Nom et prénom:

* Khobizi ouassila
* Touat Hind.

groupe: 02.

devoirs de maison N°1 (Méthode numérique).

Exercice : 01.

$f(x) = (x-\alpha)^m h(x)$ avec $h(\alpha) \neq 0$

La méthode de Newton

on a : $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x) \cdot f'(x) - f''(x) \cdot f(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x) \cdot f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

$f(x) = (x-\alpha)^m h(x)$

$f'(x) = m(x-\alpha)^{m-1} h(x) + (x-\alpha)^m h'(x)$

$$f''(x) = m(m-1)(x-\alpha)^{m-2} h(x) + h'(x) m (x-\alpha)^{m-1} + m(x-\alpha)^{m-1} h'(x) + h''(x)(x-\alpha)^m$$

$$f''(x) = m(m-1)(x-\alpha)^{m-2} h(x) + 2m(x-\alpha)^{m-1} h'(x) + h''(x)(x-\alpha)^m$$

$$g'(x) = \frac{f(x) \cdot f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

$f''(x) \times f(x) = m(m-1)(x-\alpha)^{2m-2} h(x)^2$

$f'(x)^2 = [m(x-\alpha)^{m-1} h(x)]^2$

$[f'(x)]^2 = m^2 (x-\alpha)^{2m-2} h(x)^2$

$$g'(x) = \frac{f''(x) \times f(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{\cancel{m}(m-1)\cancel{(x-\alpha)^{2m-2}}\cancel{h(x)^2}}{m^{\cancel{2}}\cancel{(x-\alpha)^{2m-2}}\cancel{h(x)^2}} = \frac{m-1}{m} = 1 - \frac{1}{m}$$

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{m}$$

Si $m=1$ Donc $g'(\alpha)=0$

Donc la Convergence quadratique

Si $m \geqslant 2$ Si $m=2$, $g'(\alpha)=0{,}5$

Si : $m=3$ (Cone)

$g(\alpha)=2/3$

2- on a : $x_{n+1}=x_n-m\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

$G(x)=x-m\dfrac{f(x)}{f'(x)}$ et $x_{n+1}=G(x_n)$

α : est un points fixé : $G(\alpha)=\alpha$.

$G'(\alpha)=0$.

$f(x)=(x-\alpha)^m h(x)$ $h(\alpha)\neq 0$

$G'(x)=1-m\left(1-\dfrac{f(x)\cdot f''(x)}{f'(x)^2}\right) \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)\cdot f''(x)}{f'(x)} = \dfrac{m-1}{m}$ (à partir de question 1)

Donc $G'(\alpha)=1-m\left(1-\dfrac{m-1}{m}\right)$

$= \cancel{1}-\cancel{m}+\cancel{m}-\cancel{1}$

$=0$.

Donc la méthode de newton modifiée est convergence quadratique. d'ordre $\underline{2}$.

3/ $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1$ Sur l'intervalle $[-1;1]$.

$f'(x) = e^x - x - 1$ Donc $f'(0) = e^0 - 0 - 1 \Rightarrow f'(0) = 0$

$f''(x) = e^x - 1$ Donc $f''(0) = e^0 - 1 \Rightarrow f''(0) = 0$.

est $f(0) = e^0 - \frac{0^2}{2} - 0 - 1 \Rightarrow f(0) = 0$

Mais : $f'''(x) = e^x$ Donc $f'''(0) = 1$ et $1 \neq 0$

$f(0) = f'(0) = f''(0) \neq f'''(0)$ Donc f possède un racine $\Rightarrow m = 3$

4) Montre que f admet un zéro x^* dans $[-1;1]$ et qu'il est unique.

$f(x) = e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1$

$f(-1) = e^{-1} - \frac{(-1)^2}{2} - (-1) - 1 \Rightarrow f(-1) \approx -0{,}132$.

$f(1) = e^1 - \frac{1^2}{2} - 1 - 1$ Donc $\Rightarrow f(1) = 0{,}218$.

