Exercise 1 :

AiD Louiza DM n°1

$$g(t) = (t - \sin t,\ 1 - \cos t)$$

(1) la courbe est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$
on les fonctions $x(t) = t - \sin t$ et $y(t) = 1 - \cos t$ sont définies sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$ aussi, Leurs dérivées sont continues, donc la courbe est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

(2) Calculer $g'(t)$ et étudier la régularité de la courbe :
$g'(t) = (1 - \cos t,\ \sin t)$. La courbe est régulière
La courbe est régulière si $g'(t) \neq (0,0)$
$g'(t) = (0,0) \Rightarrow 1 - \cos t = 0$ et $\sin t = 0$.
$\Rightarrow t = 2k\pi$. $k \in \mathbb{Z}$.
La courbe n'est pas régulière en ces points.

(3) Les points où la tangente est horizontale :
Si $y'(t) = 0$ et $x'(t) \neq 0$. $y'(t) = \sin t = 0 \Leftrightarrow t = k\pi$.
Pour : $t \in]0, 2\pi[$ $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \dfrac{\sin t}{1 - \cos t} = \dfrac{\cos(t/2)}{\sin(t/2)}$

$$\begin{cases} 1 - \cos t = 2 \cdot \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \\ \sin t = 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{t}{2}\right) \end{cases} \qquad = \cotg\left(\frac{t}{2}\right).$$

et comme : $\dfrac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow \cotg\left(\frac{t}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{t}{2} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow t = \pi$.
donc : $t = \pi$; $g(\pi) = (\pi - \sin\pi,\ 1 - \cos\pi)$.

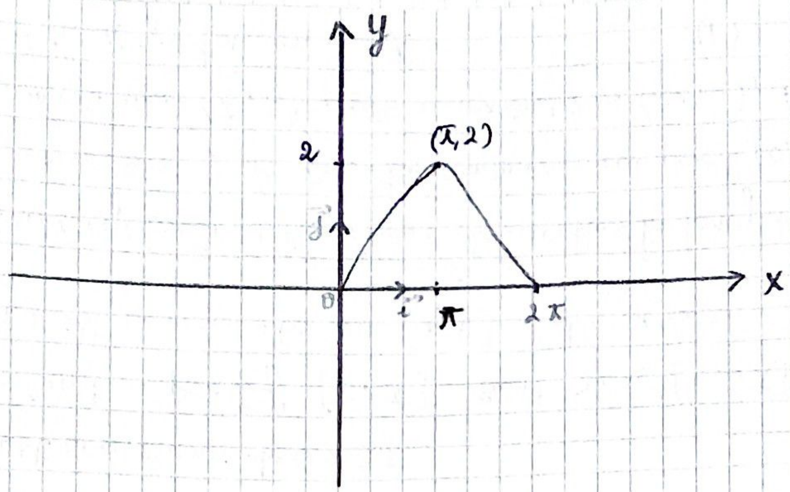
(4) Les variations de $x(t)$ et $y(t)$ sur $[0, 2\pi]$:
- $x'(t) = 1 - \cos t \geq 0$. S'annule en 0 et 2π.

alors : $x(t)$ est croissante de 0 à 2π.
- $y'(t) = \sin t$ positif $[0; \pi]$ $\sin t \geq 0$; $[\pi, 2\pi]$; $\sin t \leq 0$.

alors : $y(t)$ est croissante sur $[0, \pi]$ et décroissante sur $[\pi, 2\pi]$.

(5) c'est une cycloïde. Elle forme des arches le long de l'axe des abscisses ; la courbe commence au point $(0,0)$ monte jusqu'au maximum $(\pi, 2)$ puis redescend vers $(2\pi, 0)$, la tangente est horizontale en $t = \pi$.

Γ



Exercise 2 : $\quad h(t) = (t^2, t^4)$

(1) le support géometrique de la courbe :

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^4 \end{cases} \rightarrow y = (t^2)^2 \rightarrow y = x^2.$$

donc tout point de la courbe verifie $y = x^2$. et $t^2 \geq 0$.

le support est le parabole $y = x^2$.

$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ;\ x \geq 0 ,\ y = x^2\}$.

