Devoir maison N° 01.

Nom et prénom
Maâche Amira
Moussi Lydia
Groupe 02.

• Exercice 01 :

$$f(x) = (x-\alpha)^m h(x) \quad \text{avec } h(\alpha) \neq 0.$$

1- Montrer la convergence:
avec la méthode de Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

On a $e_n = x_n - \alpha \Rightarrow x_n = e_n + \alpha$.

$$f(x) = (x-\alpha)^m \cdot h(x).$$

$$f'(x) = m(x-\alpha)^{m-1} h(x) + (x-\alpha)^m h'(x).$$

$$f''(x) = m(m-1)(x-\alpha)^{m-2} h(x) + 2m(x-\alpha)^{m-1} h'(x) + (x-\alpha)^m h''(x).$$

$$f(x_n) = (x_n-\alpha)^m h(x_n) = e_n^m h(x_n).$$

$$f'(x_n) = m(x_n-\alpha)^{m-1} h(x_n) + (x_n-\alpha)^m h'(x_n) = m e_n^{m-1} h(x_n) + e_n^m h'(x_n).$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{e_n^m h(x_n)}{m e_n^{m-1} h(x_n) + e_n^m h'(x_n)} = x_n - \frac{e_n h(x_n)}{m h(x_n) + e_n h'(x_n)}.$$

$$e_{n+1} = x_{n+1} - \alpha = x_n - \alpha - \frac{e_n h(x_n)}{m h(x_n) + e_n h'(x_n)} = e_n - \frac{e_n h(x_n)}{m h(x_n) + e_n h'(x_n)}.$$

$$= e_n\left(1 - \frac{h(x_n)}{m h(x_n) + e_n h'(x_n)}\right) = e_n\left(\frac{m h(x_n) + e_n h'(x_n) - h(x_n)}{m h(x_n) + e_n h'(x_n)}\right)$$

$$= e_n\left(\frac{(m-1) h(x_n) + e_n h'(x_n)}{m h(x_n) + e_n h'(x_n)}\right)$$

$$\lim_{x_n \to \alpha} \frac{(m-1) h(x_n) + e_n h'(x_n)}{m h(x_n) + e_n h'(x_n)} = \frac{(m-1) h(\alpha)}{m h(\alpha)} = \frac{m-1}{m}$$

Donc $e_{n+1} = \frac{m-1}{m} e_n$.

$\frac{m-1}{m} \neq 0 \Rightarrow$ l'ordre de convergence est linéaire.

quadratique.

$$x_{n+1} = x_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

$$x_{n+1} = x_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x)} = x_n - m\frac{e_n^m h(x_n)}{me_n^{m-1}h(x_n) + e_n^m h'(x_n)} = x_n - \frac{me_n h(x_n)}{mh(x_n) + e_n h'(x_n)}$$

$$e_{n+1} = x_{n+1} - \alpha = e_n - \frac{me_n h(x_n)}{mh(x_n) + e_n h'(x_n)} = e_n\left(1 - \frac{mh(x_n)}{mh(x_0) + e_n h'(x_n)}\right).$$

$$= e_n\left(\frac{mh(x_n) + e_n h'(x_n) - mh(x_n)}{mh(x_n) + e_n h'(x_n)}\right) = e_n\left(\frac{e_n h'(x_n)}{mh(x_n) + e_n h'(x_n)}\right) = e_n^2\frac{h'(x_n)}{mh(x_n) + e_n h'(}$$

$$\lim_{x_n \to \alpha}\frac{h'(x_n)}{mh(x_n) + e_n h'(x_n)} = \frac{h'(\alpha)}{mh(\alpha)}.$$ Donc $e_{n+1} = \frac{h'(\alpha)}{mh(\alpha)} e_n^2$.

Car $e_{n+1} \simeq Ce_n^2$ la convergence est quadratique.

3- Considération que l'équation non linéaire $f(x) = \exp(x) - \frac{x^2}{2} - x -$

$[-1, 1]$.

↳ Calcul de $f(-1)$ et $f(1)$.

$f(-1) = e^{-1} - \frac{(-1)^2}{2} - (-1) - 1 = e^{-1} - \frac{1}{2} < \frac{1}{2{,}7} - \frac{1}{2} < 0. = -0{,}133$

$f(1) = e^1 - \frac{1^2}{2} - 1 - 1 = e - \frac{5}{2} > 2{,}7 - 2{,}5 > 0 . = 0{,}218.$

Donc $f(-1) \times f(1) < 0$.

