

DM n°1 - Courbes paramétrées :

Exercice 01 :

$$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$g(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t).$$

1) Montrons que la courbe est définie et de classe C^1 :

- Les fonctions "sin t" et "cos t" sont définies et de classe C^1 sur \mathbb{R} .
- une somme ou différence de fonctions de classe C^1 est restée encore de classe C^1 .

$$\text{Donc } x(t) = t - \sin t$$

$$y(t) = 1 - \cos t.$$

La courbe est définie et de classe C^1 de \mathbb{R} .

2/ calculons $g'(t)$:

$$x'(t) = 1 - \cos t.$$

$$y'(t) = \sin t.$$

donc :

$$g'(t) = (1 - \cos t, \sin t).$$

• La régularité de la courbe :

pour $t = 0$ on a $g'(0) = (0, 0)$. alors la courbe n'est pas régulière.

3/ Point où la tangente est horizontale :

la tangente est horizontale si $y'(t) = 0 \Rightarrow$

$$\sin t = 0 \Rightarrow \boxed{t = 0} \quad g(0) = (0, 0).$$

1) Variation de $x(t)$ et $y(t)$ sur $[0, 2\pi]$.

a) $x(t) = t - \sin t$.

$$x'(t) = 1 - \cos t \Rightarrow 1 - \cos t \neq 0 \Rightarrow \cos t = 1.$$

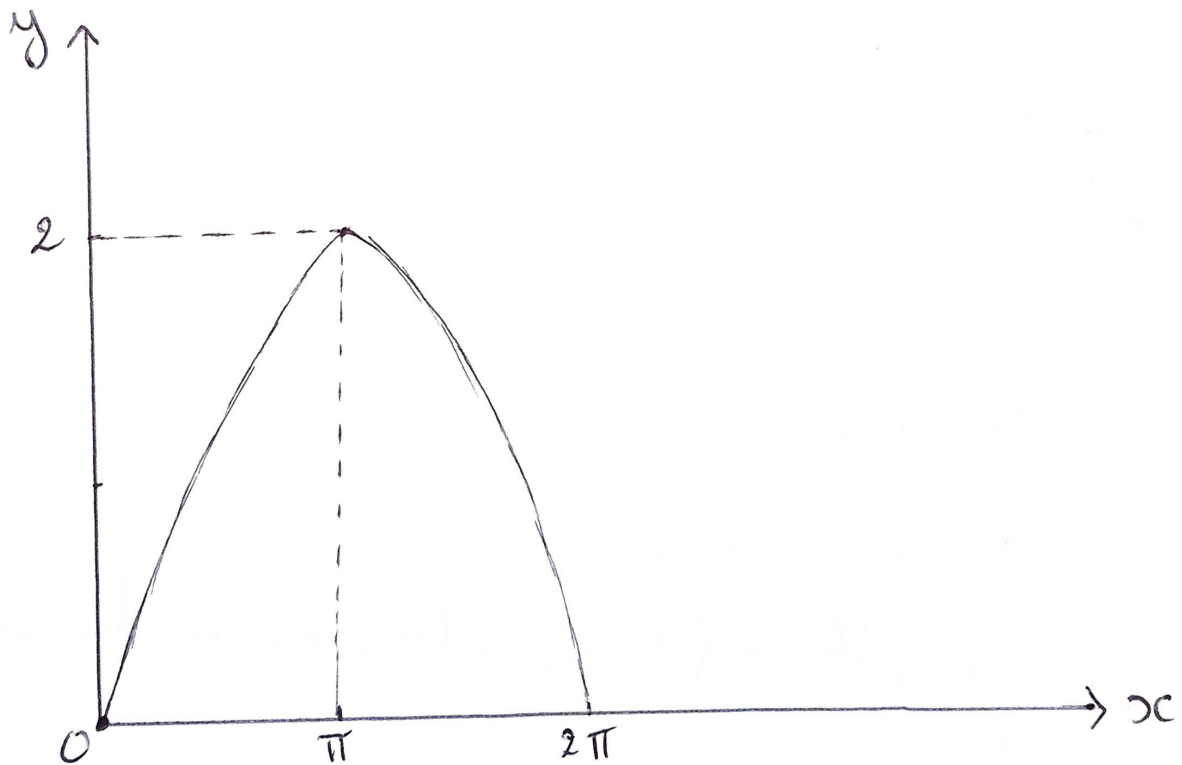
$\Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=2\pi \end{cases}$ strictement positif alors $x(t)$ est croissante sur $[0, 2\pi]$.

b) $y(t) = 1 - \cos t$.

$$y'(t) = \sin t \begin{cases} \text{positif sur } [0, \pi] \\ \text{négatif sur } [\pi, 2\pi] \end{cases}.$$

Alors $y(t)$ est croissante sur $[0, \pi]$ et décroissante sur $[\pi, 2\pi]$.

