· Exo 1 :

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$g(t) = (t - \sin t \ , \ 1 - \cos t).$$

1). Montrons que la courbe est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$:

- On a les fonctions $x(t) = t - \sin t$ et $y(t) = 1 - \cos t$ sont composées des polynômes et des fonctions trigonométrique qui sont définies $\forall t \in \mathbb{R}$, donc la courbe est définie sur $\mathbb{R}$.

- Les deux fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sont infiniment différenciable (C^∞), cela implique que la courbe est au moins de class C^1 dans $\mathbb{R}$.

2) Calculons $g'(t)$ et étudions la régularité de la courbe :

- $g'(t) = (1 - \cos t \ , \ \sin t).$

- On dit que g est régulière ssi $g'(t) \neq (0,0)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Alors : $g'(t) = (0,0) \Rightarrow g'(t) = (1 - \cos t \ , \sin t) = (0,0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 - \cos t = 0 \\ \sin t = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos t = 1 \\ \sin t = 0 \end{cases}$$

* $\cos t = 1 \Rightarrow t = 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$

* $\sin t = 0 \Rightarrow t = k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$

⇒ Donc : g est régulière en $t = 2k\pi$ et non régulière ailleu

Car :

- pour $t = \pi$: $x'(\pi) = \sin(\pi) = 0$ mais $y'(\pi) = 1 - \cos(\pi)$
$= 1 - (-1) = 2$

$\Rightarrow$ donc, dans ce cas $g'(t) \neq (0,0)$.

- pour $t = 2\pi$: $x'(2\pi) = \sin(\pi) = 0$ et $y'(2\pi) = 1 - \cos(2\pi)$
$= 1 - 1 = 0$

$\Rightarrow$ donc : $g'(t) = (0,0)$.

3) Déterminons les points où la tangente est horizontale :

- La tangente est horizontale quand $y'(t) = 0$ et $x'(t) \neq 0$

Alors : $y'(t) = \sin t = 0 \Rightarrow t = k\pi$.

On exclut $t = 2k\pi$ (les points singuliers)

Donc : la tangente est horizontale en $t = (2k+1)\pi$.

En $t = \pi$: $x(\pi) = \pi$ et $y(\pi) = 2$, les points sont

$((2k+1)\pi, 2)$.

4) Étudions les variations de $x(t)$ et $y(t)$ sur $[0, 2\pi]$

- **Variations de $x(t)$:**

$x'(t) = 1 - \cos(t)$.

* on sait que : $\forall t \in \mathbb{R}$

$-1 \leqslant \cos t \leqslant 1$

$\Rightarrow 1 - \cos t \geqslant 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

* $x'(t) = 0$ quand

$\cos t = 1 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ \text{ou } t = 2\pi \end{cases}$

$\Rightarrow$ Cela implique que $x(t)$ est strictement croissante sur $[0, 2\pi]$

- **Variations de $y(t)$:**

$y'(t) = \sin(t)$

* sur $[0, 2\pi]$:

- sur $]0, \pi[$: $\sin(t) > 0$

$\Rightarrow y(t)$ est croissante.

- sur $]\pi, 2\pi[$: $\sin(t) < 0$

$\Rightarrow y(t)$ est décroissante

* $y'(t) = 0$ en $t = 0, \pi, 2\pi$.

$\Rightarrow$ ~~cela~~ $y(t)$ atteinte le max en $t = \pi$

t	0	π	2π
$x'(t)$		$+$	
$x(t)$	0	$\nearrow$	2π
$y'(t)$	$+$	0	$-$
$y(t)$	$0 \nearrow$	2 (Max)	$\searrow 0$

5) Décrirons l'allure de la courbe et proposons un tracé quantitatif :

Cette courbe est une Cycloïde. ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

- Elle possède des points de rebroussement dirigées vers le bas aux points $x = 2k\pi$.
- Elle ~~[illegible]~~ atteint une hauteur maximale de 2 aux points $x = (2k+1)\pi$.

Exo 2 :

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$h(t) = (t^2, t^4)$$

1) Déterminons le support géométrique de la courbe :

$x = t^2$

$y = t^4 = (t^2)^2 \Rightarrow y = x^2$ tq : $x \geq 0$ ~~=> demi~~

$\Rightarrow$ demi-parabole droite (la partie droite de la parabole).

2) Étudions la régularité et localisons les points singuliers :

$$h'(t) = (2t, 4t^3) = 2t(1, 2t^2)$$

. On a : $h'(t) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} 2t = 0 \\ 4t^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow t = 0$

Donc : l'origine $(0,0)$ est le seul point singuliers

alors : h est non régulière au point $(0,0)$ et régulier ailleurs.

3) Étude d'existance d'une tangente $t = 0$:

$$\frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{4t^3}{2t} = 2t^2$$

Quand $t \to 0$, $2t^2 \to 0$ ~~il existe une~~

$\Rightarrow$ Il existe une tangente au l'origine et elle est horizontal.

4) description de comportent de la courbe au voisinage de l'origine.

- Lorsque t passe de partie négatif à positif.

$$\begin{cases} x(t) = t^2 \geq 0 \Rightarrow \text{toujours positif.} \\ y(t) = t^4 \geq 0 \Rightarrow \text{toujours négatif.} \end{cases}$$

→ Cela signifie que le point se déplace vers l'origine depuis la droite $(x \geq 0)$. s'arrête en $(0,0)$, puis repart le long du même chemin vers la droite.

