Dinamica

Grandezze fisiche che descrivono il moto di un corpo

Grandezze fisiche responsabili del movimento dei corpi

Principi della Dinamica e Principio di relatività galileiana

Forza nulla: moto rettilineo uniforme

Forza costante: moto uniformemente accelerato

Forza elastica: moto armonico

Forza centrale: moto circolare uniforme

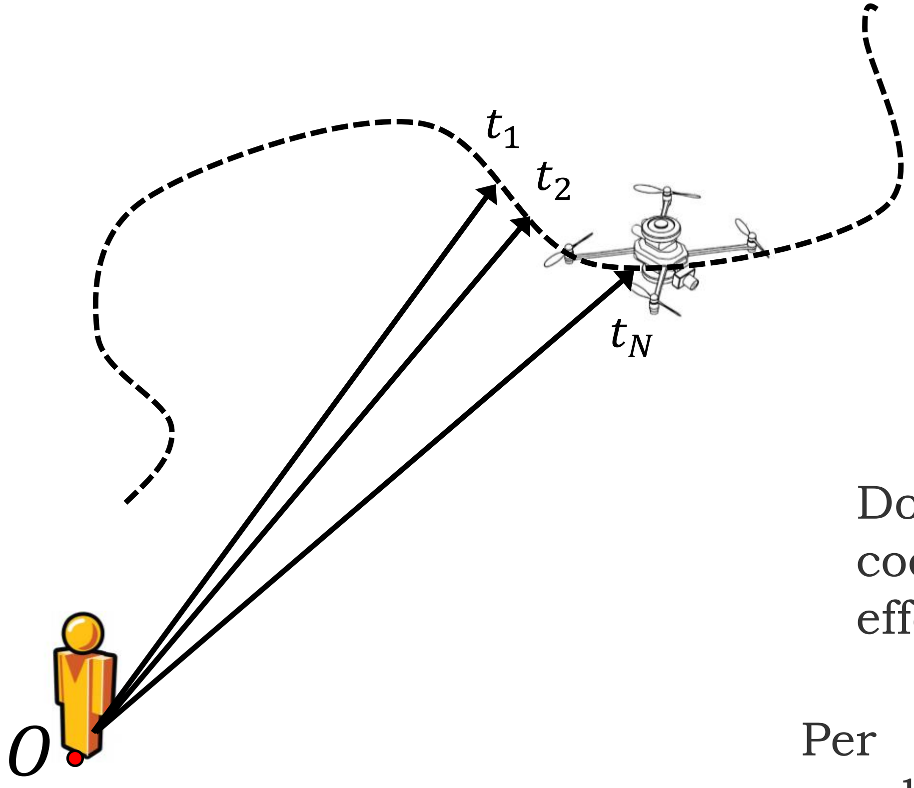
Dinamica del corpo rigido: Momento della forza e momento angolare

Descrizione del moto di un corpo: Cinematica

Grandezze fisiche coinvolte

- **Posizione**
- **Velocità**
- **Accelerazione**

Posizione

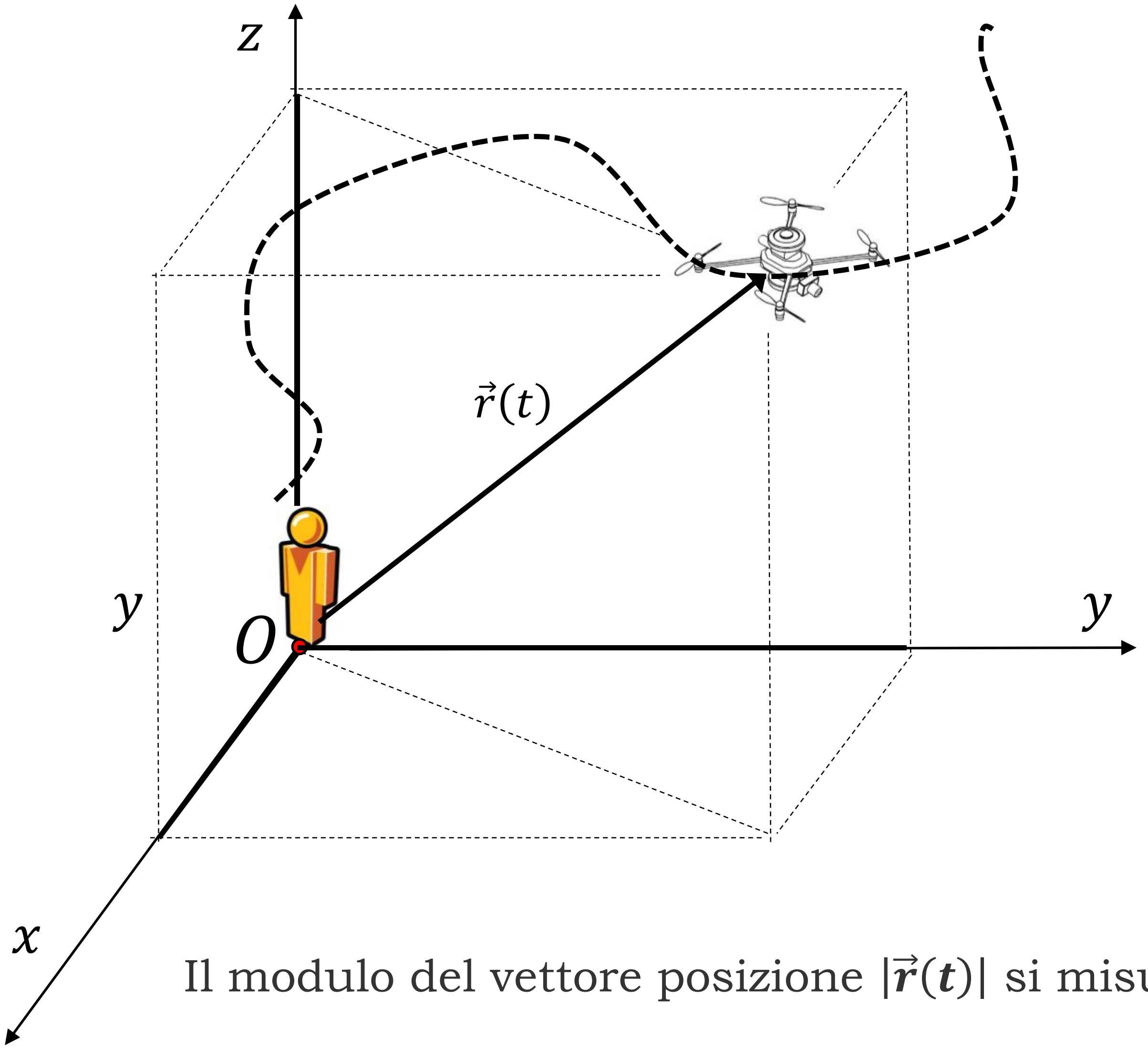


Supponiamo che un Osservatore fisso in un punto O si stia divertendo a fare volare un drone e che, come passo successivo, desideri che il drone si sposti in modalità autonoma. In fase di programmazione del drone, quali parametri dovrà inserire perché questo esegua gli spostamenti che desidera?

Dovrà innanzitutto definire, istante per istante, le coordinate spaziali che il drone dovrà seguire per effettuare il volo desiderato

Per dare le coordinate spaziali dovrà, prima di tutto, scegliere un'origine fissa e poi una modalità per identificare univocamente un punto dello spazio. Scegliamo un sistema di assi Cartesiani definiti rispetto all'origine O

Posizione



Per semplicità supporremo che il drone si possa schematizzare come un punto materiale

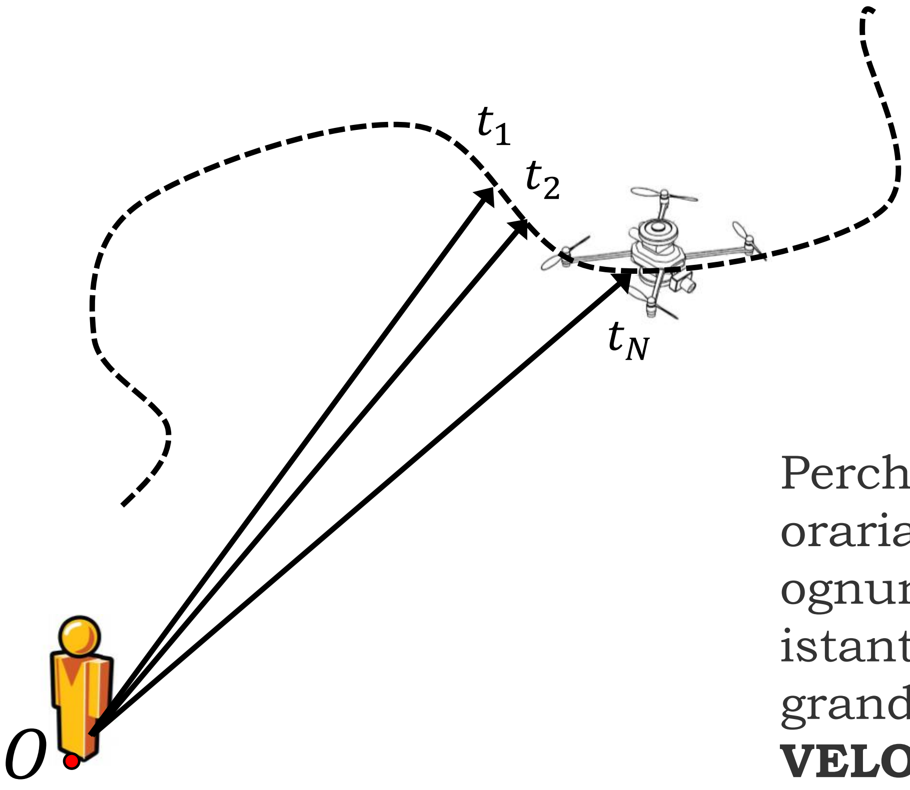
Il vettore $\vec{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{t})$ è la grandezza fisica che descrive la **POSIZIONE ISTANTANEA** del corpo in movimento

$$\vec{r}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$$

La funzione che lega la posizione $\vec{r}$ con il tempo t viene chiamata **LEGGE ORARIA**

Il modulo del vettore posizione $|\vec{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{t})|$ si misura in metri (m) nel Sistema Internazionale (SI)

Velocità ed accelerazione

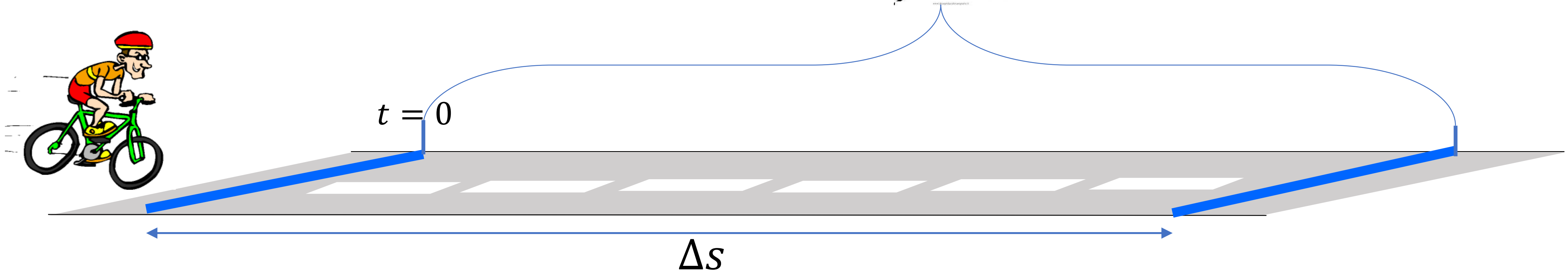


Come farà in pratica il drone a seguire la legge oraria $\vec{r}(t)$ che vorremmo impostare nel programma?

Perché effettivamente il drone possa seguire la legge oraria $\vec{r}(t)$ occorre programmare il funzionamento di ognuno dei motori che controllano le eliche istante per istante. Per fare questo occorre conoscere altre due grandezze fisiche istante per istante che sono **VELOCITA' ED ACCELERAZIONE**

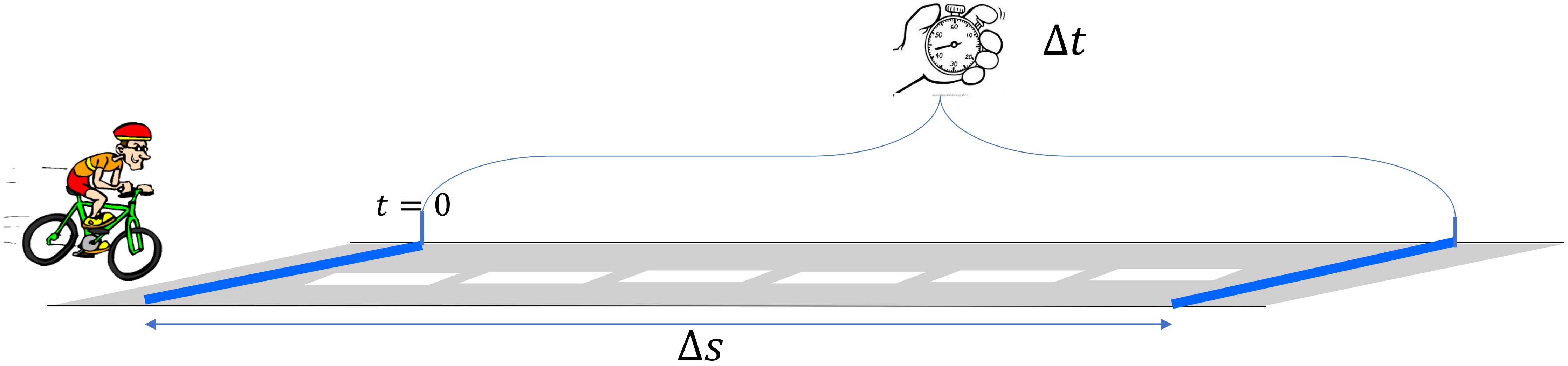
Velocità

L'intervallo di tempo Δt
si misura in secondi (s) nel SI



Considerando uno spostamento lineare per semplicità, per misurare la velocità di un corpo si possono fissare due punti dello spazio posti ad una distanza nota (Δs) ed, utilizzando un cronometro preventivamente azzerato, si fa partire nell'istante in cui il corpo transita per il primo punto e si ferma quando raggiunge il secondo punto. Il rapporto tra la distanza Δs ed il tempo segnato dal cronometro Δt è la grandezza fisica che chiamiamo **VELOCITA'**

Velocità media

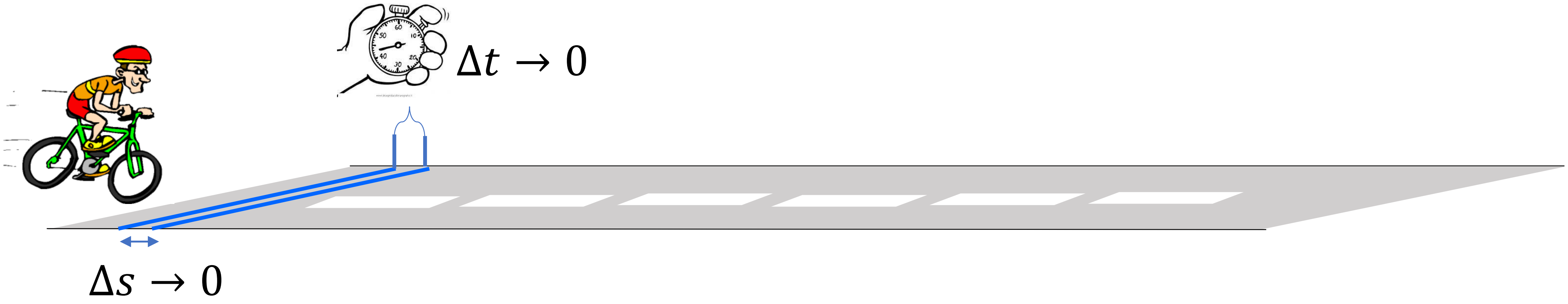


Poiché con il tipo di misura effettuato non possiamo dire nulla riguardo eventuali cambi di passo del nostro ciclista nel tratto Δs quello che otteniamo è in realtà un valore della **VELOCITA' MEDIA** del corpo …. quello che fa per esempio il sistema di controllo della velocità Tutor installato sulle autostrade

La VELOCITA' MEDIA è data dal rapporto tra lo spazio percorso dal corpo ed il tempo da esso impiegato per percorrerlo

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

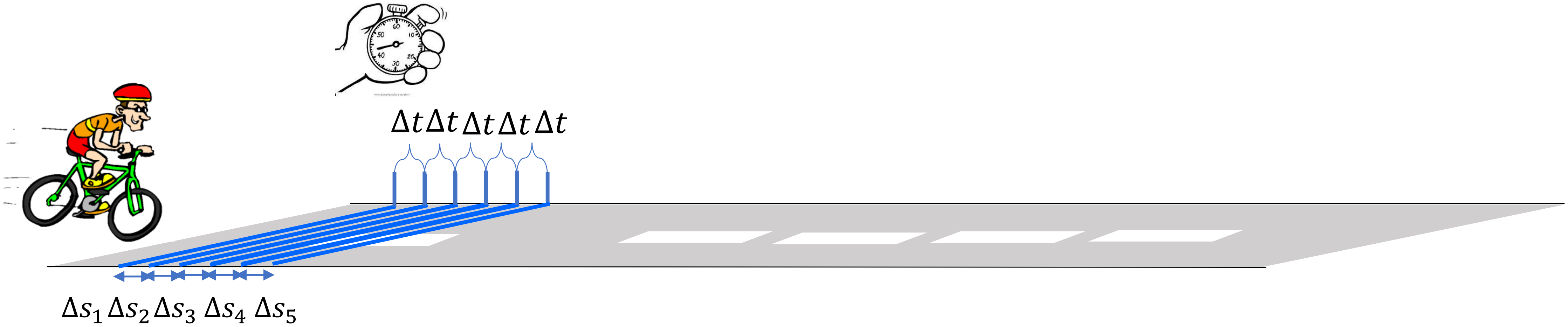
Velocità istantanea



Per conoscere in modo puntuale la velocità del corpo possiamo ravvicinare i punti iniziale e finale tra cui misuriamo il tempo di percorrenza ottenendo così la **VELOCITA' ISTANTANEA** del corpo, o quantomeno una buona approssimazione del suo valore. Per ottenere la misura istantanea infatti dovremmo avvicinare i punti fino a farli coincidere, cosa che sperimentalmente non è possibile fare

Questa operazione è quella che fa un autovelox che rileva la velocità di un'auto in un punto....