5) Allure de la courbe et tracé qualitatif :



Exercice 02

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$h(t) = (t^2, t^4)$$

1/ le support géométrique de la courbe :

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{y = x^2} \text{ avec } x \geq 0.$$

2/ Régularité et point singulier :

$$h'(t) = (2t, 4t^3)$$

Pour $t=0$ on a $h'(0) = (0, 0)$.

non régulier alors il existe une point singulier

$$\text{en } t=0 \Rightarrow (0, 0).$$

3/ l'existence d'une tangente en $t=0$.

$$\frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{4t^3}{2t} = 2t^2.$$

$$\text{au point } t=0 \Rightarrow 2t^2 = 0.$$

alors il existe une tangente au point $t=0$.

$$\text{leur équation est } \boxed{y=0}$$

4/ comportement au voisinage de l'origine :

lorsque $t \rightarrow 0$: $x = t^2 \geq 0$ et $y = t^4$

est négligeable devant x .

La courbe arrive à l'origine en restant au-dessus de l'axe des abscisses et admet l'axe des abscisses comme tangente.

5) type de singularité =
 le point singulier admet une seule tangente et la courbe
 ne se coupe pas elle-même.
 donc le point (0,0) est un point de rebroussement.

Exercice 03

1/ Montrons que la courbe est régulière sur \mathbb{R} .

on dérive :

$$x'(t) = e^t (\cos t - \sin t)$$

$$y'(t) = e^t (\sin t + \cos t)$$

$$\text{donc } g'(t) = (e^t (\cos t - \sin t), e^t (\sin t + \cos t))$$

La norme :

$$\|g'(t)\|^2 = e^{2t} [(\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2]$$

$$\|g'(t)\|^2 = 2e^{2t} > 0$$

alors la courbe est régulière sur \mathbb{R} .

2) Le support géométrique :

$$x^2 + y^2 = e^{2t} (\cos^2 t + \sin^2 t) = e^{2t}$$

$$\text{donc } r = \sqrt{x^2 + y^2} = e^t > 0$$

le support est le plan privé de l'origine parcouru
 avec un rayon strictement positif

3) Montrons que la courbe est une spirale plane :

$$\text{les coordonnées polaires } \begin{cases} r = e^t \\ \theta = t \end{cases}$$

le rayon augmente exponentiellement quand l'angle
 augmente linéairement c'est une spirale plane.

l'angle polaire =

comme $\theta = t$ en remplace t par θ :

$$\begin{cases} r(\theta) = e^\theta \\ x(\theta) = e^\theta \cos \theta \\ y(\theta) = e^\theta \sin \theta \end{cases} \Rightarrow g(\theta) = (e^\theta \cos \theta, e^\theta \sin \theta)$$

5) comparaison des vitesses de parcours =

Paramétrisation initiale (en t) =

$$\|g'(t)\| = \sqrt{2} e^t.$$

Paramétrisation polaire (en θ) =

$$\left\| \frac{dg}{d\theta} \right\| = \sqrt{2} e^\theta.$$

les vitesses sont identiques puisque $t = \theta$.

Exercice 04

$$g_1(t) = (t, t^2) \quad g_2(t) = (t^2, t).$$

1) Vérifions que les deux arcs sont réguliers sur $[0, 1]$.

pour $g_1(t)$:

$$g_1'(t) = (1, 2t). \quad \text{pour } t=0 \Rightarrow g_1'(0) = (1, 0).$$

alors g_1 est régulier.

pour $g_2(t)$:

$$g_2(t) = (2t, 1) \quad \text{pour } t=0 \Rightarrow g_2'(0) = (2, 0).$$

alors g_2 est régulier.

2) calculons les longueurs L_1 et L_2 .

$$L_1 = \int_0^1 \|g_1'(t)\| dt = \int_0^1 \sqrt{1+4t^2} dt.$$

$$L_2 = \int_0^1 \|g_2'(t)\| dt = \int_0^1 \sqrt{4t^2+1} dt.$$

3) donc $\boxed{L_1 = L_2 = \int_0^1 \sqrt{4t^2+1} dt}$

4) Interprétation géométrique:

Les deux courbes représentent la même parabole.

g_1 : la parcourt « normalement ».

g_2 : la parcourt en échangeant les rôles de x et y .

• le support géométrique est identique
seule la paramétrisation change.