Nom: Boukhari.

Prénom: Ines.

Objet: DM N° 1.

Exercice 1 :

On considère : $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$g(t) \to g(t) = (t - \sin t ; 1 - \cos t)$.

1) La courbe est défine et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$:

on a les fonctions " t, sint, cost " sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, donc $g(t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

2) $g'(t)$ et la régularité de la courbe :

* $g'(t) = (1 - \cos t ; \sin t)$
* $g'(t) = (0,0)$

$\Rightarrow \begin{cases} 1 - \cos t = 0 \Leftrightarrow \cos t = 1 \\ \sin t = 0 \Rightarrow t = 2k\pi \end{cases}$

donc la courbe n'est pas régulière.

3) Les points où la tangente est horizontale :

tangente horizontale $\Leftrightarrow y'(t) = 0$ et $x'(t) \neq 0$

$\sin t = 0 \Rightarrow t = k\pi$

$\Rightarrow \begin{cases} \text{si } t = 2k\pi & \text{point singulier.} \\ \text{si } t = (2k+1)\pi & \text{tangente horizontale.} \end{cases}$

4) Les variations de $x(t)$ et $y(t)$ sur $[0 ; 2\pi]$:

$x'(t) = 1 - \cos t \geqslant 0 \Rightarrow x$ croissante.

$y'(t) = \sin t \Rightarrow \begin{cases} \text{croissante sur } [0 ; \pi] \\ \text{décroissante sur } [\pi ; 2\pi] \end{cases}$

Exercice 2 :

On considère : $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$h(t) \to h(t) = (t^2 ; t^4)$

1) Le support géométrique de la courbe :

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^4 = (t^2)^2 = x^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow y = x^2 , \; x \geqslant 0.$

2) La régularité et localiser les points singuliers :

$h'(t) = (2t ; 4t^3)$

$h'(0) = (0 ; 0)$ point singulier $t = 0$.

3) Tangente en $t = 0$:

$$\lim_{t \to 0} \frac{y}{x} = \lim_{t \to 0} \frac{t^4}{t^2} = t^2 = 0$$

tangente $y = 0$.

4) Le comportement de la courbe au voisinage de l'origine :

La courbe arrive tangentiellement à l'axe des abscisses.

5) Le type de singularité :

point de rebroussement.

Exercice 3 :

On considère : $g(t) = (e^t \cos t ; e^t \sin t) , t \in \mathbb{R}$

1) La courbe est régulière sur $\mathbb{R}$?

$g'(t) = (e^t(\cos t - \sin t) ; e^t(\sin t + \cos t))$

$e^t \neq 0 \Rightarrow g'(t) \neq (0 ; 0)$

donc g régulière sur $\mathbb{R}$.

2) Le support géométrique :

$r = \sqrt{x^2+y^2}$

$= e^t \quad , \theta = t$

3) La courbe est une spirale plane :

$r = e^{\theta}$ donc ~~un~~ est une spirale logarithmique.

4) Courbe en fonction de l'angle polaire :

on a déjà $\theta = t$

donc $r = e^{\theta}$.

5)

$\|g'(t)\| = \sqrt{2}\, e^t$ (vitesse augmente de façon exponentielle).

Paramétrisation cartésienne : de t.

Paramétrisation polaire : vitesse déffèrente.

même courbe, mais vitesse de parcours différente.

Exercice 4 :

On considère : $g_1(t) = (t; t^2)$ sur $[0; 1]$

$g_2(t) = (t^2, t)$

1) Régulière sur $\mathbb{R}$?

$g_1'(t) = (1; 2t) \neq (0,0)$

$g_2'(t) = (2t, 1) \neq (0,0)$

donc les deux sont régulière sur $\mathbb{R}$.

2) Les longueurs L_1 et L_2 :

On a $L = \int_0^1 \|g'(t)\|\, dt$

$$\Rightarrow \begin{cases} L_1 = \int_0^1 \sqrt{1+4t^2}\, dt \\ L_2 = \int_0^1 \sqrt{1+4t^2}\, dt \end{cases}$$

3) Comparaison :

on remarque que $L_1 = L_2$.

4) Interpétation géométrique du résultat :

on a même longueur géométrique donc les deux courbe sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.