组合数学选讲

——浅谈组合意义和组合计数技巧

Starrykiller

南宁市第二中学

2024/5/7

1 引言

2 组合意义

3 组合计数技巧与组合恒等式

4 递推关系与生成函数浅引

5 致谢

讲什么？

- 不知道大家有没有好奇过，为什么会有那么多奇怪的组合数学公式？

讲什么？

- 不知道大家有没有好奇过，为什么会有那么多奇怪的组合数学公式？
- 例如，为什么 $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}=2^n$？

- 不知道大家有没有好奇过，为什么会有那么多奇怪的组合数学公式？
- 例如，为什么 $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}=2^n$？
- 今天，我们来讲解这些组合数学公式的新的理解方式——组合意义.

证明 1

我们有二项式定理：

定理.（二项式定理）

对于 $\forall a, b \in \mathbb{C}$，$n \in \mathbb{N}$，有

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

作为工具，我们可以立刻证明：

证明.

在二项式定理的表达式中代入 $a = b = 1$，立刻得证.

证明 2

考虑组合意义证明.

证明.

- $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}$ 的意义为一个大小为 n 的集合的所有子集的数量.

运用组合推理而推出恒等式的证明方法，就叫做**组合意义证明**.

证明 2

考虑组合意义证明.

证明.

- $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}$ 的意义为一个大小为 n 的集合的所有子集的数量.
- 我们依次考虑每个元素是否放入子集中，每个元素都可以选择放/不放（2 种选择）.

运用组合推理而推出恒等式的证明方法，就叫做**组合意义证明**.

证明 2

考虑组合意义证明.

证明.

- $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}$ 的意义为一个大小为 n 的集合的所有子集的数量.
- 我们依次考虑每个元素是否放入子集中，每个元素都可以选择放/不放（2 种选择）.
- 有 n 个元素，由乘法原理得到方案数为 2^n. 证毕.

运用组合推理而推出恒等式的证明方法，就叫做**组合意义证明**.

小试牛刀

问题.

一个大小为 n 的集合的所有子集的子集的数量和是多少？

小试牛刀

问题.

一个大小为 n 的集合的所有子集的子集的数量和是多少？

解 1.

不难发现所求为

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 2^i$$

在二项式定理中令 $a = 2, b = 1$，得到原式等于 3^n.

组合意义？

小试牛刀

解 2.

- 不妨设大的集合为 S，小的集合为 T（$T \subseteq S$）.

小试牛刀

解 2.

- 不妨设大的集合为 S，小的集合为 T（$T \subseteq S$）.
- 考虑元素 $s \in S$，有三个状态：$s \notin S$；$s \in S, s \notin T$；$s \in T$.

解 2.

- 不妨设大的集合为 S，小的集合为 T（$T \subseteq S$）.
- 考虑元素 $s \in S$，有三个状态：$s \notin S$；$s \in S, s \notin T$；$s \in T$.
- 所以方案数为 3^n.

问题 1

问题.

证明

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{i}{m}=\binom{n+1}{m+1}$$

（上指标求和）

问题.

证明

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{i}{m}=\binom{n+1}{m+1}$$

（上指标求和）

解.

- 右边的组合意义是，有 $n+1$ 个球（标号 $0,1,\cdots,n$），在里面选 $(m+1)$ 个.

问题 1

问题.

证明

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{i}{m}=\binom{n+1}{m+1}$$

（上指标求和）

解.

- 右边的组合意义是，有 $n+1$ 个球（标号 $0,1,\cdots,n$），在里面选 $(m+1)$ 个.
- 左边的意义是，枚举选择的编号最大的球的编号 i，于是剩下 $(m-1)$ 个球只能从 $[0,i-1]$ 共 i 个球中选，所以方案数是 $\binom{i}{m}$.

问题.

证明

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{i}{m}=\binom{n+1}{m+1}$$

（上指标求和）

解.

