Energia

Definizione intuitiva

Principio di conservazione dell'energia

Tipi di energia: Lavoro

Energia cinetica-teorema dell'energia cinetica

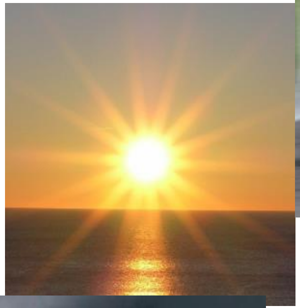
Energia potenziale- lavoro delle forze conservative

Energia meccanica- conservazione dell'energia meccanica

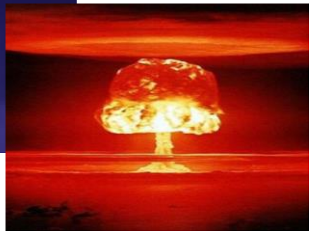
Energia: definizione intuitiva

Energia elettrica
Energia meccanica
Energia termica
Energia nucleare
Energia chimica
.....
......
......
....








In ambito quotidiano ci riferiamo all'energia come ad una condizione necessaria per svolgere una qualunque attività biologica, meccanica, computazionale. In ambito scientifico parliamo di energia in molteplici contesti e molteplici sono le grandezza fisiche che utilizziamo per quantificarla (Q, mc^2, qV, ecc.), ad oggi non tutte le forme di energia dell'Universo sono state identificate (energia oscura).

Principio di conservazione dell'Energia

Indipendentemente dal tipo di energia in gioco, ciò che la contraddistingue è il fatto che globalmente il suo valore totale si conserva nel tempo, indipendentemente dai processi che possono avvenire nel frattempo e che nel loro svolgimento possono implicare assorbimento e generazione di energia.

In un sistema isolato la quantità totale di energia si conserva

Un sistema isolato è un sistema che non ha alcuno scambio con l'esterno (massa, lavoro, calore …)

Il Principio di conservazione dell'energia tiene conto della somma di **TUTTE** le forme di energia presenti nel sistema isolato

Il sistema isolato per eccellenza è l'Universo

Possiamo identificare anche porzioni di Universo che si comportano con buona approssimazione come sistemi fisici isolati, ovvero che non scambiano energia, massa o calore con l'esterno, o per cui lo scambio di energia che avviene con l'esterno può essere considerato trascurabile (es. un contenitore ermetico ed adiabatico, una porzione di spazio contenente oggetti tra cui agiscono forze meccaniche che non dissipano calore, ecc…)

Principio di conservazione dell'Energia

In un sistema isolato la quantità totale di energia si conserva

Il sistema isolato per eccellenza è l'Universo

Nell'Universo avvengono continuamente processi che assorbono energia, nella vita di tutti i giorni assorbiamo energia dalla rete elettrica per fare funzionare i dispositivi elettronici, assorbiamo energia termica per fare funzionare macchine e processi industriali, assorbiamo energia chimica per muoverci e pensare ….. dunque cosa significa il Principio di conservazione dell'energia?

L'energia si trasforma da una sua particolare forma ad un'altra

L'energia chimica immagazzinata all'interno della benzina si trasforma in energia termica che, a sua volta, si trasforma in energia meccanica quando mette in moto i pistoni di un motore, l'energia meccanica correlata al movimento del pistone a sua volta si trasforma e così via …..

Particolari tipi di energia:

Il Lavoro

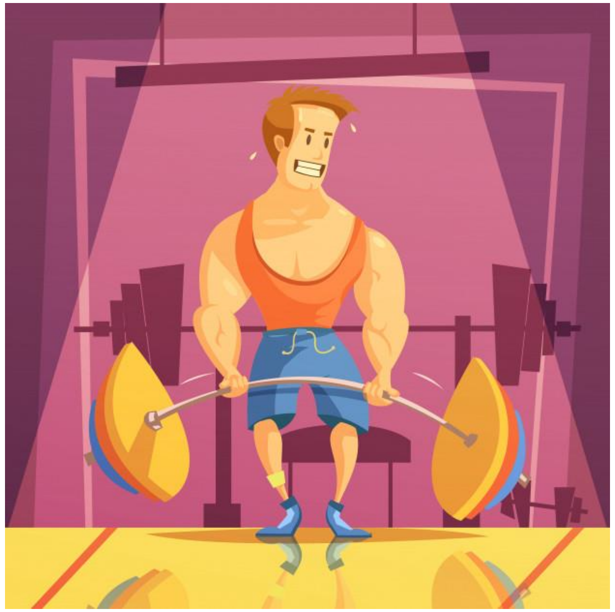
Forza e lavoro (L)

Intuitivamente sappiamo che per spostare un corpo è necessario applicare una forza …..

In fisica una forza che produce lo spostamento di un corpo compie un LAVORO

Energia e lavoro (L)

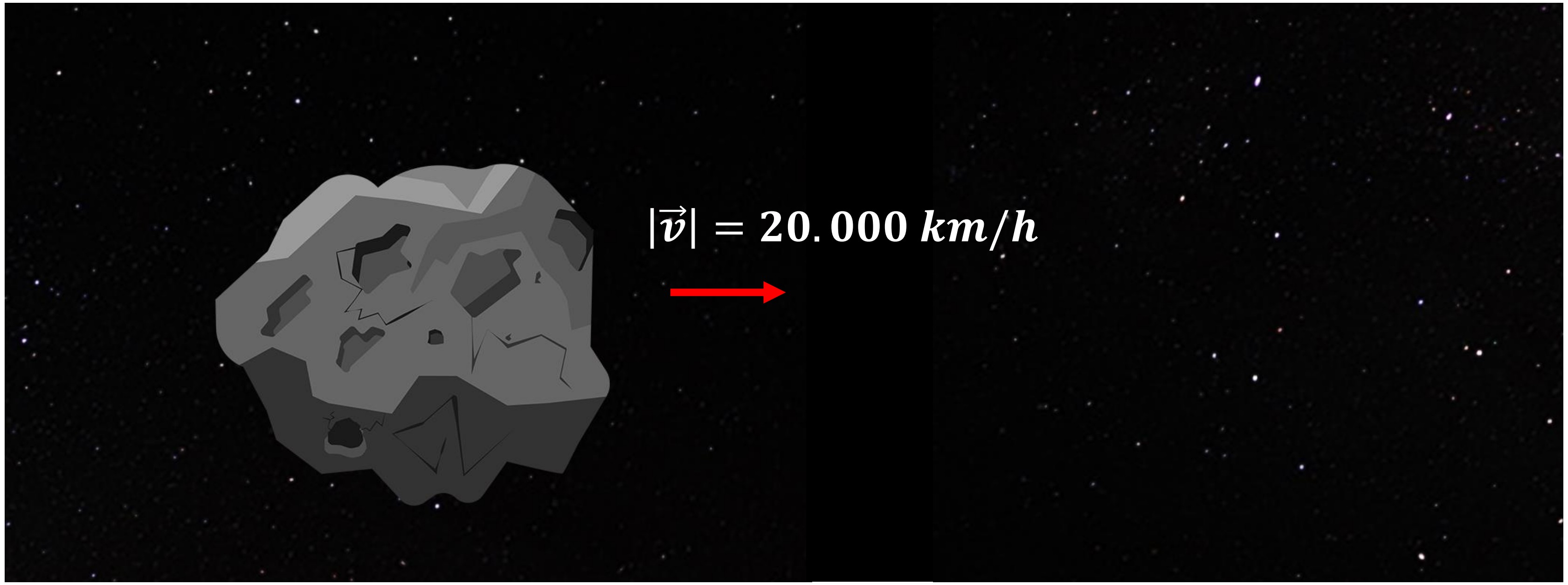
….. e che l'applicazione di una forza comporta un dispendio energetico



In fisica il LAVORO è una forma di ENERGIA

Spostamento ed energia

In realtà non sempre è necessario applicare una forza ad un corpo per spostarlo, né tantomeno spendere energia per farlo. Supponiamo per esempio di essere nello spazio su di un asteroide che viaggia alla velocità costante di 20.000 km/h



$|\vec{v}| = \mathbf{20.000}\ \boldsymbol{km/h}$

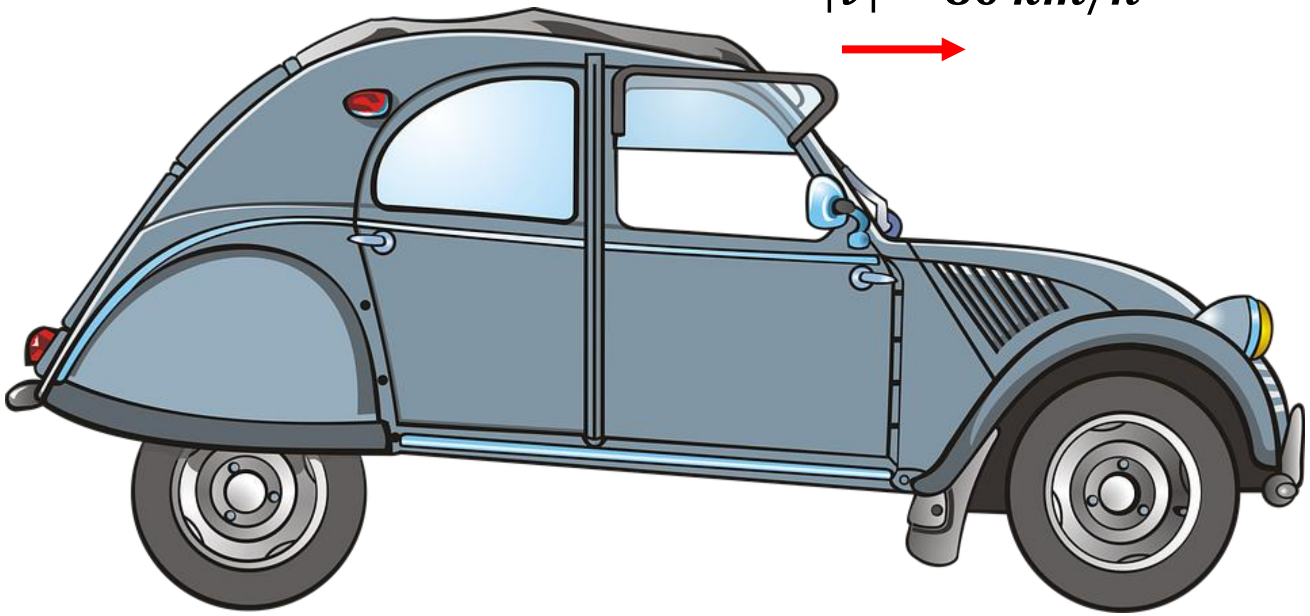
L'asteroide si muove a velocità costante, per il secondo Principio della dinamica $\vec{F} = m\vec{a}$ questo significa che la forza totale agente su di esso è nulla .....

