Corso di Analisi Matematica I
prof.ssa Maria Manfredini

FUNZIONI ELEMENTARI

Determinare il dominio naturale delle seguenti funzioni:

$$f_1(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 12}, \quad f_2(x) = \sqrt{\frac{(x-2)(x-1)}{x-3}},$$

$$f_3(x) = \log\left(|x+2| - 2\right), \quad f_4(x) = \sqrt{\frac{|(x-2)(x-1)|}{x-3}},$$

$$f_5(x) = sen\frac{2}{x^2+1}, \quad f_6(x) = \sqrt{\sqrt{2-x^2} - 2x}$$

$$f_7(x) = e^{\frac{1}{x}}\sqrt{|x+5| - 1}, \quad f_8(x) = \log\frac{x}{x^2-1}$$

$$f_9(x) = \sqrt{2x^2-1} - \sqrt{x+1}, \quad f_{10}(x) = arcsen(x-2),$$

$$f_{11}(x) = arctg\left(\frac{x}{x-3}\right)$$

Soluzioni: 1) $]-\infty, 3] \cup [4, +\infty[$; 2) $[1,2]\cup]3, +\infty[$ 3) $]-\infty, -4[\cup]0, +\infty[$; 4) $]3, +\infty[$, 5) $\mathbb{R}$, 6) $[-\sqrt{2}, \sqrt{\frac{2}{5}}]$, 7) $]-\infty, -6] \cup [-4, 0[\cup]0, +\infty[$, 8) $]-1, 0[\cup]1, +\infty[$, 9) $[-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}] \cup [\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty[$, 10) $[1, 3]$, 11) $\mathbb{R} \setminus \{3\}$

Sulla composizione di funzioni: stabilire se esiste la composizione $f \circ g$ oppure $g \circ f$ ed eventualmente calcolarla:

$$1) f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ f(x) = \sin x, \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ g(x) = x^3 + 1$$

$$2) f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ f(x) = \sin x, \quad g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}\ g(x) = \sqrt{x}$$

$$3) f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}\ f(x) = \frac{1}{x}, \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ g(x) = x + 1$$

$$4) f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}\ f(x) = \frac{1}{x}, \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ g(x) = x^2 + 1$$

Soluzioni: 1) esistono $f \circ g$ e $g \circ f$, 2) esiste solo $f \circ g$, 3) esiste solo $g \circ f$, 4) esistono $f \circ g$ e $g \circ f$,

Stabilire se le seguenti funzioni, definite nel loro dominio naturale, sono pari, dispari, periodiche, invertibili:

$$1) f_1(x) = \sqrt{x^2+1}, \quad 2) f_2(x) = \frac{x^3+x}{x^5}, \quad 3) f_3(x) = \log(|x|),$$

$$4)\ f_4(x) = |x|, \quad 5)\ f_5(x) = |x^5|, \quad 6)\ f_6(x) = e^{x^2}$$

$$7)\, f_7(x) = e^{x^3}, \quad 8)\, f_8(x) = sen(2x), \qquad 9)\, f_9(x) = x^2 - x + 1$$

Soluzioni: 1) pari e quindi non invertibile, 2) pari, 3) pari, 4) pari, 5) pari, 6) pari, 7) ne' pari ne' dispari, invertibile, 8) dispari, periodica e quindi non invertibile. 9) non invertibile

Dedurre dal grafico se le seguenti funzioni elementari, definite nel loro dominio naturale, sono monotone:

$$1) f_1(x) = \sqrt{x^2+1}, \quad 2) f_2(x) = -x^3, \quad 3) f_3(x) = \log(x+2),$$

$$4)\, f_4(x) = |x-2| + 1, \quad 5)\, f_5(x) = e^{-(x+2)}, \quad 6)\, f_6(x) = \log(-x)$$

$$7)\, f_7(x) = e^x + x, \quad 8)\, f_8(x) = -\frac{1}{x}, \quad 9)\, f_9(x) = e^{|x|}.$$

Soluzioni: 1) no monotona, 2) monotona decrescente, 3) monotona crescente perché composizione di funzioni monotone crescenti, 4) no monotona, 5)monotona decrescente, 6) monotona decrescente, 7)monotona crescente perché somma di funzioni monotone crescenti, 8) no monotona, 9) no monotona.

Tracciare il grafico delle seguenti funzioni elementari e determinarne l'immagine:

$$f(x) = |\cos x|\, (f(\mathbb{R}) = [0,1]),\ f(x) = \sin x - 4\, ([-5,-3]),\ f(x) = \cos(-x)\, ([-1,1]),$$

$$f(x) = -tgx\, (\mathbb{R}),\ f(x) = x^5 + 1\, (\mathbb{R}),\ f(x) = (x+1)^4\, ([0,+\infty[),\ f(x) = -x^3\, (\mathbb{R}),$$

$$f(x) = \frac{1}{x}\, (\mathbb{R} \setminus \{0\}),\ f(x) = -e^x\, (]-\infty, 0[),\ f(x) = e^{|x|} + 1\, ([2,+\infty[),$$
$$f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x\, (]0,+\infty[),\ f(x) = \log(x) + 2\, (\mathbb{R}),\ f(x) = -\log(x)\, (\mathbb{R}),$$

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere (v) o false (f). Motivare la risposta nel caso sia vera altrimenti fornire qualora sia possibile un controesempio.

1) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é monotona crescente allora $h(x) = f(3x+1)$ é monotona crescente;

2) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é monotona crescente allora $h(x) = f(-3x+1)$ é monotona crescente;

3) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é monotona crescente allora $-f$ é monotona decrescente;

4) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é monotona strettamente crescente allora $h(x) = f(3x+1)$ é invertibile;

5) Se $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ é monotona crescente allora f ha massimo;

6) Se $f:]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ é monotona crescente allora f ha massimo;

7) Se $f:]0,1] \cup [2,3] \to \mathbb{R}$ tale che f é monotona crescente in $]0,1]$ ed f é monotona crescente in $[2,3]$ allora f é monotona crescente;

8) Se $f:]0,1] \cup [2,3] \to \mathbb{R}$ tale che f é monotona crescente in $]0,1]$, f é monotona crescente in $[2,3]$ e $f(1) \leq f(2)$ allora f é monotona crescente;

9) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dispari (cioé $f(x) = -f(-x)$ per ogni x) allora f é iniettiva;

10) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é pari (cioé $f(x) = f(-x)$ per ogni x) allora f non é iniettiva;

11) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ allora $g(x) = f(|x|)$ é pari;

12) Sia $f : [2,3] \to \mathbb{R}$ allora $f([2,3])$ é un intervallo;

13) Sia $f : [2,3] \to \mathbb{R}$ monotona crescente allora $f([2,3])$ é un intervallo;

14) la funzione $arctg$ é la funzione inversa della funzione tangente

15) $\arcsin(\sin(x)) = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

16) $\exp(\log(x)) = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

17) $\log(\exp(x)) = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

18) Siano $, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che $g(1) = 2$, $f(2) = 4$ e $f(1) = 3$ allora $(f \circ g)(1) = 3$;

1) v, 2) f, 3) v, 4) v, 5) v, 6) f, 7) f, 8) v, 9) f, 10) v, 11) v, 12) f, 13) f, 14) f, 15) f, 16) f 17) v 18) f