(2) la régularité et localiser les points singuliers :

$h'(t) = (2t , 4t^3)$; $h'(t) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2t = 0 \\ 4t^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 0$.

en $t = 0$ le vecteur s'annule

donc : le point singulier $t = 0$ (le seul).

(3) l'existance d'une tangente en $t = 0$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{4t^3}{2t} = 2t^2 .$$

en $t = 0$, on a $2t^2 = 0$.

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow 2t^2 = 0 \Leftrightarrow t = 0.$$

au point $t = 0$: $h(0) = ((0)^2 ; (0)^4) = (0,0)$.

donc : une tangente en $(0,0)$ (l'axe Ox)

alors : tangente horizontale en $(0,0)$.

(4) Le comportement de la courbe au voisinage de l'origine :

$t \rightarrow 0$: on a : $x = t^2 \geq 0$; $y = t^4 \geq 0$.

donc la courbe reste dans le demi plan $x \geq 0$ de plus $y = x^2$.

la courbe est donc située au-dessus de l'axe des abxisses et passe par l'originie ; elle passe par $(0,0)$.

( ) Identifier le type de singularité :

Le point est un point singulier car, la tangente en ce point est horizontale, la courbe reste du même côté de la tangente au voisinage de l'origine, donc : l'origine est un point de rebroussement d'ordre 2.

Exercise 3 :

$$g(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t) \quad t \in \mathbb{R}.$$

(1) la courbe est régulière sur $\mathbb{R}$

les fonctions e^t, $\cos t$, $\sin t$, sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc la courbe est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

$$x'(t) = e^t \cos t - e^t \sin t.$$
$$y'(t) = e^t \sin t + e^t \cos t.$$
$$g'(t) = (e^t \cos t - e^t \sin t, e^t \sin t + e^t \cos t)$$
$$= e^t (\cos t - \sin t ; \sin t + \cos t)$$

et comme : $e^t \neq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

$g'(t) \neq (0,0) \forall t \in \mathbb{R}$. la courbe est régulière sur $\mathbb{R}$.

(2) Le support géometrique :

on pose : $\begin{cases} x = e^t \cos t \Rightarrow x^2 = e^{2t} \cos^2 t \ \ldots (1) \\ y = e^t \sin t \Rightarrow y^2 = e^{2t} \sin^2 t \ \ldots (2) \end{cases}$

$$x^2 + y^2 \Leftrightarrow e^{2t} \cos^2 t + e^{2t} \sin^2 t \Rightarrow x^2 + y^2 = e^{2t} (\cos^2 t + \sin^2 t)$$

$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$. alors : $x^2 + y^2 = e^{2t}$; $\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{e^{2t}} = e^t$.

donc : le support : est une spirale logarithmique.

(3) la courbe est une spirale plane :

le rayon polaire : $r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(e^t \cos t)^2 + (e^t \sin t)^2} = e^t$.

l'angle polaire : $\theta = t$. ; $r = e^\theta$.

(4) une nouvelle paramétrisation de la courbe en fonction de l'angle polaire:

Comme: $\theta = t$; $r = e^t \to r = e^\theta$.

en coordonnées polaire (r, θ) $\begin{cases} r(\theta) = e^\theta . \\ \theta \in \mathbb{R} . \end{cases}$

et: $x(\theta) = r(\theta)\cos(\theta) = e^\theta \cos\theta$.

$y(\theta) = r(\theta)\sin(\theta) = e^\theta \sin\theta$.

alors: $\vec{g}(\theta) = (e^\theta \cos\theta, e^\theta \sin\theta)$.

(5) Comparer les vitesses de parcours selon lesdeux parametrisations:

- $g(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$ la vitesse $\|g'(t)\|$:

$g'(t) = (e^t \cos t - e^t \sin t, e^t \sin t + e^t \cos t)$.

$\|g'(t)\| = \sqrt{(e^t \cos t - e^t \sin t)^2 + (e^t \sin t + e^t \cos t)^2}$

$= \sqrt{e^{2t}(\cos^2 t - \cancel{2\cos t . \sin t} + \sin^2 t + \sin^2 t + \cancel{2\cos t . \sin t} + \cos^2 t)}$.

