+ Exercice (01) : (Étude globale d'Un courbe paramétrée) :

$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , $g(t) = (t - \sin t \ , \ 1 - \cos t)$

1°/ Montrer que la courbe est définit et de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$.

Définition sur $\mathbb{R}$

Les fonction ($t$, $\sin t$, $\cos t$) sont définit sur $\mathbb{R}$ donc les fonction : $x(t) = t \ \sin t$ ; $y(t) = 1 - \cos t$ sont définit sur $\mathbb{R}$

Ainsi, la courbe g est définit sur $\mathbb{R}$.

classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$

Les fonctions ($t$, $\sin t$, $\cos t$) sont de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$

don les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ qui sont des combinisons de fonctions $C^\infty$ sont de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$

En effet : $x'(t) = 1 - \cos t$ , $y'(t) = \sin t$

ces dérivées existent et sont continues sur $\mathbb{R}$

2°/ Calculer $g'(t)$ et étudier la régularité de la courbe.

$x'(t) = 1 - \cos t$ , $y'(t) = \sin t$

Donc : $g'(t) = (1 - \cos t \ , \ \sin t)$

- la courbe est régulière si $g'(t) \neq (0,0)$

$$\begin{cases} 1 - \cos t = 0 \\ \sin t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos t = 1 \\ \sin t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z} \\ t = k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

on a : $g'(t) = (0,0) \Leftrightarrow t = 2k\pi \ . \ k \in \mathbb{Z}$

donc : la courbe n'est régulière en $t = 2k\pi$

la courbe est régulière sur $\mathbb{R} / 2k\pi$

3°/ Déterminer les points où la tangente est horizontale

on résout : $\sin t = 0$ , on sait que : $t = k\pi$ , $k \in \mathbb{Z}$

Maintenant on vérifie que $x'(t) \neq 0$ , $x'(t) = 1 - \cos(k\pi)$

$\cos k\pi = (-1)^k$

. si $k$ pair : $x'(t) = 0$ , pas horizontal

. si $k$ impair : $x'(t) = 2 \neq 0$

• Tangente horizontale pour , $t = (2k+1)\pi$ , $k \in \mathbb{Z}$
Les point correspondants sont $g((2k+1)\pi) = ((2k+1)\pi, 2)$

4% Étudier les Variations de $x(t)$ et $y(t)$ sur $[0, 2\pi]$

<u>Variation de $x(t)$</u>

on a : $x'(t) = 1 - \cos t$

$-1 \leq \cos t \leq 1$

donc : $1 - \cos t \geq 0$

$x'(t) \geq 0$ sur $[0, 2\pi]$

Donc : $x(t)$ est croissente sur $[0, 2\pi]$

• Calcul des Valeur aux bornes

$x(0) = 0 - \sin 0 = 0$

$x(2\pi) = 2\pi - \sin(2\pi) = 2\pi$

| $t$ | $0$ | $2\pi$ |
|---|---|---|
| $x(t)$ | $0$ ↗ | $2\pi$ |

$x(t)$ croît de $0$ à $2\pi$

<u>Variation de $y(t)$</u>

on a $y'(t) = \sin t$

$\sin t > 0$ sur $]0, \pi[$

$\sin t < 0$ sur $]\pi, 2\pi[$

Donc :

$y(t)$ est croissent sur $[0, \pi]$

$y(t)$ est décroissante sur $[\pi, 2\pi]$

$y(0) = 1 - \cos(0) = 0$

$y(\pi) = 1 - \cos(\pi) = 2$

$y(2\pi) = 1 - \cos(2\pi) = 0$

| $t$ | $0$ | $\pi$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|
| $y(t)$ | $0$ ↗ | $2$ | ↘ $0$ |

$y(t)$ croît de $0$ à $2$ puis décroît de $2$ à $0$

5% Décrire l'allure de la courbe et proposer un tracé qualitati[f]
points importants :