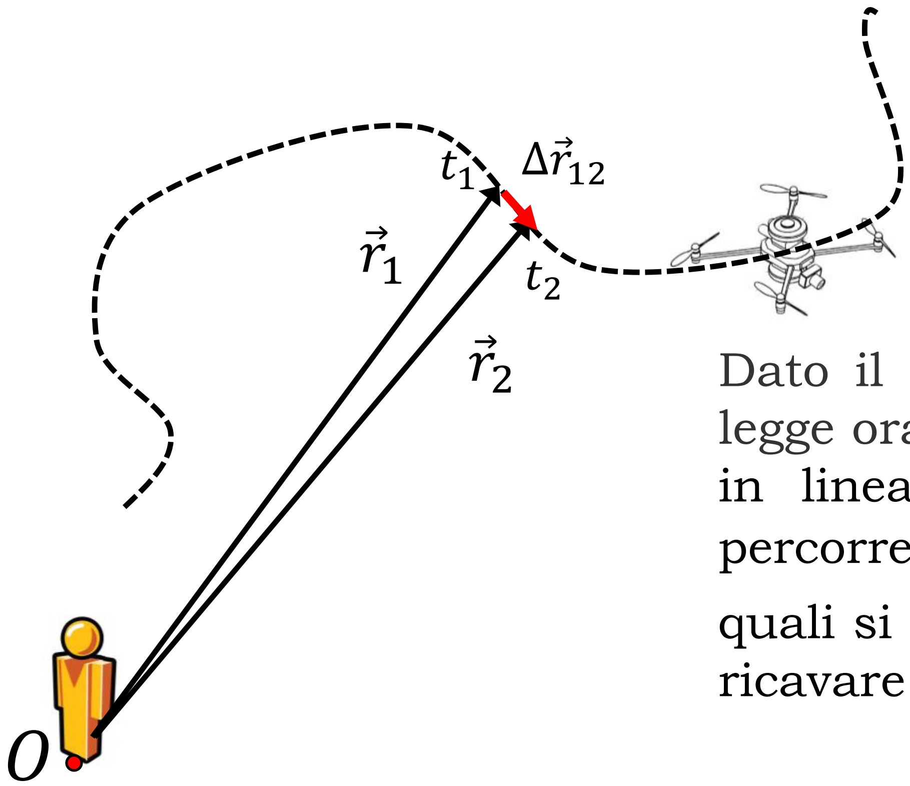
Velocità istantanea



Supponiamo di disporre di una sequenza di fotocellule vicinissime tra loro che possiamo approssimare come una distribuzione continua e di fissare un tempo Δt uguale per tutte le acquisizioni della velocità, ripetendo l'operazione di misura della velocità istantanea lungo tutta la traiettoria del corpo possiamo conoscere, istante per istante, con buona approssimazione la velocità del corpo, minore è l'intervallo Δt e migliore è il grado di approssimazione:

$$t_n = t_{n-1} + \Delta t \qquad\qquad v(t_n) = \frac{\Delta s_n}{\Delta t}$$

Velocità istantanea



Se dal punto di vista sperimentale non possiamo avvicinare tra loro i due istanti di rilevazione iniziale e finale all'infinito ($\Delta t \to 0$), dal punto di vista matematico possiamo farlo

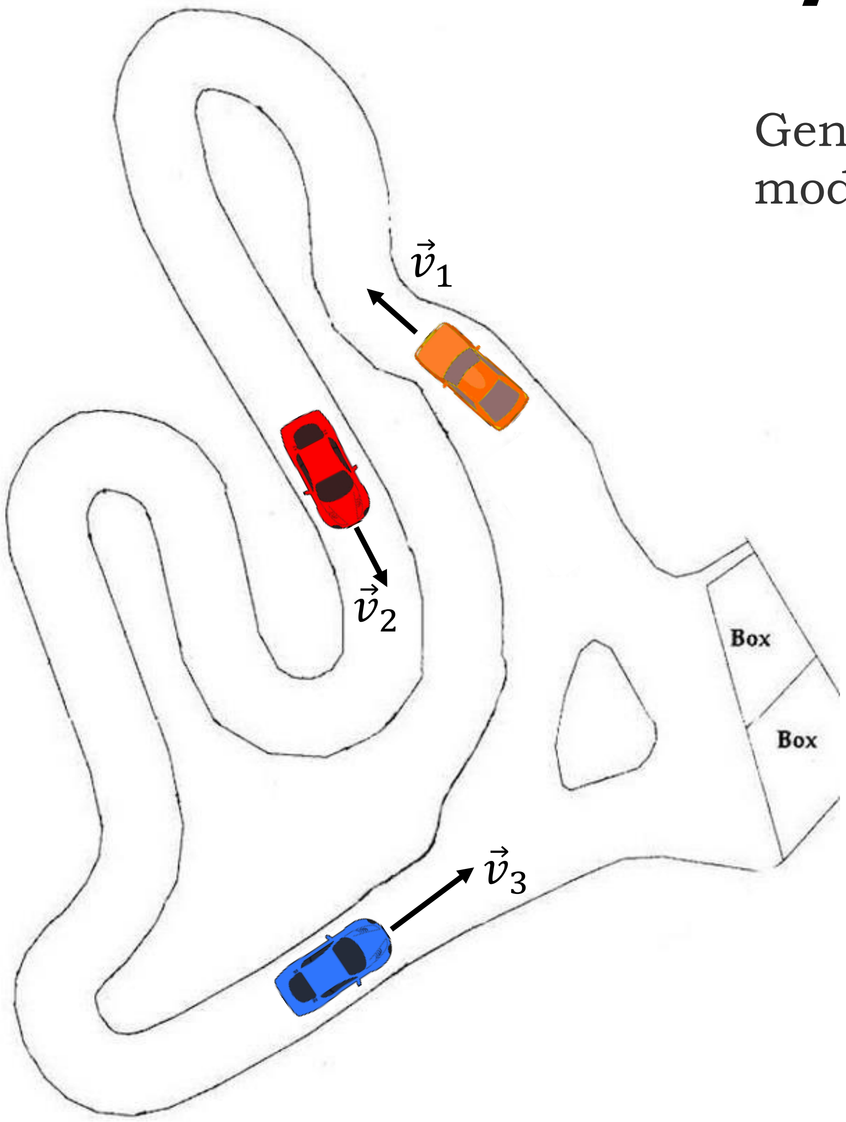
Dato il caso più generale di un corpo in movimento che segue la legge oraria $\vec{r}(t)$, non necessariamente corrispondente a spostamenti in linea retta, possiamo suddividere la traiettoria che il corpo percorre in tratti infinitesimi $\Delta\vec{r} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)\right)$, ognuno dei quali si può approssimare con un segmento lineare da cui possiamo ricavare il **VETTORE VELOCITA' ISTANTANEA** come:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt}\right)$$

Il vettore velocità istantanea $\vec{v}(t)$ è in ogni punto tangente alla traiettoria seguita dal corpo che si sta muovendo

Il modulo del vettore velocità $|\vec{v}(t)|$ si misura $m \cdot s^{-1}$ nel SI

Accelerazione



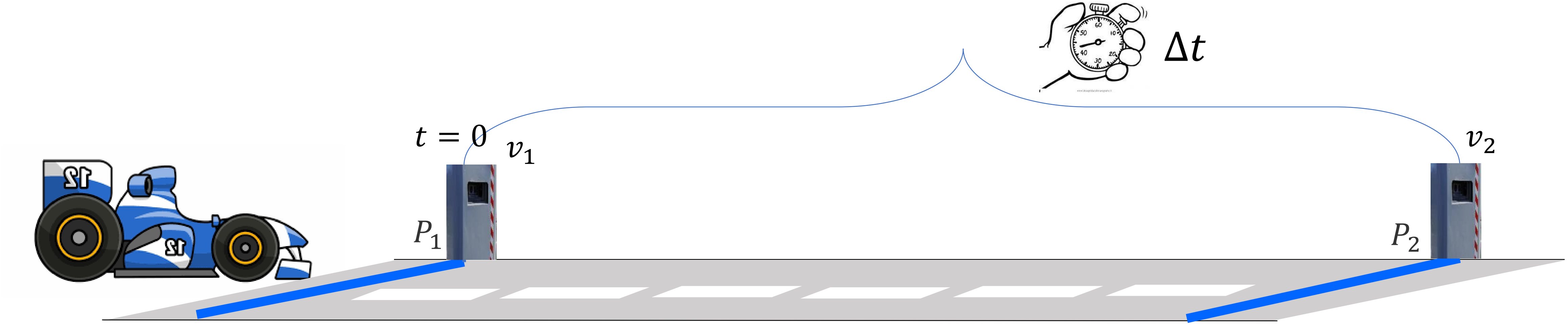
Generalmente un corpo che si sposta ha la necessità di variare in modo controllato la sua velocità istantanea.

Per esempio, un'auto che parte da ferma ed arriva ferma ha dovuto necessariamente cambiare la sua velocità istantanea $\vec{v}(t)$, rispettivamente, per mettersi in moto e per fermarsi.

Ogni cambio di direzione inoltre comporta un cambiamento della velocità istantanea $\vec{v}(t)$

LA VARIAZIONE NEL TEMPO DELLA VELOCITA' E' UNA GRANDEZZA FISICA VETTORIALE DENOMINATA ACCELERAZIONE

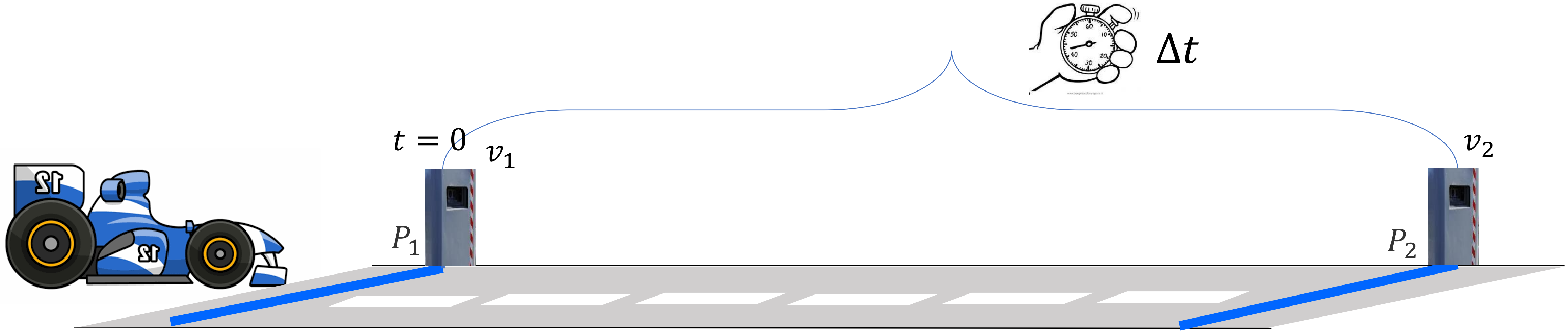
Accelerazione media



Considerando per semplicità uno spostamento lineare, per misurare l'accelerazione di un corpo si possono fissare due autovelox in corrispondenza di due punti P_1, P_2 posti lungo la sua traiettoria. Utilizzando un cronometro preventivamente azzerato, si fa partire nell'istante in cui il corpo transita per il primo punto e si ferma quando raggiunge il secondo punto. Il rapporto tra la velocità rilevata dall'autovelox nel punto P_2 e nel punto P_1, rispettivamente, ed il tempo segnato dal cronometro Δt è la grandezza fisica che chiamiamo **ACCELERAZIONE**

$$\boldsymbol{a} = \frac{(\boldsymbol{v_2} - \boldsymbol{v_1})}{\Delta \boldsymbol{t}} = \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta \boldsymbol{t}}$$

Accelerazione media



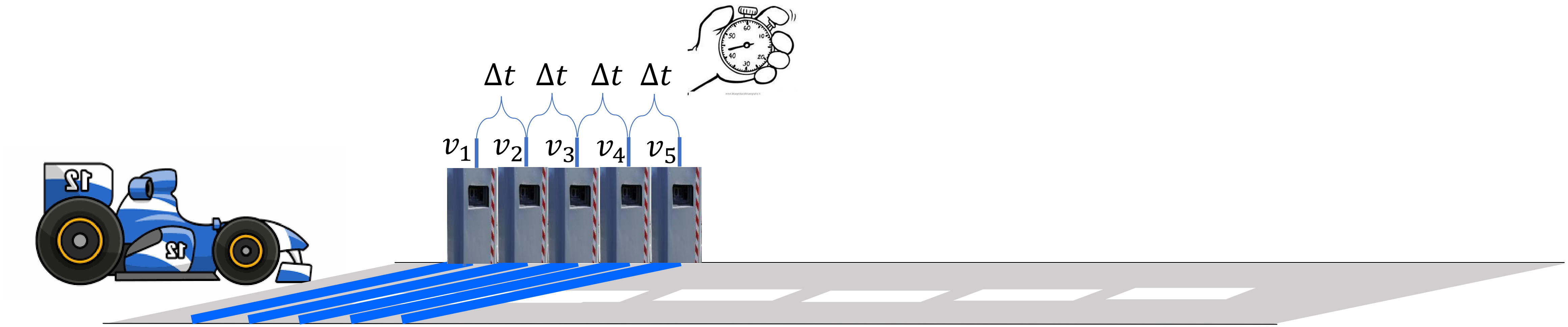
Poiché con il tipo di misura effettuato non possiamo dire nulla riguardo eventuali cambi di passo dell'auto tra i punti P_1e P_2 quello che otteniamo è in realtà un valore della **ACCELERAZIONE MEDIA** del corpo ….

$$\langle a \rangle = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Accelerazione istantanea

Per conoscere in modo puntuale l'accelerazione del corpo possiamo ravvicinare gli autovelox con cui rileviamo la velocità del corpo ottenendo così l'**ACCELERAZIONE ISTANTANEA** del corpo, o quantomeno una buona approssimazione del suo valore. Per ottenere la misura istantanea infatti dovremmo avvicinare gli autovelox fino a farli coincidere, cosa che sperimentalmente non è possibile fare

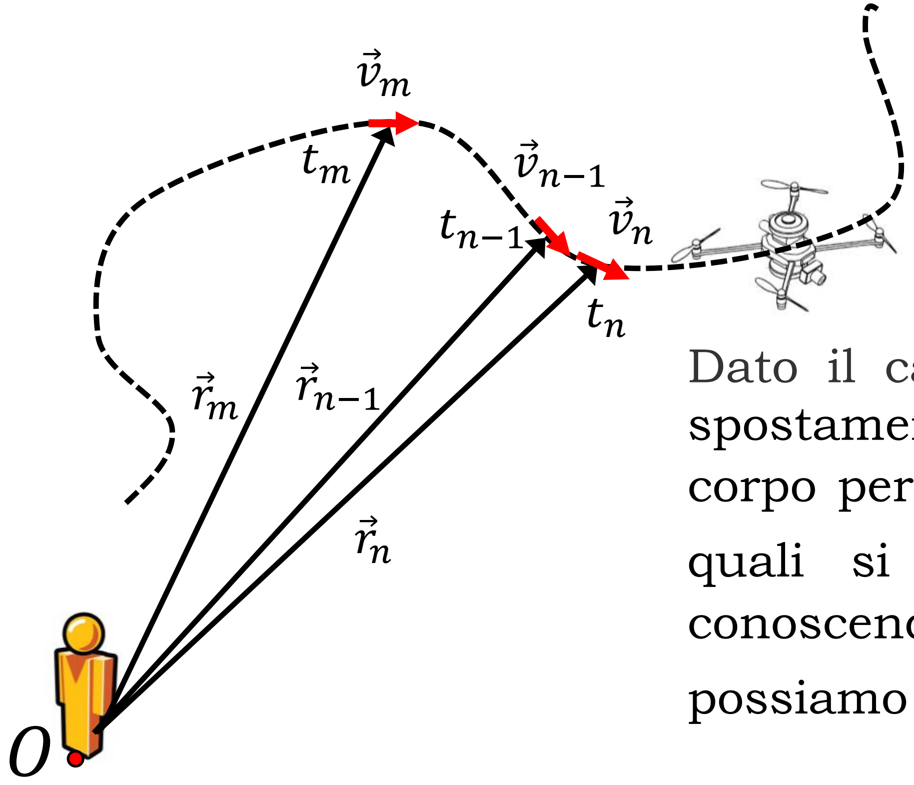
Accelerazione istantanea



Immaginiamo di potere disporre di una sequenza di autovelox miniaturizzati vicinissimi tra loro che possiamo approssimare come una distribuzione continua e di fissare un tempo Δt uguale per tutte le acquisizioni delle velocità v_{n-1}e v_n. Ripetendo l'operazione di misura della accelerazione istantanea lungo tutta la traiettoria del corpo possiamo determinare con buona approssimazione l'andamento dell'accelerazione del corpo in funzione del tempo, minore è l'intervallo Δt e migliore è il grado di approssimazione:

$$t_n = t_{n-1} + \Delta t \qquad\qquad a(t_n) = \frac{v_n - v_{n-1}}{\Delta t} = \frac{\Delta v_n}{\Delta t}$$

Accelerazione istantanea



Se dal punto di vista sperimentale non possiamo avvicinare tra loro i due istanti di rilevazione iniziale e finale all'infinito ($\Delta t \to 0$), dal punto di vista matematico possiamo farlo