$$\vec{v} = cost. \rightarrow \vec{a} = 0 \rightarrow \vec{F}_{tot} = 0$$

Spostamento ed energia

Supponiamo ora di essere in viaggio per le vacanze e di procedere in autostrada alla velocità costante di crociera di 80 km/h

$|\vec{v}| = \mathbf{80}\ \boldsymbol{km/h}$

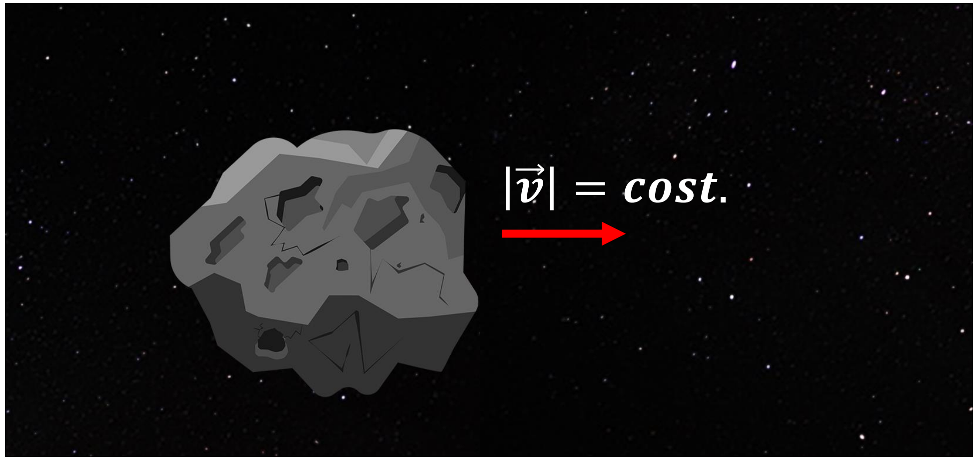


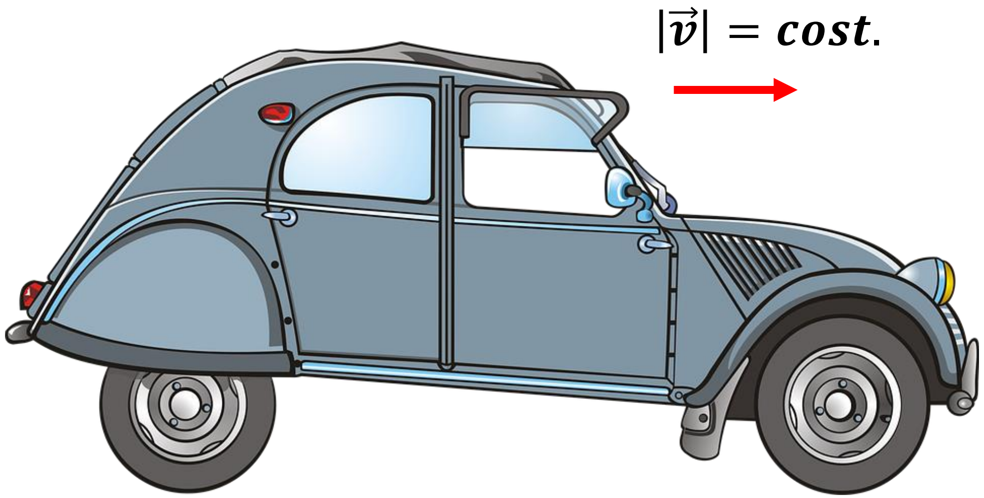
Anche in questo caso l'auto si muove a velocità costante, questo significa che la forza totale agente sull'auto è nulla .....

$$\vec{v} = cost. \rightarrow \vec{a} = 0 \rightarrow \vec{F}_{tot} = 0$$

Spostamento ed energia

In entrambe le situazioni riportate sotto la forza totale applicata all'oggetto massivo considerato è nulla ed entrambi i corpi si muovono di conseguenza a velocità costante..... dal punto di vista dinamico i due sistemi sono equivalenti dunque possiamo considerare le due situazioni uguali tra loro?

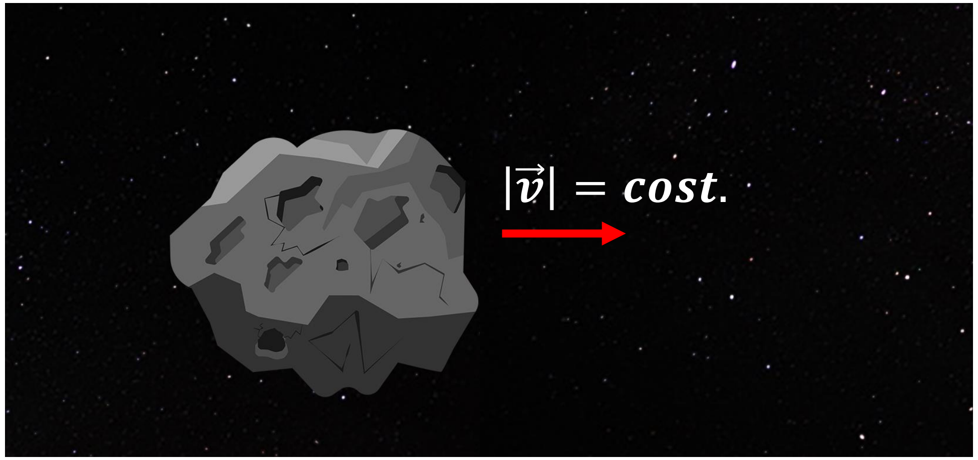


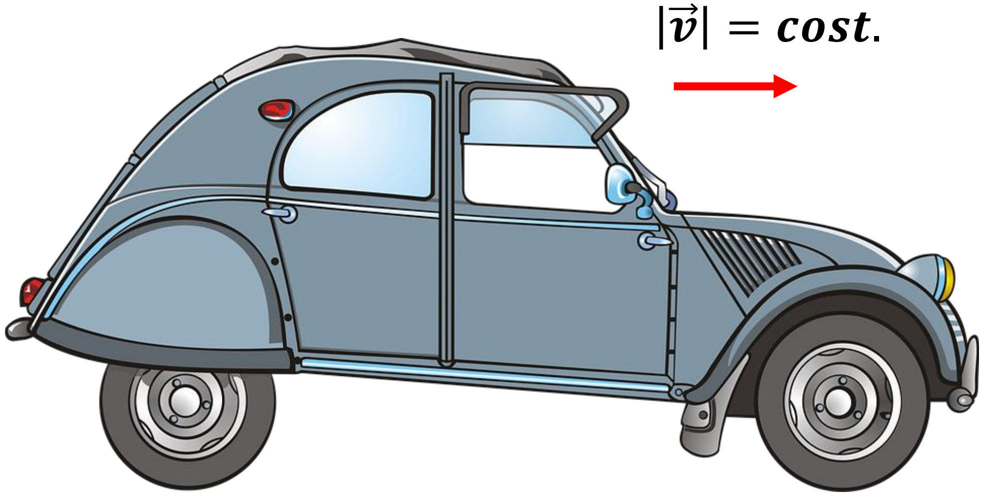


$$\vec{v} = cost. \rightarrow \vec{a} = 0 \rightarrow \vec{F}_{tot} = 0$$

Spostamento ed energia

Mentre l'asteriode, se non incontra ostacoli, continua il suo viaggio all'infinito su distanze che si misurano in anni/luce, la nostra auto dopo pochi chilometri si ferma se non facciamo benzina per alimentare il motore …. dal punto di vista operativo la due situazioni sono molto differenti !!!



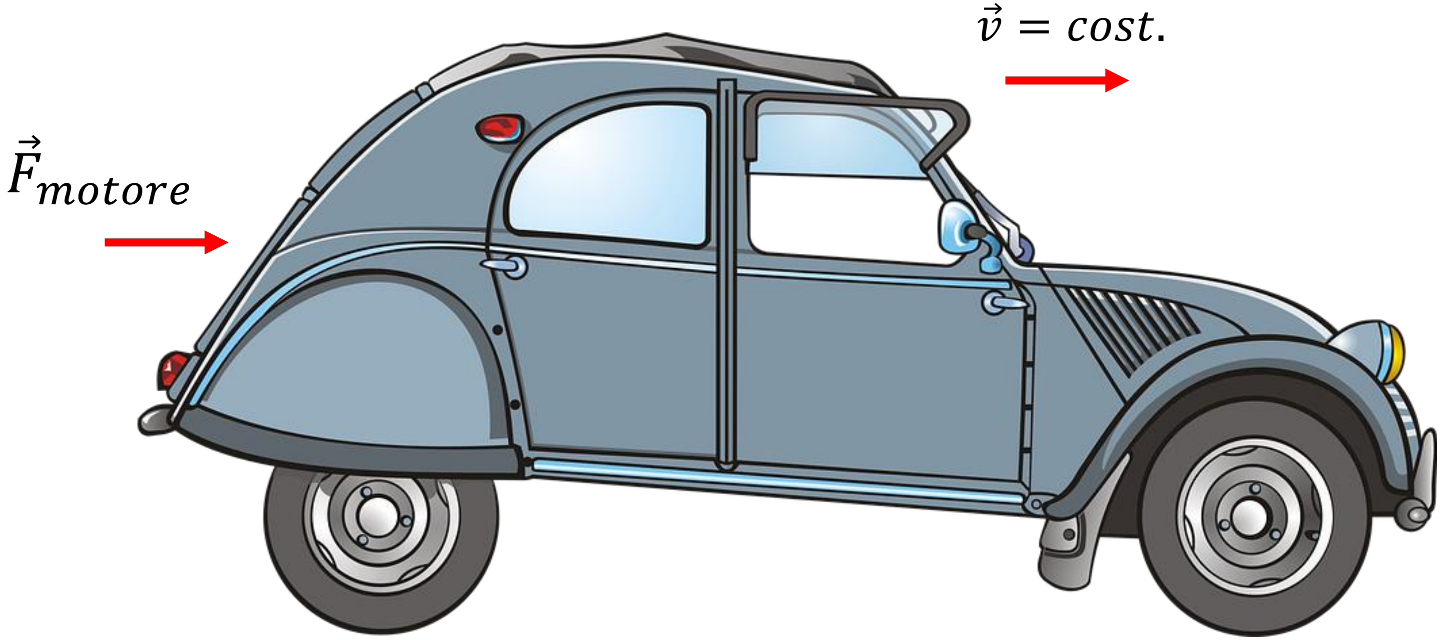


$$\vec{v} = cost. \rightarrow \vec{a} = 0 \rightarrow \vec{F}_{tot} = 0$$

SEBBENE IN ENTRAMBI I CASI $\vec{F}_{tot} = 0$, PER MANTENERE IN MOTO L'AUTO DOBBIAMO FORNIRGLI COSTANTEMENTE ENERGIA

Spostamento, forza ed energia

Mentre sull'asteriode non agisce nessuna forza e procede per inerzia, sappiamo per esperienza che per spostare l'auto è necessaria la forza motrice del motore dell'auto



