# Problem 1

1. Show that FWER $:= Pr(\text{reject } H_0 \mid H_0) \leq \alpha$

where $H_0 := \bigcap_{i=1}^{n} H_{0,i}$

$$Pr(\text{reject } H_0 \mid H_0) \underset{\uparrow}{\leq} \sum Pr(\text{reject } H_{0,i} \mid H_0) \underset{\uparrow}{\leq} \sum Pr(\text{reject } H_{0,i} \mid H_{0,i})$$

[reject $H_0 \to$ reject $H_{0,i}$]

[assume $H_{0,i} = H_{0,1}$ $\forall i$

$\to Pr(\text{reject } H_{0,i} \mid H_0)$

$= Pr(\text{reject } H_{0,i} \mid H_{0,i})$.

every other scenarios increases the entropy and thus reduces the p-value]

$$= \sum p_i \leq \sum \alpha/n = \alpha$$

2) $$\text{FWER} = Pr(\text{reject } H_0 \mid H_0) = 1 - Pr(\text{not reject } H_0 \mid H_0)$$

$$= 1 - \bigcap Pr(\text{not reject } H_{0,i} \mid H_0)$$

(independence) $$= 1 - \bigcap Pr(\text{not reject } H_{0,i} \mid H_{0,i})$$

$\Updownarrow$

$$1 - \prod_i (1 - Pr(\text{rejecting } H_{0,i} \mid H_{0,i}))$$

$$\leq 1 - \prod_i 1 - \frac{\alpha}{n} = 1 - \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^n \xrightarrow{n \to \infty} 1 - e^{-\alpha}$$

# Problem 2

1. $y_{n+1} = \beta_0 + \beta_1 x_{n+1} + \varepsilon_{n+1}$

$\hat{y}_{n+1} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{n+1} + 0$

since our estimate of $\varepsilon_{n+1} = 0$

$$y_{n+1} - \hat{y}_{n+1} =$$

$$\beta_0 + \beta_1 x_{n+1} + \varepsilon_{n+1} - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{n+1})$$

$$\rightarrow \operatorname{Var}[y_{n+1} - \hat{y}_{n+1}] = \operatorname{Var}[\beta_0 + \beta_1 x_{n+1} + \varepsilon_{n+1} - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{n+1})]$$

$(\beta_0 + \beta_1 x_{n+1})$ is const given $x_{n+1}$ $= \operatorname{Var}[\varepsilon_{n+1} - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{n+1})]$

הנחת אי-תלות בין $\hat{y}_{n+1}$ ל-$\varepsilon_{n+1}$ $= \operatorname{Var}(\varepsilon_{n+1}) + \operatorname{Var}(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{n+1})$

$\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ $= \sigma^2 + \sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{(x_{n+1} - \bar{x})^2}{S_{xx}}\right]$

$$= \sigma^2 \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_{n+1} - \bar{x})^2}{S_{xx}}\right]$$

וזה הגיוני, שכן כפי שהוכחנו ב-ii-3א', נוסף לחישוב של השונות של $y_{n+1}$ ($\varepsilon_{n+1}$)
מלבד זו שנובעת מהשערוך של $\beta_0, \beta_1$ ע"י $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$, ולכן ש-$V(y_{n+1} - \hat{y}_{n+1}) \geq V(\hat{y}_{n+1})$

2. $$\frac{y_{n+1} - \hat{y}_{n+1}}{s\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_{n+1} - \bar{x})^2}{S_{xx}}}} \sim t_{n-2} \longrightarrow y_{n+1} \in \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{n+1} \pm t_{n-2}^{1-\frac{\alpha}{2}} s\left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_{n+1} - \bar{x})^2}{S_{xx}}\right]$$

הרווח הנה רחב יותר מזה של $\hat{y}_{n+1}$. עבור $x_{n+1} = \bar{x}$ נקבל שהרווח הנה הוא
הצר ביותר שכן sk מדובר בדגימה שאינה רחוקה מהממוצע הדגימתי $\bar{X}$ בו השתמשנו להגדרה

כוונת המשך.

3. $$y_{n+1} \in \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{n+1} \pm t_{n-2}^{1-\alpha/2} S \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{n} + \frac{(x_{n+1} - \bar{x})^2}{S_{xx}} \right]$$

$$\left[ \text{Since now,} \quad var(y_{n+1}) = Var\left( \frac{\varepsilon_{n+1}^{(1)} + \varepsilon_{n+1}^{(2)}}{2} \right) = \sigma^2/2 \right]$$

This CI is of course narrower than for section (2) and generally $m \to \infty \Rightarrow$ CI becomes smaller, since the assumption of normality of $1/m \sum_{i}^{m} \epsilon_{n+1}^{(i)} \sim N(0, \sigma/m)$ is more reasonable thanks to CLT.