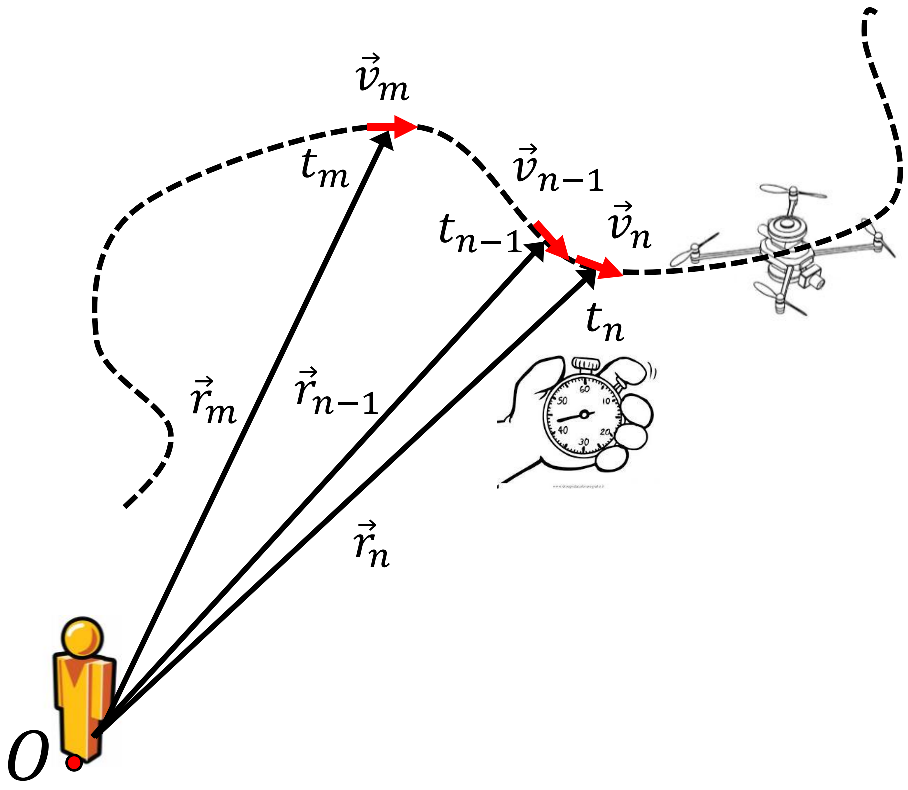
Dato il caso più generale di un corpo in movimento che non esegue spostamenti in linea retta, possiamo suddividere la traiettoria che il corpo percorre in tratti infinitesimi $\Delta\vec{r} = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)\right)$, ognuno dei quali si può approssimare con un segmento lineare lungo cui, conoscendo la variazione del vettore velocità $\Delta\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)\right)$, possiamo ricavare il **VETTORE ACCELERAZIONE ISTANTANEA** come:

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \left(\frac{dv_x(t)}{dt}, \frac{dv_y(t)}{dt}, \frac{dv_z(t)}{dt}\right)$$

$$= \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \left(\frac{d^2r_x(t)}{dt^2}, \frac{d^2r_y(t)}{dt^2}, \frac{d^2r_z(t)}{dt^2}\right)$$

Il modulo del vettore accelerazione $|\vec{a}(t)|$ si misura $m \cdot s^{-2}$ nel SI

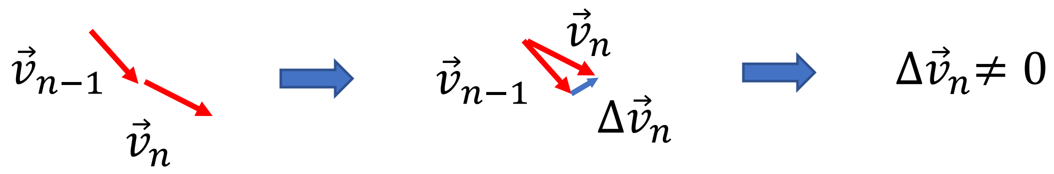
Accelerazione istantanea



Nelle situazione reali ad ogni cambio di direzione è associata un'accelerazione, anche se il corpo mantiene una velocità costante lungo tutta la traiettoria

Supponiamo $|\vec{v}_{n-1}| = |\vec{v}_n| \ \forall n$

$$\vec{\boldsymbol{a}} = \frac{\Delta \vec{\boldsymbol{v}}}{\Delta \boldsymbol{t}} \rightarrow \qquad \vec{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{t_n}) = \frac{(\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{n}} - \vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{n-1}})}{(\boldsymbol{t_n} - \boldsymbol{t_{n-1}})} = \frac{\Delta \vec{v}_n}{\Delta t}$$



Il vettore accelerazione istantanea $\vec{a}(t)$ è in ogni punto diretto come il raggio della circonferenza tangente alla traiettoria (raggio di curvatura) e punta verso il centro della circonferenza

Forza

Abbiamo visto che per fare muovere un corpo inizialmente fermo lungo una generica traiettoria non rettilinea secondo una tabella di marcia variabile è necessario imprimergli un'accelerazione variabile nel tempo

In un'auto l'elemento che è in grado di darle movimento è il motore

In un centometrista sono i muscoli che sono in grado di dargli il movimento

Anche un ammasso di neve può acquisire movimento diventando una devastante valanga

Che cosa hanno in comune l'auto, il centometrista e la valanga?

Forza

Intuitivamente chiamiamo **FORZA** qualunque stimolo interno od esterno ad un corpo che sia in grado di modificarne lo stato di moto:

- lo mette in movimento se fermo
- lo ferma se in movimento
- gli fa cambiare direzione se già in movimento
- gli modifica la velocità se già in movimento

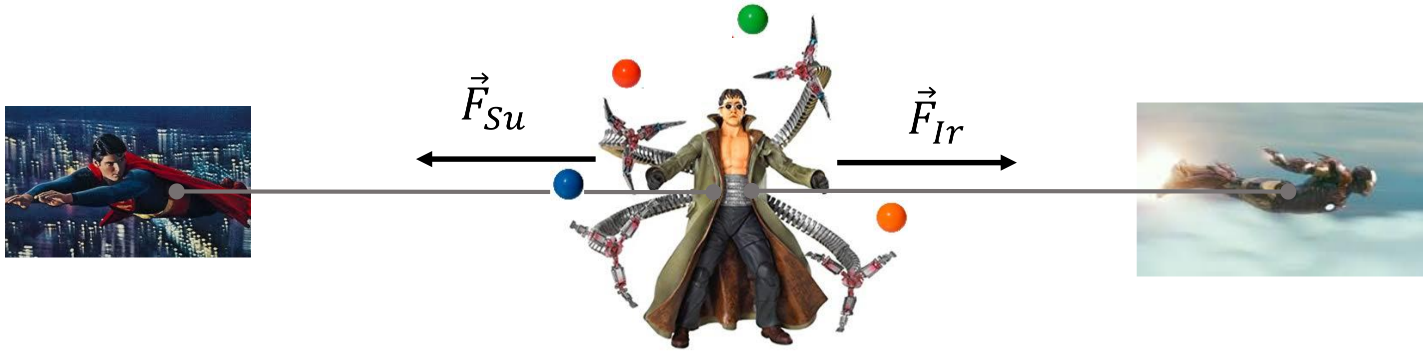
In termini fisici:

LA FORZA E' UNA GRANDEZZA FISICA VETTORIALE CHE DETERMINA IL MOVIMENTO DI UN CORPO SECONDO I TRE PRINCIPI DELLA DINAMICA

Primo Principio della Dinamica

In assenza di forze, o in presenza di forze la cui risultante totale sia nulla, un corpo permane nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme

Essendo la Forza una grandezza vettoriale se sul corpo agiscono forze che sommate danno una risultante nulla si ricade nelle condizioni di validità del Primo Principio della Dinamica



$$\left|\vec{F}_{Ir}\right| = \left|\vec{F}_{Su}\right| \rightarrow \vec{F}_{Oc} = 0$$

PRINCIPIO DI INERZIA

Secondo Principio della Dinamica

Una forza agente su di corpo causerà un'accelerazione del corpo nella stessa direzione e nello stesso verso della forza applicata ed avente intensità direttamente proporzionale alla forza applicata

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

La costante di proporzionalità m tra forza ed accelerazione una grandezza fisica scalare chiamata MASSA INERZIALE

Nel SI la massa inerziale si misura in chilogrammi (Kg)

Nel SI la forza si misura in Newton (N)

$$N = \frac{Kg \cdot m}{s^2}$$

Terzo Principio della Dinamica

Se un corpo A esercita una forza su di un corpo B, allora il corpo B eserciterà sul corpo A una forza di modulo e direzione uguale, ma avente verso opposto

$$\vec{F}_{AB} = -\,\vec{F}_{BA}$$

PRINCIPIO DI AZIONE E REAZIONE

Colpendo il sacco il pugile imprime una forza su di esso. Il sacco a sua volta imprime sul pungo una forza uguale e contraria che il pugile deve contrastare tenendo ben tesi i muscoli della mano per non farsi male

AEREO A REAZIONE: La turbina dell'aereo imprime una forza alle molecole di aria che a loro volta imprimono all'aereo una forza uguale e contraria che causa il movimento dell'aereo

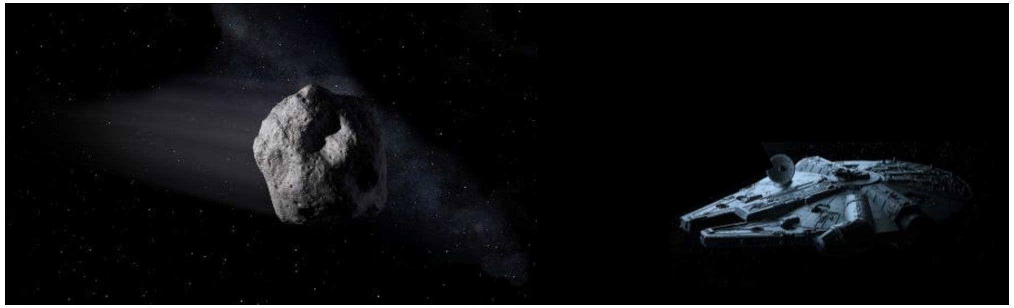
Principio di relatività galileiana

Le Leggi della meccanica sono uguali in tutti i sistemi di riferimento inerziali

Un sistema di riferimento S' è detto inerziale se si muove a velocità costante rispetto ad sistema di riferimento S in cui valgono le Leggi della Meccanica

La meccanica comprende cinematica, dinamica e statica (i corpi in equilibrio statico per cui la risultante delle forze applicate è nulla)

Supponiamo di essere su di una nave a motori spenti nello spazio profondo e di vedere un asteroide che si avvicina a velocità costante…. siamo sicuri che sia il meteorite che si sta muovendo di noi e se invece fossimo noi ad andare verso di lui …. come possiamo capirlo?



Principio di relatività galileiana

Non c'è nessuna misura che possa dirci chi si sta muovendo verso chi e non c'è nessuna misura in grado di stabilire in modo assoluto la velocità della nave e la velocità dell'asteroide

Non si può definire un punto privilegiato nell'Universo, un origine O fisso a cui riferire tutti i movimenti dei corpi celesti

Di qualunque oggetto, corpo celeste o particella cosmica possiamo solamente dire se è fermo rispetto al nostro sistema di riferimento (Terra) o se si muove rispetto a noi (movimento relativo)

Tutti i sistemi di riferimento che si muovono a velocità costante tra loro sono equivalenti

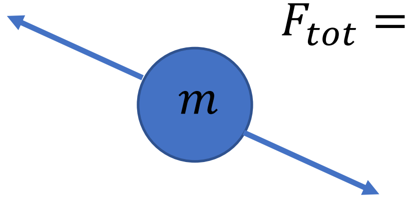
Le leggi fisiche che ricaviamo stando sulla Terra possono essere esportate all'esterno di essa

Forza nulla: moto rettilineo uniforme

Supponiamo che un corpo di massa m non sia soggetto a forze, oppure che la somma delle forze a cui è sottoposto sia nulla, vogliamo determinare la sua velocità e la sua posizione nel tempo

$$\vec{F} = 0 \xrightarrow{\vec{F} = m\vec{a}} m\vec{a} = 0 \xrightarrow{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}} m\frac{d\vec{v}}{dt} = 0$$

$$m\left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt}\right) = (0, 0, 0\,)$$



$\vec{F}_{tot} = 0$

$$\frac{dv_x}{dt} = 0 \rightarrow v_x = cost.$$

$$\frac{dv_y}{dt} = 0 \rightarrow v_y = cost.$$

$$\frac{dv_z}{dt} = 0 \rightarrow v_z = cost.$$

Equazioni differenziali di primo grado, per essere risolte compiutamente necessitano di una condizione al contorno ciascuna

Dobbiamo conoscere il valore delle tre componenti della velocità almeno in corrispondenza di un istante che chiameremo t_0.

Spesso, sebbene non necessariamente, l'istante t_0 corrisponde all'istante inziale $t = 0$

$$\Rightarrow \quad v_x = v_x(t_0) \qquad v_y = v_y(t_0) \qquad v_z = v_z(t_0)$$

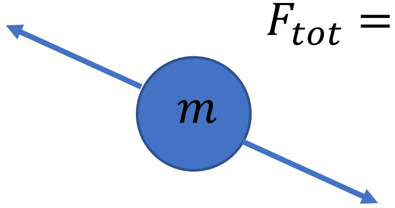
Forza nulla: moto rettilineo uniforme

$$v_x = v_x(t_0)$$
$$v_y = v_y(t_0)$$
$$v_z = v_z(t_0)$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = v_x(t_0)$$
$$\frac{dy}{dt} = v_y(t_0)$$
$$\frac{dz}{dt} = v_z(t_0)$$

$\vec{F}_{tot} = 0$



$$\frac{dx}{dt} = v_x(t_0)$$
$$\frac{dy}{dt} = v_y(t_0)$$
$$\frac{dz}{dt} = v_z(t_0)$$

Equazioni differenziali di primo grado, per essere risolte compiutamente necessitano di una condizione al contorno ciascuna

Dobbiamo conoscere il valore delle tre componenti del vettore posizione $\vec{r}$ almeno in corrispondenza di un istante che chiameremo t_1.

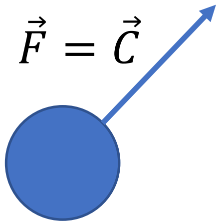
Spesso, sebbene non necessariamente, l'istante t_1 corrisponde all'istante t_0

$$x(t) = v_x(t_0)t + x(t_1)$$
$$y(t) = v_y(t_0)t + y(t_1)$$
$$z(t) = v_z(t_0)t + z(t_1)$$

Il primo Principio della dinamica è contenuto nel secondo: $\vec{F} = m\vec{a}$

Forza costante: moto uniformemente accelerato

Supponiamo che un corpo di massa m sia soggetto ad un forza costante, vogliamo determinare la sua velocità e la sua posizione nel tempo



$$\vec{F} = \vec{C} \xrightarrow{\vec{F} = m\vec{a}} m\vec{a} = \vec{C} \xrightarrow{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}} m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{C}$$

$$m\left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt}\right) = (C_x, C_y, C_z)$$

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{C_x}{m}$$

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{C_y}{m}$$

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{C_z}{m}$$

Equazioni differenziali di primo grado, per essere risolte compiutamente necessitano di una condizione al contorno ciascuna

Dobbiamo conoscere il valore delle tre componenti della velocità almeno in corrispondenza di un istante che chiameremo t_0.

Spesso l'istante t_0 corrisponde all'istante inziale $t = 0$ ma non necessariamente deve essere così

$$v_x = \frac{C_x}{m}t + v_x(t_0)$$

$$v_y = \frac{C_y}{m}t + v_y(t_0)$$

$$v_z = \frac{C_z}{m}t + v_z(t_0)$$

La velocità di un corpo di massa m soggetto ad una forza costante aumenta linearmente con il tempo

Forza costante: moto uniformemente accelerato

$$v_x = \frac{C_x}{m} t + v_x(t_0)$$

$$v_y = \frac{C_y}{m} t + v_y(t_0)$$

$$v_z = \frac{C_z}{m} t + v_z(t_0)$$

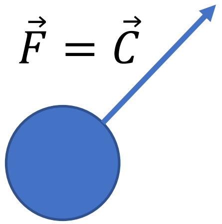
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{C_x}{m} t + v_x(t_0)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{C_y}{m} t + v_y(t_0)$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{C_z}{m} t + v_z(t_0)$$

$$\vec{F} = \vec{C}$$



$$\frac{dx}{dt} = \frac{C_x}{m} t + v_x(t_0)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{C_y}{m} t + v_y(t_0)$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{C_z}{m} t + v_z(t_0)$$

Equazioni differenziali di primo grado, per essere risolte compiutamente necessitano di una condizione al contorno ciascuna

Dobbiamo conoscere il valore delle tre componenti del vettore posizione $\vec{r}$ almeno in corrispondenza di un istante che chiameremo t_1.

