МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»
(Самарский университет)

МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве методических указаний для студентов Самарского университета, обучающихся по программам высшего образования по специальностям 24.05.01 Проектирование, производство и эксплуатация ракет и ракетно-космических комплексов, 24.05.02 Проектирование авиационных и ракетных двигателей, 24.05.07 Самолето- и вертолетостроение и направлениям подготовки 13.03.03 Энергетическое машиностроение, 15.03.04 Автоматизация технологических процессов и производств, 23.03.01 Технология транспортных процессов, 24.03.01 Ракетные комплексы и космонавтика, 24.03.04 Авиастроение, 24.03.05 Двигатели летательных аппаратов, 25.03.02 Техническая эксплуатация авиационных электросистем и пилотажно-навигационных комплексов

Составители: Л.В. Коломиец,
Н.Ю. Поникарова

С А М А Р А
Издательство Самарского университета
2017

УДК 519.6 (075)
ББК 22.193я7

Составители: ***Л.В. Коломиец, Н.Ю. Поникарова***

Рецензент канд. техн. наук, доц. Т.А. Б а я н д и н а

Метод наименьших квадратов: метод. указания / сост.: *Л.В. Коломиец, Н.Ю. Поникарова*. – Самара: Изд-во Самарского университета, 2017. – 32 с.

Методические указания составлены в соответствии с действующей программой по курсу высшей математики для студентов инженерно-технических специальностей Самарского национального исследовательского университета.

Указания содержат краткие теоретические сведения, примеры выполнения расчетных работ и варианты индивидуальных заданий по теме «Метод наименьших квадратов».

Предназначены для подготовки студентов первого курса к выполнению расчетных работ по разделу «Функции нескольких переменных».

УДК 519.6 (075)
ББК 22.193я7

СОДЕРЖАНИЕ

1 Общие положения метода наименьших квадратов

Пусть две величины x и y связаны табличной зависимостью, полученной, например, из опытов.

x	x_1	x_2	…	x_n
y	y_1	y_2	…	y_n

На плоскости xOy данной таблице соответствует n точек $M_i(x_i, y_i)$, где $i = 1, 2, 3, ..., n$. Точки M_i называют *экспериментальными* точками (Рисунок 1).

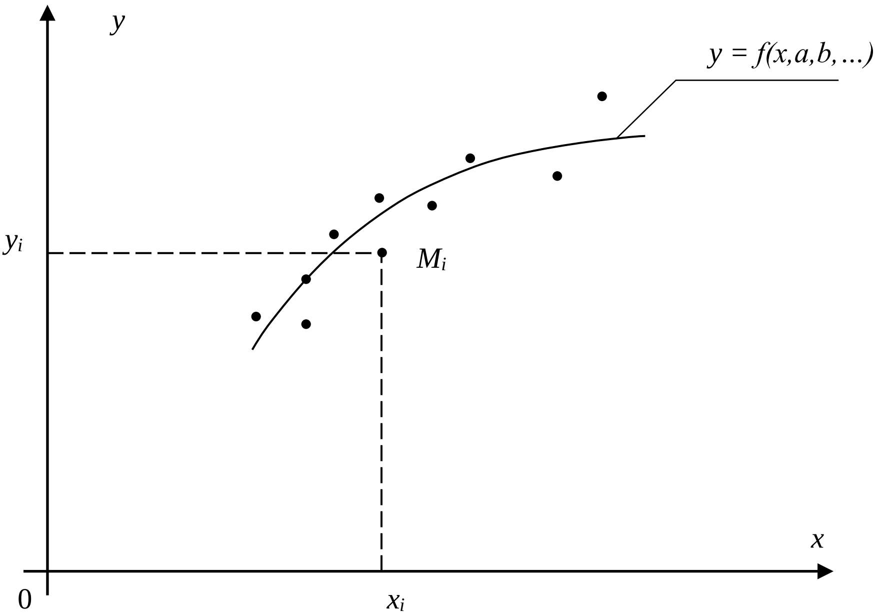

Рисунок 1 - Экспериментальные точки

Требуется установить функциональную зависимость $y = f(x)$ между переменными x и y по результатам экспериментальных исследований, приведенных в таблице.

Применение интерполяции в данном случае нецелесообразно, так как значения y_i в узлах x_i получены экспериментально и поэтому являются сомнительными (в ходе эксперимента возникает неустранимая погрешность, обусловленная неточностью измерений). Кроме того, совпадение значений в узлах не означает совпадения характеров поведения исходной и интерполирующей функций. Поэтому необходимо найти такой метод подбора эмпирической формулы, который не только позволяет найти саму формулу, но и оценить погрешность подгонки.