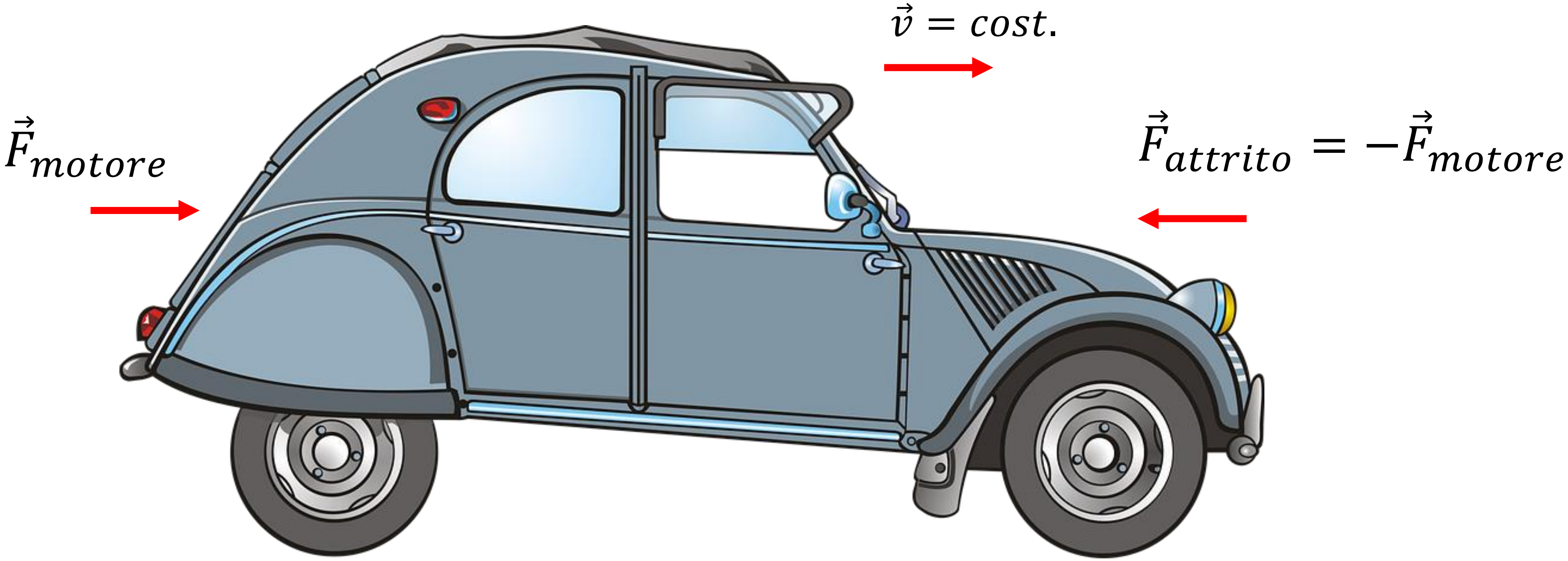
Questo è vero anche quando l'auto raggiunge la velocità di crociera di 80 Km/h costanti, se spegniamo il motore l'auto si ferma. D'altra parte quando viaggiamo a velocità costante in autostrada siamo nella condizione per cui:

$$\vec{v} = cost. \rightarrow \vec{a} = 0 \rightarrow \vec{F}_{tot} = 0$$

Dunque perché occorre la forza del motore per mantenere l'auto a velocità costante?

Spostamento, forza ed energia

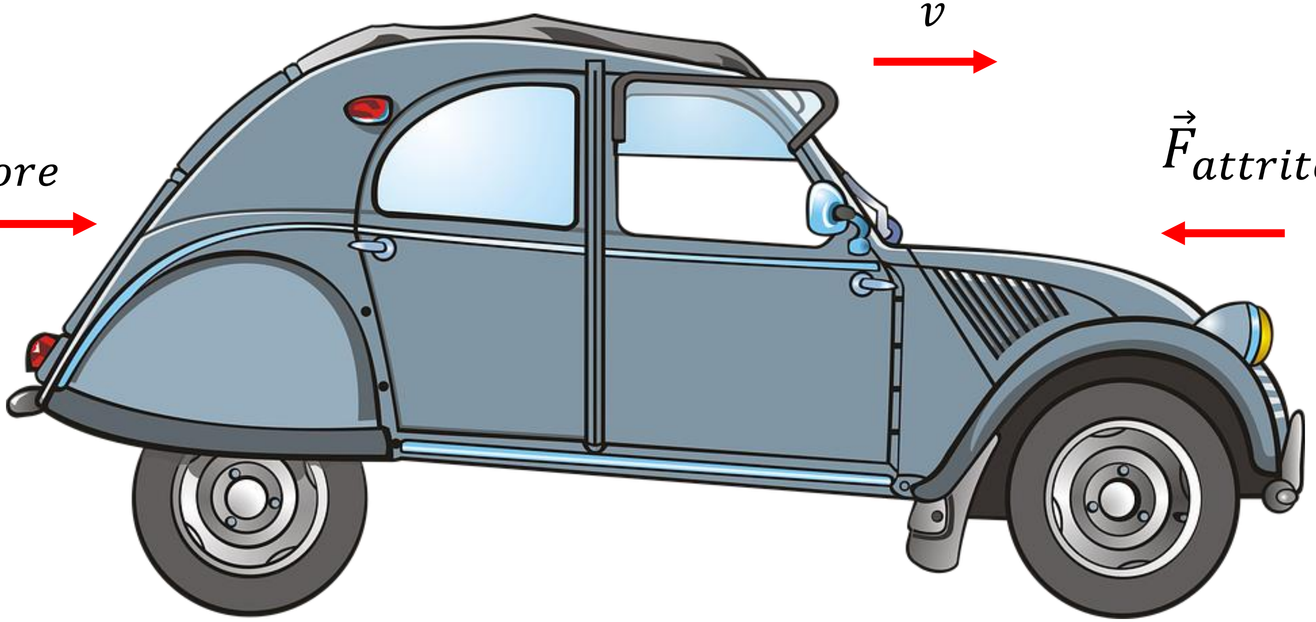
Sull'auto in realtà agiscono sempre due forze opposte tra loro: la forza motrice del motore e la forza resistiva dell'attrito dell'aria. Quando raggiungiamo la condizione per cui l'auto si sposta a velocità costante, queste due forze si equilibrano perfettamente così che $\vec{F}_{tot} = 0$. Un loro squilibrio comporta accelerazione o decelerazione dell'auto



$$\vec{v} = cost. \rightarrow \vec{a} = 0 \rightarrow \vec{F}_{tot} = \vec{F}_{motore} + \vec{F}_{attrito} = 0$$

In conclusione, sulla Terra in presenza di attrito, qualunque sia il tipo di moto dell'auto (uniforme, accelerato, decelerato) per SPOSTARLA occorrono sempre e comunque la FORZA DEL MOTORE e L'ENERGIA fornita dal combustibile

Spostamento, forza ed energia



$\vec{F}_{motore}$

$\vec{v}$

$\vec{F}_{attrito} = -\vec{F}_{motore}$

Che relazione c'è tra spostamento dell'auto (km percorsi), forza applicata all'auto dal motore ed energia (benzina consumata)?

Il primo a fornire una risposta quantitativa e sperimentalmente verificabile a questo importante quesito fu il fisico James Joule

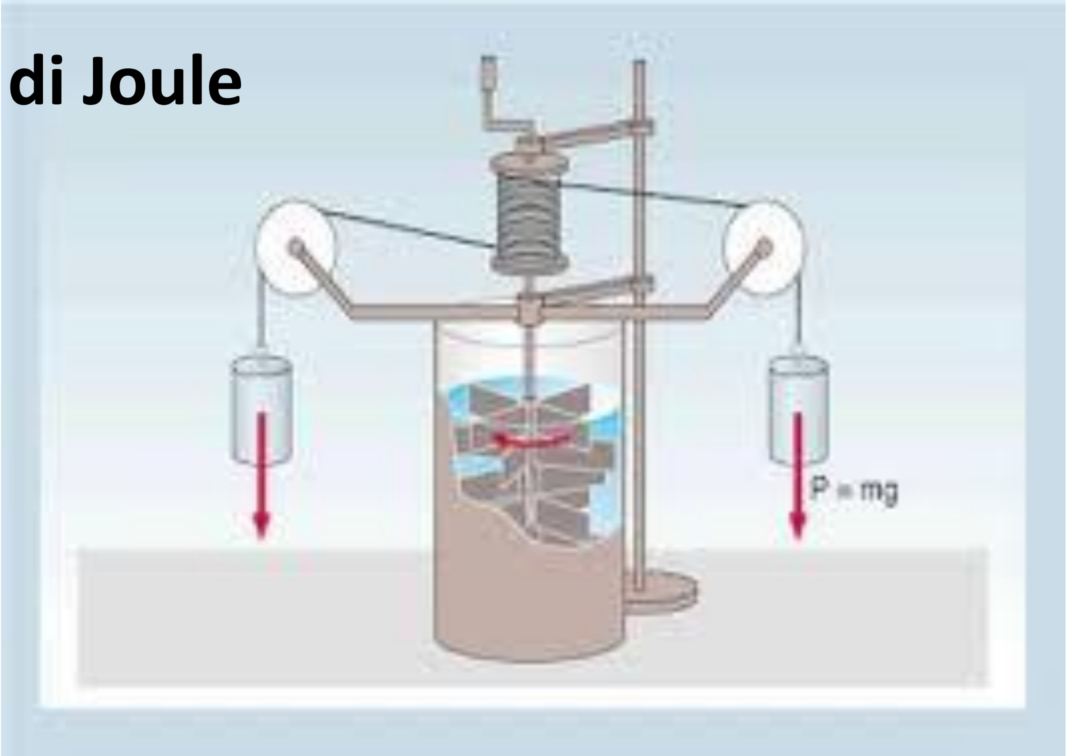
Alcune immagini sono tratte da siti online pubblici

UNIMORE UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MODENA E REGGIO EMILIA

LAVORO

Che relazione c'è tra spostamento, forza ed energia?