Spesso, sebbene non necessariamente, l'istante t_1 corrisponde all'istante t_0

$$x = \frac{1}{2}\frac{C_x}{m} t^2 + v_x(t_0)\, t + x(t_0)$$

$$y = \frac{1}{2}\frac{C_y}{m} t^2 + v_y(t_0)\, t + y(t_0)$$

$$z = \frac{1}{2}\frac{C_z}{m} t^2 + v_z(t_0)\, t + z(t_0)$$

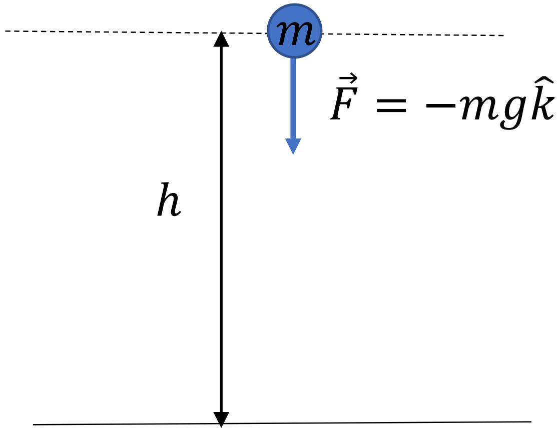
Lo spazio percorso dal corpo di massa m soggetto ad una forza costante aumenta quadraticamente con il tempo

Forza costante: moto uniformemente accelerato

Esempio: caduta di un grave

Supponiamo di lasciare cadere da fermo un corpo di massa m da un'altezza h, vogliamo determinare il tempo di caduta in assenza di forze di attrito

$$\vec{F} = \vec{C} \quad \text{dove} \quad \vec{C} = -mg\hat{k} = (0, 0, -mg)$$



$$x = \frac{1}{2}\frac{C_x}{m}t^2 + v_x(t_0)\,t + x(t_0) \qquad x = x(t_0)$$

$$y = \frac{1}{2}\frac{C_y}{m}t^2 + v_y(t_0)\,t + y(t_0) \quad \Rightarrow \quad y = y(t_0)$$

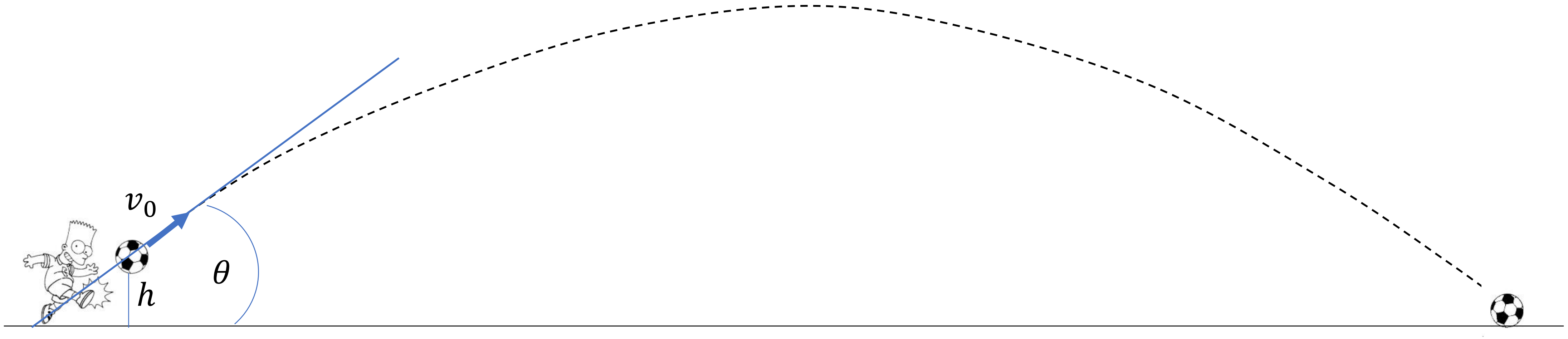
$$z = \frac{1}{2}\frac{C_z}{m}t^2 + v_z(t_0)\,t + z(t_0) \qquad z = -\frac{g}{2}t^2 + h$$

$$0 = -\frac{g}{2}t^2 + h \rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

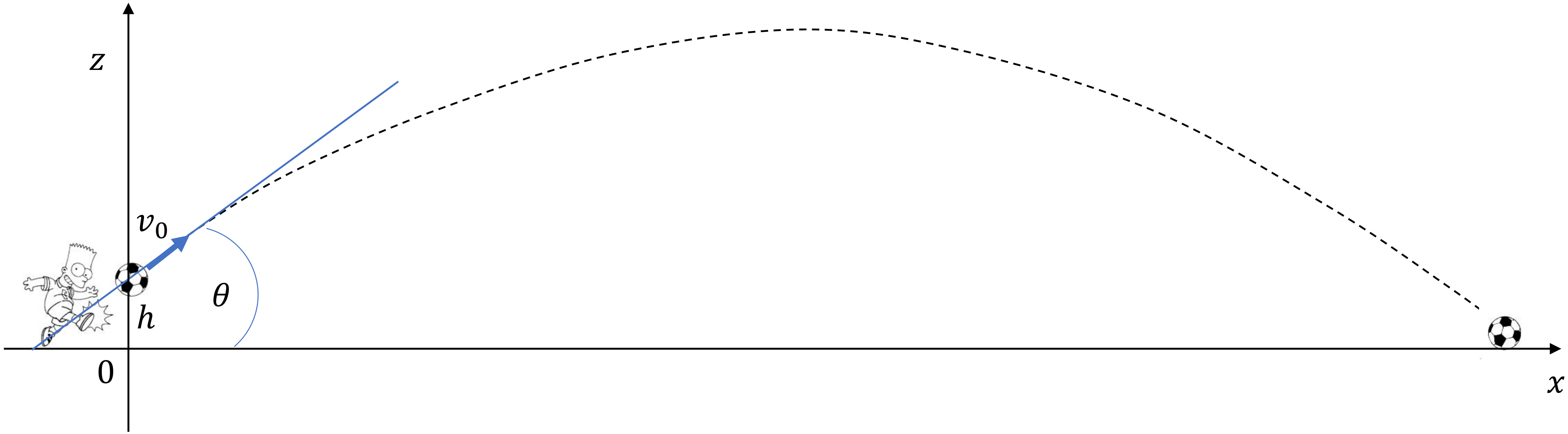
In condizioni di attrito trascurabile, il tempo di caduta di un corpo non dipende dalla sua massa

Forza costante: moto uniformemente accelerato

Un portiere effettua un rinvio verso la porta avversaria imprimendo una velocità in uscita al pallone di massa m in modulo uguale a v_0 con un angolo di uscita θ rispetto alla superficie campo da calcio. L'altezza del piede del portiere da terra è uguale ad h nel momento in cui il pallone lascia il piede. Dopo quanto tempo atterrerà il pallone? Quanto vale l'altezza massima raggiunta dal pallone?



Forza costante: moto uniformemente accelerato

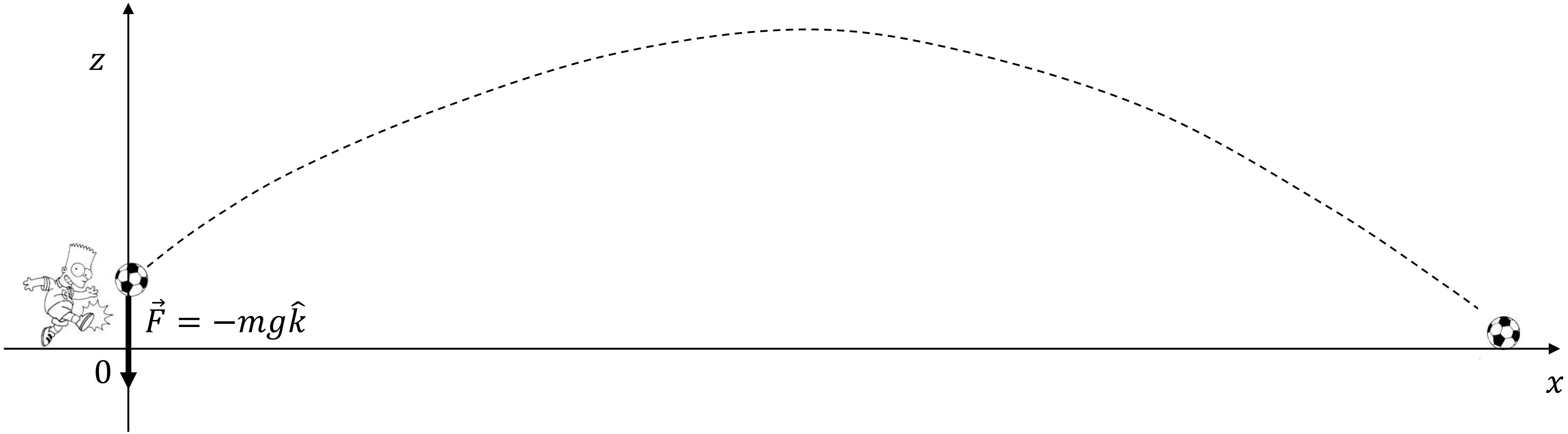


Condizioni al contorno

$$\vec{v}_0(t=0) = (v_0 \cos\theta\,, 0, v_0 \sin\theta)$$

$$\vec{r}_0(t=0) = (0, 0, h)$$

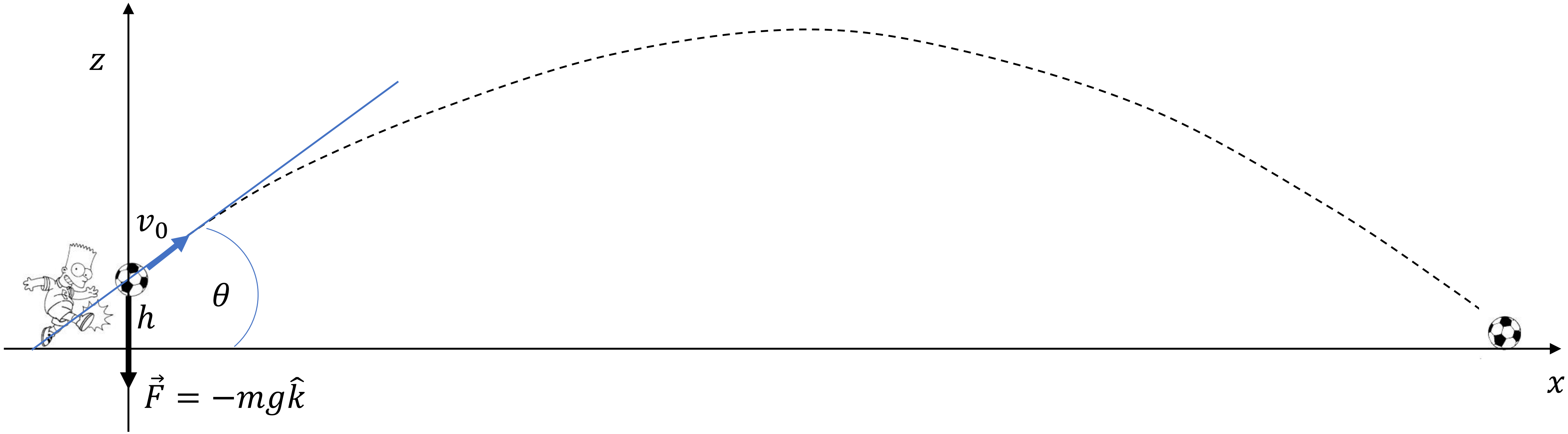
Forza costante: moto uniformemente accelerato



Forza applicata al pallone

$$\vec{F} = (0, 0, -mg)$$

Forza costante: moto uniformemente accelerato



$$\vec{F} = m\vec{a} \rightarrow \begin{cases} \vec{a} = (0, 0, -g) \\ \vec{v}_0(t=0) = (v_0 \cos\theta\,, 0, v_0 \sin\theta) \\ \vec{r}_0(t=0) = (0, 0, h) \end{cases}$$

Forza costante: moto uniformemente accelerato

$$\begin{cases} \vec{a} = (0, 0, -g) \\ \vec{v}_0(t=0) = (v_0 \cos\theta \,, 0, v_0 \sin\theta) \\ \vec{r}_0(t=0) = (0, 0, h) \end{cases} \quad \rightarrow$$

$$\frac{dv_x}{dt} = 0\,; \quad v_x(t=0) = v_0 \cos\theta$$

$$\frac{dv_y}{dt} = 0\,; \quad v_y(t=0) = 0$$

$$\frac{dv_z}{dt} = -g\,; \quad v_z(t=0) = v_0 \sin\theta$$

$$v_x = v_0 \cos\theta$$

$$v_y = 0$$

$$v_z = -gt + v_0 \sin\theta$$

Alla massima altezza $v_z = 0$

$$0 = -gt + v_0 \sin\theta \rightarrow t_{hmax} = \frac{v_0 \sin\theta}{g}$$

Massima altezza $z(t = t_{hmax})$

Forza costante: moto uniformemente accelerato

$$v_x = v_0 \cos\theta$$

$$v_y = 0$$

$$v_z = -gt + v_0 \sin\theta$$

$\rightarrow$

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos\theta \, ; \quad x(t=0) = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = 0 \, ; \quad y(t=0) = 0$$

$$\frac{dz}{dt} = -gt + v_0 \sin\theta \, ; \quad z(t=0) = h$$

$$x = v_0 \cos\theta \, t$$

$$y = 0$$

$$z = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin\theta \, t + h$$

Arrivo al suolo $z = 0$

$$0 = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin\theta \, t + h$$

Massima altezza z$(t = t_{hmax})$

$$z_{max} = -\frac{1}{2} g t_{hmax}^2 + v_0 \sin\theta \, t_{hmax} + h$$

Forza costante: moto uniformemente accelerato

Arrivo al suolo $z = 0$

$$0 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\theta\, t + h$$

$$t_{1,2} = \frac{-v_0 \sin\theta \mp \sqrt{v_0^2 \sin\theta^2 + 2gh}}{-g} \rightarrow \qquad t_{suolo} = \frac{v_0 \sin\theta + \sqrt{v_0^2 \sin\theta^2 + 2gh}}{g}$$

Massima altezza z$(t = t_{hmax})$

$$z_{max} = -\frac{1}{2}gt_{hmax}^2 + v_0 \sin\theta\, t_{hmax} + h \qquad t_{hmax} = \frac{v_0 \sin\theta}{g}$$

$$z_{max} = -\frac{1}{2}g\frac{v_0^2 \sin\theta^2}{g^2} + v_0 \sin\theta \frac{v_0 \sin\theta}{g} + h = \frac{v_0^2 \sin\theta^2}{2g} + h$$

Forza costante: moto uniformemente accelerato

Supponiamo di lasciare cadere da fermo un corpo di massa m da un'altezza h lungo il piano inclinato mostrato in figura 1. Supponendo che l'attrito si possa completamente trascurare e che il corpo si possa considerare puntiforme, dopo quanto tempo il corpo raggiungerà la posizione $^h/_2$ sul secondo piano inclinato come mostrato in figura 2?

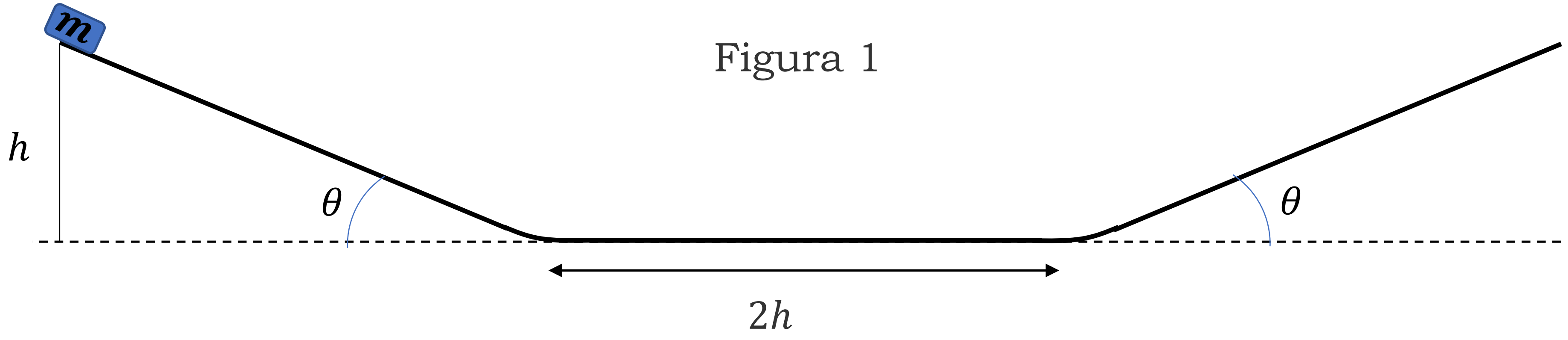
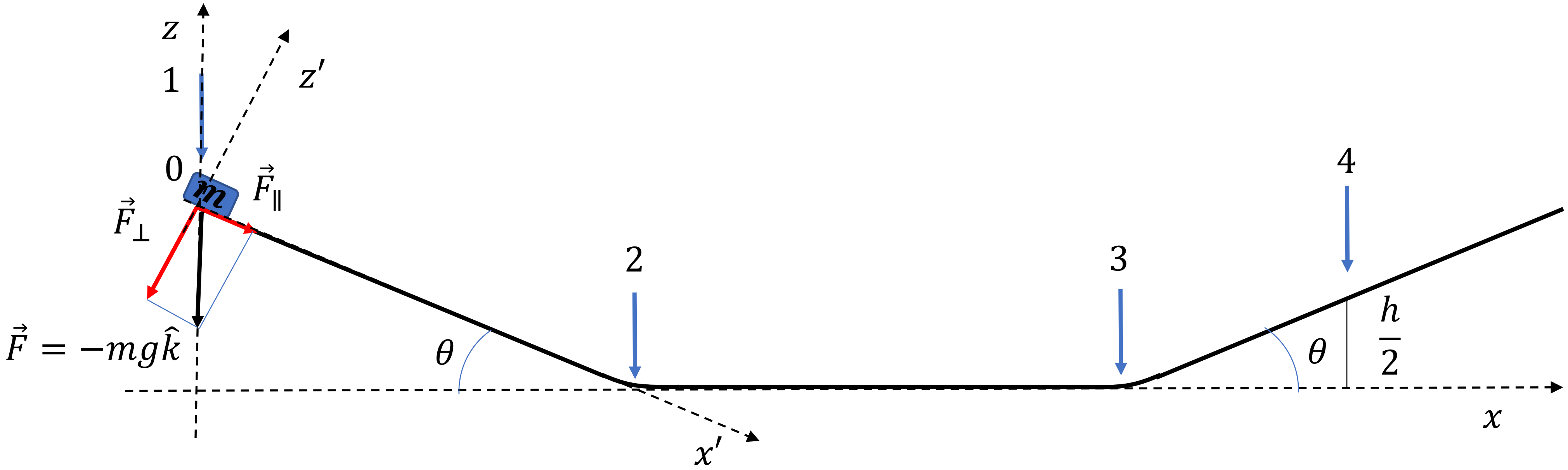