В общем случае искомая функция $y = f(x)$ будет зависеть не только от x, но и от некоторого количества параметров:

$$y = f(x, a, b, \ldots).$$

Постановка задачи

Найти *аппроксимирующую* функцию

$$y = f(x, a, b, \ldots) \qquad (1)$$

такую, чтобы в точках $x = x_i$ она принимала значения по возможности близкие к табличным, то есть график искомой функции должен проходить как можно ближе к экспериментальным точкам. Вид функции (1) может быть известен из теоретических соображений или определяться характером расположения экспериментальных точек M_i на плоскости xOy.

Для отыскания коэффициентов $a, b, \ldots$ в функции (1) применяется *метод наименьших квадратов*, который состоит в следующем. Между искомой функцией и табличными значениями в точках x_i наблюдаются отклонения. Обозначим их $\Delta y_i = f(x_i, a, b, \ldots) - y_i$, где $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Выбираем значения коэффициентов $a, b, \ldots$ так, чтобы сумма квадратов отклонений принимала минимальное значение:

$$S(a, b, \ldots) = \sum_{i=1}^{n} (\Delta y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_i, a, b, \ldots) - y_i \right]^2 \to \min \quad (2)$$

Сумма $S(a, b, \ldots)$ является функцией нескольких переменных. *Необходимый* признак экстремума функции нескольких переменных состоит в том, что обращаются в нуль частные производные:

$$S'_a = 0, \quad S'_b = 0, \ \ldots . \qquad (3)$$

План решения задачи

1) Выбираем функцию $y = f(x, a, b, \ldots)$.

2) Для отыскания коэффициентов $a, b, \ldots$ составляем систему уравнений (3).

3) Решая систему уравнений (3), находим значения коэффициентов $a, b, \ldots$.

4) Подставляя $a, b, \ldots$ в уравнение (1), получаем искомую функцию $y = f(x, a, b, \ldots)$.

5) По достаточному признаку экстремума функции нескольких переменных следует убедиться в постоянстве знака дифференциала второго порядка этой функции: $d^2S > 0$ при любых приращениях аргументов $da, db, \ldots$.

Такая проверка делается в теоретической части метода наименьших квадратов и на практике не повторяется.

6) Обычно рассматривают несколько видов функций $y = f(x, a, b, \ldots)$ и выбирают ту функцию, для которой суммарная погрешность $\sum_{i=1}^{n} [f(x_i, a, b, \ldots) - y_i]^2$ окажется наименьшей.

Рассмотрим несколько случаев подбора аппроксимирующей функции $y = f(x, a, b, \ldots)$.

1.1 Линейная функция

$$y = ax + b. \qquad (4)$$

Решение

Составим функцию двух переменных и найдем, при каких значениях a, b эта функция принимает минимальное значение:

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2 \to \min. \qquad (5)$$

По необходимому признаку экстремума частные производные функции (5) должны быть равны нулю:

$$\begin{cases} S'_a(a,b)=\sum\limits_{i=1}^{n}2(ax_i+b-y_i)\cdot x_i=0, \\ S'_b(a,b)=\sum\limits_{i=1}^{n}2(ax_i+b-y_i)\cdot 1=0. \end{cases} \qquad (6)$$

Преобразуем уравнения системы (6) следующим образом:

$$\begin{cases} \left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^{\,2}\right)\cdot a+\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)\cdot b=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\cdot y_i\,, \\ \left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)\cdot a\;+\;n\cdot b\;=\;\sum\limits_{i=1}^{n}y_i\,. \end{cases} \qquad (7)$$

Таким образом, получается система линейных уравнений с двумя неизвестными a и b. Коэффициенты при неизвестных a и b (соответствующие суммы) находятся из исходной табличной зависимости и являются постоянными для данной выборки. При различных значениях x_i главный определитель этой системы отличен от нуля:

$$\Delta=\begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n}x_i^{\,2} & \sum\limits_{i=1}^{n}x_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n}x_i & n \end{vmatrix}=n\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^{\,2}-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^2=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\left(x_i-x_j\right)^2\neq 0.$$

Следовательно, система линейных уравнений (7) имеет единственное решение, которое находится по формулам Крамера:

$$a\;=\frac{\Delta_a}{\Delta}=\frac{n\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\cdot y_i\;-\;\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}y_i}{n\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^{\,2}\;-\;\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^2}\,,$$

$$b = \frac{\Delta_b}{\Delta} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i - a \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i .$$

Подставим найденные значения a и b в уравнение (4), и получим искомую линейную функцию $y = ax + b$.

