Faculté des Sciences Appliquées — Département Génie de Procédés
Méthodes Numériques 2ème année GP — 2025–2026

Corrigé détaillé TD N°1

Exercice 1

$f(x) = x^3 - x - 1$

Solution. 1. ***Existence et unicité de la racine***

Existence

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. On calcule :

$$f(1) = 1 - 1 - 1 = -1 < 0, \qquad f(2) = 8 - 2 - 1 = 5 > 0.$$

$f(1) \times$
$f(2) < 0$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, léquation $f(x) = 0$ admet au moins une racine $\alpha \in (1, 2)$.
De plus,

$$f'(x) = 3x^2 - 1.$$

Sur lintervalle $(1, 2)$, on a $f'(x) \geq 2 > 0$. La fonction est strictement croissante sur cet intervalle, donc la racine est unique.

$1 < x < 2$
$1 < x^2 < 4$
$3 < 3x^2 < 12$
$2 < 3x^2 - 1 < 11$
> 0

2. ***Méthode de dichotomie***

On part de $[a_0, b_0] = [1, 2]$ avec $f(a_0)f(b_0) < 0$.
On effectue les itérations jusquà obtenir :

$$|x_{n+1} - x_n| \leq 10^{-1}.$$

$f(a_n)$ | $f(b_n)$ | $f(x_n)$

n	a_n	b_n	x_n
0	1	2	1.5
1	1.5	2	1.75
2	1.5	1.75	1.625
3	1.5	1.625	1.5625

On obtient $\alpha \approx 1.6$ à 10^{-1} près.
Le nombre théorique ditérations est :

$$N = \left\lfloor \frac{\ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\ln 2} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{\ln(10)}{\ln 2} \right\rfloor + 1 = 5.$$

Le nombre effectif est cohérent avec cette estimation.

3. ***Méthode de Newton***

La formule de Newton est :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Avec $x_0 = \frac{3}{2}$:

$$f(1.5) = 0.875, \qquad f'(1.5) = 5.75,$$

$$x_1 = 1.5 - \frac{0.875}{5.75} \approx 1.348.$$

Deuxième itération :

$$x_2 \approx 1.325.$$

La méthode converge rapidement vers $\alpha \approx 1.3247$.

Exercice 2

$f(x) = e^x - x - 2$

Solution. 1. ***Séparation graphique***

La fonction est continue. On observe graphiquement deux intersections avec laxe des abscisses.

2. ***Intervalles de racines***

$$f(0) = -1 < 0, \quad f(1) = e - 3 < 0, \quad f(2) = e^2 - 4 > 0.$$

Il existe une racine dans $(1, 2)$*.*

3. ***Dichotomie sur*** $[0, 1.5]$

   (a) $f(0)f(1.5) > 0$ *: pas de racine sur* $[0, 1.5]$*.*

   (b) *Nombre ditérations :*

$$n \geq \frac{\ln\left(\frac{1.5}{0.016}\right)}{\ln 2} \approx 7.$$

   (c) *La méthode converge vers* $x \approx 1.1$*.*

4. ***Méthode de Newton***

Condition suffisante : $f'(x) \neq 0$ *et* $f''(x)$ *de signe constant.*
Ici :

$$f'(x) = e^x - 1 > 0, \quad f''(x) = e^x > 0.$$

La condition est satisfaite.
Avec $x_0 = 1$*, la méthode converge vers* $\alpha \approx 1.146$*.*

5. ***Comparaison***

La méthode de Newton converge plus rapidement que la dichotomie.

