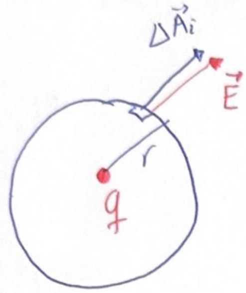
Ley de Gauss.

→ La ley de Gauss describe una correspondencia entre el flujo eléctrico neto a través de una superficie cerrado (o superficie gaussiana) y la carga encerrada en la superficie.

→ Supongamos una carga puntual positiva q ubicada en el centro de una esfera de radio r.



→ Sabemos que la magnitud del campo eléctrico en todos los puntos de la superficie de la esfera es

$$E = k_e \frac{q}{r^2}$$

→ También sabemos que las líneas de campo apuntan radialmente hacia afuera y por lo tanto son normales a la superficie. Esto es $\vec{E}$ y $\Delta\vec{A}_i$ son paralelos.

→ Significa que podemos escribir

$$\vec{E}\cdot\Delta\vec{A}_i = E\Delta A_i$$

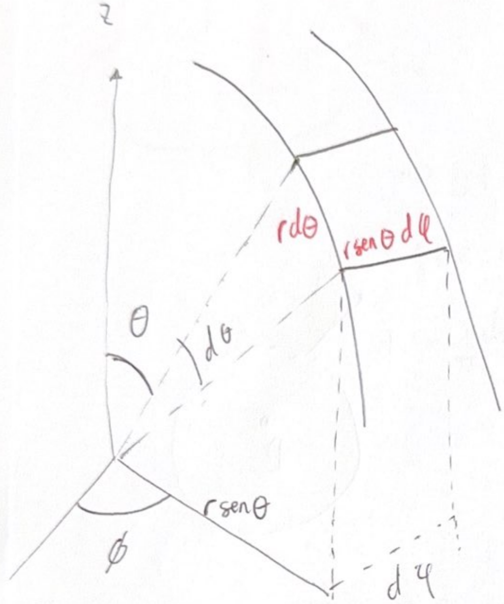
→ Usando la definición de flujo eléctrico tenemos:

$$\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \oint E\,dA = E\oint dA$$

→ E es constante sobre la superficie, por eso sale de la integral.

→ Como la superficie es esférica,

$$\int dA = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} r^2 \,\text{sen}\,\theta \, d\theta \, d\phi = r^2 \int_0^{\pi} \text{sen}\,\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi$$



$$= r^2 (2\pi) \left(-\cos\theta\right)\Big|_0^{\pi} = 2\pi r^2 \left[-(-1) - (-(1))\right]$$

$$= 4\pi r^2$$

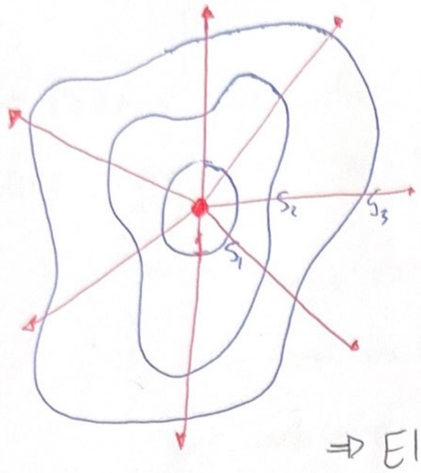
→ Sustituyendo en la definición de flujo tenemos

$$\Phi_E = K_e \frac{q}{\cancel{r^2}} \left(4\pi \cancel{r^2}\right) = 4\pi K q$$

→ Pero, sabemos que $K = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0}$, entonces el flujo es

$$\Phi_E = \cancel{4\pi} \cdot \frac{1}{\cancel{4\pi}\varepsilon_0} q \Rightarrow \boxed{\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0}}$$

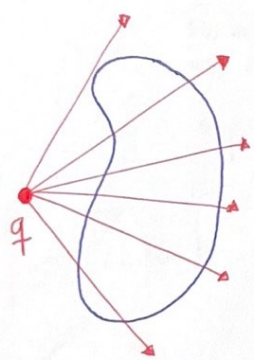
El flujo neto a través de la superficie es proporcional a la carga encerrada.