Par le théoreme des valeurs intermidiares.

$\exists x^* \in [-1, 1]$ tel que $f(x^*) = 0$.

- Unicité.

$f(x) = e^x - x - 1$.

Sur $[-1, 1]$: e^x est croissante et $e^x - x - 1 > 0$. Donc $f(x) > 0 \to$

Strictement croissante. Donc la racine est unique.

5- Méthode de Newton pour cette équation :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{e^{x}_n - \frac{x_n^2}{2} - x_n - 1}{e^{x}_n - x_n - 1}$$

$f(0) = 0$. Donc la racine est multiple.

6- Méthode d'ordre 2

$x_{n+1} = x_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. ici $m = 2$. $x_{n+1} = x_n - 2\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

Exercice 02 : $x = g(x)$, $g(x) = -\ln(x)$ donc $x = -\ln(x)$.

$x + \ln(x) = 0$.

a- Montrer qu'il existe une unique racine $\alpha \in [0,1]$.

$f(x) = x + \ln(x)$.

$x = -\ln(x) \Leftrightarrow f(x) = 0$.

$\ln(x) \Rightarrow x > 0$. Donc $[0, +\infty]$.

x est continue $\ln(x)$ est continue. Donc f est continue Sur $[0, \infty]$.

- $f(1) = 1 > 0$.
  $f(0,1) = -2,202 < 0$. $\Big\}$ $f(0,1) \times f(1) < 1$. Par le théorème des valeurs intermédiaires. $\exists \alpha \in [0,1]$ tel que $f(\alpha) = 0$
- $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$ $(x > 0)$ Donc f est strictement croissante $\Rightarrow$ une Seule solution. α est unique $\alpha \in [0,1]$.

b- Montrer que l'iteration $x_{n+1} = g(x_n)$ diverge.

$x_{n+1} = g(x_n) = -\ln(x_n)$.

$|g'(\alpha)| < 1$

$g'(x) = -\frac{1}{x}$. Donc $g'(\alpha) = -\frac{1}{\alpha}$ $0 < \alpha < 1 \Rightarrow \frac{1}{\alpha} > 1$.

$|g'(\alpha)| > 1$. donc la méthode diverge.

c- Nouvelle itération :

$x_{n+1} = g^{-1}(x_n)$ On a $g(x) = -\ln(x)$. alors $y = -\ln x \Rightarrow x = e^{-y}$.

Donc $g^{-1}(x) = e^{-x}$.

$x_{n+1} = e^{-x_n}$.

$e_n = x_n - \alpha$.

$e_{n+1} \simeq g^{-1}(\alpha) e_n$. $(g^{-1})(x) = -e^{-x} \Rightarrow (g^{-1})(\alpha) = -e^{-\alpha}$. $(\alpha = -\ln(\alpha).)$

$e^{-\alpha} = \alpha$. Donc $(g^{-1})(\alpha) = -\alpha$ et $0 < \alpha < 1$. $|(g^{-1})(\alpha)| = \alpha < 1$.

Donc la méthode converge.

$e_{n+1} \simeq \alpha e_n$ Donc e_{n+1} et e_n ont des signes opposé (la suite oscille autour de α.

2- Retrouver la racine avec Newton.

$f(x) = x + \ln(x) = 0$.

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. $f'(x) = 1 + \frac{1}{x}$.

$x_{n+1} = x_n \frac{x_n + \ln(x_n)}{1 + \frac{1}{x_n}}$. $\Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{x_n(x_n + \ln(x_n))}{x_n + 1} = x_n - \frac{x_n(x_n + \ln(x_n))}{x_n + 1}$

Cette méthodes converge quadratiquement.

Exo 3 :

1. montrons que l'équation (Δ) admet une racine unique α dans $[0.1]$:

Considérons la fonction :

$f(x) = x(1+e^x) - e^x$ nous voulons montrer qu'il esciste une unique solution à $f(x)=0$ dans l'intervalle $[0.1]$.

. en calcul $f(0)$ et $f(1)$:

$f(0) : 0(1+e^0) - e^0 = 0 - 1 = -1$

$f(1) : 1(1+e^1) - e^1 = 1 + e - e = 1$

2. $f(0) < 0$ et $f(1) > 0$ puisque $f(x)$ et continue car c'est une combinaison de fonction continue, par le théoréme des valeurs intermediaires il esciste au moins une racine dans l'intervalle $[0.1]$.