Убедимся, что в стационарной точке $M_0(a,b)$ функция $S(a,b)$ имеет минимум.

Достаточным условием того, что функция двух переменных принимает минимальное значение, является постоянство знака второго дифференциала этой функции: $d^2S(a,b) > 0$ при любых приращениях аргументов da, db.

Дифференциал второго порядка функции $S(a,b)$ имеет вид:

$$d^2S(a,b) = S''_{aa} \cdot da^2 + 2S''_{ab} \cdot da\,db + S''_{bb} \cdot db^2 =$$

$$= \left(2\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}\right) da^2 + 2\left(2\sum_{i=1}^{n} x_i\right) da\,db + (2n)\,db^2 .$$

Второй дифференциал является квадратичной формой второго порядка от переменных da и db. Квадратичная форма принимает только положительные значения при $da \neq 0$ и $db \neq 0$, если соответствующая ей матрица положительно определена.

Матрица квадратичной формы дифференциала второго порядка (матрица Гессе) будет иметь вид:

$$M=\begin{pmatrix} S''_{aa} & S''_{ab} \\ S''_{ab} & S''_{bb} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 & 2\cdot\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \\ 2\cdot\sum\limits_{i=1}^{n} x_i & 2n \end{pmatrix}.$$

Найдем ее главные миноры:

$$H_1=S''_{aa}=2\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i^2>0,$$

$$H_2=\begin{vmatrix} S''_{aa} & S''_{ab} \\ S''_{ab} & S''_{bb} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2\cdot\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 & 2\cdot\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \\ 2\cdot\sum\limits_{i=1}^{n} x_i & 2n \end{vmatrix}=$$

$$=4n\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i^2-4\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2=2\cdot\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(x_i-x_j\right)^2>0.$$

Так как главные миноры матрицы Гессе положительны, то по критерию Сильвестра матрица положительно определена, и квадратичная форма дифференциала $d^2S(a,b)$, соответствующая этой матрице, принимает только положительные значения. Из условия $d^2S(a,b)>0$ следует, что $M_0(a,b)$ – точка минимума функции $S(a,b)$. Итак, коэффициенты a и b, найденные с помощью метода наименьших квадратов, всегда определяют именно минимум функции $S(a,b)$. Более того, так как функция $S(a,b)$ имеет единственную стационарную точку $M_0(a,b)$, минимум функции является *наименьшим* значением $S(a,b)$.

Если коэффициенты линейной функции найдены, можно вычислить суммарную погрешность:

$$S\,(a,b)=\sum_{i=1}^{n}\left[(ax_i+b)-y_i\right]^2 .$$

Метод наименьших квадратов для линейной функции широко применяется при обработке данных не только в теории измерений, но и в математической статистике при нахождении статистических оценок параметров и построении уравнения линейной регрессии, в эконометрике при нахождении трендов, а также в других прикладных дисциплинах.

1.2 Степенная функция

$$y=\beta\cdot x^{a} . \tag{8}$$

Решение

Прологарифмируем по основанию e функцию (8) и получим новое уравнение:

$$\ln y=a\cdot\ln x+\ln\beta . \tag{9}$$

Обозначим $Y=\ln y,\quad X=\ln x,\quad b=\ln\beta$.

Тогда равенство (9) примет вид $Y=aX+b$, где переменные X и Y связаны следующей табличной зависимостью:

$X=\ln x$	$X_1=\ln x_1$	$X_2=\ln x_2$	$\dots$	$X_n=\ln x_n$
$Y=\ln y$	$Y_1=\ln y_1$	$Y_2=\ln y_2$	$\dots$	$Y_n=\ln y_n$

Таким образом, задача 2 свелась к задаче 1. Решая эту задачу, находим значения коэффициентов a и b. Учитывая, что $b=\ln\beta$, находим $\beta=e^{b}$.

Подставим найденные значения a и β в уравнение (8) и получим искомую степенную функцию $y=\beta\cdot x^{a}$.

Суммарная погрешность равна $S\,(a,b)=\sum\limits_{i=1}^{n}\left[\beta\cdot x_i^{a}-y_i\right]^2$.