Figura 1

Figura 2

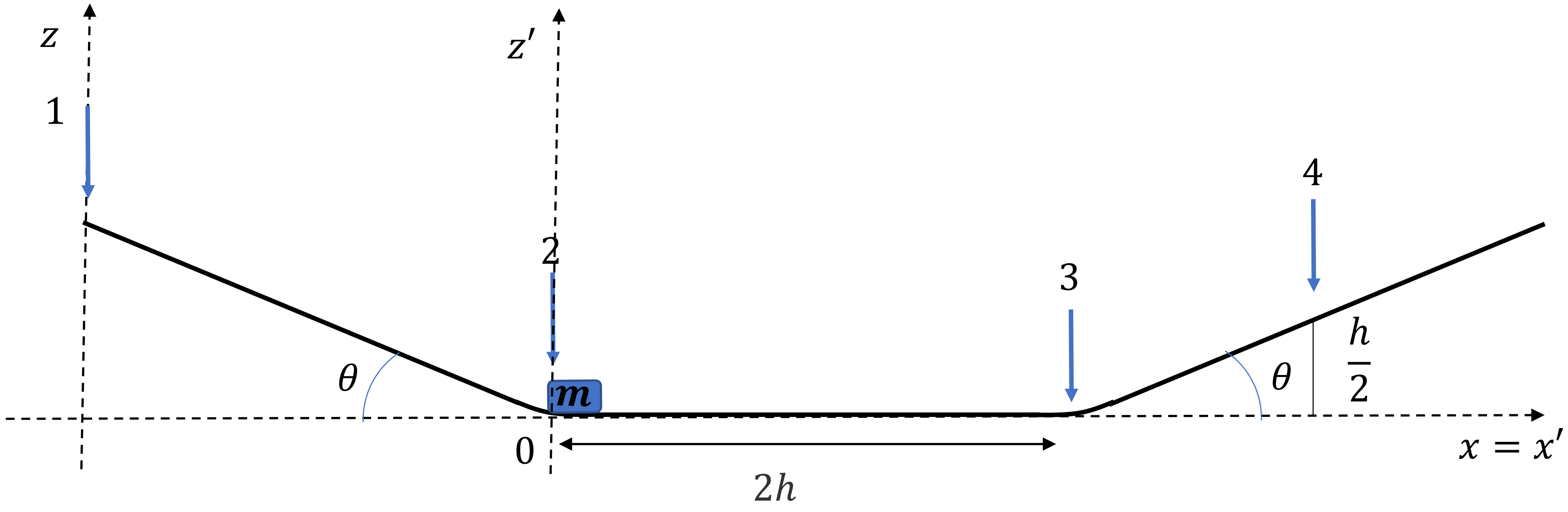
Forza costante: moto uniformemente accelerato



$$F_\parallel = F_{x'} = mg\sin\theta \qquad a_{x'} = g\sin\theta \rightarrow v_{x'} = g\sin\theta t + v_0 = g\sin\theta t \rightarrow x' = \frac{1}{2}g\sin\theta\, t^2 + x'_0 = \frac{1}{2}g\sin\theta\, t^2$$

$$x' = \frac{h}{\sin\theta} \rightarrow \frac{h}{\sin\theta} = \frac{1}{2}g\sin\theta\, t^2 \rightarrow t_{12} = \sqrt{\frac{2h}{g\sin\theta^2}} \rightarrow v_2 = g\sin\theta\sqrt{\frac{2h}{g\sin\theta^2}} = \sqrt{2gh}$$

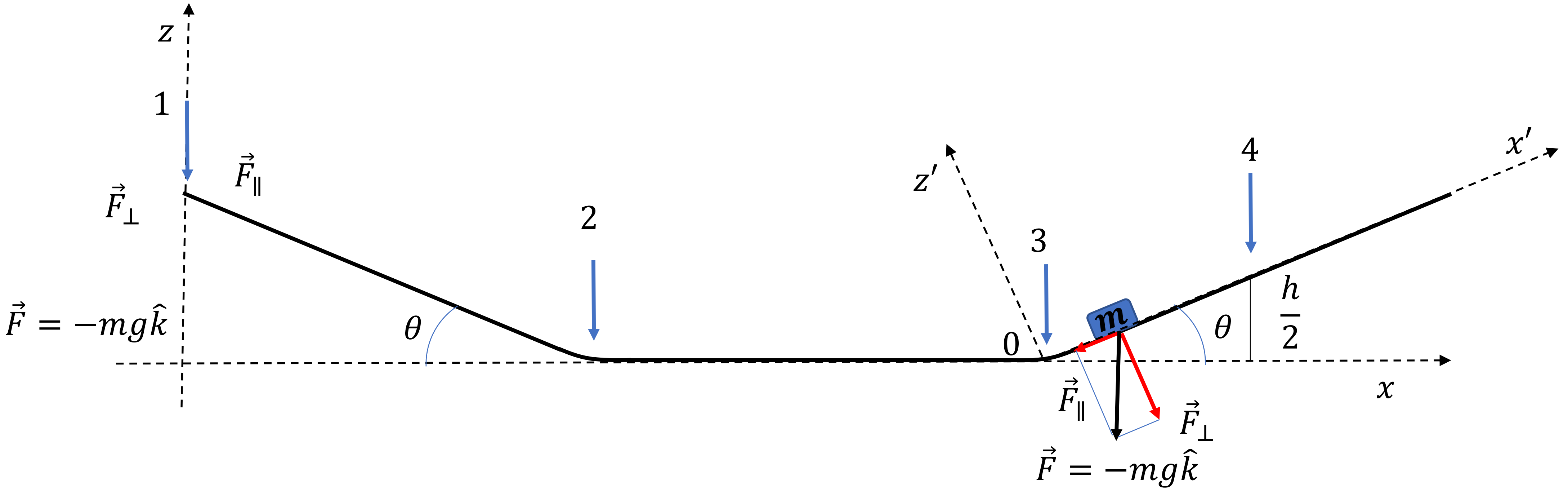
Forza costante: moto uniformemente accelerato



$\vec{F} = 0$ $\quad v_2 = \sqrt{2gh} \rightarrow \quad x' = \sqrt{2gh}\, t + x'_0 = \sqrt{2gh}\, t$

$x' = 2h \rightarrow \quad 2h = \sqrt{2gh}\, t \rightarrow \quad t_{23} = \dfrac{2h}{\sqrt{2gh}} = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$ $\quad v_3 = \sqrt{2gh}$

Forza costante: moto uniformemente accelerato

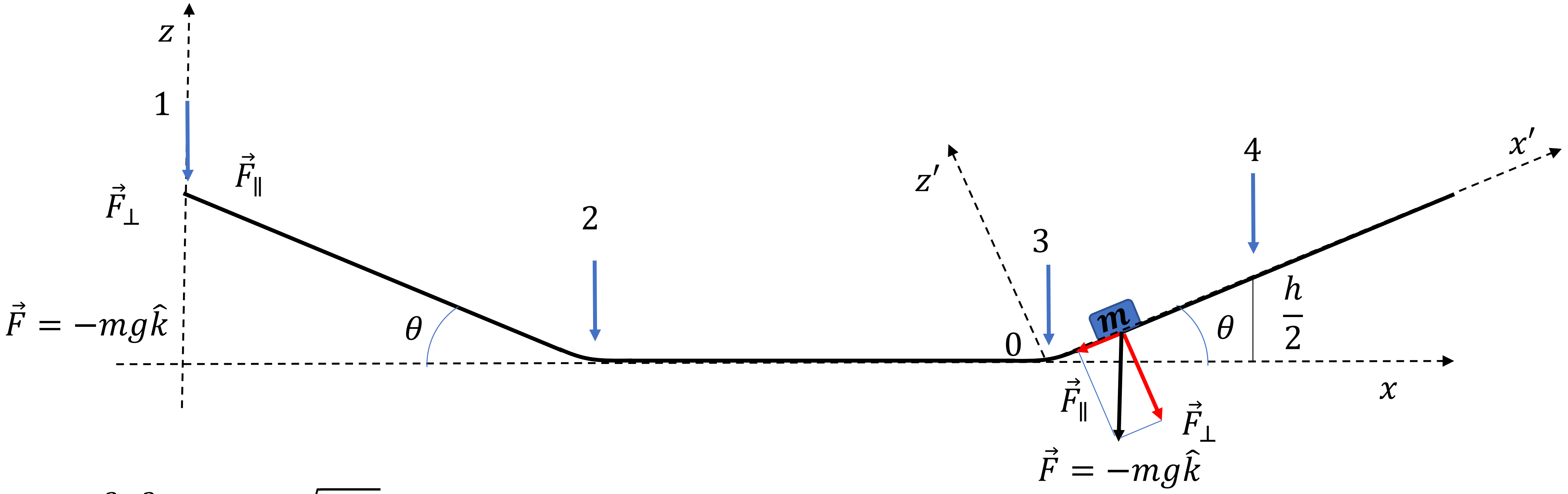


$$v_3 = \sqrt{2gh}$$

$$F_\parallel = F_{x'} = -mg\sin\theta \qquad a_{x'} = -g\sin\theta \rightarrow v_{x'} = -g\sin\theta t + \sqrt{2gh} \rightarrow \quad x' = -\frac{1}{2}g\sin\theta\; t^2 + \sqrt{2gh}\,t + 0$$

$$x' = \frac{h}{2\sin\theta} \rightarrow \frac{h}{2\sin\theta} = -\frac{1}{2}g\sin\theta\; t^2 + \sqrt{2gh}\,t \rightarrow \quad g\sin\theta^2\,t^2 - 2\sin\theta\sqrt{2gh}\;t + h = 0$$

Forza costante: moto uniformemente accelerato

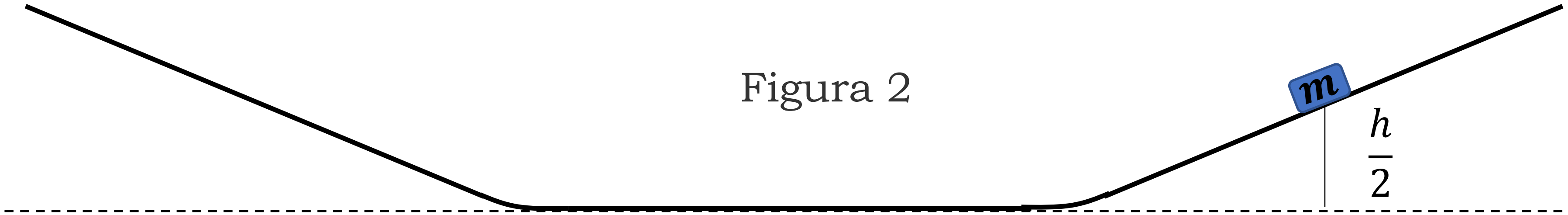


$$g \sin\theta^2 \, t^2 - 2\sin\theta\sqrt{2gh}\; t + h = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{2\sin\theta\sqrt{2gh} \mp \sqrt{8gh\sin\theta^2 - 4gh\sin\theta^2}}{2g\sin\theta^2} = \frac{2\sin\theta\sqrt{2gh} \mp 2\sin\theta\sqrt{gh}}{2g\sin\theta^2} \rightarrow \quad t_{34} = \frac{2\sin\theta\sqrt{gh}\left(\sqrt{2}-1\right)}{2g\sin\theta^2}$$

$$t_{34} = \sqrt{\frac{h}{g\sin\theta^2}}\left(\sqrt{2}-1\right)$$

Forza costante: moto uniformemente accelerato



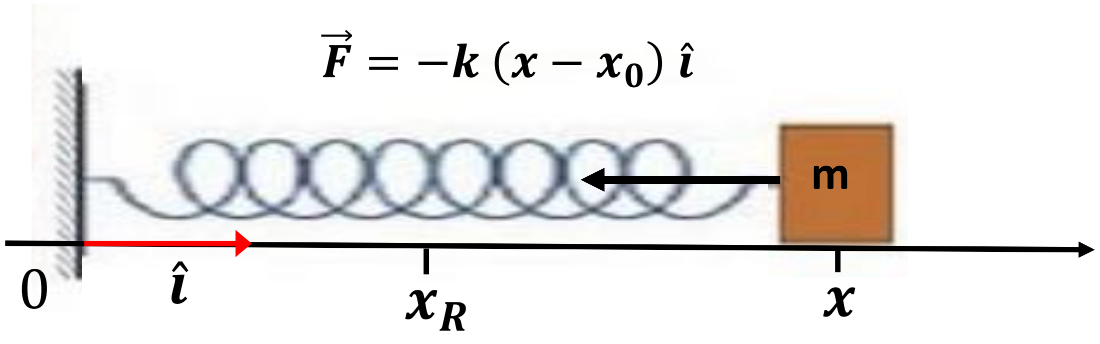
$$t_{totale} = t_{12} + t_{23} + t_{34} = \sqrt{\frac{2h}{g \sin \theta^2}} + \sqrt{\frac{2h}{g}} + \sqrt{\frac{h}{g \sin \theta^2}}\left(\sqrt{2} - 1\right) = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \sqrt{\frac{h}{g \sin \theta^2}}\left(2\sqrt{2} - 1\right)$$

Forza elastica: moto armonico

Supponiamo che un corpo di massa m sia soggetto ad un forza di richiamo proporzionale all'allontanamento del corpo da un punto fisso P_0, vogliamo determinare la sua velocità e la sua posizione nel tempo

$$\vec{F} = -k\,(x - x_R)\,\hat{\imath}$$

LEGGE DI HOOKE



Un esempio applicativo è la molla ideale, ovvero priva di attrito. In questo caso x_R è la lunghezza a risposo della molla e k è la costante elastica della molla

La molla non è però l'unico caso applicativo in cui è valida la Legge di Hooke

Forza elastica: moto armonico

$$\vec{F} = -k(x - x_R)\vec{\imath} \xrightarrow{\vec{F} = m\vec{a}} m\vec{a} = -k(x - x_R)\vec{\imath} \xrightarrow{\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{\imath}} m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(x - x_R)$$

Cambio di variabile: $X = x - x_R \rightarrow \quad \dfrac{d^2X}{dt^2} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$

$$\boldsymbol{\frac{d^2X}{dt^2} = -\frac{k}{m}X}$$

Equazione differenziale del secondo ordine che necessita di due condizioni al contorno per essere risolta

Forza elastica: moto armonico

In analogia a quanto visto per le equazione differenziali del secondo ordine, il problema ben posto da risolvere, e la relativa soluzione, sono:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2X}{dt^2} = -\dfrac{k}{m}X \\ \dfrac{dX}{dt}(t=0) = v_0 \\ X(t=0) = X_o \end{cases} \Rightarrow \quad X(t) = A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \varphi\right)$$

Funzione periodica

Frequenza di oscillazione (ω)

$$\varphi = \sin^{-1}\left(\frac{X_0}{\sqrt{\frac{m\,v_0^2}{k} + X_0^2}}\right)$$

$$A = \sqrt{\frac{m\,v_0^2}{k} + X_0^2}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{\tau} \rightarrow \quad \tau = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Periodo di oscillazione (τ) = tempo necessario a compiere un'oscillazione completa

Forza elastica: moto armonico

Esplicitando la soluzione in funzione della posizione (x) del corpo di massa m attaccato alla molla:

$$\boldsymbol{X(t) = x(t) - x_R \rightarrow \qquad x(t) = x_R + X(t)}$$

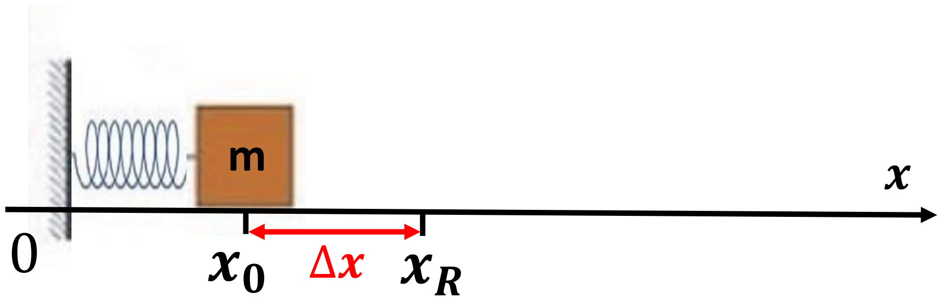
$$\boldsymbol{x(t) = x_R + A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \varphi\right)} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v(t) = A\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \varphi\right)}$$

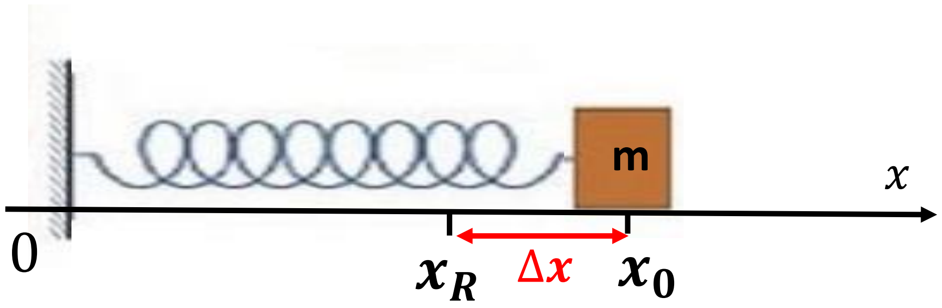
$$\boldsymbol{A = \sqrt{\frac{m\,v_0^2}{k} + (x_0 - x_R)^2}} \qquad \boldsymbol{\varphi = sin^{-1}\left(\frac{(x_0 - x_R)}{\sqrt{\frac{m\,v_0^2}{k} + (x_0 - x_R)^2}}\right)}$$

Caso particolare: molla

Supponiamo di disporre di un meccanismo a molla per cui si possa trascurare l'attrito che muove un ingranaggio di massa m. Supponiamo di caricare inizialmente la molla, ovvero di accorciare, o allungare, la molla fino a che la massa m raggiunge la lunghezza iniziale $x_0 = x_{R \mp} \Delta x$.

Teniamo fermo l'ingranaggio, nel nostro schema semplificato, la massa m nella posizione x_0.





$$\boldsymbol{x(t=0) = x_0 = x_R \mp \Delta x}$$

$$\boldsymbol{v(t=0) = v_0 = 0}$$

Non appena lasciamo libera di muoversi la massa m questa comincerà ad oscillare.

