DM n°1 Courbes paramétrées

Exercice 01 : $g(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$.

1). Montrer que la Courbe est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$:

$x(t) = t - \sin t \longrightarrow$ Somme de fonction

$y(t) = 1 - \cos t \longrightarrow$ est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$

- $x(t) = t - \sin t$: Somme de fonction derivables (t et $-\sin t$) alors $x(t)$ est derivable.

  $x'(t) = 1 - \cos t$, qui est Continue

- $y(t) = 1 - \cos t$: Somme de fonction deriv

  $y'(t) = \sin t$ qui continue

Donc $g(t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$

2) Calculer $g'(t)$ et étudier la régularité de la courbe.

$g'(t) = (1 - \cos t ; \sin t)$

$x'(t) = 1 - \cos t$
$y(t) = \sin t$

$$g'(t) = (1 - \cos t, \sin t) \neq (0,0) \iff \begin{cases} 1 - \cos t = 0 \\ \text{et} \\ \sin t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \cos t = 1 \\ \text{et} \\ \sin t = 0 \end{cases}$$

$t = 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$.

g est non régulier

3). Déterminer les points où la tangente est horizontale :

Une tangente est horizontale quand :

$\frac{dy}{dx} = 0$ et $x'(t) \neq 0$.

$x'(t) = 1 - \cos t$, $y'(t) = \sin t$.

$y'(t) = 0 \Rightarrow \sin t = 0 \Rightarrow t = k\pi$

Vérifions $x'(t) = 1 - \cos t$:

- Pour $t = 2k\pi$

  $x'(t) = 0 \rightarrow$ Pas horizontale

- Pour $t = (2k+1)\pi$

  $x'(t) = 1 - \cos((2k+1)\pi) = 1 - (-1) = 2 \neq 0$

Donc : tangente horizontale pour :

$t = \pi, 3\pi, 5\pi$

4). Étudier les variations de $x(t)$ et $y(t)$ sur $[0, 2\pi]$

- $x'(t) = 1 - \cos t$ $\qquad -1 \leqslant \cos t \leqslant 1$

  ~~$y(t) = \sin t$~~ $\qquad 0 \leqslant 1 - \cos t \leqslant 2$

$x'(t) = 1 - \cos t \geqslant 0$

Donc $x(t)$ est croissante

- $y'(t) = \sin t$:

$t \in [0, \pi] \Rightarrow \sin t \geqslant 0 \Rightarrow y(t)$ croissante

$t \in [\pi, 2\pi] \Rightarrow \sin t \leqslant 0 \Rightarrow y(t)$ décroissante

5). Décrire l'allure de la courbe et proposer un tracé qualitatif :

- $x(t) = t - \sin t$ est strictement croissante car : $x'(t) = 1 - \cos t \geq 0$
- $y(t) = 1 - \cos t$ croissante sur $[0, \pi]$ car $\sin t > 0$.
- décroissante sur $[\pi, 2\pi]$ car $\sin t < 0$

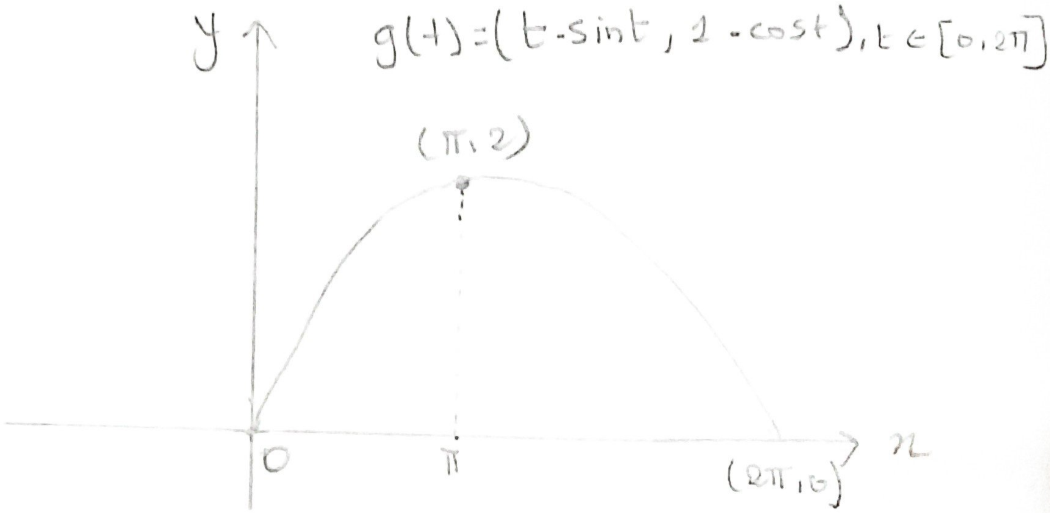
- $g(0,0) = (0,0)$ => La Courbe commence en $(0,0)$.

- $x(\pi) = \pi - \sin\pi = \pi$
- $y(\pi) = 1 - \cos\pi = 1 - (-1) = 2$

} donc le sommet est $= (\pi, 2)$

- $x(2\pi) = 2\pi$
- $y(2\pi) = 0$

} donc la courbe finit en : $(2\pi, 0)$.



Exercice 02 :

1) Déterminer le support géométrique de la courbe :
$h(t) = (t^2, t^4)$

$x = t^2$

$y = t^4 = t^2 . t^2 = x^2$

Donc : $y = x^2$ est le support géométrique

2)- Étudier la régularité et localiser les points singuliers :

$$h'(t) = (2t, 4t^3) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} 2t = 0 \\ \text{et} \\ 4t^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow t = 0$$

$(0,0)$ est un point singulier.

h n'est pas régulier sur $\mathbb{R}$

3)- Étudier l'existence d'une tangente en $t=0$.