→ De este diagrama podemos ver que el número de líneas que atraviesan S_1 es el mismo número de líneas que atraviesan S_2 y S_3. De esto, podemos concluir que

⇒ El flujo neto a través de cualquier superficie cerrada que rodea a una carga puntual q tiene un valor de $\boxed{\frac{q}{\varepsilon_0}}$ y es independiente de la forma de la superficie.

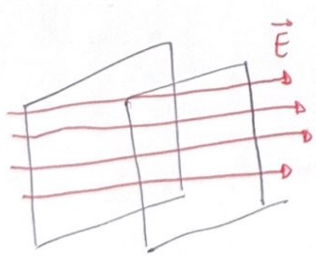
→ Consideremos ahora que la carga puntual está fuera de la superficie cerrada. Del diagrama vemos que cualquier línea de campo que entre a la superficie saldrá de ella por otro lado. El número de líneas que entran es el mismo número que salen. Por lo tanto:



⇒ El flujo neto a través de una superficie cerrada que no rodea a ninguna carga es igual a cero.

→ Esto puede verse en el ejemplo del cubo, el número de líneas que entraban es el mismo que salía.

$$\Phi = -El^2 + El^2 = 0$$



porque el cubo no encerraba ninguna carga.

21 de febrero de 2024.

→ Podemos generalizar este resultado a un sistema de cargas o una carga continua si usamos superposición

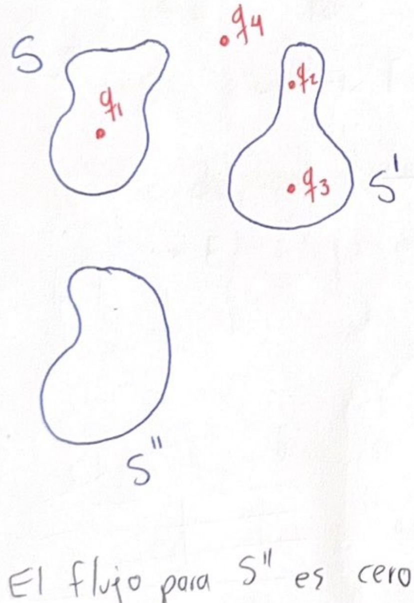
⇒ El campo eléctrico debido a muchas cargas es igual a la suma vectorial de los campos eléctricos producidos por cada una de las cargas individuales.

→ El flujo será:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots) \cdot d\vec{A}$$

Recuerde que el camo es sobre la superficie.

• **Ejemplo.** ¿Cuánto vale el flujo para las siguientes superficies?



→ La superficie S rodea solo a la carga q_1, por lo tanto el flujo neto es

$$\frac{q_1}{\varepsilon_0}$$

→ La superficie S' rodea a las cargas $q_2 + q_3$, el flujo es

$$(q_2 + q_3)/\varepsilon_0$$

→ El flujo para S'' es cero pues no hay carga encerrado.

→ La carga q_4 no afecta por estar fuera de todas las superficies.

→ Entonces, la ley de Gauss, dice que el flujo neto a través de cualquier superficie cerrada es

$$\boxed{\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}}$$

q_{in} → Carga encerrada por la superficie. (Carga total)

$\vec{E}$ → Campo eléctrico sobre la superficie. (Campo total)

• Ejercicio. Una superficie gaussiana esférica rodea a una carga puntual q. ¿Qué pasa si...?

a) La carga se triplica.

$$\Phi_E' = \frac{q'_{in}}{\varepsilon_0} = \frac{(3q_{in})}{\varepsilon_0} = 3\left(\frac{q_{in}}{\varepsilon_0}\right) = 3\Phi_E$$

→ El flujo se triplica porque es proporcional a la carga.

b) Se duplica el radio de la esfera.