Esperimento di Joule



$$mg\Delta s = Mc\Delta T = Q$$

$$F\Delta s = Q$$

$$F\Delta s \equiv L$$

La quantità di calore (energia) fornita ad un liquido viscoso da un mulinello azionato dalla forza peso di una massa m è esattamente uguale al prodotto della forza peso per la distanza di caduta della massa m. Questa quantità viene chiamata LAVORO (L). In generale, data una forza F:

$$\boldsymbol{L = F\Delta s}$$

Energia e lavoro

Il lavoro è una forma di energia

Intuitivamente il lavoro è l'energia necessaria per spostare di un intervallo Δs un corpo a cui applichiamo una forza F

Operativamente, se la forza F è costante e lo spostamento Δs è diretto come la forza (situazione dell'esperimento di Joule), il lavoro risulta essere:

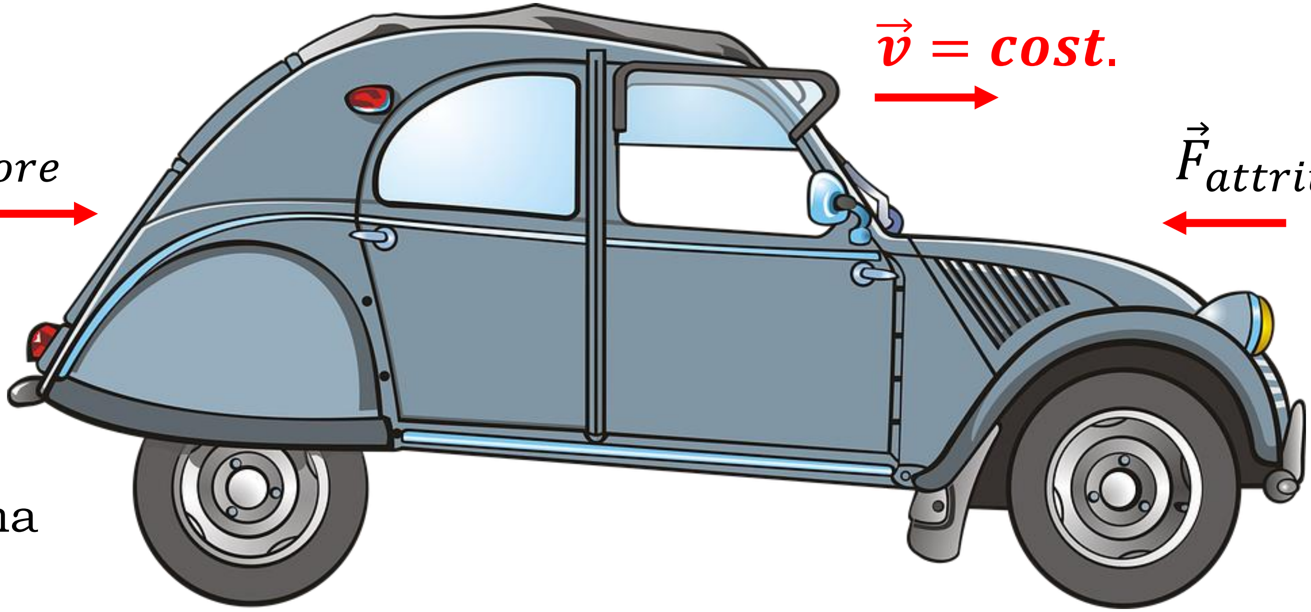
$$\boldsymbol{L = F\Delta s}$$

Il lavoro si misura in Joule: $\mathbf{1\ Joule = 1}\boldsymbol{N} \cdot \mathbf{m}$ **= Kg m²/s²**

LAVORO IN PRESENZA DI ATTRITO

La forza motrice compie un lavoro pari a $L_{motore} = F_{motore}\Delta s$

La forza di attrito compie un lavoro pari a $L_{attrito} = F_{attrito}\Delta s = -F_{motore}\Delta s$



$\vec{F}_{motore}$

$\vec{v} = cost.$

$\vec{F}_{attrito} = -\vec{F}_{motore}$

Il motore consuma energia

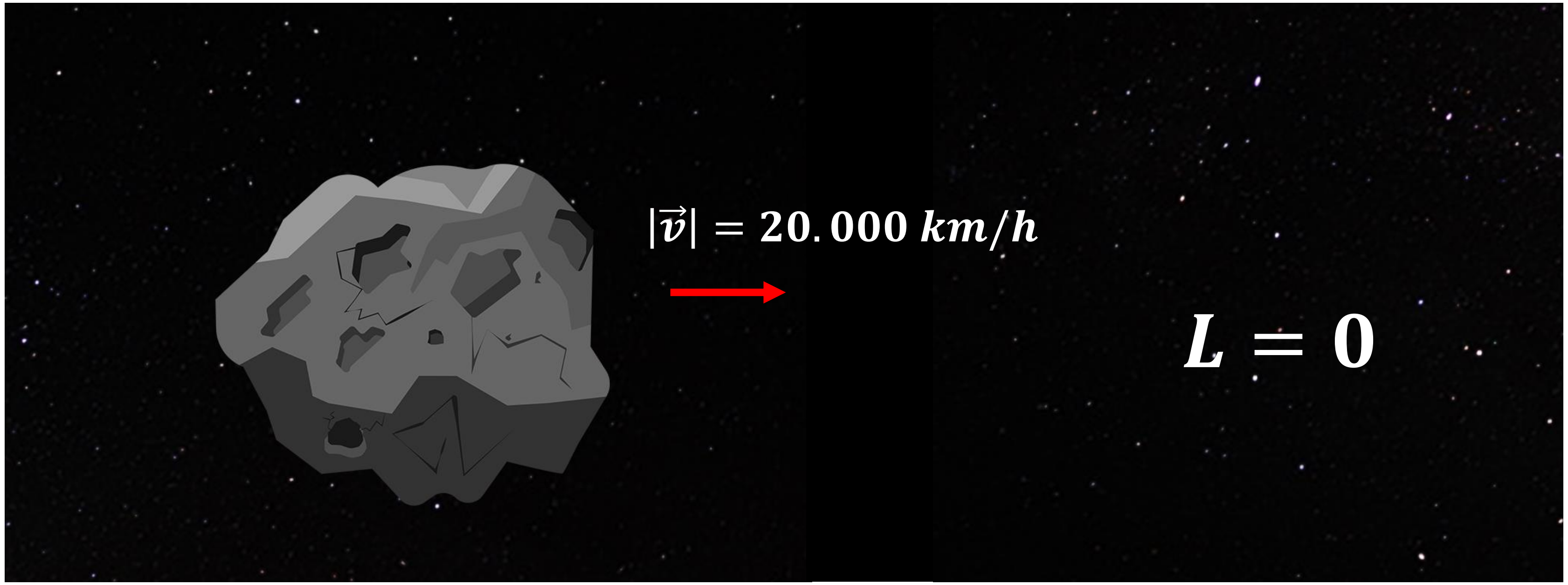
le molecole dell'aria guadagnano energia cinetica e termica

Il lavoro totale $L_{tot} = L_{motore} + L_{attrito}$ è nullo, la variazione di energia totale è nulla, l'energia totale si conserva: l'energia sprigionata dalla combustione della benzina viene trasferita alle molecole d'aria

LA FORZA $\vec{F}$ CHE COMPIE UN LAVORO SU DI UN CORPO MASSIVO NON NECESSARIAMENTE E' LA FORZA CHE FA MUOVERE IL CORPO

LAVORO IN ASSENZA DI ATTRITO

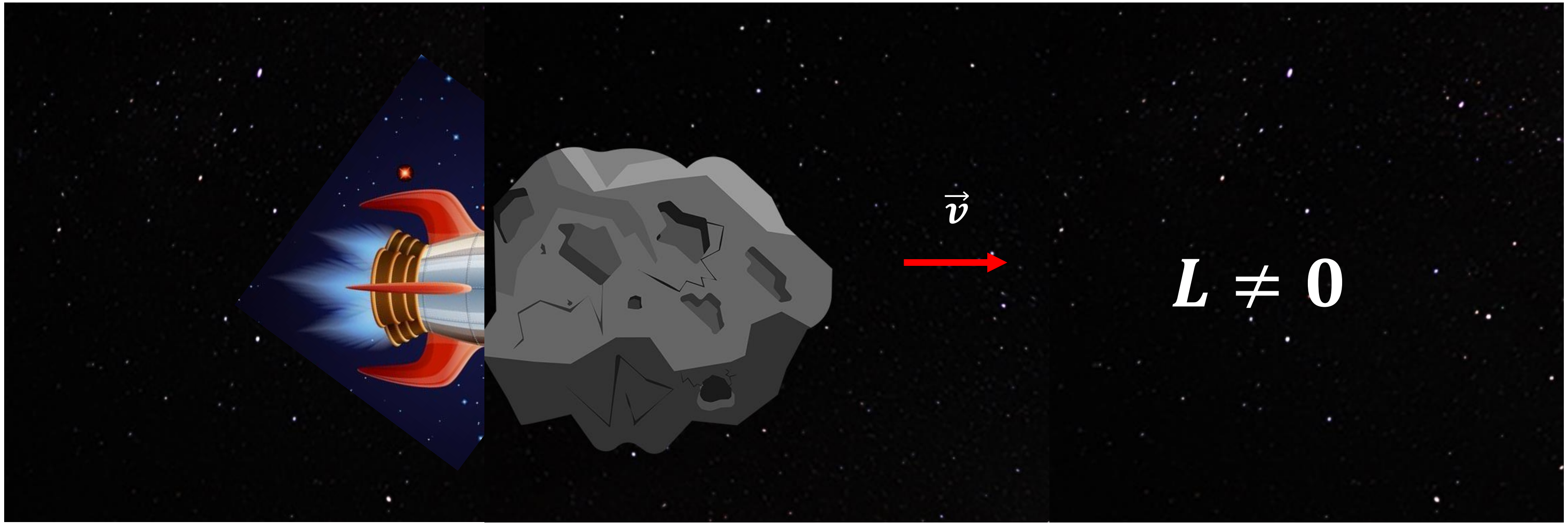
In assenza di attrito, come è il caso dell'asteroide, non vi è necessità di alcuna forza per mantenerlo in movimento a velocità costante. Non essendovi alcuna forza applicata, non viene svolto alcun lavoro sull'asteroide e dunque non è richiesta alcuna energia per mantenerlo in moto.