Donc $f(1) \times f(-1) < 0$ Donc $\alpha \in [-1;1]$.

$\Rightarrow m_1 = \frac{a+b}{2} \Rightarrow m_1 = \frac{-1+1}{2} \Rightarrow m_1 = 0$

$f(0) = e^0 - \frac{0^2}{2} - 0 - 1 \Rightarrow f(0) = 0$ $[-1;1]$.

$f'(x) > 0$ Don f Continue est f monotone (De plus en plus).

Donc f admet un zéro $(x^* = 0)$ solution sur l'intervalle $[-1;1]$.

5) la méthode de Newton pour resoudre $f(x) = 0$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{e^{x_n} - \frac{x_n^2}{2} - x_n - 1}{e^{x_n} - x_n - 1}$$

$$= x_n - \frac{e^{x} - x - 1 - \frac{1}{2}x^2}{e^{x} - x - 1}$$

$$= x_n - 1 + \frac{\frac{1}{2}x^2}{e^{x} - x - 1}$$

$$x_{n+1} = x_n - 1 + \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{e^{x} - x - 1}$$

Exercice 02 :

1- Montrer qu'elle admet une seule racine α.

$x = g(x)$ où $g(x) = -\ln x$

Donc $\Rightarrow x = -\ln x \Rightarrow x + \ln x = 0$

on pose $f(x) = x + \ln x \Rightarrow f(x) = 0$ $x \in [0 : 1]$

$f'(x) = \frac{1}{x} + 1 \Rightarrow \boxed{f'(x) = \frac{1+x}{x}}$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$+$	$+$
$f(x)$	$\| -\infty \nearrow$		$+\infty$

$\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$

$f(1) = \ln(1) + 1 = 1$

f est continue sur l'intervalle $]0 : 1]$

Donc $f(x) = 0$ admet une solution sur l'intervalle $]0 : 1]$.

2) Montrer que la méthode itérative : $x_{n+1} = g(x_n)$ diverge.

on a $g(x) = -\ln x \Rightarrow g'(x) = -\frac{1}{x}$ $\alpha \in]0, 1]$.

$|g'(\alpha)| = \left|-\frac{1}{\alpha}\right| = \frac{1}{\alpha}$

$0 < \alpha < 1 \Rightarrow |g'(\alpha)| > 1$

Par exemple $\alpha = 0{,}5$ Donc $\frac{1}{\alpha} = 2$ et $2 > 1$

Donc $x_{n+1} = g(x_n)$ diverge de voisinage de α.

3) on Considère alors $g^{(-1)}(x) = g^{(-1)}(g(x)) = x$

$g^{-1}(x) = g^{-1}(g(x)) = x$

$x_{n+1} = g^{-1}(x_n)$

$y = -\ln x$ Donc $x = e^{-y}$

Donc $g^{-1}(x) = e^{-x}$ on pose $h(x) = e^{-x} \Rightarrow h'(x) = -e^{-x}$ $x >$

$x \in]0;1]$

$|h'(x)| = |-e^{-x}| = e^{-x}$

$x \geq 0 \Rightarrow e^{-x} \leq 1$ (Si $x = 3 \Rightarrow e^{-3} = 0,04$)

Donc $g^{-1}(x)$ est Converge Vers α.

- Montre que e_{n+1} la méthode itérative

$e_n = x_n - \alpha \Rightarrow e_{n+1} = x_{n+1} - \alpha$ $\qquad h(x) = g^{-1}(x)$.

$e_{n+1} = g^{-1}(x_n) - \alpha \Rightarrow e_{n+1} = h(x) - \alpha$

$\Rightarrow e_{n+1} = h(x) - h(\alpha) \Rightarrow e_{n+1} = h'(c)e_n$ $\quad x_n < c < \alpha$

$h'(c) = -e^{-c}$ $\qquad -e^{-c} < 0$

Donc $h'(c)\, e_n$ à on Signe opposé de e_n

4) Retrouver α à l'aide de la méthode de Newton.

