Problem 1

1. $Z := (z_1, \dots, z_9)^T \sim N(\mu, I_9) \to \mathrm{Cov}(z_i, z_j) = 0 \quad , \quad 1 \le i < j \le 9$

ולכן מתקיים גאוסיינים, נסיק א' תלות. תמיד $z_i \overset{iid}{\sim} N(\mu_i, 1)$.

3-רוצים לגלות אם גאוסיאנים הם גם כן גאוסיין. נסמן לפי נוסחה שראינו בהרצאה:

$$U := \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{B} Z$$

If $Y \sim N(\mu, \Sigma)$ and $U = BY + \eta$, then $U \sim N\left(B\mu + \eta, B\Sigma B^T\right)$

$$\to \quad U \sim N\left(B\mu, \; B I_9 B^T\right) = N\left(B\mu, \; BB^T\right)$$

ונחשב ש:

$$BB^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

ומכיוון ש- BB^T אלכסונית, נסיק ש- $\mathrm{Cov}(u_1, u_2) = 0$ ולכן בלתי תלויים
(נורמליים, אי-קורלציה מתמטיקה בלתי-תלויים)

■

2. $Z \sim N(\mu, I_n) \qquad X = a^T Z \quad , \quad y = B^T Z$

מכיוון ש- X ו- y נורמליים גם כן, נרצה a, B כך ש- $\mathrm{cov}(x,y) = 0$. נבדוק:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{cov}(x,y) = 0 \\
&\mathrm{cov}\left(a^T z, B^T z\right) = 0 && \Leftrightarrow \\
&a^T \mathrm{cov}(z, z) B && \Leftrightarrow \\
&a^T I_n B = 0 && \Leftrightarrow \quad \left[\mathrm{cov}(z,z) = \mathrm{Var}(z) = I_n\right] \\
&a^T B = 0 && \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

ולכן עבור a, B שמקיימים $a^T B = 0$ נקבל X ו- y בלתי תלויים.

3. • $z_{ij} \sim N(0,1)$ $\qquad \bar{z}_{i\cdot} := \sum_{j}^{J} \frac{1}{J} z_{ij} \qquad \bar{z}_{\cdot j} := \sum_{i}^{I} \frac{1}{I} z_{ij}$

$$cov(\bar{z}_{i\cdot}, \bar{z}_{\cdot j}) = \frac{1}{IJ} cov\left(\sum_{k}^{J} z_{ik}, \sum_{l}^{I} z_{lj}\right)$$

$$= \frac{1}{IJ}\left(\cancel{\sum_{k \neq l} cov(z_{ik}, z_{lj})} + cov(z_{ij}, z_{ij})\right) =$$

$$z_{ij} \overset{iid}{\sim} N(0,1) = \frac{1}{IJ} Var(z_{ij}) = \frac{1}{IJ} \neq 0 \rightarrow$$

$\bar{z}_{\cdot j}, \bar{z}_{i\cdot}$ not independent

• $\bar{z}_{1\cdot} := \frac{1}{J} \sum_{j}^{J} z_{1j} \qquad \bar{z}_{2\cdot} := \frac{1}{J} \sum z_{2j}$

$$Cov(\bar{z}_{1\cdot}, \bar{z}_{2\cdot}) = cov\left(\frac{1}{J} \sum_{j} z_{1j}, \frac{1}{J} \sum_{j} z_{2j}\right)$$

[מלינאריות ה-cov] $= \frac{1}{J^2} \sum cov(z_{1j}, z_{2j}) = \frac{1}{J^2} \sum 0 = 0 \rightarrow$

$\bar{z}_{1\cdot}, \bar{z}_{2\cdot}$ are indepenent

• $Cov(\bar{z}_{i\cdot} - \bar{z}_{\cdot\cdot}, \bar{z}_{i\cdot})$

$$\bar{z}_{i\cdot} - \bar{z}_{\cdot\cdot} = \sum_{j}^{J} z_{ij} - \sum_{k}^{I} \sum_{l}^{J} z_{kl} = \sum_{k \neq i}^{I} \sum_{l}^{J} z_{kl}$$

$$cov\left(\sum_{k \neq i}^{I} \sum_{l}^{J} z_{kl}, \bar{z}_{i\cdot}\right) = \sum_{k \neq i}^{I} \sum_{l}^{J} \sum_{j}^{J} cov(z_{kl}, z_{ij}) = 0$$

$$\left[cov(z_{kl}, z_{ij}) \neq 0 \Leftrightarrow k = i, l = j \right]$$

ולכן הם בלתי תלויים.

4. בהינתן $Z_{ij} \sim N(0,1)$ נקבל ש- $U = By$ מקיים $U \sim (0, BB^T)$.
לכן נחפש פירוק BB^T כך ש- $\Sigma = BB^T$. ונציב את B במטריצת
פירוק

Problem 3

1. $$\hat{\beta} = (X^TX)^{-1}X^Ty$$

2. $$\hat{y}_i = \hat{\beta}x_i \quad , \quad \hat{\varepsilon}_i = y_i - \hat{y}_i$$

- $$\sum_i^n \hat{y}_i\hat{\varepsilon}_i = (Hy)^T(I-H)y = (Hy)^Ty - (Hy)^T(Hy)$$

$$\left[\begin{array}{l}\hat{y} = Hy \\ \hat{\varepsilon} = (I-H)y \\ H := X(X^TX)^{-1}X^T\end{array}\right] \qquad = y^TH^Ty - y^TH^THy$$

$$= y^THy - y^THy = 0$$

$$\left[\begin{array}{l}H^2 = H \\ H^T = H\end{array}\right]$$

∎

- $$\|\hat{\varepsilon}\|^2 := ((I-H)y)^T((I-H)y) = (y-Hy)^T(y-Hy) = (y^T - y^TH)(y-Hy)$$

$$[H^T = H] \longrightarrow \quad = y^Ty - y^THy - y^THy + y^TH^2y$$

$$[H^2 = H] \longrightarrow \quad = y^Ty - y^THy = y^Ty - (Hy)^THy$$

$$= \|y\|^2 - \|Hy\|^2 = \|y\|^2 - \|\hat{y}\|^2$$

∎

3. $$\varepsilon_i \overset{iid}{\sim} N(0,1)$$

מההרצאה:

$$\hat{\beta} \sim \mathcal{N}(\beta, \sigma^2(Z^\top Z)^{-1})$$
$$\hat{y} \sim \mathcal{N}(Z\beta, H\sigma^2)$$
$$\hat{\epsilon} \sim \mathcal{N}(0, (I-H)\sigma^2)$$

עבור $y \sim N(Z\beta, \sigma^2 I)$

$$\rightarrow \quad \begin{bmatrix} \hat{\varepsilon} \\ \hat{y} \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ X\beta \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} (I-H)\sigma^2 & 0 \\ 0 & H\sigma^2 \end{pmatrix} \right)$$

$$\rightarrow \quad \begin{bmatrix} \hat{y} \\ \hat{\beta} \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} X\beta \\ \beta \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} H\sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 (X^T X)^{-1} \end{pmatrix} \right)$$