Devoir maison n°01

Nom : Kessouri

Prénom : Nour el imane

exercice 1 : on considère l'arc paramétré g
$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ défini par.

$$g(t) = (t - \sin t \ , \ 1 - \cos t)$$

1. Montrer que la courbe est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

on a les fonctions $x(t) = t - \sin t$ et $y(t) = 1 - \cos t$ sont définies sur $\mathbb{R}$, et dérivable sur $\mathbb{R}$ aussi, et ce sont des sommes et déffèrence de fonctions usuelles qui sont de classe C^∞ alors g est de classe C^∞
donc la courbe g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

2. Calculer $g'(t)$ et étudier régularité.

$$g'(t) = (1 - \cos t \ , \ \sin t)$$

on a :

$$g'(t) = (0,0) \iff \begin{cases} 1 - \cos t = 0 \\ \sin t = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \cos t = 1 \\ \sin t = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \quad t = 2k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$

sur $[0, 2\pi]$, cela donne $t = 0$ et $t = 2\pi$

donc g est non régulier aux extrémités

g est régulier sur $]0, 2\pi[$.

3_ Déterminer les points où la tangente est horizontale.

pour $t \in]0, 2\pi[$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$$

$$1 - \cos t = 2 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$\sin t = 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cancel{2} \cancel{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \cdot \cos\left(\frac{t}{2}\right)}{\cancel{2} \sin^{\cancel{2}}\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

$$= \cot g\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow \cos\frac{t}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{t}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow t = \pi$$

au point $t = \pi$

$g(\pi) = (\pi - \sin\pi \ , \ 1 - \cos\pi)$
$= (\pi \ , \ 2)$

donc tangente horizontale en $(\pi, 2)$

4- Étudier la variation de $x(t)$ et $y(t)$ en $[0, 2\pi]$

on a :

$x'(t) = 1 - \cos t$

on sait que :

$$-1 \leqslant \cos t \leqslant 1$$

$$-1 \leqslant -\cos t \leqslant 1$$

$$0 \leqslant 1 - \cos t \leqslant 2$$

alors on a pour $t \in [0, 2\pi]$

$$1 - \cos t \geqslant 0$$

donc $x(t)$ est strictement croissante sur $[0; 2\pi]$

on a :