1.3 Показательная функция

$$y=\beta\cdot e^{ax}. \qquad (10)$$

Решение

Прологарифмируем по основанию e функцию (10) и получим новое уравнение:

$$\ln y=ax+\ln\beta. \qquad (11)$$

Обозначим $Y=\ln y,\quad b=\ln\beta.$

Тогда равенство (11) примет вид $Y=ax+b$, где переменные x и Y связаны следующей табличной зависимостью:

x	x_1	x_2	…	x_n
$Y=\ln y$	$Y_1=\ln y_1$	$Y_2=\ln y_2$	…	$Y_n=\ln y_n$

Таким образом, задача 3 свелась к задаче 1. Решая эту задачу, находим значения коэффициентов a и b.

Учитывая, что $b = \ln\beta$, находим $\beta = e^b$.

Подставим значения коэффициентов a и β в уравнение (10) и получим искомую показательную функцию $y = \beta \cdot e^{ax}$.

Суммарная погрешность равна $S(a,b) = \sum_{i=1}^{n}\left[\beta \cdot e^{ax_i} - y_i\right]^2$.

1.4 Квадратичная функция

$$y = ax^2 + bx + c. \qquad (12)$$

Решение

Составим функцию трех переменных и найдем, при каких значениях a, b, c эта функция принимает минимальное значение:

$$S(a,b,c) = \sum_{i=1}^{n}(ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2 \to \min. \qquad (13)$$

Функция $S(a,b,c)$ будет принимать минимальное значение, если частные производные $S'_a(a,b,c)$, $S'_b(a,b,c)$ и $S'_c(a,b,c)$ обращаются в нуль:

$$\begin{cases} S'_a(a,b,c) = \sum_{i=1}^{n} 2(ax_i^2 + bx_i + c - y_i)\cdot x_i^2 = 0, \\ S'_b(a,b,c) = \sum_{i=1}^{n} 2(ax_i^2 + bx_i + c - y_i)\cdot x_i = 0, \\ S'_c(a,b,c) = \sum_{i=1}^{n} 2(ax_i^2 + bx_i + c - y_i)\cdot 1 = 0. \end{cases} \qquad (14)$$

Преобразуем уравнения системы (14) следующим образом:

$$\begin{cases} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{\ 4}\right)\cdot a + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{\ 3}\right)\cdot b + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{\ 2}\right)\cdot c = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{\ 2}\cdot y_i\,, \\ \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{\ 3}\right)\cdot a + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{\ 2}\right)\cdot b + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)\cdot c = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\cdot y_i\,, \\ \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{\ 2}\right)\cdot a + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)\cdot b + n\cdot c = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i\,. \end{cases}$$

Получили систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными a, b, c. Аналогично случаю двух переменных, эта система имеет единственное решение. Кроме того, можно доказать, что коэффициенты, найденные с помощью метода наименьших квадратов, всегда определяют именно минимум функции $S(a,b,c)$.

Решая систему уравнений, найдем значения коэффициентов a, b, c. Подставим найденные значения a, b, c в уравнение (9), и получим искомую квадратичную функцию $y = ax^2 + bx + c$.

Суммарная погрешность равна

$$S(a,b,c) = \sum_{i=1}^{n}(ax_i^{\ 2} + bx_i + c - y_i)^2 \ .$$

2 Образец решения задания

Дана таблица значений некоторой функциональной зависимости, полученной из $n = 6$ опытов.

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	1,0	1,5	3,0	4,5	7,0	8,5

Задание:

1. Методом наименьших квадратов по данной табличной зависимости найти аппроксимирующую функцию в виде:

1.1 линейной функции $y = ax + b$;

1.2 степенной функции $y = \beta \cdot x^a$;

1.3 показательной функции $y = \beta \cdot e^{ax}$;

1.4 квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$.

Промежуточные вычисления вести с точностью до 0,0001.

Значения параметров a, b, c округлить до 0,01.

2. Построить в плоскости xOy графики полученных функций и нанести экспериментальные точки.

3. Сравнить полученные результаты.

Решение

1.1 Найдем зависимость y от x в виде линейной функции $y = ax + b$.

Выберем значения коэффициентов a и b так, чтобы сумма квадратов отклонений $S(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (\Delta y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2$ была минимальной.