- 右边的组合意义是，有 $n+1$ 个球（标号 $0,1,\cdots,n$），在里面选 $(m+1)$ 个.
- 左边的意义是，枚举选择的编号最大的球的编号 i，于是剩下 $(m-1)$ 个球只能从 $[0,i-1]$ 共 i 个球中选，所以方案数是 $\binom{i}{m}$.
- 这显然构成双射.

问题 2

问题.

有 n 块相同的糖果，要分给 k 个人. 每个人都必须分得糖果，糖果必须分完，求方案数.

问题 2

问题.

有 n 块相同的糖果，要分给 k 个人. 每个人都必须分得糖果，糖果必须分完，求方案数.

解.（隔板法）

- 考虑在 n 块糖果形成的 $(n-1)$ 个空之间插 $(k-1)$ 块板（一个空最多只能插一个板）.

问题 2

问题.

有 n 块相同的糖果，要分给 k 个人. 每个人都必须分得糖果，糖果必须分完，求方案数.

解.（隔板法）

- 考虑在 n 块糖果形成的 $(n-1)$ 个空之间插 $(k-1)$ 块板（一个空最多只能插一个板）.
- 不难发现这与分糖果的方案数构成双射.

问题 2

问题.

有 n 块相同的糖果，要分给 k 个人. 每个人都必须分得糖果，糖果必须分完，求方案数.

解.（隔板法）

- 考虑在 n 块糖果形成的 $(n-1)$ 个空之间插 $(k-1)$ 块板（一个空最多只能插一个板）.
- 不难发现这与分糖果的方案数构成双射.
- 所以方案数就是 $\binom{n-1}{k-1}$.

问题.

有 n 块相同的糖果，要分给 k 个人. **可以有人不分得糖果，**糖果必须分完，求方案数.

这次就不能直接用隔板法了哦（

问题.

有 n 块相同的糖果，要分给 k 个人. **可以有人不分得糖果，**糖果必须分完，求方案数.

解.（隔板法）

- 这次，多个板可以插在同一个空中，我们不能直接用隔板法.

问题 3

问题.

有 n 块相同的糖果，要分给 k 个人. **可以有人不分得糖果，**糖果必须分完，求方案数.

解.（隔板法）

- 这次，多个板可以插在同一个空中，我们不能直接用隔板法.
- 发挥聪明才智，我们可以借 k 块假糖果来，再插板.

问题 3

问题.

有 n 块相同的糖果，要分给 k 个人. **可以有人不分得糖果，** 糖果必须分完，求方案数.

解.（隔板法）

- 这次，多个板可以插在同一个空中，我们不能直接用隔板法.
- 发挥聪明才智，我们可以借 k 块假糖果来，再插板.
- 所以方案数就是 $\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n}$.

问题 4

问题.

有 n 块相同的糖果，要分给 k 个人. 可以有人不分得糖果，**糖果可以不分完**，求方案数.

问题 4

问题.

有 n 块相同的糖果，要分给 k 个人. 可以有人不分得糖果，**糖果可以不分完**，求方案数.

解.（隔板法）

- 你当然可以枚举有多少块糖果剩余，然后上组合恒等式.

问题.

有 n 块相同的糖果，要分给 k 个人. 可以有人不分得糖果，**糖果可以不分完**，求方案数.

解.（隔板法）

- 你当然可以枚举有多少块糖果剩余，然后上组合恒等式.
- 不过，剩下的糖果不就是我的了吗（

问题 4

问题.

有 n 块相同的糖果，要分给 k 个人. 可以有人不分得糖果，**糖果可以不分完**，求方案数.

解.（隔板法）

- 你当然可以枚举有多少块糖果剩余，然后上组合恒等式.
- 不过，剩下的糖果不就是我的了吗（
- 等效于，将糖果分给 $(k+1)$ 个人.

问题.