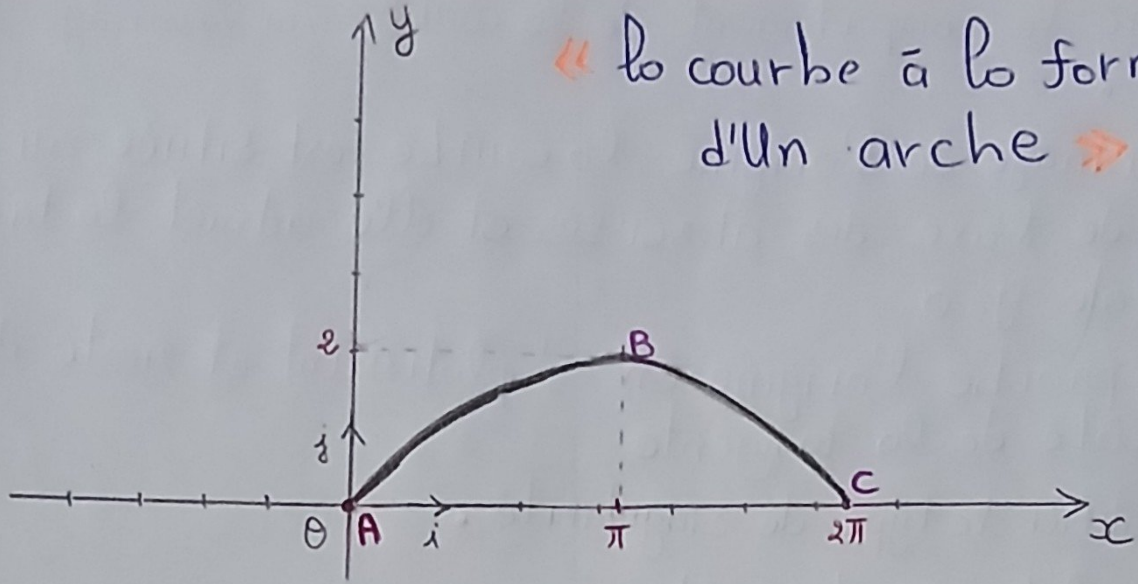
$g(0) = (0 - \sin 0 , 1 - \cos 0) = (0, 0) = A$

$g(\pi) = (\pi - \sin \pi , 1 - \cos \pi) = (\pi, 2) = B$

$g(2\pi) = (2\pi - \sin 2\pi , 1 - \cos 2\pi) = (2\pi, 0) = C$

- la courbe passe par les points A, B, C .
- la tangente est horizontale en $(\pi, 2)$.
- la courbe a la forme d'un arche .

« la courbe à la forme d'Un arche »




* Exercice 02 :

$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ , $h(t) = (t^2, t^4)$

1°/ Déterminer le support géométrique de la courbe

Possant : $x = t^2$ et $y = t^4$, Alors

$$y = t^4 = (t^2)^2 = (x)^2$$

Donc : $h(\mathbb{R}) \subset \{(x, y) : x \geqslant 0 , y = x^2\}$

les point est atteint par g

Ainsi $T = h(\mathbb{R}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0 , y = x^2\}$

le Support géométrique de la courbe est la parable :

2°/ Étudier la régularité et localiser les points singuliers.

$g'(t) = (2t , 4t^3) = 2t(1, 2t^2)$

Donc $g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ : non régulière en 0, régulière ailleurs

elle est régulière sur $\mathbb{R}/0$ . donc point singuliers : $t = 0$

3°/ Étudier l'existence d'Un tangente en $t = 0$

$$\frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{4t^3}{2t} = 2t^2$$

au point $t = 0 \Rightarrow 2t^2 = 0$ et $\lim_{t \to 0} 2t^2 = 0$

la limite existe donc la tangente existe au point $t=0$

leur équations $y=0$

4°/ Décrire le comportement de la courbe au voisinage de l'origine.

- Au voisinage de l'origine, la courbe est située au-dessus de l'axe des abscisses et elle admet la tangente horizontale $y=0$

elle approche l'origine en s'aplatissant et reste du même côté de la tangente

5°/ Identifier le type de singularité.

- Comme
  - la tangente existe
  - la courbe reste du même côté
  - pas d'auto-intersection

On a : Point de rebroussement de première espèce.

+ Exercice (03) :

$$g(t) = (e^t \cos t \ , \ e^t \sin t) \ , \ t \in \mathbb{R}$$

1°/ Montrer que la courbe est régulière sur $\mathbb{R}$.

$$g'(t) = \left(\frac{d}{dt}(e^t \cos t) \ , \ \frac{d}{dt}(e^t \sin t)\right)$$

$$g'(t) = (e^t \cos t - e^t \sin t \ , \ e^t \sin t + e^t \cos t)$$

$$g'(t) = (e^t(\cos t - \sin t) \ , \ e^t(\sin t + \cos t))$$

- Calculons la norme :

$$\|g'(t)\| = \sqrt{e^{2t}(\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2}$$

$$= e^t\sqrt{(\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2}$$

Or : $(\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2 = 2$

donc : $\|g'(t)\| = \sqrt{2}\, e^t > 0 \ , \ g'(t) \neq (0,0)$

Ainsi : la courbe est régulière sur $\mathbb{R}$

2°/ Déterminer le Support géometrique.