3. calculons la dérivée de $f(x)$ pour montrer l'unicité de la racine :

$f'(x) = (1+e^x) + x(e^x) - e^x = 1 + xe^x$

Puisque $x \in [0.1]$, $xe^x \geq 0$ donc $f'(x) = 1 + xe^x > 0$ pour tout $x \in [0.1]$.

- l'équation est : $x(1+e^x) = e^x$

$\Rightarrow x = \dfrac{e^x}{1+e^x}$

un itération de point fixe est : $x_{n+1} = \dfrac{e^{x_n}}{1+e^{x_n}}$

. montrons que cette itération converge vers la solution α :

$g'(x) < 1$ pour $x \in [0.1]$.

$$g'(x) = \frac{e^x(1+e^x) - e^x(e^x)}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x + e^{2x} - e^{2x}}{(1+e^x)^2}$$

$$\frac{e^x}{(1+e^x)^2} < 1.$$

$g'(0) = \frac{1}{4}$, $g'(\frac{1}{4}) \simeq 0.19$ donc $g'(x) < 1$

elle converge vers l'unique solution α.

4. Méthode de Newton :

$f(x) = x(1+e^x) - e^x$

$f'(x) = 1 + xe^x$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n(1+e^{x_n}) - e^{x_n}}{1 + x_n e^{x_n}}$$

Bon choix :

$x = 0.5$ car $f(0) < 0$ et $f(1) > 0$.

pour $x \in [0.1]$.

Exo4 :

$f(x) = x^3 - 3x + 1$

a] Dérivée =

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1)$

Donc =

$f'(x) = 0$ pour $x = -1$ et $x = 1$

$]-\infty, -1]$ la fonction est croissante

$[-1. 1]$ " décroissante

$[1, \infty[$ " croissante.

$\rightarrow f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 1 = -1 + 3 + 1 = 3$

$\rightarrow f(1) = 1 - 3 + 1 = -1$

$\rightarrow f(-2) = -8 + 6 + 1 = -1 < 0$ } une racine dans $(-2; -1)$
$\rightarrow f(-1) = 3 > 0$

$\rightarrow f(0) = 1 > 0$ } une racine dans $(0; 1)$
$\rightarrow f(1) = -1 < 0$

$\rightarrow f(1) = -1 < 0$ } une racine dans $(1; 2)$
$\rightarrow f(2) = 8 - 6 + 1 = 3 > 0$

* conclusion =

l'équation poss. de 3 racines relles

2) trouver des fonctions $x = f(x)$

$f(x) = 0$

$x^3 - 3x + 1 = 0$

on isole x

$\rightarrow$ forme 1 =

$x^3 = 3x + 1 \Rightarrow f_1(x) = \sqrt[3]{3x-1}$

→ forme 2 =

$3x = x^3 + 1 \Rightarrow f_2(x) = \frac{x^3+1}{3}$

→ forme 3 =

$x(x^2 - 3) = -1 \Rightarrow f_3(x) = \frac{1}{3-x^2}$

3) choisir la fonction qui converge vers la racine maximale =

$|f'(x)| < 1$

$\alpha_3 \in [1, 2] \Rightarrow f_2(x) = \frac{x^3+1}{3}$

$f_2'(x) = x^2 \Rightarrow f_2'(1.5) = 2,25 > 1$

↳ $f_1(x) = \sqrt[3]{3x-1}$

$f_1'(x) = \frac{1}{3}(3x-1)^{-2/3} \cdot 3 = (3x-1)^{-\frac{2}{3}}$

$f_1'(1,5) \simeq 0,4 < 1$ donc $\Rightarrow f(x) = \sqrt[3]{3x-1}$

4) calcul de la racine à 10^{-4} près =

$x_{n+1} = \sqrt[3]{3x_n - 1} \Rightarrow x_0 = 1,5$

$x_1 = \sqrt[3]{3(1,5) - 1} = \sqrt[3]{3,5} = 1,518$

$x_2 = \sqrt[3]{3(1,518) - 1} = 1,526$

$x_3 = 1,531$

$x_4 = 1,5325$

$x_5 = 1,5329$

$x_6 = 1,5329$

erreur $= |x_6 - x_5| < 10^{-4}$