有 n 块相同的糖果，要分给 k 个人. 可以有人不分得糖果，**糖果可以不分完**，求方案数.

解.（隔板法）

- 你当然可以枚举有多少块糖果剩余，然后上组合恒等式.
- 不过，剩下的糖果不就是我的了吗（
- 等效于，将糖果分给 $(k+1)$ 个人.
- 所以方案数就是 $\binom{n+(k+1)-1}{(k+1)-1} = \binom{n+k}{k}$.

问题.（Vandermonde 卷积的特例）

证明

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2=\binom{2n}{n}$$

问题 5

问题.（Vandermonde 卷积的特例）

证明

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2=\binom{2n}{n}$$

解.

- 右边等效于从 $2n$ 个球里面选 n 个球.

问题 5

问题.（Vandermonde 卷积的特例）

证明

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2=\binom{2n}{n}$$

解.

- 右边等效于从 $2n$ 个球里面选 n 个球.
- 不妨将 n 个球涂成蓝色，剩下的涂成粉色.

问题.（Vandermonde 卷积的特例）

证明

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2=\binom{2n}{n}$$

解.

- 右边等效于从 $2n$ 个球里面选 n 个球.
- 不妨将 n 个球涂成蓝色，剩下的涂成粉色.
- 左边就是，枚举选择 i 个蓝色的球（和 i 个不选的粉色的球）.

问题 5

问题.（Vandermonde 卷积的特例）

证明

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$$

解.

- 右边等效于从 $2n$ 个球里面选 n 个球.
- 不妨将 n 个球涂成蓝色，剩下的涂成粉色.
- 左边就是，枚举选择 i 个蓝色的球（和 i 个不选的粉色的球）.
- 证毕.

问题 6

问题.（Vandermonde 卷积）

证明

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}=\binom{n+m}{k}$$

问题 6

问题.（Vandermonde 卷积）

证明

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}=\binom{n+m}{k}$$

解.

- 右边等效于从 $(n+m)$ 个球里面选 k 个球.

问题.（Vandermonde 卷积）

证明

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}=\binom{n+m}{k}$$

解.

- 右边等效于从 $(n+m)$ 个球里面选 k 个球.
- 不妨将 n 个球涂成蓝色，剩下的涂成粉色.

问题.（Vandermonde 卷积）

证明
$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}=\binom{n+m}{k}$$

解.

- 右边等效于从 $(n+m)$ 个球里面选 k 个球.
- 不妨将 n 个球涂成蓝色，剩下的涂成粉色.
- 左边就是，枚举选择 i 个蓝色的球和 $(k-i)$ 个粉色的球.

问题 6

问题.（Vandermonde 卷积）

证明

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}=\binom{n+m}{k}$$

解.

- 右边等效于从 $(n+m)$ 个球里面选 k 个球.
- 不妨将 n 个球涂成蓝色，剩下的涂成粉色.
- 左边就是，枚举选择 i 个蓝色的球和 $(k-i)$ 个粉色的球.
- 证毕.

错位排列问题

问题.

有 n 封信对应要投放到 n 个邮筒中. 信件全部投错的方案数有多少?

错位排列问题

问题.

有 n 封信对应要投放到 n 个邮筒中. 信件全部投错的方案数有多少?

解.

- 考虑 n 个元素的错位排列如何得来. 现在假设前面 $(n-1)$ 个人都在前 $(n-1)$ 个位置上. 假设小熙在前 $(n-1)$ 个人中.

错位排列问题

问题.

有 n 封信对应要投放到 n 个邮筒中. 信件全部投错的方案数有多少?

解.

- 考虑 n 个元素的错位排列如何得来. 现在假设前面 $(n-1)$ 个人都在前 $(n-1)$ 个位置上. 假设小熙在前 $(n-1)$ 个人中.
- 第一种情况：只有小熙在他的位置上. 小熙的位置有 $(n-1)$ 种可能，剩下的 $(n-2)$ 个同学构成一个错位排列. 此时，只需要将第 n 个同学和小熙交换即可，方案数为 $(n-1)D_{n-2}$；

错位排列问题

问题.