5) Type de singularité:

. Puisque la courbe arrive et repart dans la même direction et du même côté de la tangente, il s'agit d'un point de "rebroussement de seconde espèse".

Exo 3:

1) Montrons que la courbe est régulière sur $\mathbb{R}$:

g est régulière $\Leftrightarrow$ $g'(t) \neq (0,0)$ donc:

$$g'(t) = (e^t \cos t - e^t \sin t \ , \ e^t \sin t + e^t \cos t)$$

$$= (e^t (\cos t - \sin t) \ , \ e^t (\sin t + \cos t))$$

$$= e^t (\cos t - \sin t \ , \ \sin t + \cos t).$$

Quand $e^t > 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$ donc il suffit que:

$$\begin{cases} \cos t - \sin t = 0 \\ \text{et } \sin t + \cos t = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos t = \sin t \\ \sin t = -\cos t \end{cases} \Rightarrow \text{ce qui est impossible}$$

Donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $g'(t) \neq (0,0)$ alors : g est régulière sur $\mathbb{R}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

2) Déterminons le support géométrique :

le support est la forme que la courbe trace dans le plane x, y, donc :

$$x^2 + y^2 = (e^t \cos t)^2 + (e^t \sin t)^2$$

$$x^2 + y^2 = (e^{2t} \cos^2 t) + (e^{2t} \sin^2 t)$$

$$x^2 + y^2 = e^{2t} (\cos^2 t + \sin^2 t)$$

$$x^2 + y^2 = e^{2t} \quad (\text{car : } \cos^2 t + \sin^2 t = 1)$$

$\sqrt{x^2+y^2} = e^t = r \Rightarrow$ (la distance ~~...~~ par rapport à l'origine est $r = \sqrt{x^2+y^2} = e^t$)

3) Montrons que la courbe est une spirale plane :

la courbe est une spirale plane si la distance par rapport à l'origine ~~...~~ ~~...~~ croît ou décroît strictement quand l'angle change :

- Qd : $t \to +\infty$, $r = e^t \to +\infty$
- Qd : $t \to -\infty$, $r = e^t \to 0$

$\Rightarrow$ Puisque le point pivote (grâce à $\cos t$ et $\sin t$) alors que le rayon croît de manière exponentielle il trace une spirale logarithmique.

4) Trouvons une nouvelle paramétrisation de la courbe en fonction de l'angle polaire :

- En coordonnées polaires, nous avons : $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$.

et on a :
$$\begin{cases} x(t) = e^t \cos t \\ y(t) = e^t \sin t \end{cases}$$

- On peut identifier l'angle θ comme le paramètre t (à $2k\pi$ près).

Donc, l'équation polaire est : $r(\theta) = e^\theta$.

5) Comparaison des vitesses de parcours :

On a :
$$\begin{cases} x(t) = e^t \cos t \Rightarrow x'(t) = e^t(\cos t - \sin t) \\ y(t) = e^t \sin t \Rightarrow y'(t) = e^t(\sin t + \cos t). \end{cases}$$

$$v(t) = \|g'(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$$

$$= \sqrt{e^{2t}(\sin t - \cos t)^2 + e^{2t}(\sin t + \cos t)^2}$$

$$= \sqrt{e^{2t}(\cos^2 t - 2\sin t\cos t + \sin^2 t) + e^{2t}(\sin^2 t + 2\sin t\cos t + \cos^2 t)}$$

$\Rightarrow$?

Exo 4 : $g_1(t) = (t, t^2)$, $g_2(t) = (t^2, t)$

1) **Vérifions que les arcs sont réguliers sur $[0,1]$:**

- $g_1'(t) = (1, 2t) \Rightarrow g_1'(t) \neq (0,0) \quad \forall t \in [0,1]$
  (car le premier coordonée est toujours 1)

  $\Rightarrow g_1'(t)$ est régulière sur $[0,1]$.

- $g_2'(t) = (2t, 1) \Rightarrow g_2'(t) \neq (0,0) \quad \forall t$
  (car le ~~premier~~ deusième coordonée est toujours 1).

  $\Rightarrow g_2'(t)$ est régulière sur $[0,1]$ $\forall t$

2) **Calculons les longueurs :**

- $$L_1 = \int_0^1 \| g_1'(t) \| dt = \int_0^1 \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$
  $$= \int_0^1 \sqrt{1^2 + (2t)^2}\, dt$$
  $$\boxed{= \int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2}\, dt}$$

- $$L_2 = \int_0^1 \sqrt{(2t)^2 + 1^2}\, dt \boxed{= \int_0^1 \sqrt{4t^2 + 1}\, dt}$$

$$\Rightarrow L_1 = L_2 = \int_0^1 \sqrt{4t^2+1}\, dt .$$

3) Comparaison des vitesses :

$v(t) = \|g'(t)\|$.

- vitesse de g_1 : $v_1(t) = \sqrt{1+4t^2}$.

$\begin{cases} \text{pour } t=0, \ v_1 = 1 \\ \text{pour } t = 1, \ v_1 = \sqrt{5} \end{cases}$

=> la vitesse ~~était~~ augmente au cours du déplacement.

- vitesse de g_2 : $v_2(t) = \sqrt{4t^2+1}$

$\begin{cases} \text{pour } t=0, \ v_2 = 1 \\ \text{pour } t = 1, \ v_2 = \sqrt{5} \end{cases}$

- La comparaison : $v_1(t) = v_2(t) \quad \forall t \in [0,1]$, les deux courbes sont parcourues à la même vitesse à chaque instant t correspondant.