$x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ $\qquad f(x) = x + \ln x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{x+1}{x}$

$\dfrac{f(x)}{f'(x)} = \dfrac{x + \ln x}{\frac{x+1}{x}} = x\dfrac{x + \ln x}{x+1}$

$x_{n+1} = x_n - x_n \dfrac{x_n + \ln x_n}{x_n + 1} \Rightarrow x_{n+1} = x_n \left(1 - \dfrac{x_n + \ln x_n}{x_{n+1}}\right)$

Exercice N°3 :

1) Montrer que l'équation (1) admet une racine unique α dans $[0,1]$:

$$x(1+e^x) = e^x$$

$$x + xe^x - e^x = 0 \quad \text{On pose : } f(x) = x + xe^x - e^x$$

Définit sur $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = 1 + (1+x)e^x - e^x$$

$$= 1 + (\cancel{1} + x - \cancel{1})e^x \Rightarrow \boxed{f'(x) = 1 + xe^x}$$

$f'(0) = 1$

$f'(1) = 1+e$

f : continue.

f : dérivable

f : monotone.

x	0	1
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-1 \nearrow$	1

• La fonction f est continue est dérivable sur l'intervale $[0,1]$ et :

$$f(0) = -1 \text{ et } f(1) = 1.$$

$$f(0) \cdot f(1) < 0$$

Donc : à partir de théorème tichnotonne. $f(x) = 0$ admet une solution sur l'intervale $[0,1]$

2) Proposer une itération de point fixe pour l'équation.

$\Rightarrow$ Méthode de point fixe.

$$x(1+e^x) = e^x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{e^x}{1+e^x}$$

$$x = g(x) \text{ telque : } g(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$$

$$x_{n+1} = \frac{e^{x_n}}{1+e^{x_n}}$$

3) Montrer que cette itération converge vers la solution α :

$$x_{n+1} = \frac{e^{x_n}}{1+e^{x_n}}$$

on a : $g(x) = \frac{e^x}{1+e^x} \Rightarrow g'(x) = \frac{e^x(1+e^x) - e^{2x}}{(1+e^x)^2}$

$$g'(x) = \frac{e^x(1+e^x) - e^{2x}}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x + e^{2x} - e^{2x}}{(1+e^x)^2}$$

$$g'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \qquad e^x > 0 \text{ et } (1+e^x)^2 > 0$$

$$g'(x) > 0$$

Donc : La fonction g est plus de plus

on a : $g'(0) > 0$

$$\frac{e^x}{(1+e^x)^2} > 0 \qquad e^x > (1+e^x)^2$$

pour toute $x > 0$ $\quad e^x > (1+e^x)^2$

$$0 \leq x \leq 1$$

$$e^0 \leq e^x < e^1$$

$$0 \leq 1 \leq e^x \leq e$$

Donc : $0 < g'(x) < 1$.

4) La méthode de newton pour cette équation en pr

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$f'(x) = 1 + (e^x + xe^x) - e^x = 1 + xe^x$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n(1+e^{x_n}) - e^{x_n}}{1 + x_n e^{x_n}}$$

Exercice N°4 :

1) Séparer analytiquement les racines de l'équation (2) :

$$f(x) = x^3 - 3x + 1.$$

$f'(x) = 3x^2 - 3 \quad = 3(x^2 - 1)$

$\Rightarrow f'(x) = 3(x^2 - 1)$

$x = -1$ où $x = 1$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$		$+$	
$x+1$		$-$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

$f(1) = -1, \quad f(-1) = 3$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\Big\}$ $f(x) = 0$ admet 3 solution :

$\alpha_1 \in]-\infty ; -1[$

$\alpha_2 \in]-1 ; 1[$

$\alpha_3 \in]1 ; +\infty[$.

2) Les fonctions $F_i(x)$ qui vérifient la condition $x = F_i(x)$, équivalente à $f(x) = 0$, pour $i = 1, \dots, 6$.

