Matematica Applicata e Statistica - 2 Combinazioni

COMBINAZIONI SEMPLICI

Una **combinazione semplice** di n oggetti a k a k è un sottoinsieme -senza struttura d'ordine- di k oggetti scelti tra gli n.

L'aggettivo "semplice" vuol dire "senza ripetizioni"; il nome "combinazione" vuol dire che non ha importanza l'ordine.

Ad es. le combinazioni dei 3 oggetti a, b, c, a 2 a 2 sono:

$$\{a, b\},\ \{b, c\},\ \{a, c\}.$$

Si noti: {a,b}= {b,a}. Per gli insiemi astratti (per i quali si usa la parentesi graffa) non vige alcuna struttura d'ordine.

Proposizione. *Il numero di combinazioni semplici di n oggetti a k a k è:*

$$C(n; k) \;=\; \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}$$

che si suole indicare anche col simbolo $\binom{n}{k}$. *In forma più compatta:*

$$\binom{n}{k} \;=\; \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Infatti: per ciascuna combinazione di k oggetti, esistono $P(k)$ modi di metterli in ordine. Quindi il numero di disposizioni è più grande del numero di combinazioni e precisamente:

$$D(n; k) \;=\; C(n; k) \cdot P(k) \quad \Rightarrow \quad C(n; k) \;=\; \frac{D(n; k)}{P(k)}$$

dal che segue l'enunciato. □

ESEMPIO.

In quanti modi si possono nominare comitati di 4 persone da un gruppo di 9 persone? La domanda non dà importanza all'ordine e inoltre ogni persona nel comitato non ha ripetizione; quindi si tratta delle combinazioni semplici di 9 oggetti a 4 a 4:

$$C(9; 4) \;=\; \binom{9}{4} \;=\frac{9!}{4!5!}=$$

$$\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \;=\; 126.$$

CON LA CALCOLATRICE

Con la calcolatrice tascabile si usa l'operatore binario nCr, che di solito è azionabile usando prima "SHIFT". Ad esempio

$$\binom{9}{4} \quad = \quad 9 \;\; SHIFT \;\; nCr \;\; 4 \quad = \quad 126$$

ESEMPIO.

In una scatola ci sono 14 palline, di cui 8 rosse e 6 bianche. Si estraggono 5 palline senza rimetterle dentro, "senza rimessa".

a) Quanti sono gli esiti possibili? b) Quanti sono gli esiti in cui risultano estratte 3 palline rosse e 2 palline bianche?

R.(a): Ogni esito possibile (cinque estratte senza rimessa, tra le 14 palline contenute inizialmente) comporta la scelta di 5 oggetti tra i 14 senza che importi l'ordine: e la scelta non ha ripetizioni perché è senza rimessa. Quindi ogni esito è una combinazione semplice di 14 oggetti a 5 a 5. Il loro numero è

$$C(14;5) = \binom{14}{5} = \frac{14!}{5!(14-5)!} = \frac{14 \cdot 13 \cdot \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 14 \cdot 13 \cdot 11 = 2002$$

R.(b): Ogni esito di tale tipo si compone di due fatti: la scelta di 3 palline tra le 8 rosse (ignorando l'ordine, senza ripetizione); la scelta di 2 palline tra le 6 bianche (ignorando l'ordine, senza ripetizione):

$$C(8;3) \cdot C(6;2) = \binom{8}{3} \cdot \binom{6}{2} \;=\; 840.$$

PROPOSIZIONE

In una scatola ci sono r palline rosse, b palline bianche. Si estraggono n palline senza rimetterle dentro, "senza rimessa".

(i) Allora il numero totale di esiti possibili è

$$C(r+b;n) = \binom{r+b}{n}$$

(ii) Inoltre il numero di esiti in cui k palline sono rosse ed $n-k$ bianche è

$$C(r;k) \cdot C(b;n-k) = \binom{r}{k} \cdot \binom{b}{n-k}$$

(i) Infatti ogni esito possibile comporta scegliere n palline tra le $r+b$.

(ii) Infatti un esito di tale tipo si compone di due fatti: la scelta di k palline tra le r rosse; la scelta di $n-k$ palline tra le b bianche. Numero di combinazioni semplici di r a k a k, moltiplicato per il numero di combinazioni semplici di b ad $n-k$ ad $n-k$. $\square$

OSS.: Questa proposizione è il nocciolo della "distribuzione" detta "ipergeometrica", che qui anticipiamo operativamente (cioè assumendo solo intuitivamente le parole "distribuzione", "variabile" e "probabilità").

Prendiamo la "variabile" X:= "numero di palline rosse, fra n estratte senza rimessa, da un'urna contenente r rosse e b bianche".

Allora la "probabilità" che X sia uguale a k è, in notazione probabilistica,

$$P(X = k) = \frac{C(r;k) \cdot C(b;n-k)}{C(r+b;n)}, \quad k = 0, 1, ..., min(r, n)$$

o anche

$$P(X = k) = \frac{\binom{r}{k} \cdot \binom{b}{n-k}}{\binom{r+b}{n}}.$$

Ad esempio: se ci sono $r = 6$ palline rosse e 4 palline bianche nell'urna, e se sono stratte senza rimessa $n = 3$ palline, allora la probabilità che esattamente 2 siano rosse (fra le 3 estratte) è

$$P(X = 2) = \frac{\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{15 \cdot 4}{120} = \frac{1}{2}.$$

ESERCIZIO 2.α
14 partite avranno esito "1" se vince la squadra ospitante, "2" se vince la squadra ospitata, "x" in caso di pareggio. In quanti modi possono aversi 5 esiti del primo tipo, 6 esiti del secondo tipo, e 3 esiti del tipo "x"?

R.: 168168

ESERCIZIO 2.β

In una scatola ci sono 17 palline, di cui 7 rosse e 10 bianche. Si estraggono 4 palline senza rimetterle dentro, "senza rimessa".

a) Quanti sono gli esiti possibili? b) Quanti sono gli esiti in cui risultano estratte 2 palline rosse e 2 palline bianche?

R.(a): 2380

R.(b): 945

ESERCIZIO 2.γ

a) Un programma deve usare 11 processori fra $A_1, ..., A_{16}$. Trova la probabilitá che venga usato il processore A_1.
b) Il programma deve usare 11 processori fra $A_1, ..., A_{36}$. Trova la probabilità che vengano usati esattamente 2 processori tra i processori A_1, A_2, A_3, A_4.

R.(a): $\frac{11}{16} = C(1;1) \cdot C(15;10)/C(16;11)$

R.(b): $\frac{100}{357} = C(4;2) \cdot C(32;9)/C(36;11)$

ESERCIZIO 2.δ

Una classe di 28 allievi ha 16 ragazzi e 12 ragazze. Si deve formare una delegazione di 7 allievi. Quante delegazioni di sette allievi si possono formare con esattamente 3 ragazze?

R.: 0.338