Le spin : Rappel

1 Matrices de Pauli

Définition. Les *matrices de Pauli* sont les trois matrices 2×2 à coefficients complexes suivantes :

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

En particulier, ce sont toutes les trois des matrices hermitiennes, de trace nulle et de déterminant -1.

Multiplication. Elles satisfont la propriété importante suivante :

$$\boxed{\sigma_a \sigma_b = \delta_{ab} \mathbb{1} + i\varepsilon_{abc}\sigma_c}. \tag{2}$$

En particulier, le carré d'une matrice de Pauli est l'identité et le produit de deux matrices de Pauli différentes est à nouveau une matrice de Pauli. À partir de cette relation, on peut montrer que

$$\boxed{[\sigma_a, \sigma_b] = 2i\varepsilon_{abc}\sigma_c} \tag{3}$$

et

$$\boxed{\{\sigma_a, \sigma_b\} = 2\delta_{ab}\mathbb{1}}. \tag{4}$$

Structure propre. Notons $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle\}$ la base dans laquelle les matrices de Pauli sont expirmées.

Matrice	Vecteurs propres	Valeurs propres
σ_x	$\frac{\|e_1\rangle+\|e_2\rangle}{\sqrt{2}}$ $\frac{\|e_1\rangle-\|e_2\rangle}{\sqrt{2}}$	$+1$ -1
σ_y	$\frac{\|e_1\rangle+i\|e_2\rangle}{\sqrt{2}}$ $\frac{\|e_1\rangle-i\|e_2\rangle}{\sqrt{2}}$	$+1$ -1
σ_z	$\|e_1\rangle$ $\|e_2\rangle$	$+1$ -1

Relation avec les matrices hermitiennes. Les matrices σ_a étant hermitiennes et de traces nulles, toute combinaison linéaire réelle

$$\vec{n} \cdot \vec{\sigma} \equiv n_x\sigma_x + n_y\sigma_y + n_z\sigma_z = \begin{bmatrix} n_z & n_x - in_y \\ n_x + in_y & -n_z \end{bmatrix}, \qquad \vec{n} \in \mathbb{R}^3 \tag{5}$$

est aussi hermitienne et de trace nulle. Inversément, on peut montrer que tout matrice 2×2 hermitienne et de trace nulle [1] peut s'écrire comme une combinaison linaire réelle des matrices de Pauli.

Plus généralement, toute matrice 2×2 heritienne peut s'écrire comme une combinaison linéaire réelle des matrices de Pauli et de l'identité.

Relation avec les matrices unitaires. Nous avons vu précédemment que si A est une matrice hermitienne, alors $U = e^{iA}$ est une matrice unitaire. On conclu donc que toute matrice de la forme $e^{i\vec{n}\cdot\vec{\sigma}}$ est unitaire et de déterminant 1. Qu'en est-il de la question inverse : est-ce que toute matrice 2×2 unitaire de déterminant 1 [2] peut s'écrire sous cette forme ? La réponse est oui. Comprendre pourquoi demande cependant plus de formalisme (voir cours sur les groupes de Lie et algèbres de Lie en BA3).

1. L'ensemble de ces matrices est noté $\mathfrak{su}(2)$.
2. L'ensemble des ces matrices est noté SU(2).

2 Moment angulaire et spin

Moment angulaire. On définit les *moments angulaires* dans chaque direction d'espace comme trois matrices J_x, J_y et J_z qui satisfont les relations de commutation suivantes :

$$\boxed{[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k}. \tag{6}$$

L'action d'une rotation d'angle θ autour de l'axe $\overrightarrow{n}$ est alors représentée par la matrice unitaire

$$\boxed{\hat{U}(\theta, \overrightarrow{n}) \equiv e^{i\theta\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{J}}} \tag{7}$$

et un état se transforme sous rotation de la manière suivante :

$$|\psi\rangle \mapsto \hat{U}(\theta, \overrightarrow{n})\,|\psi\rangle\,. \tag{8}$$

Il existe une beauoucp de possiblités de matrices J_i qui satisont ces relations. Ce choix (le choix de representation) dépend du spin de l'objet considéré.

Spin. Le *spin* est une propriété interne d'un objet (tout comme sa masse, sa charge, etc) caractérisé par un nombre entier ou demi-entier : $s \in \mathbb{N}/2$.

L'état physique d'une particule avec spin est la donnée de son état "interne" (position, impulsion, etc) et de son état de spin. L'espace de Hilbert est donc "scindé" en deux parties : la partie interne et la partie spin. Par exemple, pour une particule de spin $1/2$ à 1 dimension, l'espace de Hilbert est $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^2$. Plus de détails seront donnés dans le cours de BA3. Pour l'instant nous considérerons les deux séparément : soit nous étudions l'état interne de la particule (comme nous l'avons fait jusqu'à présent), soit son état de spin (TP 5).

Spin $1/2$. Pour une particule de spin $1/2$, les matrices de moment angulaire sont

$$S_i = \frac{\hbar}{2}\sigma_i. \tag{9}$$

On peut montrer que l'opérateur qui implémente les rotations est alors

$$U(\theta, \overrightarrow{n}) = e^{i\frac{\hbar}{2}\theta\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\sigma}} = \cos\frac{\theta}{2}\mathbb{1} + i\sin\frac{\theta}{2}\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\sigma}. \tag{10}$$

Moment magnétique. En mécanique classique, si un objet possède un moment magnétique $\overrightarrow{\mu}$, la présence d'un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ induit un moment de force

$$\overrightarrow{\tau} = \overrightarrow{\mu} \times \overrightarrow{B} \tag{11}$$

sur l'objet. Le moment angulaire L et le moment magnétique μ sont reliés par le *rapport gyromagnétique*

$$\gamma \equiv \frac{\mu}{L}. \tag{12}$$

Par exemple, considérons le cas d'une particule de charge q et de masse m en MCU de rayon r à vitesse v. Il y a à la fois un moment angulaire $L = mrv$ venant du fait que la particule tourne et qu'elle est massive et un moment magnétique $\mu = IA$ venant du fait que la particule tourne et qu'elle est chargée. On trouve rapidement que

$$\gamma = \frac{q}{2m}. \tag{13}$$