有 n 封信对应要投放到 n 个邮筒中. 信件全部投错的方案数有多少？

解.

- 考虑 n 个元素的错位排列如何得来. 现在假设前面 $(n-1)$ 个人都在前 $(n-1)$ 个位置上. 假设小熙在前 $(n-1)$ 个人中.
- 第一种情况：只有小熙在他的位置上. 小熙的位置有 $(n-1)$ 种可能，剩下的 $(n-2)$ 个同学构成一个错位排列. 此时，只需要将第 n 个同学和小熙交换即可，方案数为 $(n-1)D_{n-2}$；
- 第二种情况：没人在自己的位置上. 此时，只需要将第 n 个同学与前面 $(n-1)$ 个同学构成的错位排列交换即可，方案数为 $(n-1)D_{n-1}$.

错位排列问题

问题.

有 n 封信对应要投放到 n 个邮筒中. 信件全部投错的方案数有多少?

解.

- 考虑 n 个元素的错位排列如何得来. 现在假设前面 $(n-1)$ 个人都在前 $(n-1)$ 个位置上. 假设小熙在前 $(n-1)$ 个人中.
- 第一种情况：只有小熙在他的位置上. 小熙的位置有 $(n-1)$ 种可能，剩下的 $(n-2)$ 个同学构成一个错位排列. 此时，只需要将第 n 个同学和小熙交换即可，方案数为 $(n-1)D_{n-2}$；
- 第二种情况：没人在自己的位置上. 此时，只需要将第 n 个同学与前面 $(n-1)$ 个同学构成的错位排列交换即可，方案数为 $(n-1)D_{n-1}$.
- 所以我们证明了：$D_n=(n-1)(D_{n-1}+D_{n-2})$（OEIS A000166）.

错位排列问题

问题.

有 n 封信对应要投放到 n 个邮筒中. 信件全部投错的方案数有多少?

解.

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$$

（OEIS A000166）

注意到 $D_2 = 1 \times (0+1) = 1, D_3 = 2 \times (1+0) = 2, D_4 = 3 \times (2+1) = 9, D_5 = 4 \times (9+2) = 44.$

数学归纳法

定义.（数学归纳法）

- 数学归纳法是利用**归纳假设**来证明一些与**自然数**有关的命题的证明方法.

定义. (数学归纳法)

- 数学归纳法是利用**归纳假设**来证明一些与**自然数**有关的命题的证明方法.
- 数学归纳法基于以下事实 (Peano 公理):

数学归纳法

定义.（数学归纳法）

- 数学归纳法是利用**归纳假设**来证明一些与**自然数**有关的命题的证明方法.
- 数学归纳法基于以下事实（Peano 公理）:
- 每个自然数都有一个后继;

定义.（数学归纳法）

- 数学归纳法是利用**归纳假设**来证明一些与**自然数**有关的命题的证明方法.
- 数学归纳法基于以下事实（Peano 公理）:
- 每个自然数都有一个后继;
- 0 是自然数.

数学归纳法

定义.（数学归纳法）

- 一般地，证明命题对一切整数 $n \geq N$ 成立，只需要证明：

定义.（数学归纳法）

- 一般地，证明命题对一切整数 $n \geq N$ 成立，只需要证明：
- 命题对 $n = N$ 成立；

数学归纳法

定义.（数学归纳法）

- 一般地，证明命题对一切整数 $n \geq N$ 成立，只需要证明：
- 命题对 $n = N$ 成立；
- 假设命题对任意 $n = k \geq N$ 成立，推出命题对 $n = k + 1$ 成立.

定义.（数学归纳法）

- 一般地，证明命题对一切整数 $n \geq N$ 成立，只需要证明：
- 命题对 $n = N$ 成立；
- 假设命题对任意 $N \leq n \leq k$ 成立，推出命题对 $n = k + 1$ 成立.