UNIMORE UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MODENA E REGGIO EMILIA

LAVORO IN ASSENZA DI ATTRITO

Se installiamo un motore che applica una forza costante sull'asteroide invece produrremo un lavoro pari ad $L = F\Delta s$, ovvero daremo energia all'asteroide



In che modo si manifesterà questo incremento di energia?

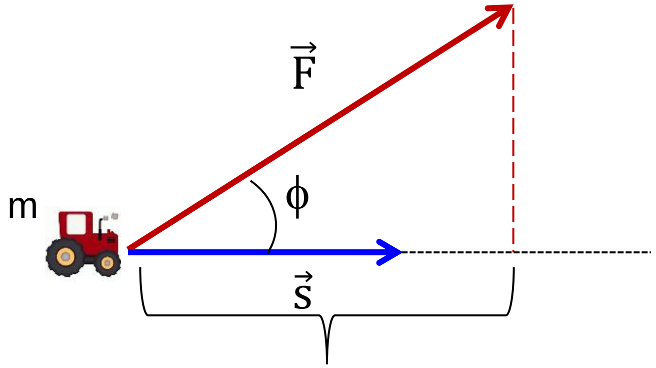
Sotto l'azione della forza del motore, per il secondo principio della Dinamica, l'asteroide sarà sottoposto ad un'accelerazione e pertanto ad un incremento della sua velocità iniziale. Vedremo in seguito che questo incremento di velocità è strettamente legato all'incremento di un'altra grandezza fisica fondamentale detta ENERGIA CINETICA che qualunque corpo in moto possiede

Lavoro di una forza costante

Si considera un oggetto che subisce uno spostamento lineare $\vec{s}$ mentre una forza **costante** $\vec{F}$ agisce su di esso.

Definizione di Lavoro *L* compiuto *da* una forza costante *su* un oggetto:

$$L \equiv \vec{F} \cdot \vec{s} = F\, s \cos\phi$$



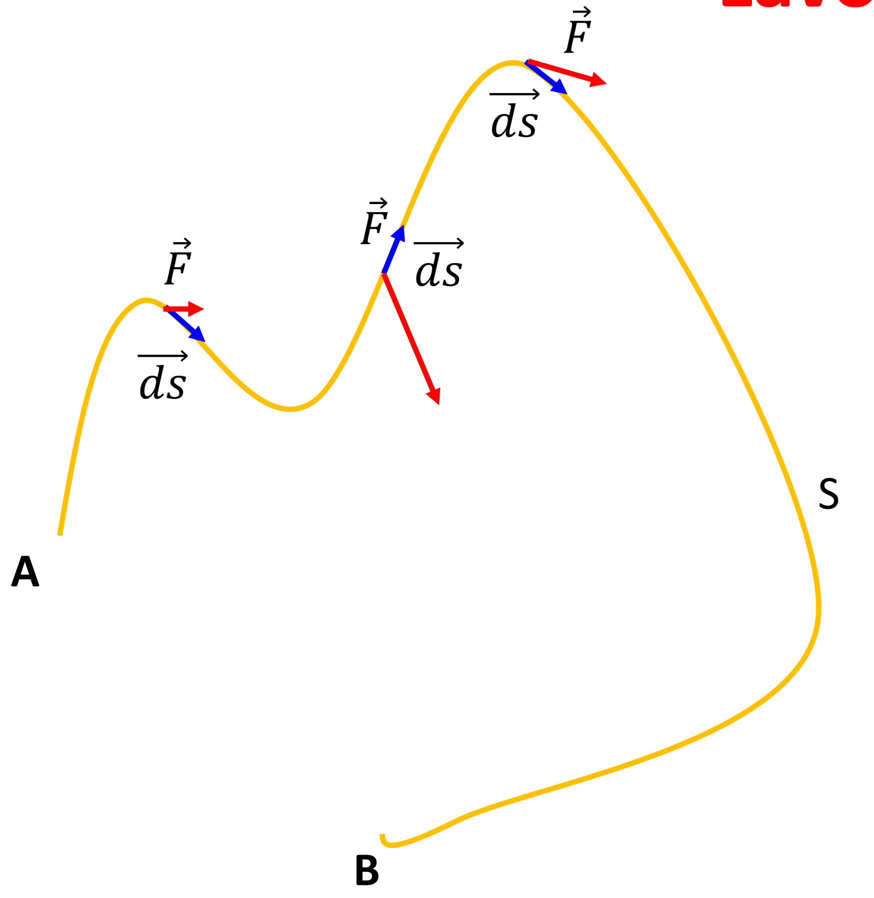
Grandezza **scalare** (e' un prodotto scalare)

Osservazioni:

solo la componente della forza nella direzione dello spostamento ($F\cos\phi$) compie lavoro

Il lavoro e' massimo se $\vec{s}$ e $\vec{F}$ sono paralleli : $\phi=0 \rightarrow \cos\phi=1$

Lavoro di una forza, caso generale



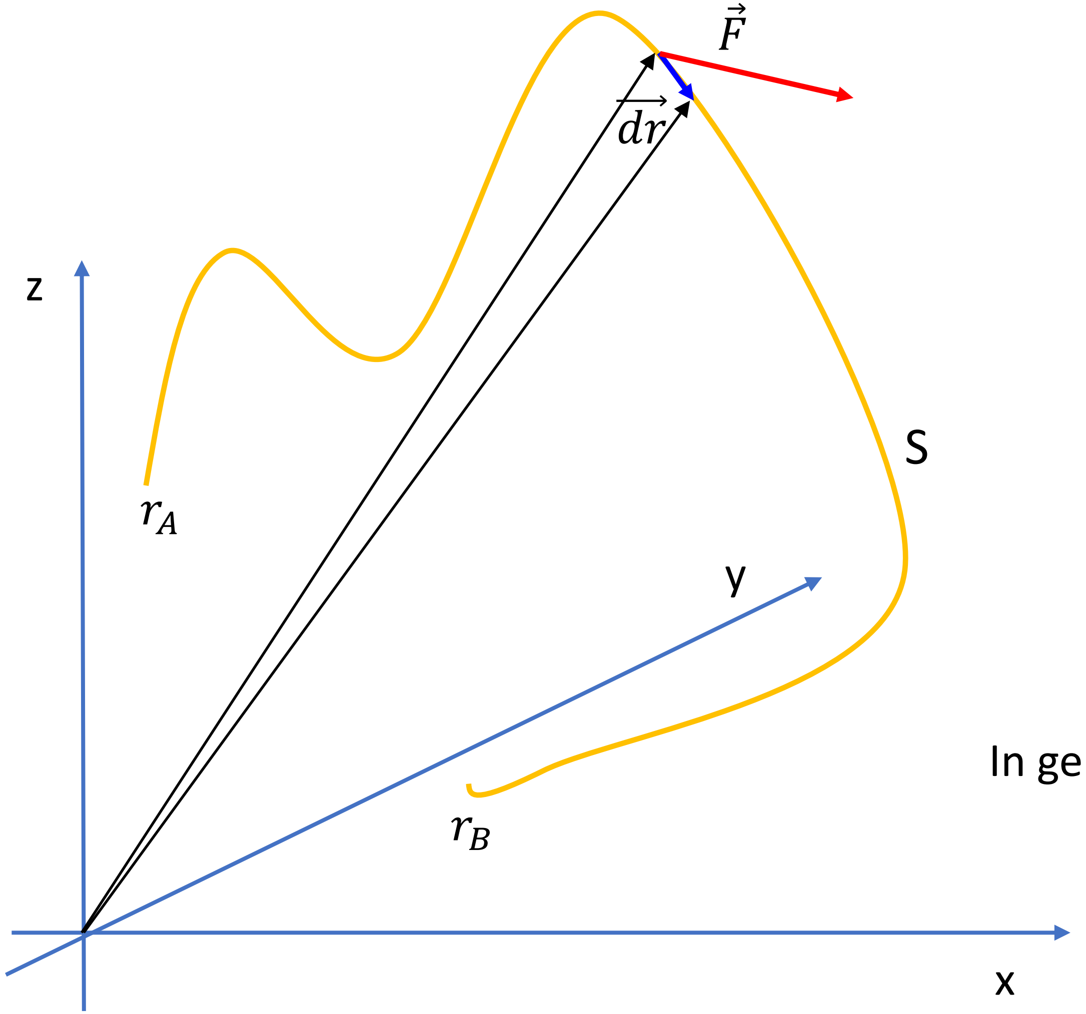
Lavoro della forza $\overrightarrow{F}$

$$L = \sum_n \vec{F}_n \cdot d\vec{s}_n$$

$$L = \lim_{ds_n \to 0} \sum_n \vec{F}_n \cdot d\vec{s}_n$$

$$L = \int_S \overrightarrow{F} \cdot d\vec{s}$$

Calcolo del lavoro



$$L = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_S \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} =$$