on pose : $x = e^t \cos t$ et $y = e^t \sin t$

Calculons de la distance à l'origine (rayon polair r)

Calculons $x^2 + y^2$

$$x^2 + y^2 = (e^t \cos t)^2 + (e^t \sin t)^2$$

$$= e^{2t} \cos^2 t + e^{2t} \sin^2 t = e^{2t} \underbrace{(\cos^2 t + \sin^2 t)}_{1 =}$$

donc : $x^2 + y^2 = e^{2t} \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = e^t$

on calculon $\frac{y}{x}$ (pour $x \neq 0$)

$\frac{y}{x} = \frac{e^t \sin t}{e^t \cos t} = \tan t$ ; D'ou l'angle $\theta$ : $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = 1$

En Substituant $t = \theta$ dans l'équations du rayon, nous obtenous la relations polair $r = e^\theta$

le Support géométrique est la spirale logarithmique d'équation polair $r = e^\theta$

3°/ Montrer que la courbe est Un Spirale plane.

Comme on a $r = e^\theta$

Cette relation, définit classiquement Une Spirale logarithmique dans le plan.

Ainsi : la courbe est celle d'Un spirale logarithmique

4°/ Trouver Un nouvelle paramétrisation de la courbe en fonction de l'angle polaire

l'angle polaire est $\theta$, comme $\theta = t$, la nouvelle paramétrisation $\gamma(\theta)$ est simplement

$$\gamma(\theta) = (e^\theta \cos\theta, e^\theta \sin\theta), \theta \in \mathbb{R}$$

5°/ Comparer les vitesse de parcours selon les deux paramétrisations.

la vitesse est la norme du vecteur dérivé

Pour $g(t)$, $V_g = \|g'(t)\| = \sqrt{2e^{2t}} = e^t\sqrt{2}$

Pour $\gamma(t)$, $V_\gamma = \|\gamma'(t)\| = \sqrt{2e^{2\theta}} = e^\theta\sqrt{2}$

les vitesses sont identiques car $t$ et $\theta$ parcourent le même intervalle ($\mathbb{R}$) et sont liés par $\theta = t$

+ Exercice (04) :

$g_1(t) = (t, t^2)$ , $g_2(t) = (t^2, t)$ Sur : $[0, 1]$

1°/ Vérifier que les deux arcs sont réguliers sur $[0, 1]$

on calculer les dérivées

| | |
|---|---|
| $g_1' = (1, 2t)$ | $g_2'(t) = (2t, 1)$ |
| Sa norme : | Sa norme : |
| $\|g_1'(t)\| = \sqrt{1+4t^2}$ | $\|g_2'(t)\| = \sqrt{4t^2+1}$ |
| $\sqrt{1+4t^2} > 0$ , $\forall t \in [0, 1]$ | $\sqrt{4t^2+1} > 0$ , $\forall t \in [0, 1]$ |
| Donc $g_1$ est régulier | Donc $g_2$ est régulier |

Donc : $g_1$ et $g_2$ sont réguliers sur $[0, 1]$

2°/ Calculer les longueurs $L_1$ et $L_2$.

on a : $L = \int_0^1 \|g'(t)\|\, dt$

Longueur $L_1$

$L_1 = \int_0^1 \|g_1'(t)\|\, dt = \int_0^1 \sqrt{1+4t^2}\, dt$

En Utilisant la formule

$$\int \sqrt{1+U^2}\, dU = \frac{1}{2} U \sqrt{1+U^2} + \frac{1}{2} \ln\left(U + \sqrt{1+U^2}\right)$$

avec : $U = 2t$ , $dU = 2dt$

$$L_1 = \left[ \frac{1}{2} t \sqrt{1+4t^2} + \frac{1}{4} \ln\left(2t + \sqrt{1+4t^2}\right) \right]_0^1$$

$$\boxed{L_1 = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4} \ln(2+\sqrt{5})}$$

+ Longueur $L_2$ +

$$L_2 = \int_0^1 \| g_2'(t) \| \, dt = \int_0^1 \sqrt{4t^2+1}\, dt$$

par symétrie : $\boxed{L_2 = L_2 = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4} \ln(2+\sqrt{5})}$

3°/ Comparer $L_1$ et $L_2$.

on a $L_1 = L_2$

4°/ Donner une interprétation géométrique du résultat.

. On remarque que les coordonées sont échangées donc, ils représentent la même courbe géométriques la longueur d'un arc ne dépend pas de la paramétrisation mais seulement de la forme de la courbe

Donc : les deux arcs ont la même longueur car ils représentent la même courbe