Exercice 3

$x + \ln x = 0$

Solution. 1. *On veut résoudre*

$$x + \ln x = 0 \iff \ln x = -x \iff x = e^{-x}.$$

Le problème est donc naturellement mis sous forme de point fixe via la fonction

$$\varphi(x) = e^{-x}.$$

Remarque importante : *lénoncé propose* (F_2) : $x_{n+1} = e^{x_n}$*, mais cette relation ne correspond pas à* $x + \ln x = 0$ *(elle correspondrait à* $\ln x = x$ *i.e.* $x = e^x$*, qui na pas de solution dans* $I = [\frac{1}{2}, 1]$*). Dans la suite, on considère donc la formule correcte*

$$(F_2) \quad x_{n+1} = e^{-x_n}.$$

Principe de convergence (théorème du point fixe). *Soit J un intervalle. Si*

(i) $\varphi(J) \subset J$ *(*invariance*),*

(ii) $\exists q \in (0,1)$ *tel que* $|\varphi'(x)| \leq q$ *pour tout* $x \in J$ *(*contractance*),*

alors φ admet un unique *point fixe α dans J, et pour tout $x_0 \in J$, la suite $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ converge vers α. De plus, on a les estimations derreur classiques :*

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{q^n}{1-q}\,|x_1 - x_0| \qquad et \qquad |x_{n+1} - x_n| \leq q^n |x_1 - x_0|.$$

Enfin, la ***stabilité*** *est immédiate : une perturbation δ_n sur x_n est amortie au plus par q (*erreur qui se contracte*).*

Étude de (F_1) : $x_{n+1} = -\ln(x_n)$

Ici $\varphi_1(x) = -\ln x$.

$$\varphi_1'(x) = -\frac{1}{x}, \qquad |\varphi_1'(x)| = \frac{1}{x}.$$

Sur $I = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, on a $|\varphi_1'(x)| \geq 1$ (et même $|\varphi_1'(1/2)| = 2$). Donc φ_1 ***nest pas contractante*** *sur I.*

De plus, ***linvariance échoue*** *sur I :*

$$\varphi_1(1) = 0 \notin I.$$

Conclusion : (F_1) ***ne peut pas être utilisée*** *comme méthode garantie convergente sur un intervalle contenant la solution (pas de cadre contractant stable).*

$\frac{1}{2} < x < 1$

$1 < \frac{1}{x} < 2$

$\max \left|\frac{1}{x}\right| = 2 > 1$

Étude de (F_2) : $x_{n+1} = e^{-x_n}$

On pose $\varphi_2(x) = e^{-x}$.

$$\varphi_2'(x) = -e^{-x}, \qquad |\varphi_2'(x)| = e^{-x}.$$

(a) Choix dun intervalle invariant. *Lintervalle $I = [\frac{1}{2}, 1]$ contient la solution, mais* nest pas invariant *car $e^{-1} \approx 0.368 < \frac{1}{2}$. On choisit donc un intervalle plus large, par exemple*

$$J = \left[e^{-1}, 1\right].$$

Vérifions linvariance : si $x \in J$, alors $x \in [e^{-1}, 1]$ donc $-x \in [-1, -e^{-1}]$ et

$$\varphi_2(x) = e^{-x} \in \left[e^{-1}, e^{-e^{-1}}\right].$$

Or $e^{-e^{-1}} \approx e^{-0.368} \approx 0.692 < 1$, donc

$$\varphi_2(J) \subset [e^{-1}, 0.692] \subset J.$$

Ainsi, J est invariant.

$\frac{1}{e} < x < 1$

$-1 < -x < -\frac{1}{e}$

$e^{-1} < e^{-x} < e^{-\frac{1}{e}} < 1$

$[e^{-1}, 1].$

$\subset [e^{-1}$

(b) Contractance sur J. *Sur $J = [e^{-1}, 1]$, on a $x \geq e^{-1}$ donc*

$$|\varphi_2'(x)| = e^{-x} \leq e^{-e^{-1}} =: q_2.$$

Numériquement, $q_2 = e^{-e^{-1}} \approx 0.692 < 1$. Donc φ_2 ***est contractante sur*** *J et la suite converge pour tout $x_0 \in J$.*

(c) Stabilité. *Toute erreur/perturbation est amortie géométriquement :*

$$|x_{n+1} - \alpha| \le q_2\,|x_n - \alpha|, \qquad \textit{et plus généralement} \qquad |x_n - \alpha| \le \frac{q_2^n}{1 - q_2}|x_1 - x_0|.$$

La méthode est stable mais la constante $q_2 \simeq 0.692$ rend la convergence modérée.