$$= \int_S F_x dx + \int_S F_y dy + \int_S F_z dz$$

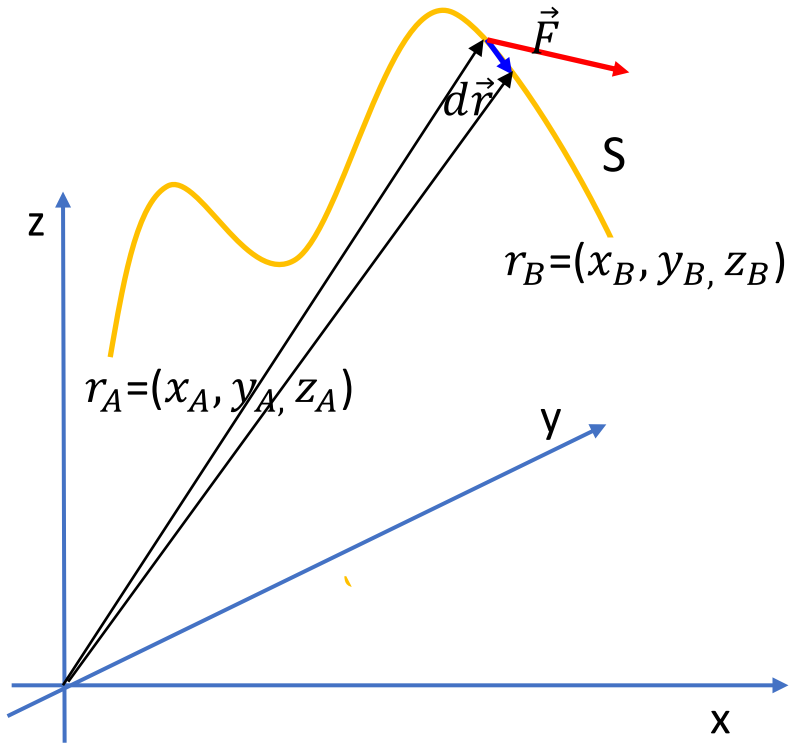
In generale: $F_x = F_x\,(x, y, z)$; $F_y = F_y\,(x, y, z)$; $F_z = F_z\,(x, y, z)$

Calcolo del lavoro

$$L = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_S \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_S F_x dx + \int_S F_y dy + \int_S F_z dz$$

Dobbiamo conoscere l'equazione della curva S

Supponiamo che S sia parametrizzata rispetto alla coordinata x



$$x = x; \quad dx = dx$$

$$y = f(x); \quad dy = \frac{df(x)}{dx} dx; \; F_y = F_y\,(x, f(x), g(x))$$

$$z = g(x); \quad dz = \frac{dg(x)}{dx} dx; \; F_z = F_z\,(x, f(x), g(x))$$

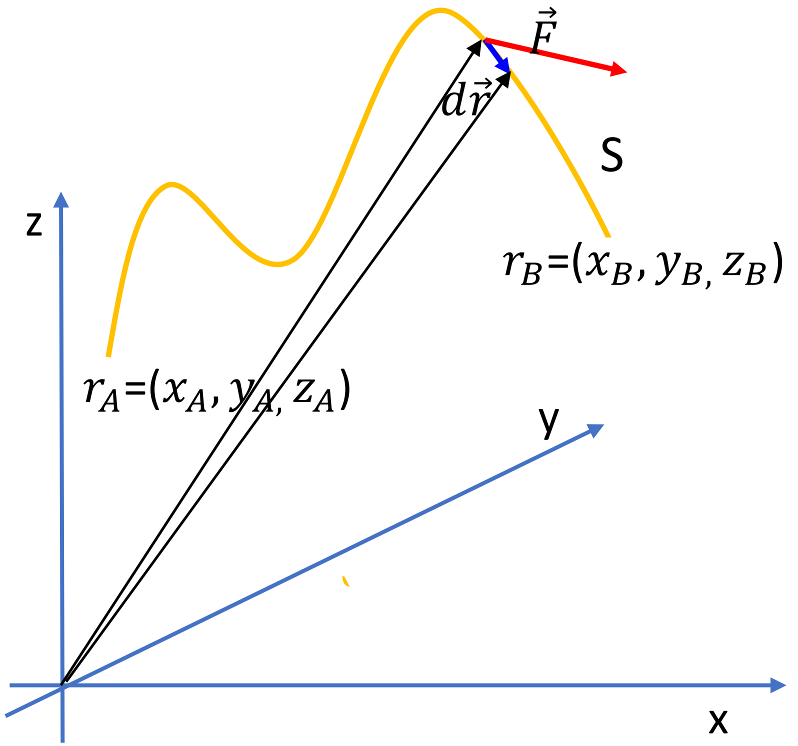
$$L = \int_{x_A}^{x_B} F_x\big(x, f(x), g(x)\big)dx + \int_{x_A}^{x_B} F_y\big(x, f(x), g(x)\big)\frac{df(x)}{dx}dx + \int_{x_A}^{x_B} F_z\big(x, f(x), g(x)\big)\frac{dg(x)}{dx}dx$$

UNIMORE
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MODENA E REGGIO EMILIA

Calcolo del lavoro

$$L = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_S \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_S F_x dx + \int_S F_y dy + \int_S F_z dz$$

Dobbiamo conoscere l'equazione della curva S



Supponiamo che S sia parametrizzata rispetto alla variabile α

$$x = x(\alpha); \quad dx = \frac{dx}{d\alpha} d\alpha; \quad F_x = F_x\,(x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha))$$

$$y = y(\alpha); \quad dy = \frac{dy}{d\alpha} d\alpha; \quad F_y = F_y\,(x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha))$$

$$z = z(\alpha); \quad dz = \frac{dz}{d\alpha} d\alpha; \quad F_z = F_z\,(x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha))$$

$$L=\int_{\alpha_A}^{\alpha_B} F_x(x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha)) \frac{dx}{d\alpha}\, d\alpha + \int_{\alpha_A}^{\alpha_B} F_y(x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha)) \frac{dy}{d\alpha} d\alpha + \int_{\alpha_A}^{\alpha_B} F_z(x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha)) \frac{dz}{d\alpha} d\alpha$$

POTENZA

Esprime con che rapidita' viene compiuto lavoro

- mette in relazione il lavoro L compiuto con il tempo Δt impiegato a compierlo

Potenza media $\mathrm{L_m} = \frac{\Delta L}{\Delta t}$

Potenza $\mathrm{P} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{dL}{dt}$

Nel SI si misura in **Watt (W)**: $1\ \mathrm{Watt} = 1\mathrm{Joule/sec}$

Si puo' esprimere anche in termini della forza e della velocita':

$\mathrm{P_m} = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{\vec{F} \cdot \Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{F} \cdot \vec{v}_m$ da cui $\mathrm{P} = \lim_{\Delta t \to 0} \mathrm{P_m} = \vec{F} \cdot \vec{v}$

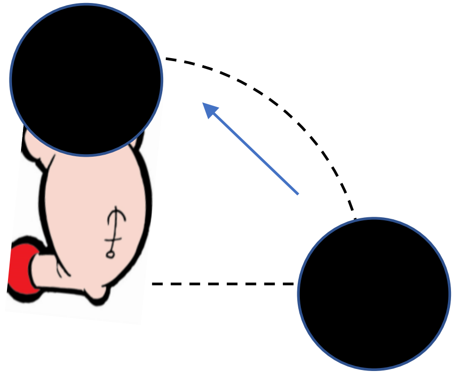
dimensionalmente: $N \cdot \frac{m}{s} = \frac{N \cdot m}{s} = \frac{J}{s} = \mathbf{Watt}$

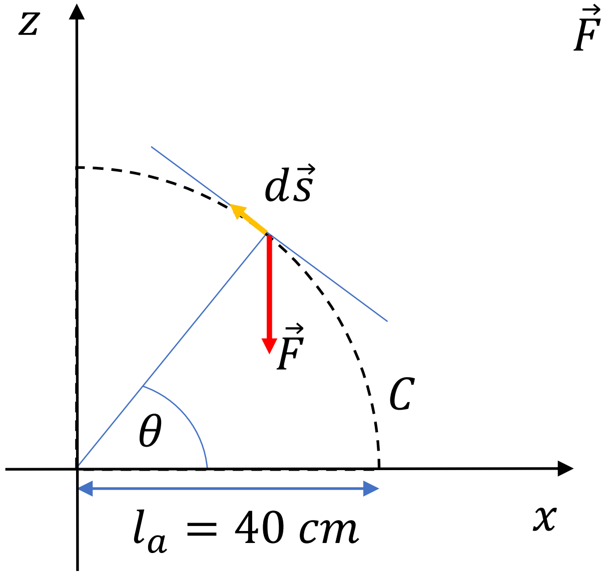
Alcune immagini sono tratte da siti online pubblici

UNIMORE UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MODENA E REGGIO EMILIA

Applicazioni

Vogliamo calcolare il lavoro per alzare un manubrio da 15 Kg nel sollevamento. Si considera l'avambraccio lungo 40 cm e di massa trascurabile.





$$\vec{F}.d\vec{s}=F_x dx + F_y dy + F_z\, dz$$

$$F_x = 0$$

$$F_y = 0$$

$$F_z = -Mg$$

$$x = l_a \cos\theta$$

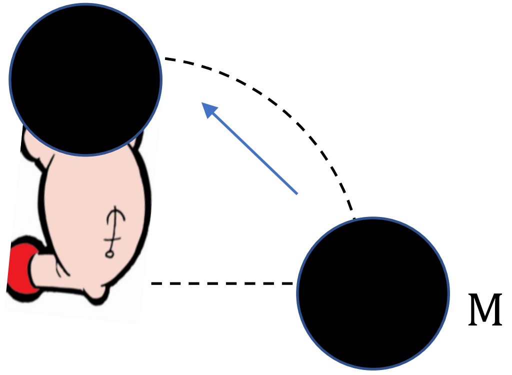
$$z = l_a \sin\theta \quad \rightarrow dz = l_a \cos\theta\ d\theta$$