Caso particolare: molla

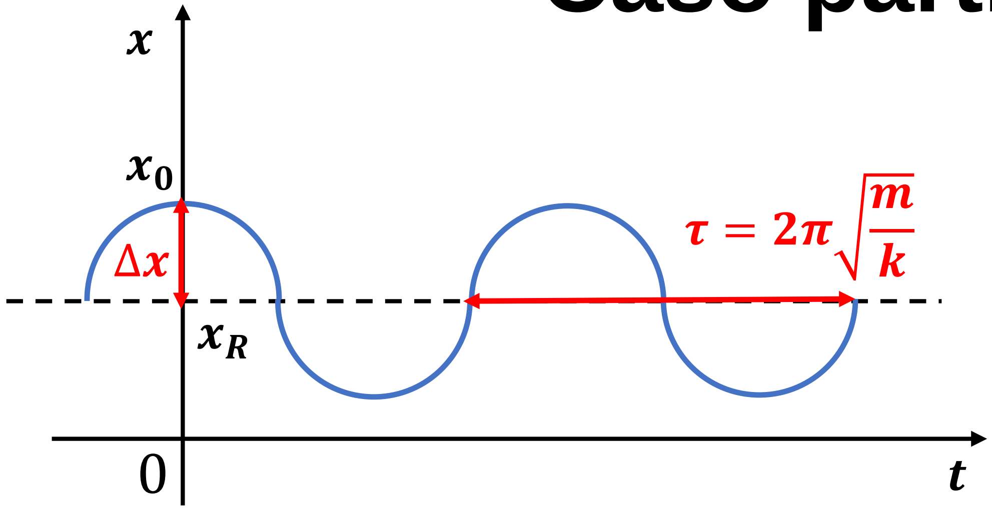
Sapendo che: $\boldsymbol{x(t=0) = x_0 = x_R \mp \Delta x}$ e $\boldsymbol{v(t=0) = v_0 = 0}$

$$\boldsymbol{A = \sqrt{\frac{m\,v_0^2}{k} + (x_0 - x_R)^2} = x_0 - x_R = \mp\Delta x}$$

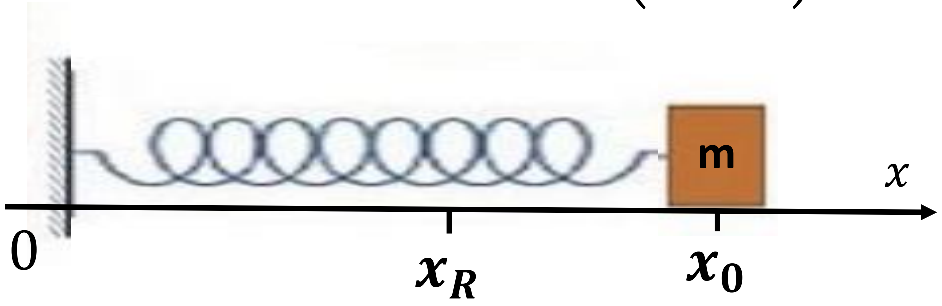
$$\boldsymbol{\varphi = sin^{-1}\left(\frac{(x_0 - x_R)}{\sqrt{\frac{m\,v_0^2}{k} + (x_0 - x_R)^2}}\right) = \frac{\pi}{2}}$$

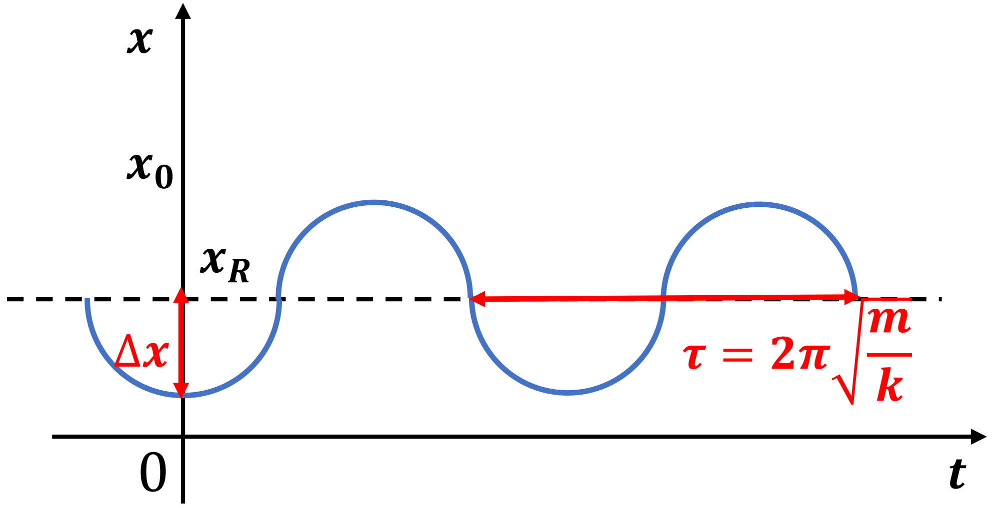
$$\boldsymbol{x(t) = x_R \mp \Delta x\,\mathbf{sin}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \frac{\pi}{2}\right) = x_R \mp \Delta x\, cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)}$$

Caso particolare: molla

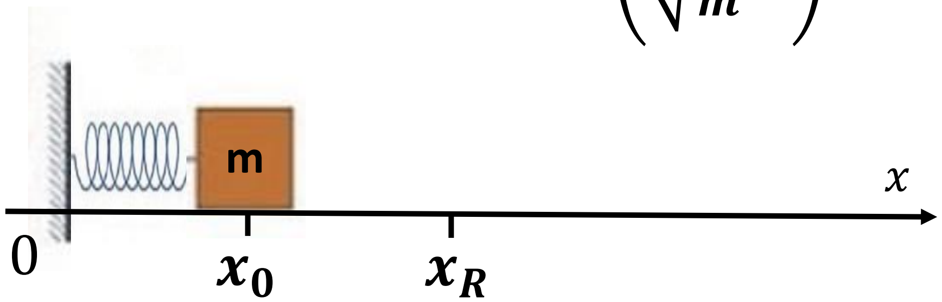


$$x(t) = x_R + \Delta x \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)$$



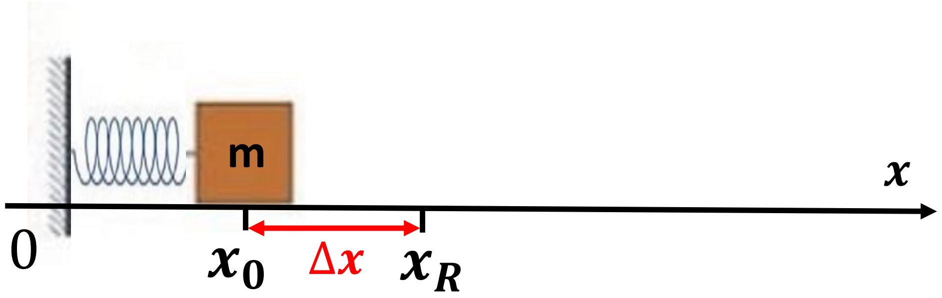


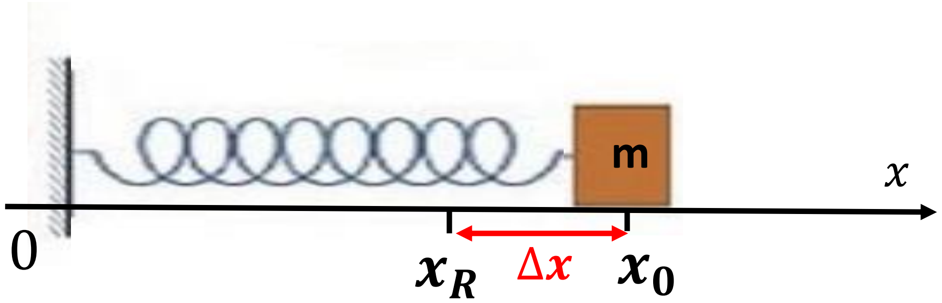
$$x(t) = x_R - \Delta x \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)$$



Caso particolare: molla

In entrambi i casi, sia che la molla venga caricata accorciandola od allungandola, la massa m attaccata alla molla oscillerà all'infinito tra le posizioni $x_R - x_0$ e $x_R + x_0$.





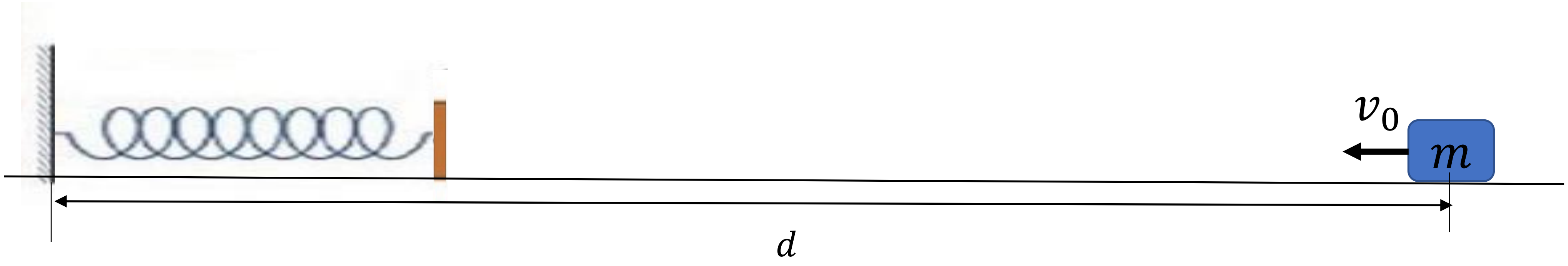
La frequenza di oscillazione della massa m è $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ed il periodo di oscillazione è $\tau = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

Frequenza e periodo di oscillazione non dipendono dall'ampiezza dell'accorciamento/allungamento iniziale Δx, ma dipendono solo dalla costante elastica k della molla e dalla massa m che la molla deve spostare

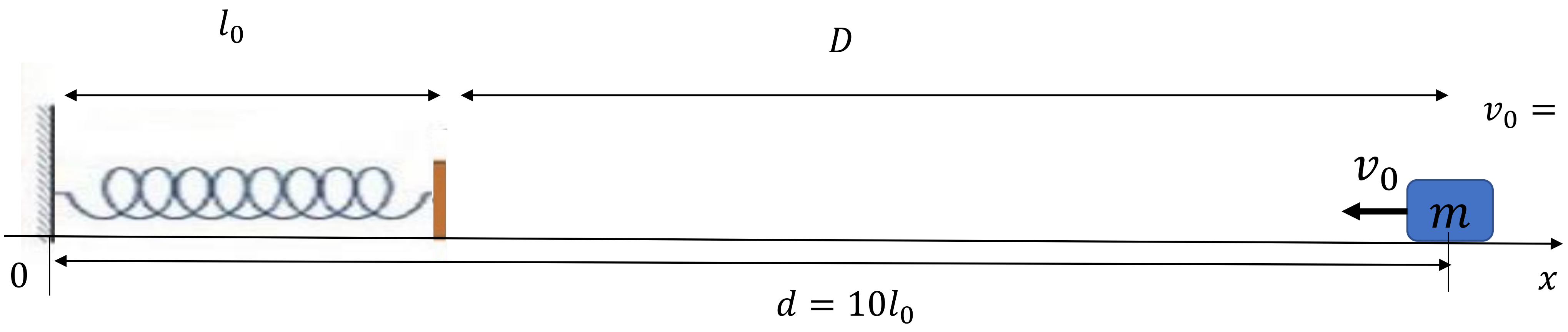
Anche in presenza di uno smorzamento dell'ampiezza di oscillazione dovuto all'attrito, il periodo dell'oscillazione della massa non cambia, per questa ragione i meccanismi a molla vengono utilizzati per realizzare orologi

Forza elastica: molla

Un corpo di massa m che considereremo puntiforme si muove su di un piano a velocità constante in modulo uguale a $v_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \frac{l_0}{3}$ verso una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo l_0 vincolata ad un estremo ad un muro e terminata nell'estremo opposto con supporto piano di massa trascurabile.
Considerando come istante iniziale quello in cui il corpo di massa m si trova alla distanza $d = 10l_0$ dal muro, considerando completamente trascurabili gli attriti e sapendo che il corpo non rimane attaccato alla molla, quanto tempo impiega il corpo a tornare alla distanza d dal muro? Quanto vale la distanza minima dal muro?



Forza elastica: molla



$$v_0 = \sqrt{\frac{k}{m}\frac{l_0}{3}}$$

Tratto D

$$\vec{F} = 0 \rightarrow \ \vec{a} = 0$$

$$a_x = 0 \rightarrow \quad v_x = cost. \rightarrow \quad v_x = -v_0 \qquad\qquad v_x = \frac{dx}{dt} = -v_0 \rightarrow \quad x = -v_0 t + x_0 = -v_0 t + d$$

$$l_0 = -v_0 t + d \rightarrow \quad t_D = \frac{d - l_0}{v_0} = \frac{10 l_0 - l_0}{v_0} = \frac{9 l_0 3}{l_0}\sqrt{\frac{m}{k}} = 27\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Forza elastica: molla

Tratto solidale con la molla

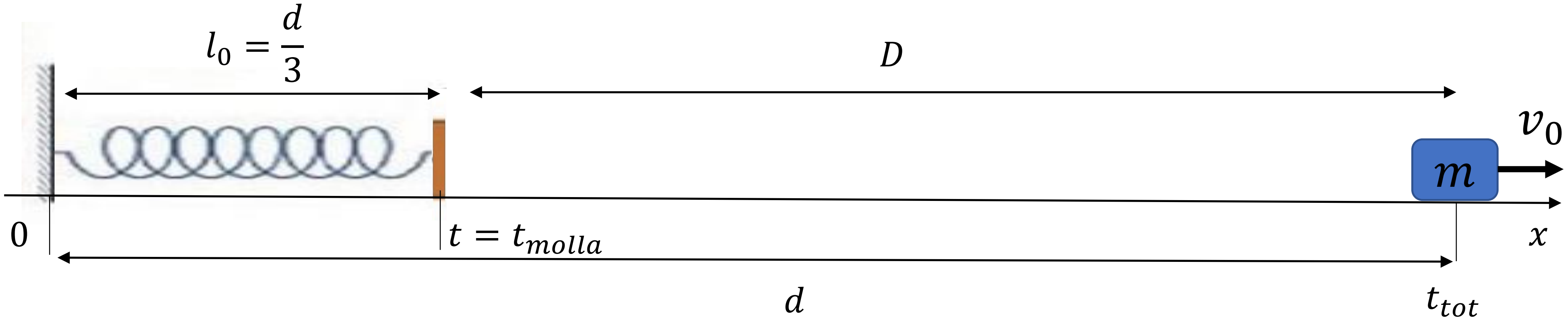
$$x' = x - l_0 \qquad v_{x'}(t=0) = v_x(t=0) = -v_0; \qquad x'(t=0) = 0$$

$$\vec{F} = -kx' \rightarrow \vec{a} = -\frac{k}{m}x' \rightarrow \frac{d^2x'}{dt^2} = -\frac{k}{m}x' \rightarrow \qquad x'(t) = A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi\right); \qquad v_{x'}(t) = A\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi\right)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau} = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow \quad \tau = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \rightarrow \quad t_{molla} = \frac{\tau}{2} = \pi\sqrt{\frac{m}{k}} \rightarrow \quad v_{x'}(t = t_{molla}) = A\sqrt{\frac{k}{m}}\cos(\pi + \varphi) = -v_{x'}(t=0) = v_0$$

Quando il corpo lascia la molla al tempo $t = t_{molla}$ si muove con velocità di modulo v_0 e verso concorde all'asse x

Forza elastica: molla



Tempo totale $\left(v_0 = \sqrt{\frac{k}{m}\frac{l_0}{3}}; \quad d = 10 l_0 \right)$

$$t_{tot} = t_D + t_{molla} + t_D = 27\sqrt{\frac{m}{k}} + \pi\sqrt{\frac{m}{k}} + 27\sqrt{\frac{m}{k}} = \sqrt{\frac{m}{k}}(54 + \pi)$$

Forza elastica: molla

Tratto solidale con la molla: calcolo velocità istantanea e legge oraria

$$x' = x - l_0 \qquad v_{x'}(t=0) = v_x(t=0) = -v_0; \qquad x'(t=0) = 0$$

$$\vec{F} = -kx' \to \vec{a} = -\frac{k}{m}x' \to \quad \frac{d^2x'}{dt^2} = -\frac{k}{m}x' \to \qquad x'(t) = A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi\right); \qquad v_{x'}(t) = A\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi\right)$$

$$x'(t=0) = A\sin(\varphi) = 0 \to \quad \varphi = 0$$

$$v_{x'}(t=0) = -v_0 \to \quad A\sqrt{\frac{k}{m}}\cos(\varphi) = -v_0 \to \quad A\sqrt{\frac{k}{m}} = -v_0 \to \quad A = -\sqrt{\frac{m}{k}}v_0$$

Forza elastica: molla

Tratto solidale con la molla : calcolo velocità istantanea e legge oraria

$$x'(t) = A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi\right); \quad v_{x'}(t) = A\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi\right)$$

$$x' = x - l_0$$

$$\varphi = 0$$

$$A = -\sqrt{\frac{m}{k}}v_0$$

$$\left(v_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\frac{l_0}{3}; \quad d = 10 l_0\right)$$

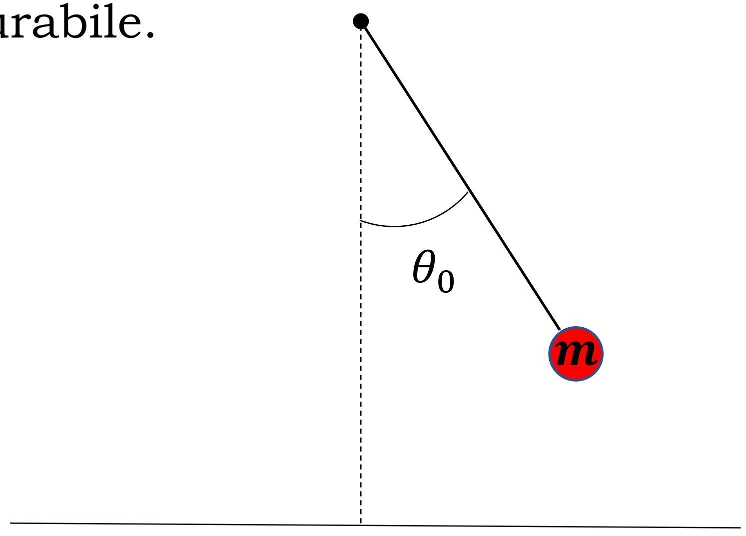
$$x(t) = l_0 - \sqrt{\frac{m}{k}}v_0 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