$y'(t) = \sin t$

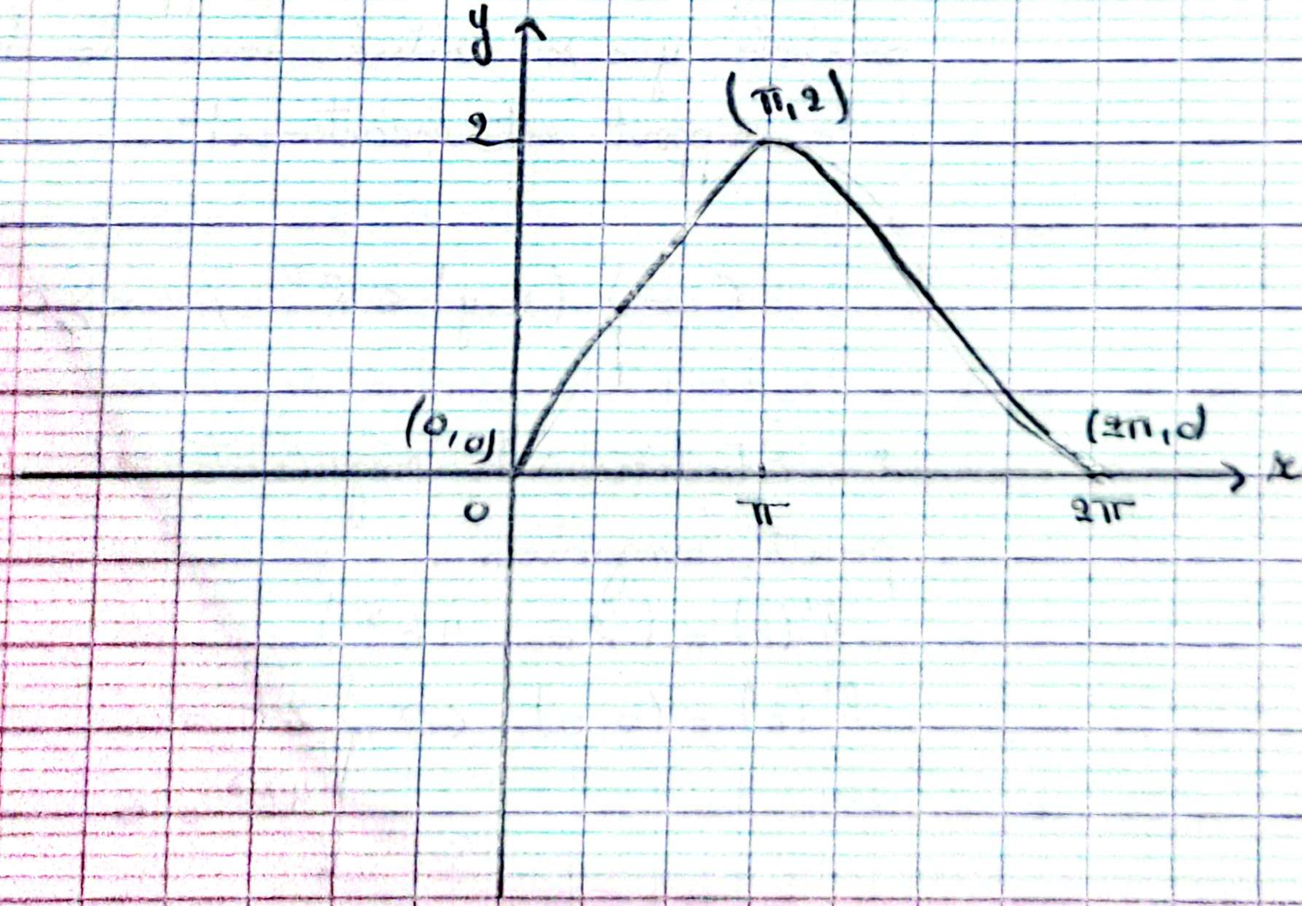
. sur $[0, \pi]$, $\sin t \geqslant 0$

. sur $[\pi, 2\pi]$, $\sin t \leqslant 0$

alors $y(t)$ est croissante sur $[0, \pi]$ et décroissante sur $[\pi, 2\pi]$

5. Décrire l'allure de la courbe et proposer un tracé qualitatif

la courbe commence au point $(0,0)$ monte jusqu'au maximum $(\pi, 2)$ puis redescend vers $(2\pi, 0)$, la forme générale est une cycloïde, la tangente est horizontale en $t = \pi$ et les points singuliers sont en $t = 0$ et $t = 2\pi$, le sens parcours est indiqué par la croissance de t (vers la droite)



exercice 2 : on considère la courbe paramétrée $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par :

$$h(t) = (t^2, t^4)$$

1. Déterminer le support géométrique de la courbe,

posons : $x = t^2$

$y = t^4$

alors :

$$y = t^4 = (t^2)^2 = x^2$$

donc tout point de la courbe vérifie $y = x^2$

et puisque $t^2 \geqslant 0$, le support est le : parabole $y = x^2$ situé dans le demi plan $x \geqslant 0$.

le support est exactement.

$$\Gamma = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; x \geqslant 0 \, , \, y = x^2 \}$$

2. Étudier la régularité et localiser les points singuliers.

$h'(t) = (2t, 4t^3)$

$$h'(t) = (0,0) \iff \begin{cases} 2t = 0 \\ 4t^3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \{ t = 0$$

en $t = 0$ le vecteur s'annule.

alors le point singulier est $t = 0$. c'est le seul.

3_ Étudier l'existance d'une tangente en $t = 0$

$$\frac{dy}{d} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\cancel{4}t^{\cancel{3}}}{\cancel{2}\cancel{t}} = 2t^2$$

en $t = 0$ on a : $2t^2 = 0$.

$$\frac{dy}{dx} = 0 \iff 2t^2 = 0 \iff t = 0$$

au point $t = 0$

$$h(0) = ((0)^2, (0)^4)$$
$$= (0, 0)$$

alors la géometrie du support admet une tangente en $(0,0)$ (l'axe Ox).

donc tangente horizontale en $(0,0)$.

4 - Décrire le comportement de la courbe au voisinage de l'origine.

on étudie le comportement de la courbe lorsque $t \to 0$.

on a : $x = t^2 \geq 0$.