$f(x) = x^3 - 3x + 1 \quad \big\} \; f(x) = 0$

$\Rightarrow x^3 - 3x + 1 = 0 \quad \Rightarrow 3x = x^3 + 1 \Rightarrow x = \dfrac{x^3 + 1}{3}$

$g_1(x) = \dfrac{x^3 + 1}{3}$

$\Big\}$ $x^3 = 3x - 1 \quad \Rightarrow x = \sqrt[3]{3x - 1}$

$g_2(x) = (3x - 1)^{\frac{1}{3}}$

$x(x^2 - 3) = -1 \quad \Rightarrow x = \dfrac{1}{3 - x^2} \quad \Big\} \; g_3(x) = \dfrac{1}{3 - x^2}$

$x^3 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow 3x - x^3 = 1 \Rightarrow \left(\dfrac{3}{x} - 1\right) = \dfrac{1}{x^2}$

$$\frac{3}{x} - 1 = \frac{1}{x^2} \Rightarrow \frac{3-x}{x} = \frac{1}{x^2} \Rightarrow 3 - x = \frac{1}{x}$$

$$3 - \frac{1}{x} = x \Rightarrow g_4(x) = 3 - \frac{1}{x}$$

$$g_4(x) = \frac{3x-1}{x}$$

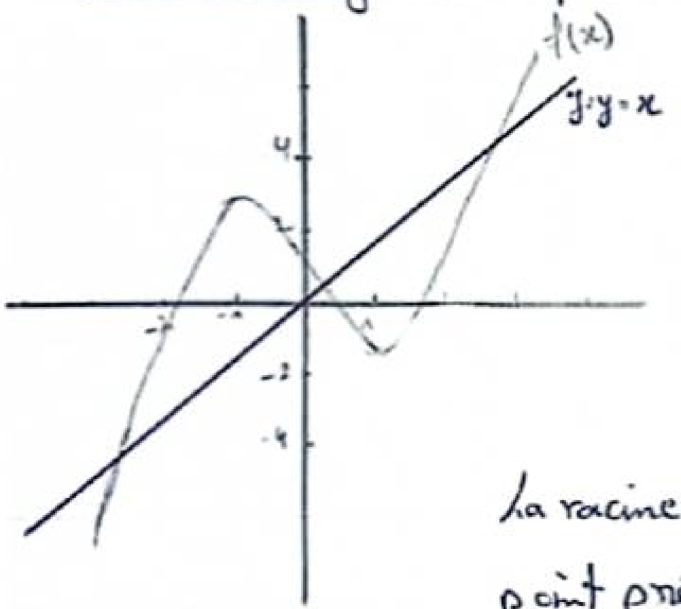
$$x^2 = 3 - \frac{1}{x} \Rightarrow x = \sqrt{3 - \frac{1}{2}}$$

$$g_5(x) = \sqrt{3 - \frac{1}{2}} \Rightarrow g_5(x) = \left(3 - \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Formule de Newton $g\, x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

$$g_6(x) = x - \frac{x^3 - 3x + 1}{3x^2 - 3}$$

3) trouver une fonction f pour laquelle la méthode du point fixe ... :



- $f(x) = x^3 - 3x + 1$
- $g: y = x$

$$g_5(x) = \sqrt{3 - \frac{1}{2}}$$

La racine maximale α_3 est sur l'intervalle $]1, 2[$ et à point près 1,5 Donc $x_0 = 1,5$

$$g_5'(x) = \frac{1}{2x^2\sqrt{3 - \frac{1}{x}}} \quad ; \; x_0 = 1,5 \; ; \; g_5'(1,5) = 0,13 < 1$$

4) Calcule cette racine à 10^{-4} près

$$x_{n+1} = \sqrt{3 - \frac{1}{x_n}} \text{ avec } x_0 = 1,5.$$

n	x_n
0	1,5
1	1,5275
2	1,5314
3	1,5321
4	1,5321
5	1,5321

$\alpha_3 \approx 1,5321$