Exo 1 : $g(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$.

1). Montrer que la courbe est definie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

on a

$g(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$

les fonctions : t, $\sin t$, $\cos t$) sont definies et derivables sur $\mathbb{R}$

Donc $t - \sin t$ et $1 - \cos t$ sont derivables sur $\mathbb{R}$.

Leurs derivées $1 - \cos t$ $\sin t$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow g$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

2) calculer $g'(t)$ et etudier la régularite de la courbe

$g'(t) = (1 - \cos t, \sin t)$

$\Rightarrow g'(t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1 - \cos t = 0 \\ \sin t = 0 \end{cases}$

or $\sin t = 0$ pour $t = k\pi$

; $\cos t = 1$ pour $t = 2k\pi$

Les deux conditions sont vérifiees seulement si : $\boxed{t = 2k\pi}$

g est non réguliere pour $t = 2k\pi$ et réguliere ailleurs

3) Tangentes horizantales

Tangente Horizantale <=> $y'(t) = 0$ et $x'(t) \neq 0$

$\sin t = 0 \Rightarrow t = (2K+1)\pi$

Donc tangente horizontale pour: $t = (2K+1)\pi$.

4) .
- $x'(t) = 1 - \cos t \geqslant 0$

$\Rightarrow x(t)$ est croissante
- $y'(t) = \sin t$

positive sur $(0, \pi) \rightarrow y$ monte

négative sur $(\pi, 2\pi) \rightarrow y$ descend

5) Forme de la courbe:

C'est une cycloïde:
- elle part de
- elle ~~m~~onte
- elle redescend à $(2\pi, 0)$
- Il y a un point singulier à l'origine.

Exo2:

1) support géométrique:

$y = t^4 = (t^2)^2 = x^2$, $x = t^2 \geq 0$

$\Rightarrow$ la courbe est la parabole

$y = x^2$ avec $x \geq 0$.

2) la régulaire

$h'(t) = (2t, 4t^3)$

$\Rightarrow h'(t) = \{0\} \Leftrightarrow t = 0$

$\Rightarrow$ donc n'est pas régulier en 0

$\Rightarrow$ point singulier en $t = 0$ seulement

3) Tangente en $t = 0$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4t^3}{2t} = 2t^2$$

Quand $t \to 0$, $2t^2 \to 0$

$\Rightarrow$ Tangente horizontale : $y = 0$

4) Comportement près de 0:

La courbe approche l'origine en restant au-dessus de l'axe Ox et suit la parabole

$y = x^2$.

5) Type de singularité:

point de rebroussement (cuspide de peremiere espáce).

Exo3 :

$g(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$

1) Régulier :

$g'(t) = e^t(\cos t - \sin t, \sin t + \cos t)$

comme $e^t \neq 0 \Rightarrow g'(t) \neq 0$

$\Rightarrow$ courbe régulière sur $\mathbb{R}$.

2) support géometrique

$\theta = t$

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = e^t$

Donc $r = e^\theta$.

3) Nature :

$r = e^\theta \Rightarrow$ spirale plane (spirale logarithmique)

4) Nouvelle paramétrisation (angle polaire θ) :

$$\begin{cases} x = e^\theta \cos\theta \\ y = e^\theta \sin\theta \end{cases}$$

5) comparaison des vitesses :

Ancienne : $|g'(t)| = \sqrt{2} \cdot e^t$

Nouvelle : $|g'(\theta)| = \sqrt{2} \cdot e^\theta$

$\Rightarrow$ Même vitesse (car $t = \theta$).

EX04 :

$g_1(t) = (t, t^2) \quad g_2(t) = (t^2, t)$

1) vérifier que les deux arcs sont régulier sur $[0,1]$.

$g_1'(t) = (1, 2t) \rightarrow g_1'(t) = 0 \rightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \\ 2t = 0 \Rightarrow t = 0 \end{cases}$

$g_2'(t) = (2t, 1) \rightarrow g_2'(t) = 0 \rightarrow \begin{cases} 2t = 0 \Rightarrow t = 0 \\ 1 \neq 0 \end{cases}$

$g_1'(t) \neq 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$ et $g_2'(t) \neq 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$

$\boxed{g_1'(t) \text{ et } g_2'(t) \text{ sont régulier}}$

$\Longleftrightarrow g_1'(t) \neq (0,0)$ et $g_2'(t) \neq (0,0) \ \forall t$

2) calculer les longueurs L_1 et L_2 :

$L_1 = \int_0^1 \|g_1'(t)\| \, dt$

$g_1'(t) = (1, 2t)$

$\Rightarrow \|g_1'(t)\| = \sqrt{(1)^2 + (2t)^2}$

$= \sqrt{1 + 4t^2}$

$$\boxed{L_1 = \int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2} \, dt}$$

$L_2 = \int_0^1 \|g_2'(t)\| \, dt$

$g_2'(t) = (2t, 1)$

$\Rightarrow \|g_2'(t)\| = \sqrt{(2t)^2 + (1)^2}$

$= \sqrt{4t^2 + 1}$

$$\boxed{L_2 = \int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2} \, dt}$$

donc $L_1 = L_2 = \int_0^1 \sqrt{1+4t^2}\, dt$

on pose $u = 2t \Rightarrow du = 2dt \Rightarrow dt = \frac{du}{2}$

suppose :

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{1+u^2}\, du$$

on a

$$\int \sqrt{1+u^2}\, du = \frac{1}{2}\left(u\sqrt{1+u^2} + \ln\left|u + \sqrt{1+u^2}\right|\right)$$

donc

$$I = \left[\frac{1}{4}\left(2t\sqrt{1+4t^2} + \ln\left(2t + \sqrt{1+4t^2}\right)\right)\right]_0^1$$

alors :

$$\boxed{I = \frac{1}{4}\left(2\sqrt{5} + \ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right)}$$

donc $L_1 = L_2 = \frac{1}{4}\left(2\sqrt{5} + \ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right)$

3) comparer L_1 et L_2

$L_1 = \int_0^1 \sqrt{1+4t^2}\, dt$

$L_2 = \int_0^1 \sqrt{4t^2+1}\, dt$

comme $\sqrt{1+4t^2} = \sqrt{4t^2+1}$

Donc

$$\boxed{L_1 = L_2}$$

4) les deux courbes décrivent le méme arc de parabole $(0,0) \to (1,1)$
$\Rightarrow$ méme longueur.