$y = t^4 \geq 0$

donc la courbe reste dans le demi plan $x \geq 0$

de plus : $y = x^2$

la courbe est donc située au-dessus de l'axe des abscisses et passe par l'origine

elle passe par $(0,0)$ et remonte symétriquement des deux côtés

5 - Identifier le type de singularité.

le point est un point singulier car : la tangente en ce point est horizontale. la courbe reste du même côté de la tangente au voisinage de l'origine donc l'origine est un point de rebroussement d'ordre 2.

exercice 3 : on considère l'arc paramétré

$$g(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t), \quad t \in \mathbb{R}$$

1- Montrer que la courbe est régulière sur $\mathbb{R}$.

les fonctions e^t, $\cos t$, $\sin t$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc la courbe est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

on a :

$x'(t) = e^t \cos t - e^t \sin t$

$y'(t) = e^t \sin t + e^t \cos t$

$$g'(t) = (e^t \cos t - e^t \sin t, e^t \sin t + e^t \cos t)$$
$$= e^t (\cos t - \sin t, \sin t + \cos t)$$

et comme $e^t \neq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

le vecteur dérivé ne peut pas être nul

donc :

$g'(t) \neq (0,0) \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

alors la courbe est régulière sur $\mathbb{R}$.

2- Déterminer le support géométrique.

on pose :

$x = e^t \cos t \Rightarrow x^2 = e^{2t} \cos^2 t \quad \text{--- } (1)$

$y = e^t \sin t \Rightarrow y^2 = e^{2t} \sin^2 t \quad \text{--- } (2)$

$① + ② \Leftrightarrow x^2 + y^2 \Leftrightarrow e^{2t}\cos^2 t + e^{2t}\sin^2 t$

$x^2+y^2 = e^{2t}(\cos^2 t + \sin^2 t)$

on sait que $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$.

alors :

$x^2+y^2 = e^{2t}$, ainsi

$$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{e^{2t}}$$

$$\sqrt{x^2+y^2} = e^{t}$$

en coordonnées polaires : $r = e^t$, $\theta = t$

donc le support géométrique est une spirale logarithmique

3_ Montrer que la courbe est une spirale plane.

en calculant le rayon polaire,

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(e^t\cos t)^2 + (e^t\sin t)^2}$$

$$= e^t$$

comme l'angle polaire est $\theta = t$, on peut écrire $r = e^{\theta}$

cette équation montre que la courbe décrit une spirale plane dans le plan.

4- Trouver une nouvelle paramétrisation de la courbe en fonction de l'angle polaire.

comme $t = \theta$

alors $r = e^t = e^\theta$

en coordonnées polaires (r, θ)

$$\begin{cases} r(\theta) = e^\theta \\ \theta \in \mathbb{R} \end{cases}$$

en coordonnées cartésiennes

$$\begin{cases} x(\theta) = r(\theta)\cos\theta = e^\theta \cos\theta \\ y(\theta) = r(\theta)\sin\theta = e^\theta \sin\theta \end{cases}$$

$\vec{g}(\theta) = (e^\theta \cos\theta, e^\theta \sin\theta)$ c'est la nouvelle paramétrisation en fonction de l'angle polaire.

5- Comparer les vitesses de parcours selon les deux paramétrisations.

on a :

$g(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$

la vitesse $\| g'(t) \|$

$g'(t) = (e^t \cos t - e^t \sin t, e^t \sin t + e^t \cos t)$

$$\|g'(t)\|_2 = \sqrt{(e^t\cos t - e^t\sin t)^2 + (e^t\sin t + e^t\cos t)^2}$$

$$= \sqrt{e^{2t}(\cos t - \sin t)^2 + e^{2t}(\sin t + \cos t)^2}$$

$$= \sqrt{e^{2t}(\cos^2 t \cancel{- 2\cos t\sin t} + \sin^2 t + \sin^2 t \cancel{+ 2\cos t\sin t} + \cos^2 t)}$$

$$= \sqrt{e^{2t}(\cos^2 t + \sin^2 t + \sin^2 t + \cos^2 t)}$$

$$= \sqrt{e^{2t}(2\cos^2 t + 2\sin^2 t)}$$

$$= \sqrt{e^{2t}(2(\underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_{=1}))}$$

$$= \sqrt{e^{2t}(2)}$$

$$= e^t\sqrt{2}.$$

donc : $\|g'(t)\| = e^t\sqrt{2}$.