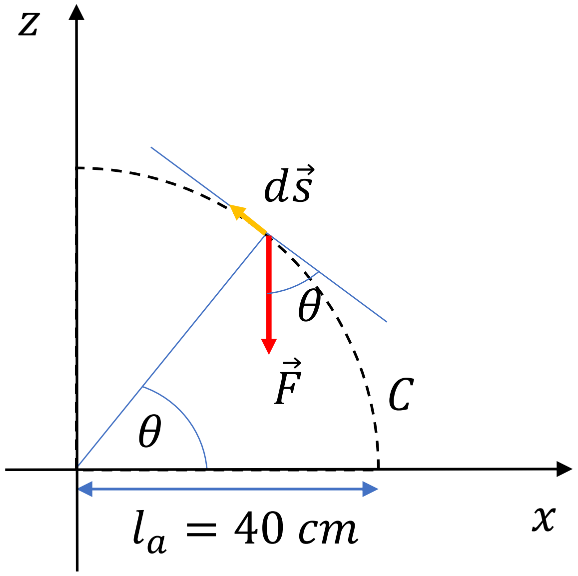
$$y = 0$$

$$L_{braccio} = -L_{Fpeso} = -\int_C \vec{F}.d\vec{S} = -\int_C F_z dz = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} -Mgl_a \cos\theta\, d\theta = Mgl_a |\sin\theta|_0^{\frac{\pi}{2}} = Mgl_a = 15 \times 9.8 \times 0.4\ Kg\frac{m^2}{s^2} \cong 59\ J$$

Applicazioni

Vogliamo calcolare il lavoro per alzare un manubrio da 15 Kg nel sollevamento. Si considera l'avambraccio lungo 40 cm e di massa trascurabile.





$$\vec{F} = -Mg\hat{k}$$

$$\vec{F}.d\vec{s} = F_{\parallel d\vec{s}}\ ds$$

$$F_{\parallel d\vec{s}} = -Mg\cos\theta$$

$$ds = l_a\ d\theta$$

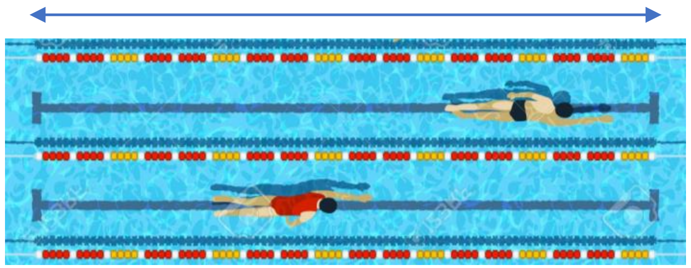
$$L_{braccio} = -L_{Fpeso} = -\int_C \vec{F}.d\vec{S} = -\int_C F_{\parallel d\vec{s}}\ ds = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} -Mg\cos\theta\ l_a d\theta = Mgl_a|\sin\theta|_0^{\frac{\pi}{2}} = Mgl_a = 15\times\ 9.8\times 0.4\ Kg\frac{m^2}{s^2} \cong 59\ J$$

Applicazioni

Vogliamo calcolare il lavoro e la potenza esercitata da un nuotatore che percorrere 100 m stile in 50 s ad andatura costante, nell'ipotesi di attrito viscoso con l'acqua per cui valga l'approssimazione $\vec{F} = -\mu\vec{v}$ **con** $\mu = 100\ \frac{N\,s}{m}$

$$\vec{F}.d\vec{S} = -\mu|\vec{v}|dl \qquad P = \frac{dL}{dt}$$

D = $100\ m$



dl $\vec{F}$

$$L = -L_{attrito} = -\int_S \vec{F}.d\vec{S} = -\int_0^D -\mu|\vec{v}|dl = \mu|\vec{v}||l|_0^D = \mu|\vec{v}|D = 100 \times 2 \times 100 = 2\ 10^4\ J$$

$$L(t) = -L_{attrito} = -\int_S \vec{F}.d\vec{S} = -\int_0^{vt} -\mu v dl = \mu v|l|_0^{vt} = \mu v vt = \mu v^2 t$$

$$P = \mu|\vec{v}|^2 = 400\ W$$

Applicazioni

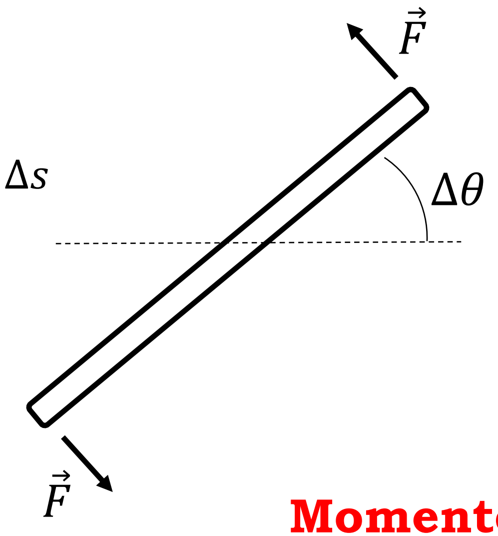
Per avvitarsi un cavatappi deve esercitare un forza $\vec{F}_0$ sulla cima del tappo. Vogliamo calcolare la coppia di forze che devono essere applicate ai due estremi del cavatappi per i casi in cui la larghezza del cavatappi sia uguale ad l e per il caso in cui sia uguale a $2l$, sapendo che il passo della vite del cavatappi è tale che con un giro completo la vite scende delle lunghezza $\frac{l}{4}$

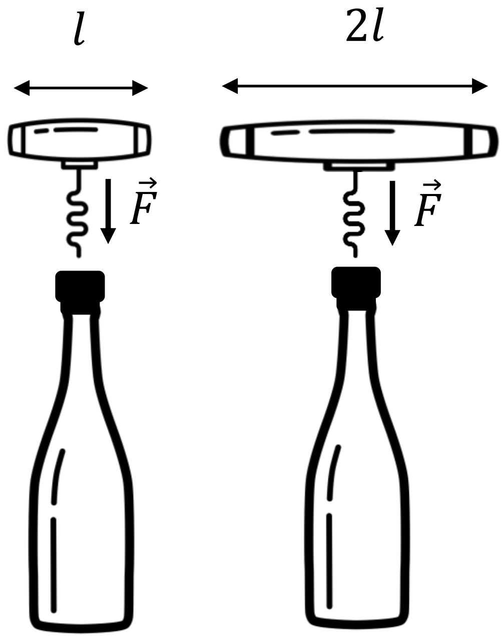
Per entrare all'interno del tappo di una distanza Δs occorre un lavoro pari a $L = F_0 \Delta s$

Per percorrere la distanza Δs il cavatappi deve ruotare di un angolo $\Delta\theta = \Delta s \frac{2\pi}{l/4} = \Delta s \frac{8\pi}{l}$

Per ruotare di un angolo $\Delta\theta$ il cavatappi di larghezza l deve effettuare un lavoro pari a $L = F_1 \frac{l}{2}\Delta\theta + F_1 \frac{l}{2}\Delta\theta = F_1 l \Delta\theta = 8\pi F_1 \Delta s$

Per ruotare di un angolo $\Delta\theta$ il cavatappi di larghezza $2l$ deve effettuare un lavoro pari a $L = F_2 \frac{2l}{2}\Delta\theta + F_2 \frac{2l}{2}\Delta\theta = 2F_2 l \Delta\theta = 16\pi F_2 \Delta s$





$$L = F_0 \, \Delta s = F_1 l \Delta\theta = 2F_2 l \Delta\theta$$

$$F_0 \Delta s = 8\pi F_1 \Delta s \rightarrow \quad F_1 = \frac{F_0}{8\pi}$$

$$F_0 \Delta s = 16\pi F_2 \Delta s \rightarrow \quad F_2 = \frac{F_0}{16\pi}$$

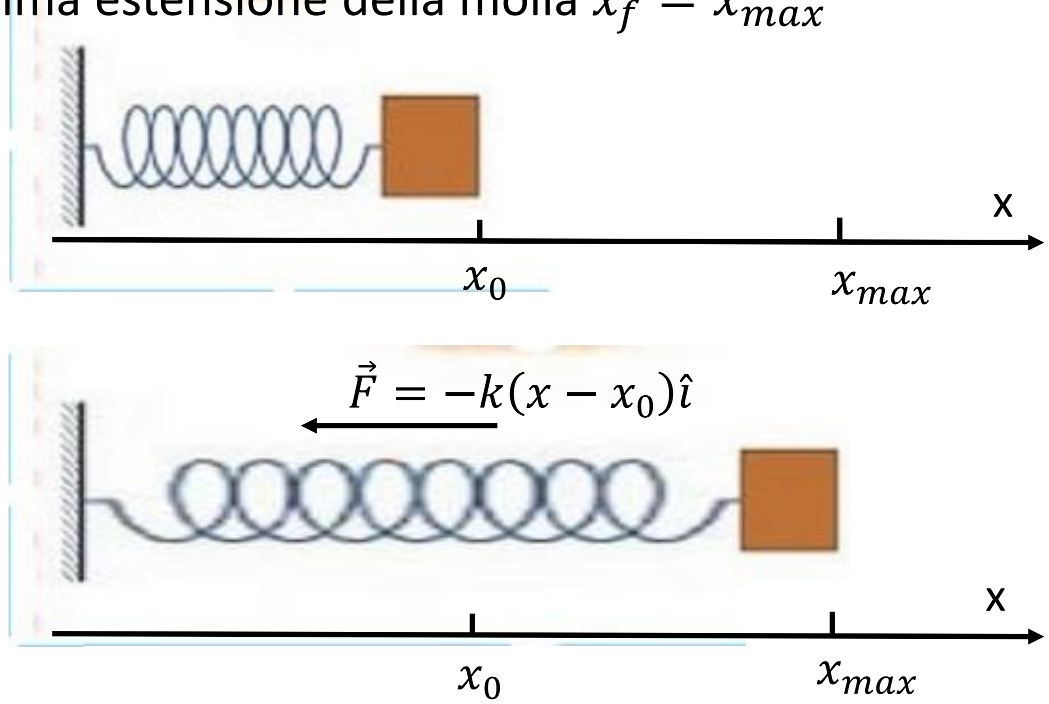
$$[M] = [r][F] = [L]$$

Momento della forza

$$F_1 l = F_2 2l$$

Applicazioni

Consideriamo una molla che applica ad un oggetto di massa m ad essa attaccato una forza di richiamo $\vec{F} = -k\,(x - x_0)\hat{\imath}$ (legge di Hooke). Determinare il lavoro necessario per spostare l'oggetto dalla posizione iniziale di riposo $x_i = x_0$ alla posizione di massima estensione della molla $x_f = x_{max}$



