Matematica applicata e statistica - 10 Solzioni di esercizi su v.a. di Poisson.

Esercizio 10.α

Un corpo ha 5000 atomi di una sostanza radioattiva. Ogni atomo decade in un minuto con probabilitá 0.0004. Sia X il numero di atomi che decadono in un minuto. Trovare la probabilithe decadano almeno 3 atomi.

[0.3233; $k = 5$]

Di per sé X è Binomiale con $n = 5000$ e $p = 0.0004$. Ma qui la Binomiale è nel regime degli eventi rari; per l'approssimazione della Binomiale alla Poissoniana, in pratica X è distribuita con legge di Poisson con media $\mu = np = 5000 \cdot 0.0004 = 2$.

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - e^{-\mu}(1 + \mu + \frac{\mu^2}{2!}) =$$

$$= 1 - e^{-2}(1 + 2 + \frac{2^2}{2!}) = 1 - 0.677 = 0.323 \quad \square$$

Esercizio 10.β

Il numero medio di nascite all'anno in un paese è 7. Trova a) la probabilità di sei neonati esattamente; b) la probabilità condizionata di avere sei neonati sapendo che essi sono almeno quattro.

R.: a) 0.149 ; b) 0.162

$$a) \qquad P(X = 6) = e^{-\mu}\frac{1}{6!}\mu^6 = e^{-7}7^6\frac{1}{6!} = 0.149$$

b) Ricordiamo la definizione di probabilità condizionata di A dato B:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \qquad (\ P(B) > 0\ ).$$

Allora

$$P(X = 6|\ X \geq 4)) = \frac{P[\ (X = 6) \cap (X \geq 4)\ ]}{P(X \geq 4)} =$$

$$= \frac{P(X = 6)}{1 - P(X \leq 3)} = \frac{0.149}{1 - e^{-\mu}(1 + \mu + \frac{\mu^2}{2!} + \frac{\mu^3}{3!})} =$$

$$\frac{0.149}{1 - e^{-7}(1 + 7 + \frac{7^2}{2!} + \frac{7^3}{3!})} = \frac{0.149}{0.919} = 0.162 \quad \square$$

Esercizio 10.γ

Un'assicurazione ha 1000 assicurati contro un sinistro che ha probabilitá 0.006 di verificarsi, per ogni persona in un anno. a) Trova la probabilitá che si verifichino almeno 5 sinistri. b) Detto X il numero dei sinistri in un anno, se ognuno dei mille assicurati paga un premio di 100 euro, e l'assicurazione deve pagare 9000 euro per ogni sinistro, trova la media e la deviazione standard del beneficio annuale della compagnia $Y = 1000 \cdot 100 - 9000 \cdot X$.

R.: a) 0.715 ; b) $\mu_Y = 46000$ $\sigma_Y \simeq 22045$ euro

a) Il numero annuale di sinistri di per sé è Binomiale con $n = 1000$ e $p = 0.006$; ma per l'approssimazione della Binomiale alla Poissoniana, è in pratica una v.a. di Poisson con media $\mu = np = 6$.

$$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - e^{-\mu}(1 + \mu + \frac{\mu^2}{2!} + \frac{\mu^3}{3!} + \frac{\mu^4}{4!}) =$$

$$= 1 - e^{-6}(1 + 6 + \frac{6^2}{2!} + \frac{6^3}{3!} + \frac{6^4}{4!}) = 1 - 0.285 = 0.715$$

$$b) \qquad E(Y) = E[\ 10^5 - 9000 \cdot X\ ] = \ 10^5 - 9000 \cdot 6 = 46000.$$

Ricordiamo che la varianza di una trasformazione affine è

$$Var(aX + b) \ = \ a^2 \cdot Var(X), \quad \forall a, b \ \in \mathrm{R}.$$

Allora, ricordando anche che una Poissoniana ha la varianza uguale alla media,

$$Var(10^5 - 9000 \cdot X) = (-9000)^2 \cdot Var(X) = \ 8.1 \cdot 10^7 \cdot 6 = 4.86 \cdot 10^8$$

La deviazione standard è la radice della varianza:

$$\sigma = \ \sqrt{Var(Y)} \ = \ 22045 \text{ euro.} \quad \square$$