on $\bar{g}(\theta) = (e^{\theta}\cos\theta\ ,\ e^{\theta}\sin\theta)$

on calcule la vitesse

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{d(e^{\theta}\cos\theta)}{d\theta} = e^{\theta}\cos\theta - e^{\theta}\sin\theta$$

$$= e^{\theta}(\cos\theta - \sin\theta)$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{d(e^{\theta}\sin\theta)}{d\theta} = e^{\theta}\sin\theta + e^{\theta}\cos\theta$$

$$= e^{\theta}(\sin\theta + \cos\theta)$$

$$\|g'(\theta)\| = \sqrt{e^{2\theta}\left((\cos\theta - \sin\theta)^2 + (\sin\theta + \cos\theta)^2\right)}$$

$$= \sqrt{e^{2\theta}\,2} = e^{\theta}\sqrt{2}$$

on a : $v(\theta) = v(t)$

alors la vitesse de parcours est la même dans des deux paramétrisation .

<u>exercice 4.</u> on considère les deux arcs paramétrés sur $[0, 1]$:

$$g_1(t) = (t, t^2)$$
$$g_2(t) = (t^2, t)$$

1. Vérifier que les deux arcs sont réguliers sur $[0, 1]$.

- $g_1'(t) = (1, 2t)$

pour tout $t \in [0, 1]$, $g_1'(t) \neq (0,0)$

donc g_1 est régulier sur $[0, 1]$

- $g_2'(t) = (2t, 1)$

pour tout $t \in [0, 1]$, $g_2'(t) \neq (0,0)$

donc g_2 est régulier sur $[0, 1]$.

alors les deux arcs sont réguliers sur $[0, 1]$.

2. Calculer les longueurs L_1 et L_2.

- $g_1(t)$.

$x_1'(t) = 1$, $y_1'(t) = 2t$

$$L_1 = \int_0^1 \sqrt{1^2 + (2t)^2}\, dt = \int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2}\, dt$$

on a.

$$\int \sqrt{a + b^2}\, db = \frac{b}{2}\sqrt{a^2 + b^2} + \frac{a^2}{2} \ln\left(b + \sqrt{a^2+b^2}\right)$$

on pose : $a = 1$ et $b = 2t$.

on a : $b = 2t \Rightarrow db = 2.dt$

$\Rightarrow dt = \frac{db}{2}$

$$L_1 = \int_0^2 \sqrt{1+b^2} \cdot \frac{db}{2}$$

$$L_1 = \frac{1}{2} \int_0^2 \sqrt{1+b^2}\, db$$

$$= \left[\frac{1}{2} \left(\frac{b}{2} \sqrt{1+b^2} + \frac{1}{2} \ln\left(b + \sqrt{1+b^2}\right) \right) \right]_0^2$$

$$= \left[\frac{1}{2} \left(\frac{2}{2} \sqrt{1+2^2} + \frac{1}{2} \ln\left(2 + \sqrt{1+2^2}\right) \right) \right] -$$

$$\left[\frac{1}{2} \left(\frac{0}{2} \sqrt{1+0^2} + \frac{1}{2} \ln\left(0 + \sqrt{1+0^2}\right) \right) \right]$$

$$= \left[\frac{1}{2} \left(1 \cdot \sqrt{5} + \frac{1}{2} \ln\left(2 + \sqrt{5}\right) \right) \right] -$$

$$\left[\frac{1}{2} \left(0 + \frac{1}{2} \ln 1 \right) \right] \rightarrow 0$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{4}\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$$

- $g_2(t)$

$x_2'(t) = 2t \quad , \quad y_2'(t) = 1$

$$L_2 = \int_0^1 \| g_2'(t) \| \, dt = \int_0^1 \sqrt{(2t)^2 + 1^2} \, dt$$

$$= \int_0^1 \sqrt{4t^2 + 1} \, dt$$

c'est le même intégral que L_1 juste les termes sous la racines sont inversés.

$1 + 4t^2 = 4t^2 + 1$

donc :

$$L_1 = L_2 = \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{4}\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$$

3_ Comparer L_1 et L_2.

on constate que $L_1 = L_2$

4_ Donner une interprétation géométrique du résultat

les arcs g_1 et g_2 ont la même longueur sur $[0,1]$ car inverser les coordonnées ne change pas la distance le long de la courbe, géométriquement g_2 est la parabole $y = x^2$ refléchie par rapport à la diagonale $y = x$ ce qui esplique l'egalité des longeurs.