Il principio di induzione

(M. Manfredini)

Sia $P(n)$ una frase aperta che dipende da $n \in \mathbb{N}$.

Problema: dim che è vera $\forall n \in \mathbb{N}$

(o che $\exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n}$ è vera)

<u>Teorema</u> Supp. che

1) $P(0)$ sia vera

2) $\forall n \in \mathbb{N}$ è vero che $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Allora $P(n)$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$.

<u>OSS</u> le ip. 1) e 2) possono essere indebolite nel seg. modo

$\exists \bar{n} \in \mathbb{N}$: 1) $P(\bar{n})$ è vera

2) $\forall n \geq \bar{n}$ è vero che $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

allora $P(n)$ è vera $\forall n \geq \bar{n}$.

(ES) $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ $P(n)$

1) $P(0)$ è vera $(0=0)$

2) Supp. $P(n)$ e dim $P(n+1)$ cioè $\sum_{i=0}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Scriviamo $\sum_{i=0}^{n+1} i = \sum_{i=0}^{n} i + (n+1) \underset{P(n)}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) =$

$= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ cioè $P(n+1)$

$\underset{\text{principio induz}}{\Longrightarrow}$ $P(n)$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$

es) $$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

1) $P(0)$ vero

2) Supp vero $P(n)$ e dim $P(n+1)$ cioè $\sum_{i=0}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

Consid.

$$\sum_{i=0}^{n+1} i^2 = \sum_{i=0}^{n} i^2 + (n+1)^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{per } P(n)}}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6n + 6]}{6} =$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \text{ cioè } P(n+1)$$

Allora per il princ di indut $P(n)$ è vero $\forall n \in \mathbb{N}$

es) Disug di Bernoulli

$P(n)$ $\quad (1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall x > -1$

1) $P(0)$ $(1 = 1)$ è vero

2) Supp $P(n)$ e dim $P(n+1)$, cioè dim $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$ $\forall x > -1$

Consid.

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n (1+x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{per } P(n) \text{ e poiché} \\ 1+x > 0}}{\geq} (1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x + nx^2 \geq$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{poiché} \\ nx^2 \geq 0}}{\geq} 1+(1+n)x \quad \text{cioè } P(n+1)$$

$\Rightarrow$ $P(n)$ è vero $\forall n \in \mathbb{N}$

x princ di indut.

5) $n^2 > 2n+1$ $\quad P(n)$

oss. che per $n=0,1,2$ è falsa, e per $n=3$ è vera

1) $P(3)$ vera

2) $\forall n \geq 3$ supp $P(n)$ e dim $P(n+1)$, cioè $(n+1)^2 \geq 2n+3$

Consid

$$(n+1)^2 = n^2+2n+1 \underset{\uparrow \atop P(n)}{\geq} 2n+1+2n+1 = 4n+2 \underset{\uparrow \atop \forall n}{\geq} 2n+3$$

$\Downarrow$ pr. di indut.

$P(n)$ è vera $\forall n \geq 3$.

<u>oss</u> si poteva provare dirett. che $n^2-2n-1>0$ per $n \geq 3$.

6) $2^n > n$ $\quad P(n)$

oss. che $P(0)$ è falsa e che $P(1)$ è vera

1) $P(1)$ vera

2) $\forall n > 1$ supp, $P(n)$ e dim $P(n+1)$ cioè $2^{n+1} > n+1$

Consid

$$2^{n+1} = 2^n \cdot 2 \underset{\uparrow \atop P(n)}{>} 2n = n+n > n+1.$$

$\Rightarrow$ $P(n)$ è vera $\forall n \geq 1$

princ di
indut

(5) $2^n > n^2$

oss che $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ e $P(4)$ sono false

1) $P(5)$ è vero

2) supp. $P(n)$ e proviamo $P(n+1)$ cioè $2^{n+1} > (n+1)^2 = \underbrace{n^2+2n+1}$
$\forall n \geq 6$

$$2^{n+1} = 2^n \cdot 2 \overset{P(n)}{>} 2n^2$$

oss. che $2n^2 > \underbrace{n^2+2n+1} \iff n^2-2n-1 > 0$

e $n^2-2n-1>0$ per $n \geq 6$

$> n^2+2n+1 = (n+1)^2$ cioè $P(n+1)$

$\Rightarrow$ $2^n > n^2$ $\forall n \geq 5$
pr di ind.

(5) $\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ $\forall q \in \mathbb{R}$ $q \neq 1$ $P(n)$

1) $P(0)$ è vero 2) supp $P(n)$ e dim $P(n+1)$

$$\sum_{i=1}^{n+1} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$$

$\Rightarrow$ $P(n)$ è vero $\forall n$
pr c. di induz.

(5) $n! \geq 2^{n-1}$ $P(n)$ $P(0)$ è falsa

1) $P(1)$ vero

2) Supp $P(n)$ $\Rightarrow$ $(n+1)! = (n+1)n! \overset{P(n)}{\geq} (n+1)2^{n-1} \overset{(n+1)\geq 2}{\geq}$
$\geq 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$ cioè $P(n+1)$

$\Rightarrow$ $P(n)$ è vero $\forall n \geq 1$.