Функция $S(a,b)$ будет принимать минимальное значение, если обращаются в нуль частные производные S'_a и S'_b:

$$\begin{cases} S'_a(a,b) = \sum\limits_{i=1}^{n} 2(ax_i + b - y_i) \cdot x_i = 0, \\ S'_b(a,b) = \sum\limits_{i=1}^{n} 2(ax_i + b - y_i) \cdot 1 = 0. \end{cases}$$

Преобразуем уравнения системы:

$$\begin{cases} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{\,2} \right) \cdot a + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \right) \cdot b = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i \,, \\ \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \right) \cdot a + n \cdot b = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \,, \end{cases} \qquad (14)$$

где $\sum\limits_{i=1}^{6} x_i = 21$, $\sum\limits_{i=1}^{6} y_i = 25{,}5$, $\sum\limits_{i=1}^{6} x_i^{\,2} = 91$, $\sum\limits_{i=1}^{6} x_i \cdot y_i = 117$.

Тогда система уравнений (14) примет вид:

$$\begin{cases} 91a + 21b = 117, \\ 21a + 6b = 25{,}5. \end{cases}$$

Решим систему уравнений по формулам Крамера:

$$a = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad b = \frac{\Delta_2}{\Delta} \ ,$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} 91 & 21 \\ 21 & 6 \end{vmatrix} = 105, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 117 & 21 \\ 25,5 & 6 \end{vmatrix} = 166,5,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 91 & 117 \\ 21 & 25,5 \end{vmatrix} = -136,5.$$

Тогда $a = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1,59$ и $b = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -1,30$.

Следовательно, искомая линейная функция будет иметь вид:

$$y = 1,59x - 1,30.$$

1.2 Найдем зависимость y от x в виде степенной функции $y = \beta \cdot x^a$.

Прологарифмируем равенство $y = \beta \cdot x^a$ по основанию e и получим $\ln y = a \cdot \ln x + \ln \beta$.

Обозначим $Y = \ln y, \quad X = \ln x, \quad b = \ln \beta$.

Тогда получим линейную функцию $Y = aX + b$, где переменные X и Y связаны следующей табличной зависимостью:

$X = \ln x$	0	0,6931	1,0986	1,3863	1,6094	1,7918
$Y = \ln y$	0	0,4055	1,0986	1,5041	1,9459	2,1401

Таким образом, данная задача свелась к задаче 1.1.

Система (14) имеет вид:

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n} \ln^2 x_i\right) \cdot a + \left(\sum_{i=1}^{n} \ln x_i\right) \cdot b = \sum_{i=1}^{n} \ln x_i \cdot \ln y_i, \\ \left(\sum_{i=1}^{n} \ln x_i\right) \cdot a + n \cdot b = \sum_{i=1}^{n} \ln y_i, \end{cases} \tag{15}$$

Найдем коэффициенты системы (15):

$$\sum_{i=1}^{6} \ln x_i = 6,5792, \qquad \sum_{i=1}^{6} \ln y_i = 7,0942,$$

$$\sum_{i=1}^{6} \ln^2 x_i = 9,4099, \qquad \sum_{i=1}^{6} \ln x_i \cdot \ln y_i = 10,5395.$$

Система уравнений (15) будет иметь вид:

$$\begin{cases} 9,4099\, a + 6,5792\, b = 10,5395, \\ 6,5792\, a + 6\, b = 7,0942. \end{cases}$$

Определители системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 9,4099 & 6,5792 \\ 6,5792 & 6 \end{vmatrix} = 13,1735, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 10,5395 & 6,5792 \\ 7,0942 & 6 \end{vmatrix} = 16,5628,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 9,4099 & 10,5395 \\ 6,5792 & 7,0942 \end{vmatrix} = -2,5858.$$

Тогда $a = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = 1,26$ и $b = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = -0,20$.

Учитывая, что $b = \ln \beta$, находим $\beta = e^b = e^{-0,20} = 0,82$, и получаем искомую степенную функцию $y = 0,82 \cdot x^{1,26}$.

1.3 Найдем зависимость y от x в виде показательной функции $y=\beta\cdot e^{ax}$.

Прологарифмируем равенство $y=\beta\cdot e^{ax}$ по основанию e и получим $\ln y = ax+\ln\beta$.

Обозначим $Y=\ln y,\quad b=\ln\beta$.

Тогда получим линейную функцию $Y=ax+b$, где переменные x и Y связаны следующей табличной зависимостью:

x	1	2	3	4	5	6
$Y=\ln y$	0	0,4055	1,0986	1,5041	1,9459	2,1401

Таким образом, задача свелась к задаче 1.1.