Étude de (F_3) : $x_{n+1} = \dfrac{x_n + e^{-x_n}}{2}$

On pose

$$\varphi_3(x) = \frac{x + e^{-x}}{2}.$$

Alors

$$\varphi_3'(x) = \frac{1 - e^{-x}}{2}, \qquad |\varphi_3'(x)| = \frac{1 - e^{-x}}{2}.$$

(a) Invariance sur $J = [e^{-1}, 1]$**.** *Si $x \in J$, alors $x \in [e^{-1}, 1]$ et $e^{-x} \in [e^{-1}, e^{-e^{-1}}] \subset [e^{-1}, 1]$. Donc x et e^{-x} appartiennent à J, et leur moyenne aussi :*

$$\varphi_3(x) = \frac{x + e^{-x}}{2} \in J.$$

Ainsi, J ***est invariant*** *pour (F_3).*

(b) Contractance (meilleure constante). *Sur J, on a $x \ge e^{-1}$ donc $e^{-x} \le e^{-e^{-1}}$, doù*

$$|\varphi_3'(x)| = \frac{1 - e^{-x}}{2} \le \frac{1 - e^{-1}}{2} =: q_3,$$

car $e^{-x} \ge e^{-1}$ sur $[0, 1]$ et le majorant simple $\frac{1 - e^{-1}}{2}$ est valable sur J. Numériquement,

$$q_3 = \frac{1 - e^{-1}}{2} \approx \frac{1 - 0.368}{2} \approx 0.316 < 1.$$

Donc φ_3 ***est contractante*** *et* ***converge pour tout*** *$x_0 \in J$. Elle est* ***plus stable et plus rapide*** *que (F_2), car $q_3 \ll q_2$.*

(c) Stabilité. *Même mécanisme damortissement, mais plus marqué :*

$$|x_{n+1} - \alpha| \le q_3|x_n - \alpha| \quad \Rightarrow \quad |x_n - \alpha| \le \frac{q_3^n}{1 - q_3}|x_1 - x_0|.$$

Choix de la formule

- (F_1) *: non invariant sur I et non contractant sur un intervalle naturel contenant la solution $\Rightarrow$ pas de garantie de convergence.*
- (F_2) *: convergent et stable sur $J = [e^{-1}, 1]$, mais convergence modérée ($q_2 \simeq 0.692$).*
- (F_3) *: convergent et stable sur $J = [e^{-1}, 1]$, avec meilleure constante ($q_3 \simeq 0.316$) $\Rightarrow$* ***choix recommandé*** *(stabilité + rapidité).*

2. ***Méthode de Newton***

Newton appliqué à $x = e^{-x}$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - e^{-x_n}}{1 + e^{-x_n}}.$$

$\frac{1}{e} < x < 1$

$-1 < -x < -1/e$

$e^{-1} < e^{-x} < e^{-1/e}$

$x + e^{-x} < 1 + e^{-1/e}$

$2/e < x + e^{-x} < 1 + e^{-1/e}$

$\dfrac{x + e^{-x}}{2} < \dfrac{1 + e^{-1/e}}{2}$

$1 + 2/e$

$\dfrac{1 + e^{-1}}{2} < \dfrac{1 + e^{-1/e}}{2}$

Elle converge pour tout $x_0 \in I$.
Lerreur vérifie :

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq C|x_n - \alpha|^2.$$

Environ 5 itérations suffisent pour 10^{-10}.

3. ***Application numérique***

n	F_2	F_3	*Newton*
5	*0.567*	*0.567*	*0.567*
10	*0.567*	*0.567*	*0.567*

Stabilisation dès $n = 5$ pour Newton.

x_0

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

x_0, x_1

$$\frac{f(x_1) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

Exercice 4

$\sqrt{10}$ par la méthode de la sécante

Solution. Objectif

On veut estimer $\sqrt{10}$ à la tolérance 10^{-4}. On pose

$$f(x) = x^2 - 10, \quad = 0 \to x = \sqrt{10}$$

de sorte que $\sqrt{10}$ est la (unique) racine positive de $f(x) = 0$.

Rappel : méthode de la sécante

Étant donnés deux points initiaux $x_0 \neq x_1$, la méthode de la sécante est

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, \qquad n \geq 1,$$

à condition que $f(x_n) \neq f(x_{n-1})$.