$= \sqrt{e^{2t}(2\cos^2 t + 2\sin^2 t)} = \sqrt{e^{2t}(2(\underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_{=1}))} = \sqrt{e^{2t}(2)}$

$= e^t\sqrt{2}$. alors: $\|g'(t)\| = e^t \sqrt{2}$.

- on a: $\tilde{g}(\theta) = (e^\theta \cos\theta, e^\theta \sin\theta)$.

la vitesse: $\frac{dx}{d\theta} = \frac{d(e^\theta \cos\theta)}{d\theta} = e^\theta \cos\theta - e^\theta \sin\theta$.

$= e^\theta (\cos\theta - \sin\theta)$.

$\frac{dy}{d\theta} = \frac{d(e^\theta \sin\theta)}{d\theta} = e^\theta \sin\theta + e^\theta \cos\theta = e^\theta(\sin\theta + \cos\theta)$.

$\|g'(\theta)\| = \sqrt{e^{2\theta}((\cos\theta - \sin\theta)^2 + \sin\theta + \cos\theta)^2)} = \sqrt{e^{2\theta} 2} = e^\theta \sqrt{2}$.

donc: $v(\theta) = v(t)$.

Exercice 4: $g_1(t) = (t, t^2)$; $g_2(t) = (t^2, t)$.

(1) Verifier que lesdeux arcs sont réguliers sur $[0;1]$.

$g_1'(t) = (1, 2t)$; pour tout $t \in [0;1]$ $g_1'(t) \neq (0,0)$

donc g_1 est regulier sur $[0,1]$.

$g_2'(t) = (2t, 1)$; $t \in [0;1]$ $g_2'(t) \neq (0,0)$

donc g_2 est regulier sur $[0,1]$.

(2) les longeurs L_1, L_2 :

Pour $g_1(t)$: $x_1'(t) = 1$; $y_1'(t) = 2t$.

$$L_1 = \int_0^1 \sqrt{1^2 + (2t)^2}\,dt = \int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2}\,dt.$$

on a: $\int \sqrt{a + b^2}\,db = \frac{b}{2}\sqrt{a^2 + b^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(b + \sqrt{a^2 + b^2}\right)$.

on pose: $a = 1$; $b = 2t$. $\quad b = 2t \Rightarrow db = 2\,dt$.

$\Rightarrow dt = \frac{db}{2}$.

$$L_1 = \int_0^2 \sqrt{1 + b^2} = \frac{db}{2}.$$

$$L_1 = \frac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{1 + b^2}\,db = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{b}{2}\sqrt{1 + b^2} + \frac{1}{2}\ln\left(b + \sqrt{1 + b^2}\right)\right)\right]_0^2$$

$$= \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\ }{2}\sqrt{1 + \ ^2} + \frac{1}{2}\ln\left(\ + \sqrt{1 + \ ^2}\right)\right)\right] - \left[\frac{1}{2}\left(\frac{0}{2}\sqrt{1 + 0^2} + \frac{1}{2}\ln\left(0 + \sqrt{1 + 0^2}\right)\right)\right]$$

$$= \left[\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln(2 + \sqrt{5})\right)\right] - \left[\frac{1}{2}\left(0 + -\frac{1}{2}\ln 1\right)\right].$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{4}\ln(2 + \sqrt{5})$$

pour $g_2(t)$: $x_2'(t) = 2t$; $y_2'(t) = 1$.

$$L_2 = \int_0^1 \|g_2'(t)\|\,dt = \int_0^1 \sqrt{(2t)^2 + 1^2}\,dt = \int_0^1 \sqrt{4t^2 + 1}\,dt.$$

$1 + 4t^2 = 4t^2 + 1$ donc: $L_1 = L_2 = \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{4}\ln(2 + \sqrt{5})$.

(3) Comparer L_1 et L_2 : on trouve que $L_1 = L_2$.

(4) interprétation géométrique du résultat :

Les arcs g_1 et g_2 sont la même longeur sur $[0, 1]$ car inverser les coordonnées ne change pas la distance le long de la courbe géométriquement g_1 et la parabole $y = x^2$ refléchie par rapport à la diagonale $y = x$ ce qui expliquer l'egalité des longeurs.