Система (14) имеет вид:

$$\begin{cases}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\right)\cdot a+\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)\cdot b=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\cdot\ln y_i\,,\\ \left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)\cdot a\;+\;n\cdot b\;=\;\sum\limits_{i=1}^{n}\ln y_i\,,\end{cases}\qquad(15)$$

Коэффициенты системы (15):

$$\sum_{i=1}^{6}x_i=21,\quad \sum_{i=1}^{6}\ln y_i=7{,}0942$$

$$\sum_{i=1}^{6}x_i^2=91,\quad \sum_{i=1}^{6}x_i\cdot\ln y_i=32{,}6933.$$

Система уравнений (15) будет иметь вид:

$$\begin{cases} 91a + 21b = 32,6933, \\ 21a + 6b = 7,0942. \end{cases}$$

Определители системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 91 & 21 \\ 21 & 6 \end{vmatrix} = 105, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 32,6933 & 21 \\ 7,0942 & 6 \end{vmatrix} = 47,1816,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 91 & 32,6933 \\ 21 & 7,0942 \end{vmatrix} = -40,9871.$$

Тогда $a = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = 0,45$ и $b = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = -0,39$.

Учитывая, что $b = \ln\beta$, находим $\beta = e^b = e^{-0,39} = 0,68$.

Получаем искомую показательную функцию $y = 0,68 \cdot e^{0,45x}$.

1.4 Найдем зависимость y от x в виде квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$.

Выберем коэффициенты a, b и c так, чтобы сумма квадратов отклонений $S(a,b,c) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2$ была минимальной.

Функция $S(a,b,c)$ будет принимать минимальное значение, если частные производные $S'_a(a,b,c)$, $S'_b(a,b,c)$, $S'_c(a,b,c)$ обращаются в нуль:

$$\begin{cases} S'_a(a,b,c) = \sum\limits_{i=1}^{n} 2(ax_i^{\,2} + bx_i + c - y_i)\cdot x_i^{\,2} = 0, \\ S'_b(a,b,c) = \sum\limits_{i=1}^{n} 2(ax_i^{\,2} + bx_i + c - y_i)\cdot x_i = 0, \\ S'_c(a,b,c) = \sum\limits_{i=1}^{n} 2(ax_i^{\,2} + bx_i + c - y_i)\cdot 1 = 0. \end{cases}$$

Преобразуем уравнения системы следующим образом:

$$\begin{cases} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{\,4}\right)\cdot a + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{\,3}\right)\cdot b + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{\,2}\right)\cdot c = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{\,2}\cdot y_i\,, \\ \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{\,3}\right)\cdot a + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{\,2}\right)\cdot b + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)\cdot c = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\cdot y_i\,, \\ \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{\,2}\right)\cdot a + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)\cdot b + n\cdot c = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i\,, \end{cases}$$

где 0 $\sum\limits_{i=1}^{6} x_i^4 = 2275$, 1 $\sum\limits_{i=1}^{6} x_i^3 = 441$, 2 $\sum\limits_{i=1}^{6} x_i^2 = 91$,

3 $\sum\limits_{i=1}^{6} x_i = 21$, 4 $\sum\limits_{i=1}^{6} x_i^2\cdot y_i = 587$,

5 $\sum\limits_{i=1}^{6} x_i\cdot y_i = 117$, 6 $\sum\limits_{i=1}^{6} y_i = 25{,}5$.

Тогда система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} \overset{0}{2275}a + \overset{1}{441}b + \overset{2}{91}c = \overset{4}{587}, \\ \overset{1}{441}a + \overset{2}{91}b + \overset{3}{21}c = 117, \quad 5 \\ \overset{2}{91}a + \overset{3}{21}b + \overset{n}{6}c = 25{,}5. \quad 6 \end{cases}$$

0 1 4

1 2 5

2 3 6

Решим систему уравнений по формулам Крамера:

$$a = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad b = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad c = \frac{\Delta_3}{\Delta} \quad ,$$

где $\Delta = 3920, \quad \Delta_1 = 630, \quad \Delta_2 = 1806, \quad \Delta_3 = 784.$

Тогда $a = 0{,}16$, $b = 0{,}46$, $c = 0{,}20$.

Следовательно, искомая квадратичная функция будет иметь вид:

$$y = 0{,}16x^2 + 0{,}46x + 0{,}20 .$$

2. Построим в плоскости xOy графики полученных функций и нанесем экспериментальные точки (Рисунок 2).