→ El flujo no cambia porque se pierde la dependencia en r

$$EA = (4\pi \cancel{r^2}) \cdot \frac{k_e q}{\cancel{r^2}}$$

c) La superficie se cambia a la forma de un cubo.

→ El flujo no cambia porque las líneas de campo eléctrico pasan a través de la superficie sin importar la forma.

d) la carga se mueve a otro punto dentro de la superficie.

→ El flujo no cambia porque la ley de Gauss se refiere a la carga total encerrada sin importar su ubicación.

• Aplicaciones.

→ La ley de Gauss es útil para determinar campos eléctricos cuando la distribución de carga tiene simetría.

→ Se recomienda hallar una superficie tal que:

i) El valor del campo eléctrico, por simetría, es constante sobre la superficie.

ii) El producto $\vec{E} \cdot d\vec{A}$ pueda reducirse a EdA, es decir $\vec{E}$ y $d\vec{A}$ sean paralelos.

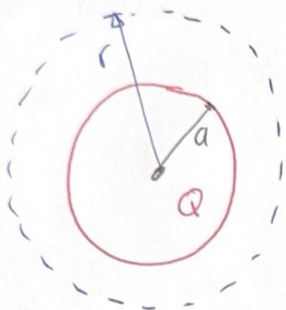
iii) $\vec{E}$ y $d\vec{A}$ sean perpendiculares tal que $\vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$.

iv) $\vec{E}$ sea cero sobre la superficie.

• Ejercicio.

Una esfera sólida aislante con radio a tiene una densidad de carga volumétrica uniforme. y una carga positiva total Q

a) Calcule el campo eléctrico en un punto afuera de la esfera.



→ Como la distribución de carga es uniforme en toda la esfera, el problema tiene simetría esférica. y podemos aplicar la ley de Gauss.

→ Elijamos como superficie Gaussiana a una superficie esférica de radio r cuyo centro coincida con el de la esfera con carga.

→ La ley de Gauss dice que:

$$\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

→ Como la carga es positiva, el campo eléctrico apunta hacia afuera, con dirección radial ($\hat{r}$).

→ Por otro lado, el vector del diferencial de área también tiene dirección radial por lo que el producto punto se reduce a

$$\vec{E}\, d\vec{A} = E\,dA$$

→ Por otro lado, por simetría, $\vec{E}$ es constante en toda la superficie de la esfera.

→ La ley de Gauss se reduce a

$$\oint \vec{E}\, d\vec{A} = \oint E\, dA = E \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} r^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

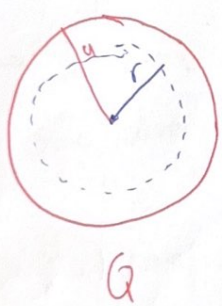
→ Despejando el campo,

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} = k\frac{Q}{r^2} \quad ; \; r > a$$

↓

Equivalente a una carga puntual.

b) Encuentre la magnitud dentro de la esfera.



→ Elijamos de nuevo una esfera concéntrica pero con $r < a$.

→ Ahora la carga encerrada por la superficie Gaussiana es menor.

→ La carga encerrada es ahora

$$q_{in} = \rho V' \quad ; \text{ donde } V' = \frac{4}{3}\pi r^3 \text{ es el volumen de la esfera "gaussiana".}$$

→ Por otro lado, como la densidad volumétrica de carga es uniforme, podemos hacer

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3} \quad ; \; V \text{ es el volumen de la esfera con carga.}$$

→ Considerando otra vez que el campo eléctrico E es ~~unifo~~ constante en la superficie Gaussiana, aplicamos la Ley de Gauss

$$\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \oint E\,dA = E\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} r^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi = E4\pi r^2 = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