例.

证明自然数的求和公式：

$$0 + 1 + \cdots + n = \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

数学归纳法

定义.（数学归纳法）

- 一般地，证明命题对一切整数 $n \geq N$ 成立，只需要证明：
- 命题对 $n = N$ 成立；
- 假设命题对任意 $N \leq n \leq k$ 成立，推出命题对 $n = k + 1$ 成立.

证明.

- $n = 0$ 时显然成立.
- 假设命题对 $n \leq k$ 成立，即 $n = k$ 时，有 $0 + 1 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$
- 当 $n = k + 1$ 时，$0 + 1 + \cdots + k + (k + 1) = \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 = \frac{k(k+1)+2k+2}{2} = \frac{(k+2)(k+1)}{2} = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$. 证毕.

小试牛刀

定义.（数学归纳法）

- 一般地，证明命题对一切整数 $n \geq N$ 成立，只需要证明：
- 命题对 $n = N$ 成立；
- 假设命题对任意 $N \leq n \leq k$ 成立，推出命题对 $n = k + 1$ 成立.

问题.（Fermat 小定理）

证明：对于素数 p 和任意不为 p 倍数的正整数 a， a^p 除以 p 得到的余数是 a，即

$$a^p \equiv a \pmod{p}$$

小试牛刀

问题.（Fermat 小定理）

证明：对于素数 p 和任意不为 p 倍数的正整数 a，a^p 除以 p 得到的余数是 a，即

$$a^p \equiv a \pmod{p}$$

证明.

- $n = 1$ 时显然成立.

小试牛刀

问题.（Fermat 小定理）

证明：对于素数 p 和任意不为 p 倍数的正整数 a， a^p 除以 p 得到的余数是 a，即

$$a^p \equiv a \pmod p$$

证明.

- $n = 1$ 时显然成立.
- 假设命题对 $n \le a$ 成立，即 $n = a$ 时，有 $a^p \equiv a \pmod p$

问题.（Fermat 小定理）

证明：对于素数 p 和任意不为 p 倍数的正整数 a，a^p 除以 p 得到的余数是 a，即

$$a^p \equiv a \pmod p$$

证明.

- $n=1$ 时显然成立.
- 假设命题对 $n \leq a$ 成立，即 $n=a$ 时，有 $a^p \equiv a \pmod p$
- 当 $n=a+1$ 时，我们有

$$(a+1)^p = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} a^i \equiv a^p + 1 \equiv a+1 \pmod p$$

小试牛刀

问题.（Fermat 小定理）

证明：对于素数 p 和任意不为 p 倍数的正整数 a， a^p 除以 p 得到的余数是 a，即

$$a^p \equiv a \pmod p$$

证明.

- $n = 1$ 时显然成立.
- 假设命题对 $n \leq a$ 成立，即 $n = a$ 时，有 $a^p \equiv a \pmod p$
- 当 $n = a + 1$ 时，我们有

$$(a+1)^p = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} a^i \equiv a^p + 1 \equiv a + 1 \pmod p$$

- 证毕.

问题.

有两个背包，第一个背包里有 2 个蓝色球，第二个背包里有 3 个白色球（同种颜色的球是相同的）．求取出 $n(n=0,1,2,3,4,5)$ 个球的方案数.

生成函数

问题.

有两个背包，第一个背包里有 2 个蓝色球，第二个背包里有 2 个白色球（同种颜色的球是相同的）. 求取出 $n(n = 0, 1, 2, 3, 4)$ 个球的方案数.

解.

展开多项式 $F(x) = (1 + x + x^2)(1 + x + x^2)$，$i$ 次项系数即为选 i 个球的答案.

致谢

希望本节课让大家感受到组合数学的美妙，也希望大家能用上这节课讲的内容.
谢谢大家.