Для этого составим таблицу значений полученных функций

x	1	2	3	4	5	6
y	1,0	1,5	3,0	4,5	7,0	8,5
$y = 1{,}59x - 1{,}30$	0,29	1,88	3,47	5,06	6,65	8,24
$y = 0{,}82 \cdot x^{1{,}26}$	0,82	1,96	3,27	4,70	6,23	7,84
$y = 0{,}68 \cdot e^{0{,}45x}$	1,07	1,67	2,62	4,11	6,45	10,12
$y = 0{,}16x^2 + 0{,}46x + 0{,}20$	0,82	1,76	3,02	4,60	6,50	8,72

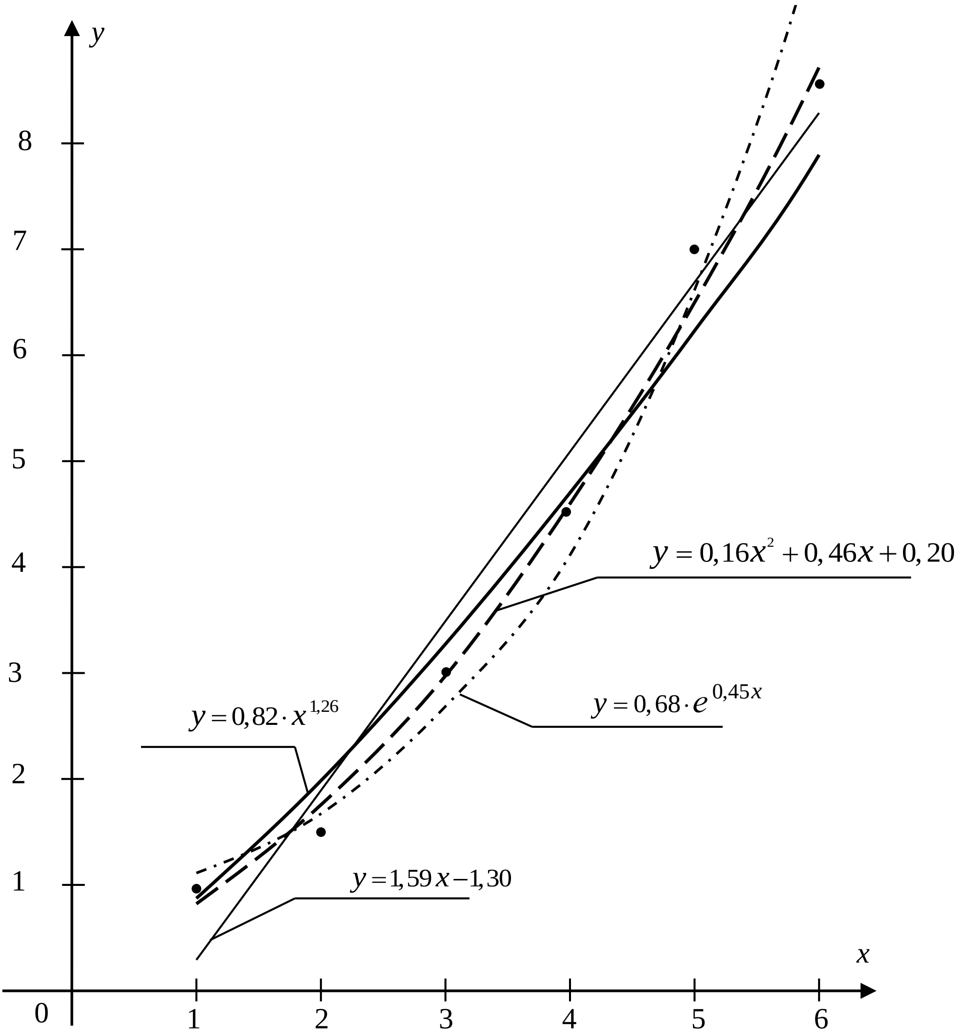

Рисунок 2 - Графики аппроксимирующих функций
и экспериментальные точки

3. Сравним полученные результаты. Для этого найдем соответствующие суммарные погрешности

$$S(a,b)=\sum_{i=1}^{6}(\Delta y_i)^2 .$$

$$S_1(a,b)=(1,0-0,29)^2+(1,5-1,88)^2+\ldots=1,36,$$

$$S_2(a,b)=(1,0-0,82)^2+(1,5-1,96)^2+\ldots=1,38,$$

$$S_3(a,b)=(1,0-1,07)^2+(1,5-1,67)^2+\ldots=3,24,$$

$$S_4(a,b)=(1,0-0,82)^2+(1,5-1,76)^2+\ldots=0,41.$$

Вывод:

В данной задаче лучшей *аппроксимирующей функцией* является квадратичная функция $y=0,16x^2+0,46x+0,20$.