→ Despejando E tenemos

$$E = K\frac{q_{in}}{r^2}$$

→ Sust. q_{in} tenemos

$$E = K\frac{\rho\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)}{r^2} \underset{\text{sust. } \rho}{=} K\cdot\frac{\left(\frac{Q}{\cancel{\frac{4}{3}\pi} a^3}\right)\cdot\left(\cancel{\frac{4}{3}\pi} r^3\right)}{r^2} = K\frac{Q}{a^3}r \quad ; \quad r<a$$

→ Si $r\to 0$ entonces $E\to 0$ y nos quitamos el problema de que el campo diverja en el centro de la esfera con carga.

⇒ ¿El campo es continuo?

→ En el inciso a) obtuvimos que $E = K\frac{Q}{r^2}$, si $r\to a$

$$\lim_{r\to a} E = \lim_{r\to a} \frac{KQ}{r^2} = \frac{KQ}{a^2}$$

→ Por otro lado, del inciso b) tenemos

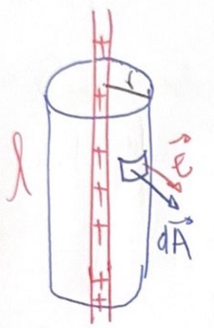
$$\lim_{r\to a} E = \lim_{r\to a} K\frac{Q}{a^3}r = K\frac{Q}{a^3}a = K\frac{Q}{a^2}$$

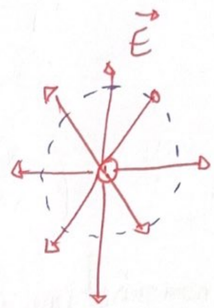
→ El campo es el mismo, por lo tanto es continuo.

• Ejercicio.

→ Encuentre el campo eléctrico a una distancia r desde una línea de carga positiva de longitud infinita y carga constante por unidad de longitud λ.

→ Como la línea es infinitamente larga, el campo es el mismo en todos los puntos equidistantes de la línea.

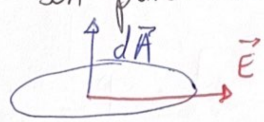




→ Como la carga es positiva, el campo va hacia afuera (dirección radial)

→ Como la carga está distribuida uniformemente, el problema tiene simetría cilíndrica. y podemos usar la ley de Gauss.

→ Elegimos como superficie gaussiana un cilindro y no nos fijaremos en las tapas porque son paralelas al campo.

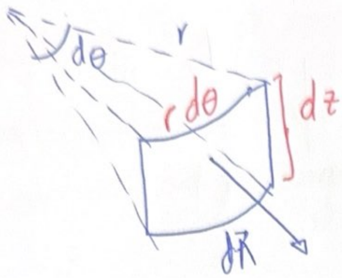


$\vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$

→ La superficie la elegimos coaxial a la línea de carga (mismo centro).

→ Nos interesa solo la parte curva de la superficie. Aplicando ley de Gauss tenemos

$$\Phi_E = \oint \vec{E} d\vec{A} = \oint E dA =$$



$$d\vec{A} = r\,d\theta\,dz\,\hat{r}$$

$$\Phi_E = E\int_0^{l}\int_0^{2\pi} r\,d\theta\,dz = E\,r\int_0^{l} dz\int_0^{2\pi} d\theta = E\,2\pi l r$$

$$= \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

→ Despejando E tenemos

$$E = \frac{1}{2\pi l r}\cdot\frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

→ Pero, como la carga está distribuida uniformemente,

$$q_{in} = \lambda l$$

→ Sust. tenemos

$$E = \frac{1}{2\pi \cancel{l} r}\cdot\frac{\lambda \cancel{l}}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} = 2K\frac{\lambda}{r}$$

- Si la línea de carga no es infinita, no podemos usar ley de Gauss porque ahora deben considerarse los extremos y el campo ya no tiene simetría.

* Revisar para tarea problema 27