$h(t) = (t^2, t^4)$, $x(t) = t^2$, $y(t) = t^4$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4t^3}{2t} = 2t^2$$

Quand $t \to 0$ $\quad 2t^2 \to 0 \Rightarrow$ donc la tangente a une pente 0.

$\Rightarrow$ La tangente existe.

4)- Décrire le comportement de la courbe au voisinage de l'origine :

$x = t^2 \geq 0$ Donc la courbe reste à droite.

elle arrive à l'origine avec tangente horizontale.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{si } t>0 : & x = t^2 \\ \text{si } t<0 : & x = (-t)^2 = t^2 \end{array}\right\} \Rightarrow h(t) = h(-t).$$

Donc la tangente est : $y = 0$.

5)- Type de singularité :

on a : la tangente existe, vitesse nulle en 0 et la courbe arrive des deux cotés.

alors : c'est un point de rebroussement.

Exercice 03 :

Montrer que la courbe est régulière :

$x(t) = e^t \cos t \Rightarrow x'(t) = e^t(\cos t - \sin t)$

$y'(t) = e^t \sin t \Rightarrow y'(t) = e^t(\sin t + \cos t).$

$g'(t) = \left(e^t(\cos t - \sin t) \,;\, e^t(\sin t + \cos t)\right)$

on calcule la norme :

$\|g'(t)\| = \sqrt{(e^t(\cos t - \sin t))^2 + (e^t(\sin t + \cos t))^2}$

$\|g'(t)\| = \sqrt{e^{2t}(\cos t - \sin t)^2 + e^{2t}(\sin t + \cos t)^2}$

$\|g'(t)\|^2 = e^{2t}\left[(\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2\right]$

$(\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2 = 2$

$(\cos t - \sin t)^2 = \cos^2 t - 2\cos t \sin t + \sin^2 t$

$(\sin t + \cos t)^2 = \sin^2 t + 2\sin t \cos t + \cos^2 t$

$(\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2 = \cos^2 t \cancel{- 2\cos t \sin t} + \sin^2 t + \sin^2 t \cancel{+ 2\sin t \cos t} + \cos^2 t$

$= 2$

$\|g'(t)\|^2 = 2e^{2t}$

$\|g(t)\| = \sqrt{2}\, e^t$ et $e^t > 0$, $\Rightarrow \|g'(t)\| \neq 0$

alors la courbe est régulière

2). Déterminer le support géométrique :

on passe en coordonnées polaires, on a :

$x = e^t \cos t$

$y = e^t \sin t$

en coordonnées polaires :

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

on trouve : $r = e^t$, $\theta = t$

donc $= e^{\theta}$

3)- Montrer que la courbe est une Spirale Plane :

on a : $r = e^{\theta}$

Quand θ augmente.

$r = e^{\theta}$ augmente très vite

Donc :

. Le point tourne autour de l'origine (car θ change).

en même temps il s'éloigne de plus en plus

$\Rightarrow$ alors est une Spirale ~~logar~~ plane.

4). Trouver une nouvelle paramétrisation de la courbe :

on a : $\theta = t$, on obtient $r = e^{\theta}$.

Une nouvelle paramétrisation es : $(x(\theta); y(\theta)) = (e^{\theta}\cos\theta ; e^{\theta}\sin\theta)$.

5)- Comparer les vitesses :

$g(t) = (e^{t}\cos t ; e^{t}\sin t)$.

on deja : $\|g'(t)\| = \sqrt{2}\, e^{t}$

et la nouvelle paramètrisation :

$\delta(\theta) = (e^{\theta}\cos\theta, e^{\theta}\sin\theta)$

on obtient :

$\| \delta'(\theta) \| = \sqrt{2}\, e^{\theta}$

comme $t = \theta$ alors sont les mêmes vitesse.

Exercice ou 3

1). Vérification : $g_1(t) = (t, t^2)$

$g_1'(t) = (1, 2t) \neq (0,0)$

donc g_1 est régulier sur $[0,1]$

$g_2(t) = (t^2, t)$.

$g_2'(t) = (2t, 1)$.

donc g_2 est régulier sur $[0,1)$

2). Calculer la longeurs : L_1, L_2.

$L_1 = \int_0^1 \|g_1'(t)\| \, dt$.

$\| g_1(t) \| = \sqrt{1^2 + (2t)^2} = \sqrt{1 + 4t^2}$

$L_1 = \int_0^1 \sqrt{1+4t^2} \, dt$

on pose : $w = 2t \Rightarrow dw = 2dt \Rightarrow dt = \frac{dw}{2}$

$t \to 0 \qquad t \to 1$
$w \to 0 \qquad w \to 2$

$L_1 = \int_0^2 \frac{1}{2} \sqrt{1+w^2} \, dt = \left[\frac{1}{2} \left(w \sqrt{1+w^2} + \operatorname{arcsin}(w) \right) \right]_0^2$

$L_1 = \left[1/2 \left(w \sqrt{1+w^2} + \ln\left(w + \sqrt{1+w^2}\right) \right) \right]_0^2$

$\boxed{L_1 = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \ln(2 + \sqrt{5})}$

on a : $\|g_1'(t)\| = \| g_2'(t) \| = \sqrt{1 + 4t^2}$

alors $L_1 = L_2 = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \ln(2 + \sqrt{5})$

3). Compare L_1 et L_2 :

On a : $L_1 = L_2$

alors :

Les deux longueurs sont identiques.

4). Donner une interprétation géometrique du résultat :

- $g_1(t) = (t, t^2)$
- $g_2(t) = (t^2, t)$

c'est la même arc de parabole, just que x et y sont échangés.

c'est comme une ~~syst~~ symétrique par rapport à la droit $y = x$