Corso di Analisi Matematica I
prof.ssa Maria Manfredini

SUCCESSIONI DI NUMERI REALI: prima parte

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false. Motivare la risposta nel caso sia vera altrimenti fornire un controesempio. Siano $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ successioni di numeri reali.

a) Se $(a_n)_n$ ha limite $l \in \bar{\mathbb{R}}$ allora è limitata.

b) Se $(a_n)_n$ è limitata allora è convergente.

c) Se $(a_n)_n$ è convergente allora è limitata.

d) Se $(a_n)_n$ è monotona crescente allora ha limite reale.

e) Se $(a_n)_n$ è monotona crescente allora $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$

f) Se $a_n \geq 0$ per ogni n allora $\lim_{n\to+\infty} a_n \geq 0$.

g) Se $a_n \to 0$ e $b_n \geq 0$ per ogni n allora $\lim_{n\to+\infty} a_n b_n = 0$.

h) Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ e $(b_n)_n$ è limitata allora $\lim_{n\to+\infty} a_n b_n = 0$.

i) Se $a_n \sim b_n$ per $n \to +\infty$ allora $\lim_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = 0$.

m) Se $c_n, d_n \neq 0$ e $a_n \sim b_n$, $c_n \sim d_n$ per $n \to +\infty$. Se $\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{c_n}$ allora $\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{d_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{c_n}$.

n) Se $a_n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$ per $n \to +\infty$ allora $a_n^2 = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ per $n \to +\infty$.

o) Se $a_n < \frac{1}{n+1}$ per ogni n allora $a_n \to 0$ se $n \to +\infty$.

p) Se $a_n < \frac{1}{n+1}$ per ogni n allora $(a_n)_n$ è limitata.

q) Se $0 \leq a_n < \frac{1}{n+1}$ allora $a_n \to 0$ per $n \to +\infty$.

r) Se $a_n \to 0$ per $n \to +\infty$ allora $\frac{1}{a_n}$ ha limite.

s) Se $a_n \to 0$ per $n \to +\infty$ allora $\frac{1}{a_n}$ non ha limite.

t) Se $a_n \to 0$ per $n \to +\infty$ e $a_n \neq 0$ allora $\frac{1}{a_n}$ non è limitata.

Soluzioni: a) f ; b) f, c) v; d) f; e) f; f) f; g) f; h) v; i) f; m) v; n) v; o) f; p) f; q) v; r) f; s) f;

t) Vera. Infatti, per ip $\forall \epsilon > 0$ esiste $\bar{n}$: $|a_n| \leq \epsilon$ per ogni $n \geq \bar{n}$. La tesi é $\forall M > 0$ esiste $\bar{n}$ $|1/a_{\bar{n}}| \geq M$ (cioé $|a_{\bar{n}}| \leq \frac{1}{M}$). Allora scegliendo $\epsilon = \frac{1}{M}$ segue la tesi.
Altro modo: poiché $|1/a_n| = 1/|a_n|$ e $|a_n| > 0$, allora esiste il limite di $|1/a_n|$ ed é $+\infty$ quindi la successione $\frac{1}{a_n}$ non é limitata.

Sulla definizione di limite.

∘ Scrivere la definizione dei seguenti limiti

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 4, \qquad \lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty, \qquad \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty.$$

Quale definizione corrisponde a $\lim_{n\to+\infty} a_n = -2$?
1) $\forall\epsilon > 0\ \exists\bar{n} \in N$ tale che $\forall n \geq \bar{n}$ si ha $|a_n - 2| \leq \epsilon$;
2) $\exists\epsilon > 0\ \forall\bar{n} \in N$ tale che $\forall n \geq \bar{n}$ si ha $|a_n - 2| \leq \epsilon$;
3) $\forall\epsilon > 0\ \exists\bar{n} \in N$ tale che $\forall n \geq \bar{n}$ si ha $|a_n + 2| \leq \epsilon$;
4) $\exists\epsilon > 0\ \exists\bar{n} \in N$ tale che $\forall n \geq \bar{n}$ si ha $|a_n + 2| \leq \epsilon$;

$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ equivale a:
1) $\forall M \in \mathbb{R}\ \forall\bar{n} \in N$ tale che $\forall n \geq \bar{n}$ si ha $a_n \leq M$;
2) $\exists M \in \mathbb{R}\ \exists\bar{n} \in N$ tali che $\forall n \geq \bar{n}$ si ha $a_n \leq M$;
3) $\forall M \in \mathbb{R}\ \exists\bar{n} \in N$ tale che $\forall n \geq \bar{n}$ si ha $a_n \leq M$;
4) $\exists M \in \mathbb{R}\ \exists\bar{n} \in N$ tali che $\forall n \geq \bar{n}$ si ha $a_n \leq M$;

Dimostrare, verificando la definizione di limite, che:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+1} = +\infty; \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{n^2-1} = 1;$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{4n}{n+1}} = 2; \qquad \lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2-1} - 2n\right) = -\infty.$$