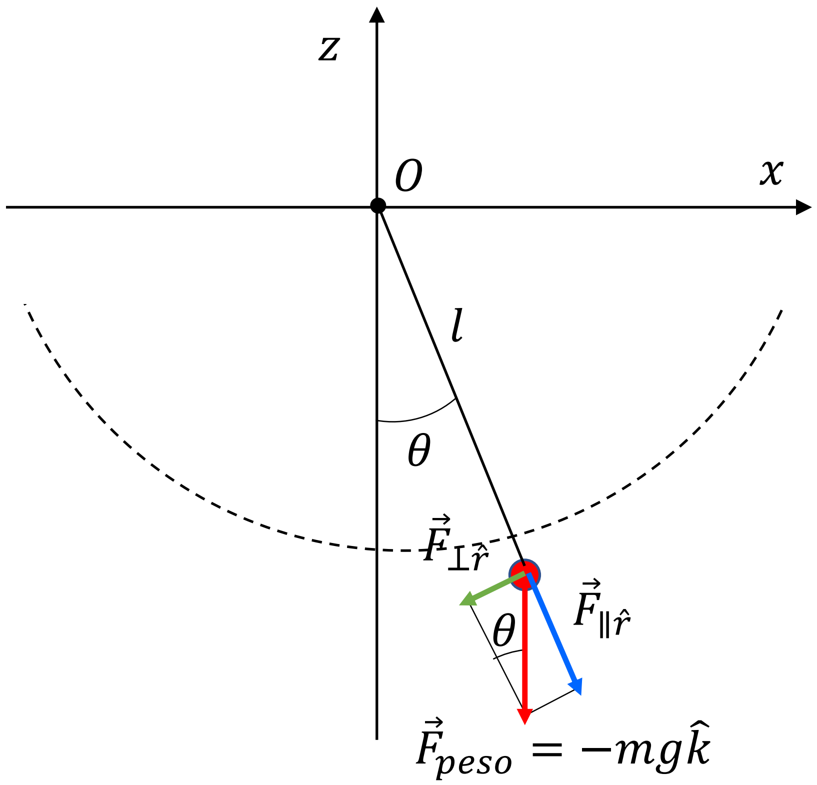
$$v_x(t) = -v_0\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

$$x_{min} = l_0 - \sqrt{\frac{m}{k}}v_0 = l_0 - \sqrt{\frac{m}{k}}\sqrt{\frac{k}{m}}\frac{l_0}{3} = \frac{2}{3}l_0$$

Forza elastica: pendolo

Un pendolo è formato da un disco di massa m attaccato ad un'asta di massa trascurabile fissata all'estremo opposto al punto P. Il disco viene posizionato ad un angolo θ_0 rispetto alla verticale e poi lasciato libero di muoversi con attrito trascurabile.

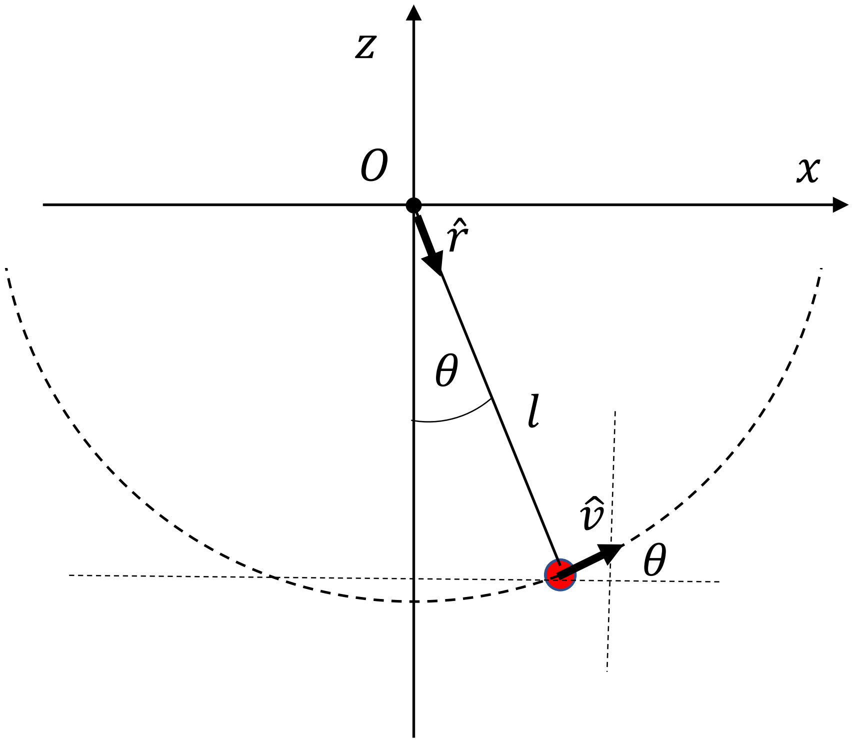




$$\vec{F}_{peso} = \vec{F}_{\perp\hat{r}} + \vec{F}_{\parallel\hat{r}}$$

Il disco di massa m è vincolato a muoversi lungo una circonferenza avete raggio pari alla lunghezza dell'asta l sotto l'azione della componente della forza peso tangente alla circonferenza

Forza elastica: pendolo



Sulla circonferenza di raggio l:

$$\vec{r} = l\sin\theta\,\hat{\imath} - l\cos\theta\,\hat{k} = (l\sin\theta\,, 0, -\cos\theta\, l) = l\,\hat{r}$$

$$\hat{r} = \sin\theta\,\hat{\imath} - \cos\theta\,\hat{k}$$

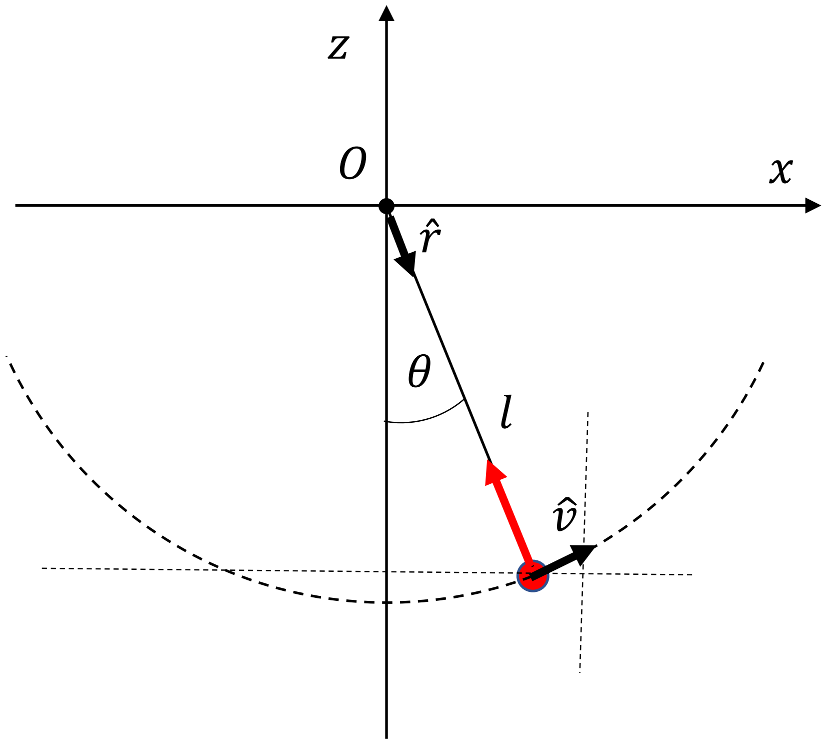
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = l\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\,\hat{\imath} + l\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\hat{k} = l\frac{d\theta}{dt}\hat{v}$$

$$\hat{v} = \cos\theta\ \hat{\imath} + \sin\theta\,\hat{k}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt} \rightarrow \qquad \vec{a} = -l\sin\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\hat{\imath} + l\cos\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}\,\hat{\imath} + l\cos\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\hat{k} + l\sin\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}\hat{k}$$

$$\vec{a} = -l\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\hat{r} + l\frac{d^2\theta}{dt^2}\ \hat{v}$$

Forza elastica: pendolo



$$\vec{a} = -l\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \hat{r} + l\frac{d^2\theta}{dt^2}\,\hat{v}$$

Accelerazione centripeta

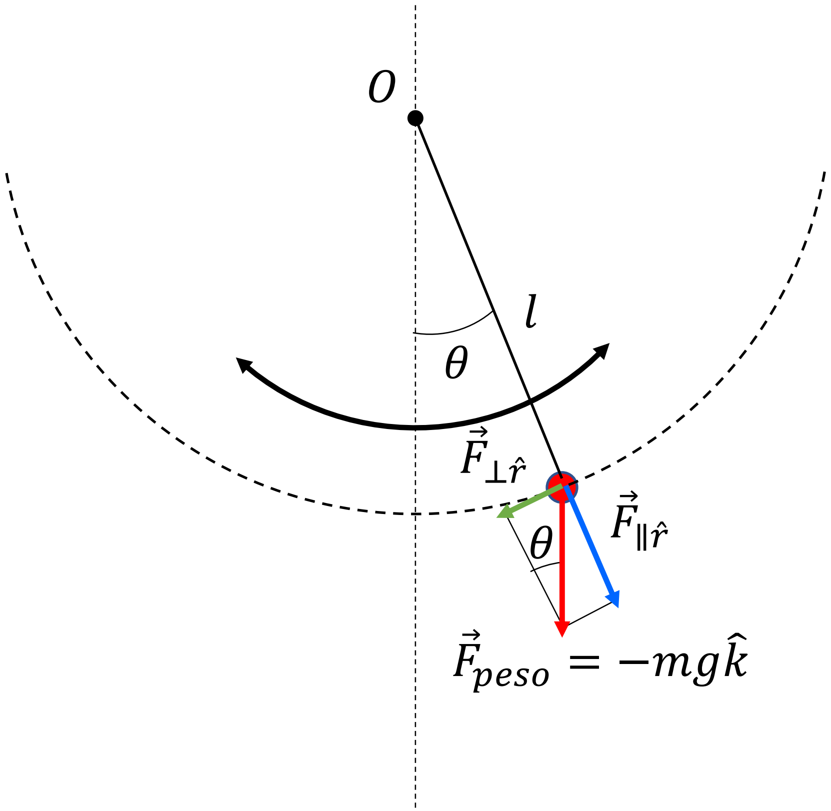
$$Se\ \vec{v} = l\frac{d\theta}{dt}\hat{v} = l\omega\,\hat{v} = cost. \rightarrow \quad \vec{a} = -l\omega^2\hat{r} = -\frac{v^2}{l}\vec{r}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{l}\frac{ds}{dt} = \frac{v}{l}$$

Per mantenersi lungo una traiettoria circolare di raggio l un corpo di massa m deve necessariamente accelerare anche se la sua velocità $v = l\omega$ è costante. L'accelerazione necessaria per mantenersi su di un'orbita circolare si chiama **ACCELERAZIONE CENTRIPETA** ed è diretta lungo il raggio congiungente il centro della circonferenza e la posizione istantanea del corpo di massa m, punta verso il centro della circonferenza

Forza elastica: pendolo

Le forze interne che mantengono l'asta fissata al punto P e mantengono la sua lunghezza pari ad l, provvedono a fornire al corpo di massa m la FORZA CENTRIPETA che lo costringe sulla circonferenza di raggio l e la forza necessaria ad annullare la componente della forza peso che tenderebbe ad allungare l'asta. Entrambe queste forze sono dirette come l'asta del pendolo ($\hat{r}$).



Nella direzione perpendicolare all'asta ($\hat{v}$) del pendolo il sistema è invece completamente libero di muoversi sotto l'azione della componente della forza peso diretta lungo $\hat{v}$ secondo l'equazione $\vec{F} = m\vec{a} \rightarrow \vec{F}_{\perp\vec{r}} = m\ \vec{a}_{\perp\vec{r}}$

$$\vec{a} = -l\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \hat{r} + l\frac{d^2\theta}{dt^2}\ \hat{v}$$

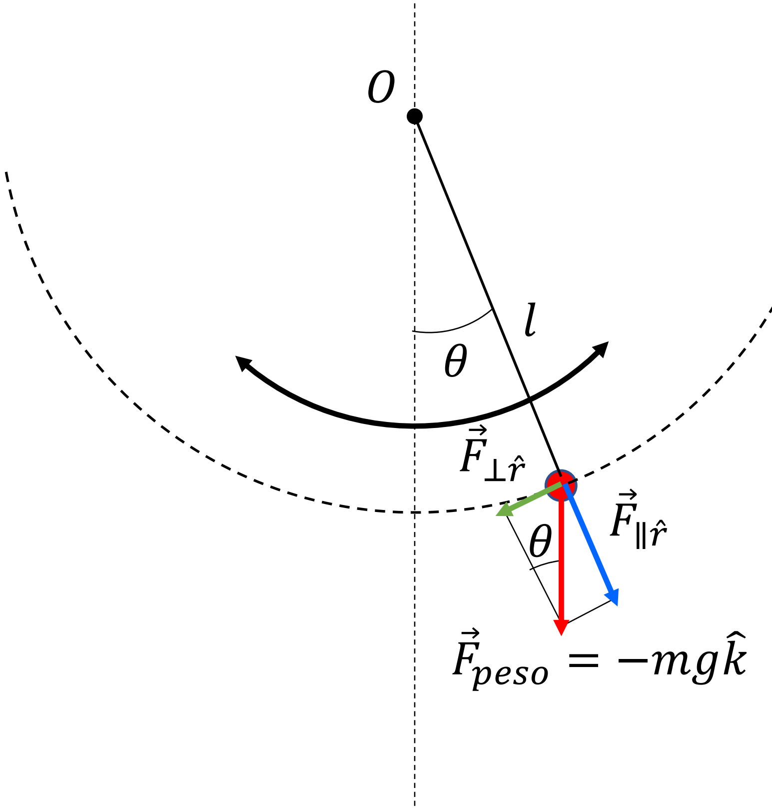
$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2}\ \hat{v} = -mg\sin\theta\,\hat{v}$$

$$\boldsymbol{l\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\sin\theta}$$

Forza elastica: pendolo

Supponiamo di lasciare libera la massa m a partire dall'angolo iniziale $\theta_0 \ll \frac{\pi}{2}$ $(\sin\theta_0 \ll 1)$così da mantenere il pendolo in un regime di piccole oscillazioni attorno alla posizione verticale $\theta = 0$:

$$\boldsymbol{l\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\sin\theta \cong -g\theta}$$



$$\begin{cases} \dfrac{d^2\theta}{dt^2} = -\dfrac{g}{l}\theta \\ \dfrac{d\theta}{dt}(t=0) = 0 \\ \theta(t=0) = \theta_0 \end{cases}$$

$$\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right)$$

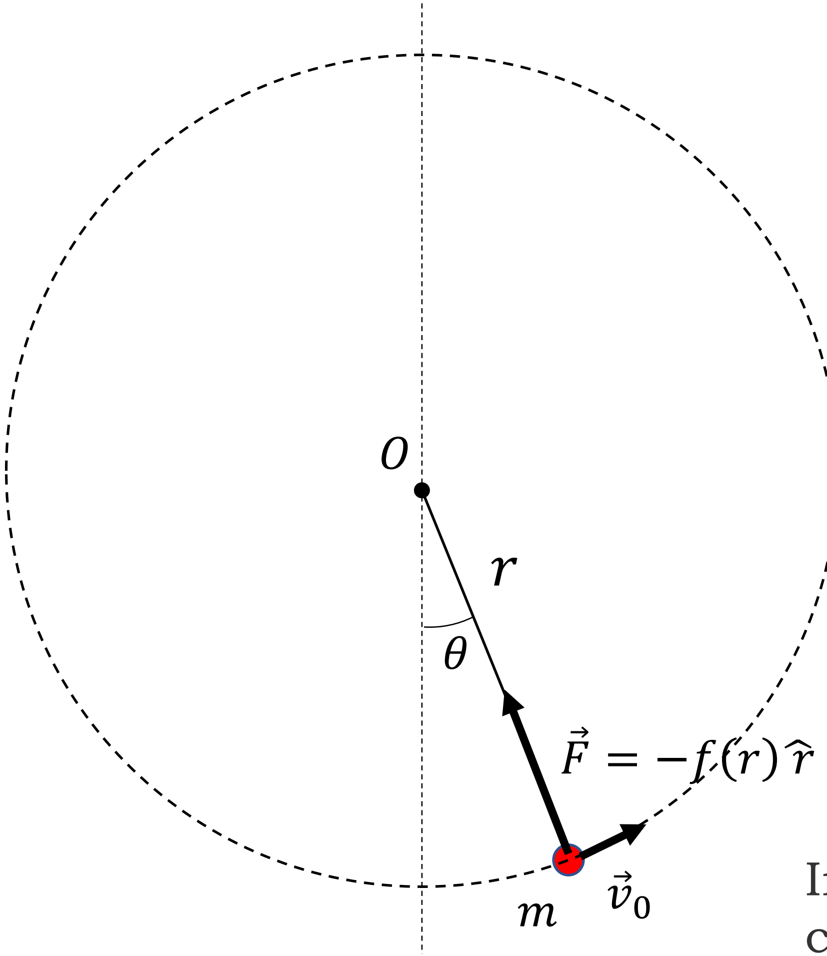
Frequenza di oscillazione del pendolo (ω)

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau} = \sqrt{\frac{g}{l}} \rightarrow \tau = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Periodo di oscillazione del pendolo (ω)