Варианты индивидуальных заданий

Вариант 1

x	2	3	4	5	6	7
y	100	190	270	400	500	690

Вариант 2

x	10	20	30	40	50	60
y	1,06	1,33	1,52	1,68	1,81	1,91

Вариант 3

x	3	5	7	9	11	13
y	26	76	150	240	360	500

Вариант 4

x	2	6	10	14	18	22
y	3,1	6,7	9,5	11,9	14,0	15,5

Вариант 5

x	1	3	5	7	9	11
y	2,0	10,1	22,6	37,1	54,5	73,2

Вариант 6

x	1	4	7	10	13	16
y	3,0	7,6	11,2	13,8	17,1	19,5

Вариант 7

x	3	5	7	9	11	13
y	3,5	4,4	5,7	6,1	6,5	7,3

Вариант 8

x	2	5	8	11	14	17
y	2,1	1,3	1,0	0,9	0,8	0,72

Вариант 9

x	1	5	9	13	17	21
y	2,0	3,4	4,2	4,6	5,2	5,4

Вариант 10

x	3	4	5	6	7	8
y	13	31	64	105	170	252

Вариант 11

x	2	4	6	8	10	12
y	2,4	2,9	3,0	3,5	3,6	3,7

Вариант 12

x	10	14	18	22	26	30
y	4,2	4,5	4,8	5,1	5,2	5,4

Вариант 13

x	1	16	13	46	61	76
y	0,5	4,0	6,9	8,8	10,9	12,1

Вариант 14

x	5	15	25	35	45	55
y	2,2	2,4	2,6	2,7	2,8	2,9

Вариант 15

x	1	2	3	4	5	6
y	2,0	0,68	0,44	0,24	0,12	0,14

Вариант 16

x	2	3	4	5	6	7
y	2,0	4,3	8,1	12,1	18,1	36,2

Вариант 17

x	2	5	8	11	14	17
y	4,8	8,8	12,1	15,0	17,4	19,7

Вариант 18

x	5	7	9	11	13	15
y	5,6	9,2	13,6	18,3	23,5	29,1

Вариант 19

x	25	40	55	70	85	100
y	2,4	3,2	3,8	4,3	4,7	5,1

Вариант 20

x	2	3	4	5	6	7
y	2,8	2,4	2,0	1,5	1,3	1,2

Вариант 21

x	21	32	43	54	65	76
y	5,4	6,3	7,1	7,6	8,1	8,5

Вариант 22

x	2	5	8	11	14	17
y	1,6	24,9	102,8	266,8	549,0	982,0

Вариант 23

x	100	150	200	250	300	350
y	9,6	10,4	11,2	12,1	12,7	13,2

Вариант 24

x	220	320	420	520	620	720
y	5,2	5,2	5,4	5,6	5,8	6,1

Вариант 25

x	10	35	60	85	110	135
y	11,2	28,8	43,2	56,2	67,8	79,2

Вариант 26

x	10	15	20	25	30	35
y	10,8	18,4	27,1	36,6	46,6	57,2

Вариант 27

x	2	4	6	8	10	12
y	1,08	0,36	0,21	0,12	0,09	0,04

Вариант 28

x	10	15	20	25	30	35
y	4,30	3,30	2,68	2,25	1,90	1,70

Вариант 29

x	10	20	30	40	50	60
y	1,08	1,31	1,53	1,69	1,80	1,92

Вариант 30

x	3	5	7	9	11	13
y	27	75	152	241	362	498

Список литературы

1. *Пискунов, Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов: учеб. пособие. В 2 т. / *Н.С. Пискунов*. – М.: Интеграл – Пресс, 2001–2004. – 584 с.

2. *Беклемишев, Д.В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учебник для вузов / *Д.В.Беклемишев.* – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 309 с.

Учебное издание

МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Методические указания

Составители: ***Коломиец Людмила Вадимовна,***

Поникарова Наталья Юрьевна

Редактор А.В. Ярославцева
Компьютерная вёрстка А.В. Ярославцевой

Подписано в печать 25.12.2017. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Печ. л. 2,0.
Тираж 25 экз. Заказ . Арт. 68/2017.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»
(Самарский университет)
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

Изд-во Самарского университета.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.