Тема: «Статистическое моделирование. Метод Монте-Карло. Визуализация результатов».

Задание 1.

Используя метод Монте-Карло,вычислить площадь треугольника, ограниченного линиями:

1) $y = f(x),\ y = 0,\ x = 0,$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{10x}{n}, \text{ если } x \in [0, n), \\ 10\dfrac{x-20}{n-20}, \text{ если } x \in [n, 20), \end{cases}$$

для $n \le 10$, $n -$ номер варианта.

2) $y = f_1(x),\ y = f_2(x),\ x = 0,$

$$f_1(x) = \frac{10x}{n},$$

$$f_2(x) = 10\frac{x-20}{n-20} + 20$$

для $n \ge 11$, $n -$ номер варианта.

Указание.

1. Построить график функции $y = f(x)$ для $n \le 10$, $y = f_1(x),\ y = f_2(x)$, для для $n \ge 11$. Определить размеры a и b прямоугольника, в котором целиком лежит фигура, площадь которой надо вычислить.
2. Выбрать количество случайных точек N, например N=100.
3. С помощью встроенного генератора случайных чисел получить N равномерно распределенных в прямоугольнике $a \times b$ случайных точек $(x_i, y_i), i = 1, 2, ...N$. Выбрать такую часть последовательностей случайных чисел x_i, y_i, для которой среднее значение(мат. ожидание) и дисперсия мало отличаются от соответствующих для равномерного распределения теоретических значений.
4. Вычислить количество M случайных точек, лежащих внутри фигуры S. Для этого нужно проверить выполнение условия $y_i < f(x_i)$ для $n \le 10$, или для $n \ge 11$, $f_1(x_i) < y_i < f_2(x_i)$. Если это условие выполняется, то точка попадает в S.

5. Вычислить приближенно площадь фигуры по формуле $S \approx \frac{M}{N} \cdot a \cdot b$

   или по формуле $S \approx \frac{a}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} f(x_i)$.

6. Оцените абсолютную и относительную погрешность по методу Монте-Карло.

Задание 2.

Вычислите приближенно интеграл по методу Монте-Карло:

$$1) \int_0^5 \sqrt{11 - u\sin^2 x}dx, \textit{ для } n \le 10,$$

$$2) \int_0^5 \sqrt{29 - u\cos^2 x}dx, \textit{ для } n \ge 11, \textit{ где } n - \textit{номер варианта}.$$

Указание.

Использовать указание для **Задание 1.**

Задание 3.

Вычислите приближенно значение числа π, исходя из вычисления площади круга радиуса $R = n,\ \ n -$ номер варианта.

*Указание.*Т.к. площадь круга радиуса R, лежащего целиком в квадрате со стороной $2R$ и площадью $4R^2$ равна $S_R = \pi R^2$, то $S_R \approx \frac{M}{N}S$. Отсюда $\pi \approx 4\frac{M}{N}$, где $N -$общее число точек квадрата $[-R, R] \times [-R, R], M -$число случайных точек, попавших в круг радиуса R.

1. Выбрать количество случайных точек N, например N=100.
2. С помощью встроенного генератора случайных чисел получить N равномерно распределенных на отрезке $2R$. Выбрать такую часть последовательностей случайных чисел $x_i, i = 1, 2, ...N$, для которой среднее значение(мат. ожидание) и дисперсия мало отличаются от соответствующих для равномерного распределения теоретических

значений. В качестве значений ординат y_i выбрать следующие N значений последовательности случайных чисел $y_j := x_{j+N}; j = 1, 2, \ldots N$.

3. Вычислить количество M случайных точек, лежащих внутри фигуры круга S. Для чего проверить условие: $(x_i + R)^2 + (y_i - R)^2 < R^2$.
4. Построить окружность радиуса R, вписанную в квадрат $[-R, R] \times [-R, R]$, Нанести на этот квадрат выбранные случайные точки с координатами (x_i, y_i). Использовать параметрическое задание окружности: $x = R + R\cos\varphi,\ y = R + R\sin\varphi,\ \varphi \in [0, 2\pi]$.

Задание 4.

Вычислите приближенно по методу Монте-Карло площадь фигуры, ограниченной замкнутой линией, заданной в полярных координатах:

$A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi = \rho^2$, где

1) $A = 11 + n,\ B = 11 - n,$ где $n \le 10,\ n -$ номер варианта.

2) $A = n = 10,\ B = n - 10,$ для $n \ge 11,\ n -$ номер варианта.

Указание.

1. Построиить уравнение кривой, перейдя от полярной системы координат в декартову $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ \rho \in [0, 2\pi]$
2. Определить размеры $[-a, a] \times [-b, b]$ прямоугольника, в котором лежит фигура S, ограниченная заданной замкнутой линией.
3. Выполнить пункты 2,3 из задания 1.
4. Вычислить количество M случайных точек, лежащих внутри фигуры S. Для этого нужно проверить выполнение условия: $r_i < \rho(\varphi_i)$, где (ρ_i, φ_i)- полярные координаты случайной точки (x_i, y_i).