Forza centrale: moto circolare uniforme

Supponiamo che su di un corpo di massa m agisca una forza CENTRALE, ovvero una forza in ogni punto diretta verso un unico centro O e caratterizzata da simmetria sferica o circolare, e che il corpo possegga una velocità iniziale $\vec{v}_0$ in direzione perpendicolare alla forza:



$$\vec{F} = -f(r)\hat{r}$$

Abbiamo visto che un corpo che si muove a velocità costante v_0 lungo una traiettoria circolare possiede un'accelerazione centripeta:

$$\vec{a}_{centripeta} = -r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \hat{r} = -r\left(\frac{v_0}{r}\right)^2 \hat{r} = -\frac{v_0^2}{r}\,\hat{r}$$

A cui corrisponde la forza: $\vec{F}_{centripeta} = -m\frac{v_0^2}{r}\,\hat{r}$

Pertanto se risulta soddisfatta la condizione:

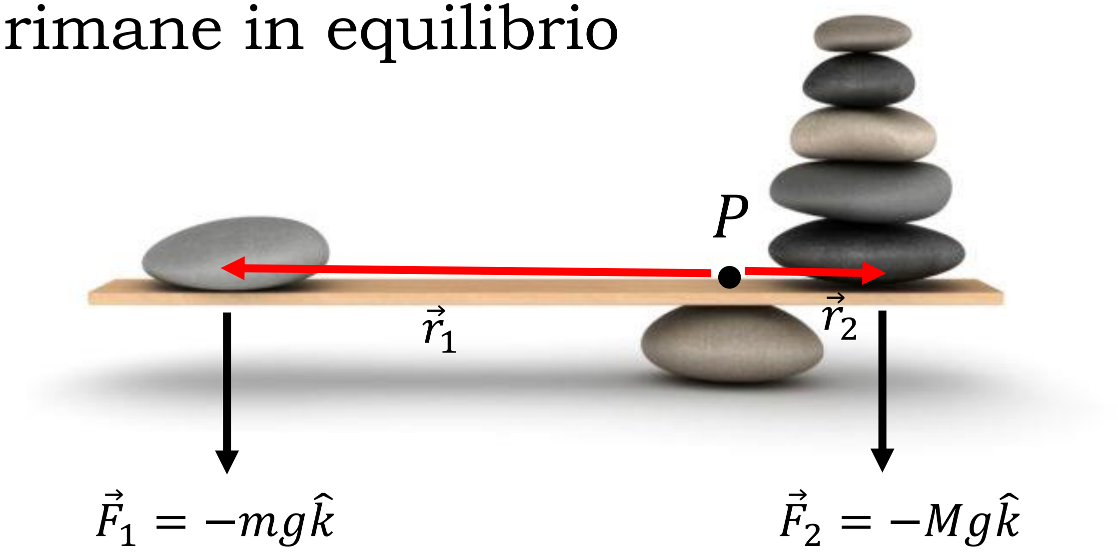
$$-m\frac{v_0^2}{\bar{r}}\,\hat{r} = -f(\bar{r})\hat{r} \rightarrow \qquad v_0 = \sqrt{\frac{\bar{r}f(\bar{r})}{m}}$$

In assenza di attrito il corpo continuerà a muoversi lungo una circonferenza di raggio $\bar{r}$ con velocità v_0 all'infinito

Corpo rigido: Momento della forza

$\vec{F}_1 \neq \vec{F}_2$ nonostante ciò l'asse rimane in equilibrio

Le forze interne che mantengono rigida l'asse fanno sì che le forze esterne si distribuiscano su di un CORPO RIGIDO esteso in modo diverso rispetto a quanto avviene per un corpo che si possa considerare come un punto materiale.

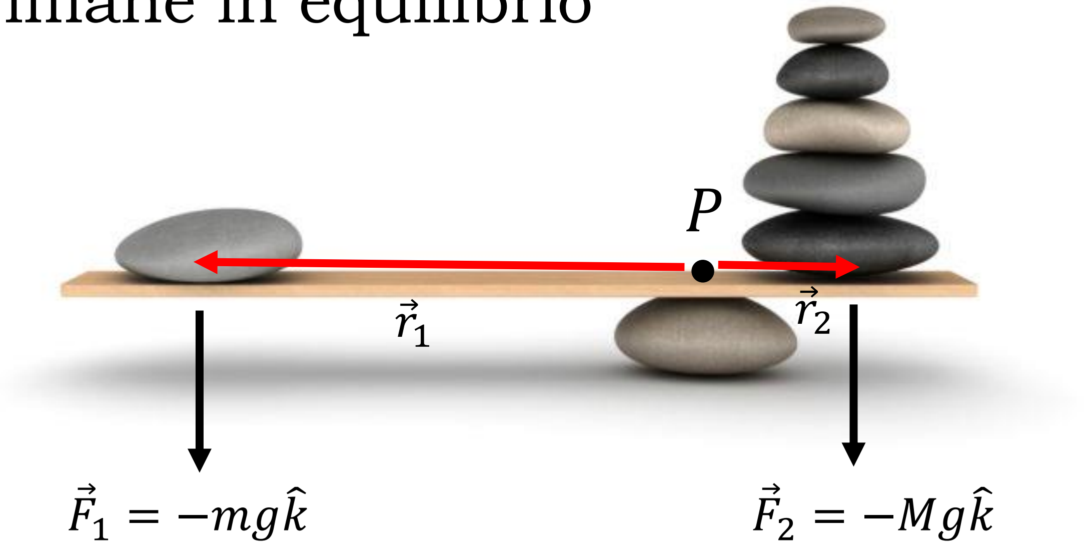


In particolare, rispetto ad un punto rispetto a cui il corpo rigido risulta vincolato (es. il punto P nel caso della figura) l'equilibrio ed il moto del corpo rigido risultano determinati dalla grandezza fisica denominata **MOMENTO DELLA FORZA** data dal prodotto vettoriale della distanza $\vec{r}$ del punto a cui è applicata la forza esterna $\vec{F}$ rispetto al punto in cui il corpo rigido è vincolato, per la forza stessa :

$$\vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 \qquad\qquad \vec{M}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$$

Corpo rigido: Momento della forza

$\vec{F}_1 \neq \vec{F}_2$ nonostante ciò l'asse rimane in equilibrio



In questo caso la condizione di equilibrio è data dal fatto che:

$$\vec{M}_{TOT} = 0 \rightarrow \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = 0$$

$$|\vec{M}_1| = |\vec{M}_2| \rightarrow \quad |\vec{r}_1 \times \vec{F}_1| = |\vec{r}_2 \times \vec{F}_2|$$

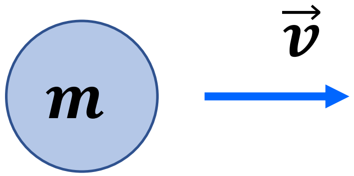
$$r_1 F_1 = r_2 F_2 \;\; se \; r_1 \gg r_2 \rightarrow F_1 \ll F_2$$

funzionamento della LEVA

Essendo differenti le distanze dal punto di vincolo P dei due punti in cui sono posizionate le pietre, per eguagliare i due momenti della forza anche le forze applicate devono essere differenti. In particolare nel punto più vicino a P occorre applicare una forza maggiore.

Dinamica del corpo rigido

Anche l'equazione fondamentale della dinamica $\vec{F} = m\vec{a}$ deve essere modificata nel caso di un corpo rigido vincolato in un punto in funzione dei momenti della forza

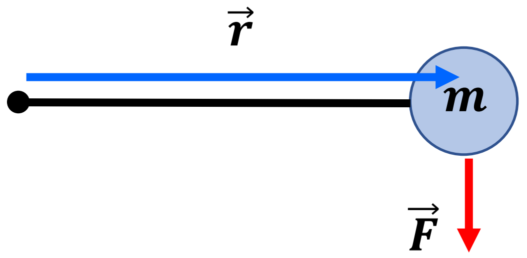


Per farlo, occorre riscrivere l'equazione fondamentale della dinamica in modo più generale introducendo una nuova grandezza fisica la **QUANTITA' DI MOTO** $\vec{p}$

$$\vec{p} = m\vec{v} \rightarrow \vec{F} = m\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt} \rightarrow \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Momento della forza e momento angolare

Per un corpo rigido vincolato in un punto abbiamo visto che:



$$\vec{F} \rightarrow \boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}} \rightarrow$$ **Momento della forza**

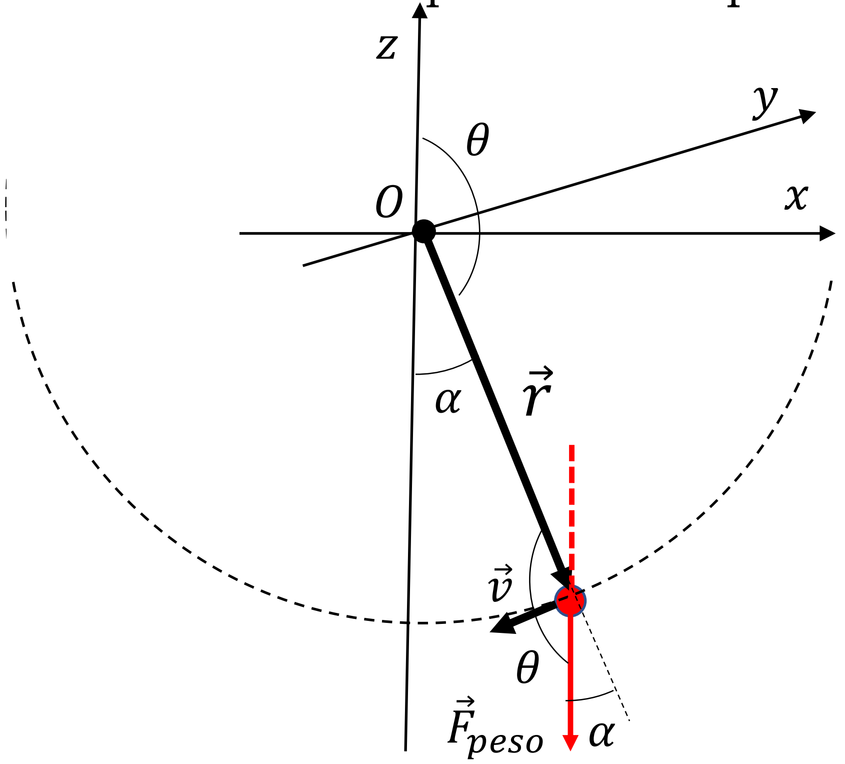
Analogamente: $$\vec{p} \rightarrow \boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}} \rightarrow$$ **Momento angolare**

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \rightarrow \quad \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Dinamica del corpo rigido

Verifichiamo ora la validità di questa equazione generale in un caso particolare che abbiamo già visto: il pendolo formato da un corpo di massa m attaccato ad un'asta di massa trascurabile vincolata ad un punto O che può muoversi nel piano (x, z)



$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_{peso} = rmg \sin\theta\, \hat{j}$$

Momento di inerzia I

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\,\vec{r} \times \vec{v} = mr^2 \frac{d\theta}{dt} \hat{r} \times \hat{v} = mr^2 \frac{d\theta}{dt} \hat{j} \Rightarrow \boldsymbol{L = I \frac{d\theta}{dt}}$$

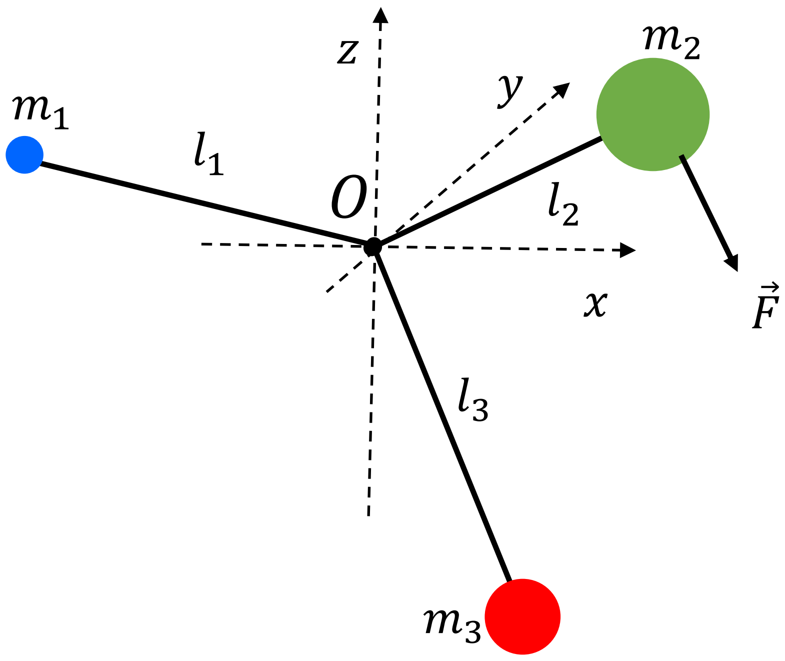
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = mr^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} \hat{j} = I \frac{d^2\theta}{dt^2} \hat{j} \Rightarrow \boldsymbol{\frac{dL}{dt} = I \frac{d^2\theta}{dt^2}}$$

$$\boldsymbol{\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}} \quad \rightarrow \; mrg \sin\theta\, \hat{j} = mr^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} \hat{j}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{g}{r} \sin\theta \rightarrow \frac{d^2(\pi - \alpha)}{dt^2} = \frac{g}{r} \sin(\pi - \alpha) \rightarrow -\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{g}{r} \sin(\alpha) \rightarrow \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{g}{r} \alpha \quad con\ \sin\alpha \ll 1$$

Dinamica del corpo rigido

Un sistema inizialmente fermo è costituito da tre masse $m_1, m_2 = 9m_1, m_3 = 4m_1$ fissate alle estremità di tre aste rigide vincolate allo stesso punto O. La lunghezza delle tre aste è rispettivamente uguale a $l_1, l_2 = \frac{2}{3}l_1, l_3 = \frac{3}{2}l_1$. Il sistema è libero di ruotare senza attrito attorno al punto O nel piano su cui giacciono le tre aste. All'istante $t = 0$ viene applicata alla massa m_2 una forza $\vec{F}$ costante in direzione sempre perpendicolare all'asta l_2. A che velocità angolare $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ si muove il sistema?



$$\vec{M}_{tot} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 = l_2 F\hat{j} = \frac{2}{3}l_1 F\hat{j}$$

$$\vec{L}_{tot} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3 = (l_1 m_1 v_1 + l_2 m_2 v_2 + l_3 m_3 v_3)\hat{j}$$

$$v_1 = l_1 \frac{d\theta}{dt} \qquad v_2 = l_2 \frac{d\theta}{dt} \qquad v_3 = l_3 \frac{d\theta}{dt}$$

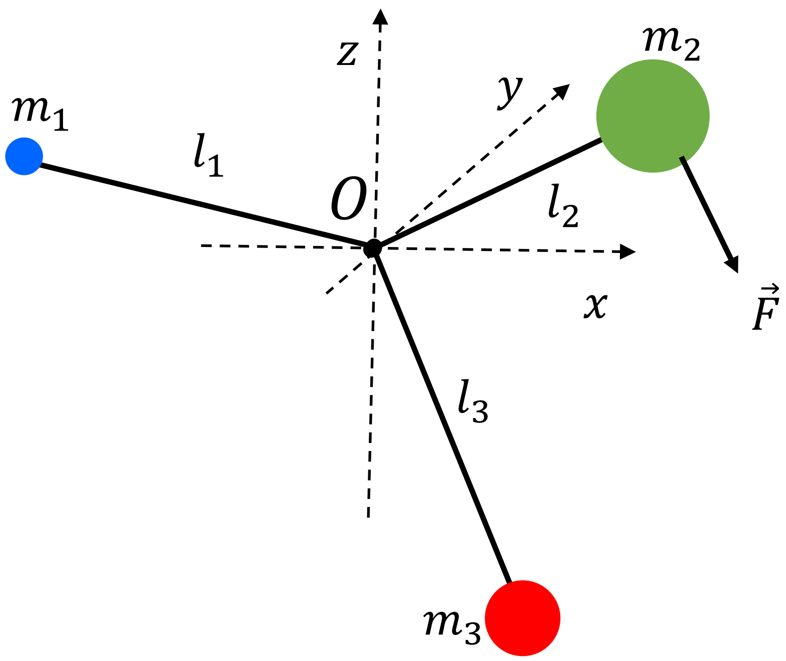
$$\vec{L}_{tot} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3 = (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + m_3 l_3^2)\frac{d\theta}{dt}\hat{j}$$

$$\vec{L}_{tot} = (m_1 l_1^2 + 4m_1 l_1^2 + 9m_1 l_1^2)\frac{d\theta}{dt}\hat{j} = 14 m_1 l_1^2 \frac{d\theta}{dt}\hat{j}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \rightarrow \quad 14 m_1 l_1^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{2}{3} l_1 F \rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{F}{21 l_1 m_1} \rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{F}{21 l_1 m_1} t + \omega_0 = \frac{F}{21 l_1 m_1} t$$

Dinamica del corpo rigido

Un sistema inizialmente fermo è costituito da tre masse $m_1, m_2 = 9m_1, m_3 = 4m_1$ fissate alle estremità di tre aste rigide vincolate allo stesso punto O. La lunghezza delle tre aste è rispettivamente uguale a $l_1, l_2 = \frac{2}{3}l_1, l_3 = \frac{3}{2}l_1$. Il sistema è libero di ruotare senza attrito attorno al punto O nel piano su cui giacciono le tre aste. All'istante $t = 0$ viene applicata alla massa m_2 una forza $\vec{F}$ costante in direzione sempre perpendicolare all'asta l_2. A che velocità angolare $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ si muove il sistema?



$$\vec{M}_{tot} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 = l_2 F \hat{j} = \frac{2}{3} l_1 F \hat{j}$$

$$M_{tot} = \frac{2}{3} l_1 F$$

$$I_{tot} = I_1 + I_2 + I_3 = m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + m_3 l_3^2 = 14 m_1 l_1^2$$

$$M_{tot} = I_{tot} \frac{d^2\theta}{dt^2} \rightarrow \frac{2}{3} l_1 F = 14 m_1 l_1^2 \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{F}{21 l_1 m_1} \rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{F}{21 l_1 m_1} t + \omega_0 = \frac{F}{21 l_1 m_1} t$$