esta se despegará de la vertical formando un ángulo θ.



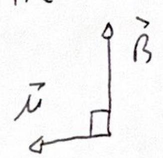
5 de mayo de 2024 (6)

→ En el sistema actúan dos tipos de fuerza y por lo tanto dos torcas: la magnética y la gravitacional.

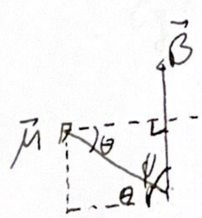



→ Nos interesa ver cuando las torcas magnética y gravitacional están en equilibrio, es decir, en la situación del diagrama anterior.

→ Al inicio, el ángulo entre $\vec{\mu}$ y $\vec{B}$ es:




después es




$$\phi = \frac{\pi}{2} - \theta$$

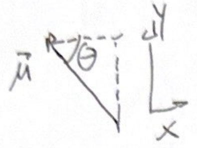
→ De la regla de la mano derecha sabemos que la dirección de la torca será $-\hat{k}$, entonces:

$$\vec{\tau}_B = \vec{\mu} \times \vec{B} = \mu B \operatorname{sen}\phi(-\hat{k}) = -\mu B \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\hat{k}$$

$$= -\mu B \cos(\theta)\hat{k} = -IAB\cos(\theta)\hat{k}$$

$$= -Iab\cos(\theta)\hat{k}$$

→ O bien, $\mu_x = -\mu\cos\theta$ $\quad \vec{B} = B\hat{j}$




$\mu_y = +\mu \operatorname{sen}\theta$

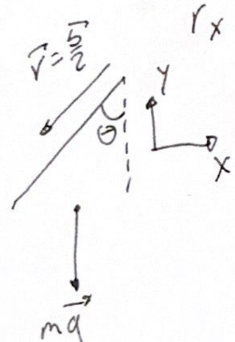
→ Entonces, $\vec{\mu}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -\mu\cos\theta & \mu\operatorname{sen}\theta & 0 \\ 0 & B & 0 \end{vmatrix}$

$$= \hat{\imath}(\mu\operatorname{sen}\theta\cdot 0 - 0\cdot B) - \hat{\jmath}(-\mu\cos\theta\cdot 0 - 0)$$
$$+\hat{k}(-\mu\cos\theta B - 0\cdot\mu\operatorname{sen}\theta)$$

$$= -\mu B\cos\theta\,\hat{k}$$
$$= -IabB\cos\theta\,\hat{k}$$

→ Por otro lado, para la parte gravitacional tenemos:

$r_x = -r\operatorname{sen}\theta\,\hat{\imath}$ ; $r_y = -r\cos\theta\,\hat{\jmath}$ $\quad \vec{F}_g = -mg\,\hat{\jmath}$

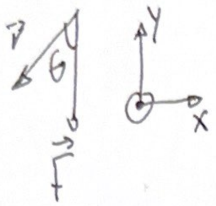



$$\vec{\tau}_g = \vec{r}\times\vec{F} = (-r\operatorname{sen}\theta\,\hat{\imath} - r\cos\theta\,\hat{\jmath})\times(-mg\,\hat{\jmath})$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -r\operatorname{sen}\theta & -r\cos\theta & 0 \\ 0 & -mg & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{\imath}(-r\cos\theta\cdot 0 - (-mg)0)$$
$$-\hat{\jmath}((-r\operatorname{sen}\theta)\cdot 0 - 0)$$
$$+\hat{k}(r\operatorname{sen}\theta mg - (-r\cos\theta)0)$$
$$= mgr\operatorname{sen}\theta\,\hat{k} = mg\frac{b}{2}\operatorname{sen}\theta\,\hat{k}$$

→ Análogamente, de la regla de la mano derecha tenemos que la dirección de $\vec{\tau}_g$ será en $\hat{k}$, esto es




$$\vec{\tau}_g = \vec{r} \times \vec{F} = \left(\frac{b}{2}\right)(mg) \operatorname{sen}\theta \, \hat{k}$$

$$= mg\frac{b}{2} \operatorname{sen}\theta \, \hat{k}$$

→ La torca total será

$$\sum \vec{\tau} = -IabB\cos\theta \, \hat{k} + mg\frac{b}{2} \operatorname{sen}\theta \, \hat{k} = 0$$

porque el sistema está en equilibrio

→ Despejaremos el ángulo:

$$IabB\cos\theta = mg\frac{b}{2} \operatorname{sen}\theta$$

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{2IaB}{mg} = \tan\theta$$

$$\Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{2IaB}{mg}\right) = \arctan\left(\frac{2(3.5A)(0.2m)(0.01\ T)}{(0.05\,kg)(9.81\,m/s^2)}\right)$$

$$\Rightarrow \theta = 1.64^{\circ}$$