

L'oscillateur harmonique : Rappel

1 Oscillateur harmonique quantique

Hamiltonien. L'Hamiltonien d'une particule de masse m dans un potentiel harmonique de pulsation ω est

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \hat{X}^2.$$

Ce dernier peut être généralisé à plusieurs dimensions. Pour rappel, les opérateurs de position et d'impulsion satisfont $[\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar \mathbb{1}$.

Opérateur d'échelle. On définit l'opérateur d'annihilation

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{X} + i \frac{\hat{P}}{\sqrt{2m\hbar\omega}}. \quad (1)$$

On peut montrer que

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \mathbb{1}.$$

L'hermicien conjugué \hat{a}^\dagger est appelé *opérateur de création*. L'Hamiltonien peut être réécrit comme

$$\hat{H} = \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \quad (2)$$

$$= \left(\hat{N} + \frac{1}{2} \right) \quad (3)$$

avec $\hat{N} \equiv \hat{a}^\dagger \hat{a}$. Étudier le spectre de l'Hamiltonien revient donc à étudier le spectre de \hat{N} . Nous trouvons les résultats suivants :

- i) Le spectre de \hat{N} est \mathbb{N} et non-dégénéré. Notons $|n\rangle$ le vecteur propre associé à la valeur propre $n \in \mathbb{N}$.
- ii) L'opérateur de création permet de monter dans les valeurs propres :

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle.$$

- iii) L'opérateur de création permet de descendre dans les valeurs propres :

$$\hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle$$

et le ket $|0\rangle$ est annihilé par $\hat{a} : \hat{a} |0\rangle = 0$.

Le ket $|0\rangle$ est le vecteur propre qui a la plus petite valeur propre. En partant de celui-ci et en agissant avec l'opérateur de création on peut générer tous les vecteurs propres :

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle.$$

Ces états sont appelés *états de Fock*. Par construction, ils sont aussi états propres de l'Hamiltonien. L'état $|n\rangle$ a une énergie

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right).$$

On dit que l'état $|n\rangle$ décrit n "quanta" d'énergie, ou n excitations. Remarquons que l'état du vide possède une énergie non-nulle : $E_0 = \hbar\omega/2$.

La fonction d'onde associée à l'état $|n\rangle$ est

$$\psi_n(x) = \langle x|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(x - \frac{d}{dx}\right)^n \psi_0(x)$$

ce qui peut être réécrit comme

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2^n n!}} H_n(x)$$

où $H_n(x)$ est le n -ème polynôme d'Hermite.

Polynômes d'Hermite. On définit le n -ème *polynôme d'Hermite* comme

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}.$$

Grâce à la relation de récurrence

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x),$$

il suffit de connaître explicitement les deux premiers polynômes pour générer les polynômes suivants. Voici les quelques premiers :

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1 \\ H_1(x) &= 2x \\ H_2(x) &= x^2 - 1 \\ H_3(x) &= x^3 - 3x \\ H_4(x) &= x^4 - 6x^2 + 3, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ces polynômes forment une base orthogonale de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$. Chaque polynôme est soit paire soit impair et sa parité est la même que celle de n .

2 États cohérents

Définition. Un *état cohérent* $|\alpha\rangle$ est un état propre de l'opérateur d'annihilation :

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle.$$

Notons que ceci est équivalent à être un vecteur propre de l'opérateur de création avec la valeur propre α^* : $\hat{a}^\dagger |\alpha\rangle = \alpha^* |\alpha\rangle$. $|\alpha\rangle$ est caractérisé par sa valeur propre $\alpha \in \mathbb{C}$. On parle donc de l'*amplitude* $|\alpha|$ et de la *phase* $\arg \alpha$ d'un état cohérent.

Sur la base de Fock, $|\alpha\rangle$ s'écrit comme

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle.$$

Propriétés physiques. Les états cohérents ont des propriétés physiques particulières :

- i) Ils sont inchangés sous l'annihilation ou l'excitation de la particule.
- ii) Ils satisfont la relation d'incertitude d'Heisenberg.
- iii) Leur évolution temporelle est concentrée le long de la trajectoire classique et il n'y a pas de dispersion, contrairement aux états propres d'énergie.