Choix des points initiaux

On prend par exemple $x_0 = 3$ et $x_1 = 3.5$.

$$f(3) = -1 < 0, \qquad f(3.5) = 12.25 - 10 = 2.25 > 0,$$

donc la racine $\sqrt{10}$ est bien encadrée entre 3 et 3.5 (ce nest pas nécessaire pour la sécante, mais cest un bon choix numérique).

Critère d'arrêt

Tolérance demandée : 10^{-4}. On utilise le test standard

$$|x_{n+1} - x_n| \leq 10^{-4}.$$

Itérations (calculs numériques)

Les itérations donnent (valeurs arrondies) :

n	x_n	$f(x_n) = x_n^2 - 10$	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	3	-1	–
1	3.5	2.25	0.5
2	3.1538461538	-5.3254×10^{-2}	3.4615×10^{-1}
3	3.1618497110	-2.7064×10^{-3}	8.0036×10^{-3}
4	3.1622782315	3.6133×10^{-6}	4.2852×10^{-4}
5	3.1622776601	-2.4451×10^{-10}	5.7135×10^{-7}

Dès $n = 4 \to 5$, on a $|x_5 - x_4| = 5.7 \times 10^{-7} \leq 10^{-4}$, donc le critère darrêt est satisfait.

Conclusion

$$\boxed{\sqrt{10} \approx 3.1623 \quad \text{à } 10^{-4} \text{ près.}}$$

(La valeur obtenue est $x_5 \simeq 3.1622776601$.)

Exercice 5

Solution. ***(1) Existence et unicité dune racine dans*** $I = [0, 2]$ *On considère*

$$f(x) = x - 0.2 \sin x - 0.5.$$

(a) Existence. *f est continue sur $[0, 2]$. On évalue :*

$$f(0) = -0.5 < 0, \qquad f(2) = 2 - 0.2\sin(2) - 0.5 = 1.5 - 0.2\sin(2).$$

Or $\sin(2) \approx 0.9093$, *donc*

$$f(2) \approx 1.5 - 0.1819 = 1.3181 > 0.$$

Par TVI, il existe au moins une racine $\alpha \in (0, 2)$.

(b) Unicité. *On dérive :*

$$f'(x) = 1 - 0.2 \cos x.$$

Comme $\cos x \in [-1, 1]$, *on a*

$$f'(x) \geq 1 - 0.2 \cdot 1 = 0.8 > 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $[0, 2]$. Ainsi, la racine dans $[0, 2]$ est ***unique****.*

2) Calcul de la racine par la méthode de la sécante (10^{-3} ***)***

Choix des points initiaux

On peut prendre $x_0 = 0$ et $x_1 = 2$ (valeurs déjà évaluées) :

$$f(x_0) = f(0) < 0, \qquad f(x_1) = f(2) > 0.$$

Formule d'itération

$$x_{n+1} = x_n - \; f(x_n)\,\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, \qquad n \geq 1.$$

Critère d'arrêt *Tolérance demandée :* 10^{-3}. *On utilise :*

$$|x_{n+1} - x_n| \leq 10^{-3}.$$

Itérations (calculs numériques)

n	x_n	$f(x_n) = x_n - 0.2\sin x_n - 0.5$	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	0	-0.5	–
1	2	1.3181405	2
2	0.5500125	$-5.4527082 \times 10^{-2}$	1.4499875
3	0.6076110	$-6.5705467 \times 10^{-3}$	5.7598494×10^{-2}
4	0.6155026	2.8795603×10^{-5}	7.8915960×10^{-3}
5	0.6154682	$-1.5562579 \times 10^{-8}$	3.4434230×10^{-5}

Le critère est satisfait dès $n = 4 \to 5$ car

$$|x_5 - x_4| \approx 3.44 \times 10^{-5} \leq 10^{-3}.$$

Conclusion

$$\boxed{\alpha \approx 0.615 \quad \text{à } 10^{-3} \text{ près.}}$$

(La valeur numérique obtenue est $x_5 \simeq 0.61546815$.)