La forza dipende dalla posizione ed è diretta sempre lungo –x: F_y=F_z=0

La traiettoria è una retta parallela all'asse x

L = $\int_S F_x dx + \int_S F_y dy + \int_S F_z dz =$

$= \int_{x_i}^{x_f} F_x dx = \int_{x_0}^{x_{max}} -k(x - x_0)dx = \left[-\frac{1}{2}k\,(x - x_0)^2\right]_{x_0}^{x_{max}} = -\frac{1}{2}\,k(x_{max} - x_0)^2$

Se allungo la molla $x_f > x_i$ il lavoro della forza elastica è negativo, viceversa Se $x_f < x_i$, cioè se riporto la molla alla sua posizione di riposo, il lavoro della forza elastica è positivo (inverto gli estremi di integrazione)

UNIMORE UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MODENA E REGGIO EMILIA

Teorema dell'energia cinetica

$$\int_S \vec{F}.d\vec{s} = \int_S m\vec{a}.d\vec{s} = \int_S m\frac{d\vec{v}}{dt}.d\vec{s} = \int_t m\frac{d\vec{v}}{dt}.\frac{d\vec{s}}{dt}dt = \int_t m\frac{d\vec{v}}{dt}.\vec{v}dt =$$

$$= \int_t m\frac{dv_x}{dt}v_x dt + \int_t m\frac{dv_y}{dt}v_y dt + \int_t m\frac{dv_z}{dt}v_z dt =$$

$$= \int_{v_x} m\, v_x\, dv_x + \int_{v_y} m\, v_y\, dv_y + \int_{v_z} m\, v_z\, dv_z = \frac{1}{2}m\left[\left(v_x^f\right)^2 + \left(v_y^f\right)^2 + \left(v_z^f\right)^2\right] - \frac{1}{2}m\left[\left(v_x^i\right)^2 + \left(v_y^i\right)^2 + \left(v_z^i\right)^2\right]$$

$$E_k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}m\,|\vec{v}|^2 = \frac{1}{2}m\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right)$$ **Energia cinetica**

$$\mathrm{L} = E_k^f - E_k^i \stackrel{\text{def}}{=} \Delta E_k$$

Energia cinetica e Teorema dell'energia cinetica

Un corpo massivo in movimento possiede un'energia dovuta al suo movimento detta ENERGIA CINETICA E_k:

$$\boldsymbol{E_k = \frac{1}{2}mv^2}$$

Tale definizione si ricava dal Teorema dell'energia cinetica:

Il lavoro totale compiuto su di un corpo massivo è uguale alla variazione della sua energia cinetica

Teorema dell'energia cinetica

$$L = E_k^f - E_k^i \stackrel{\text{def}}{=} \Delta E_k$$

Senza dovere risolvere le equazioni del moto ($\vec{F} = m\vec{a}$)

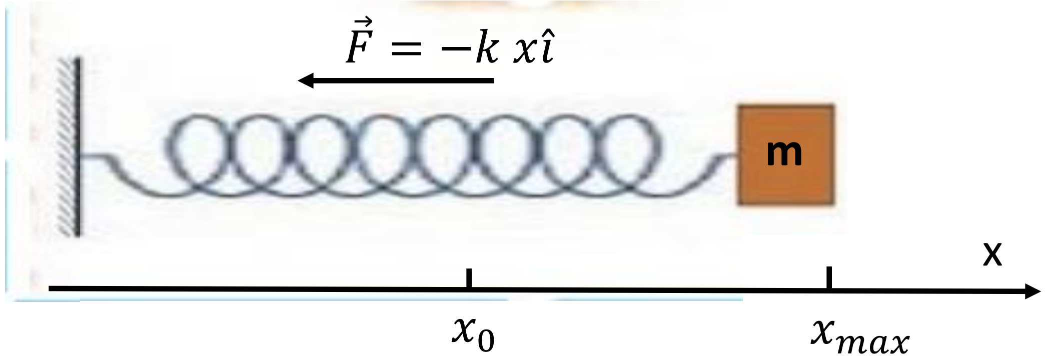
- Possiamo facilmente calcolare la variazione di energia cinetica di un oggetto dovuta ad un lavoro esercitato su di esso
- Viceversa, se un oggetto varia la sua velocità, possiamo calcolare il lavoro che ha prodotto tale variazione
- Non possiamo dire nulla riguardo al tempo impiegato dall'oggetto per variare la sua velocità e sulla traiettoria da esso seguita

Il valore di ΔE_k può essere positivo, negativo o nullo

Esempio : la molla

Supponiamo di portare una molla alla massima estensione e poi di rilasciarla, quale velocità massima potrà raggiungere l'oggetto solidale con la molla (es. la freccia di un arco)?

$$L = -\frac{1}{2}\,k(x_{max} - x_0)^2$$



Quando allunghiamo la molla abbiamo visto che la forza elastica fa una lavoro pari a $L = -\frac{1}{2}\,k(x_{max} - x_0)^2$, viceversa, quando rilasciamo la molla farà un lavoro esattamente opposto per ritornare alla posizione di riposo x_0

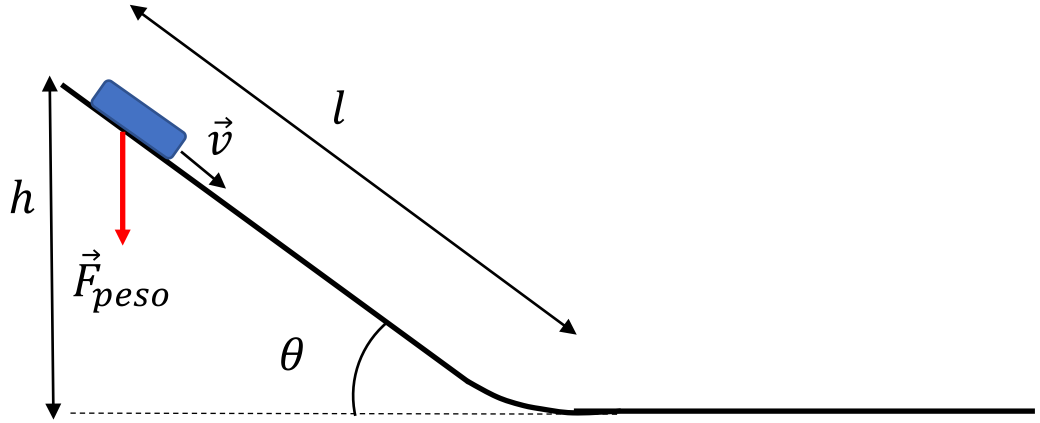
Inoltre $v_i = 0$

$$L = \frac{1}{2}\,k(x_{max} - x_0)^2 = \frac{1}{2}m\left(v_f^2 - v_i^2\right)$$

$$\boldsymbol{v_f = \sqrt{\frac{k}{m}(x_{max} - x_0)^2}}$$

Esempio : distanza di frenata

Un atleta di bob di massa m parte da fermo da un'altezza pari ad h ed effettua tutta la discesa su di piano con inclinazione di angolo θ rispetto al suolo, senza frenare in condizioni di attrito del tutto trascurabile. Alla fine della discesa comincia a frenare. Sapendo che la forza di attrito esercitata dai freni è uguale a $\vec{F} = -\frac{mg}{4}\,\hat{v}$, che distanza D deve percorrere l'atleta per fermarsi completamente?



Teorema dell'energia cinetica

$$E_K^{fin} - E_K^{in} = L_{peso}$$

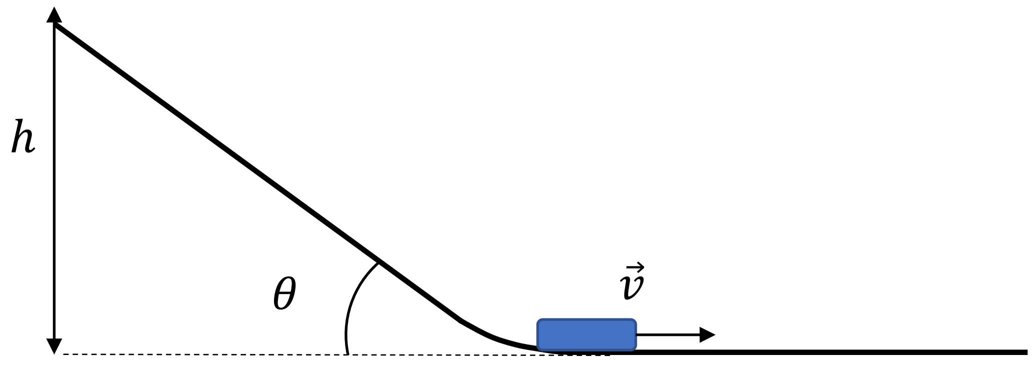
$$L_{peso} = \int_l \vec{F}_{peso} \cdot d\vec{s} = \int_l mg\sin\theta\, dl = mg\sin\theta \int_l dl = mg\sin\theta\, l = mg\sin\theta\,\frac{h}{\sin\theta} = mgh$$

$$L_{peso} = \frac{1}{2}m\left(v_f^2 - v_i^2\right) \rightarrow \quad mgh = \frac{1}{2}mv_f^2 \rightarrow \quad v_f = \sqrt{2gh}$$

Teorema dell'energia cinetica

Esempio : distanza di frenata

Un atleta di bob di massa m parte da un'altezza pari ad h ed effettua tutta la discesa su di piano con inclinazione di angolo θ rispetto al suolo, senza frenare in condizioni di attrito del tutto trascurabile. Alla fine della discesa comincia a frenare. Sapendo che la forza di attrito esercitata dai freni è uguale a $\vec{F} = -\frac{mg}{4}\,\hat{v}$, che distanza D deve percorrere l'atleta per fermarsi completamente?



Teorema dell'energia cinetica

$$E_K^{fin} - E_K^{in} = L_{freni} \rightarrow -\frac{1}{2}mv_{in}^2 = L_{freni}$$

Velocità uscita dalla discesa: $v_{in} = \sqrt{2gh}$

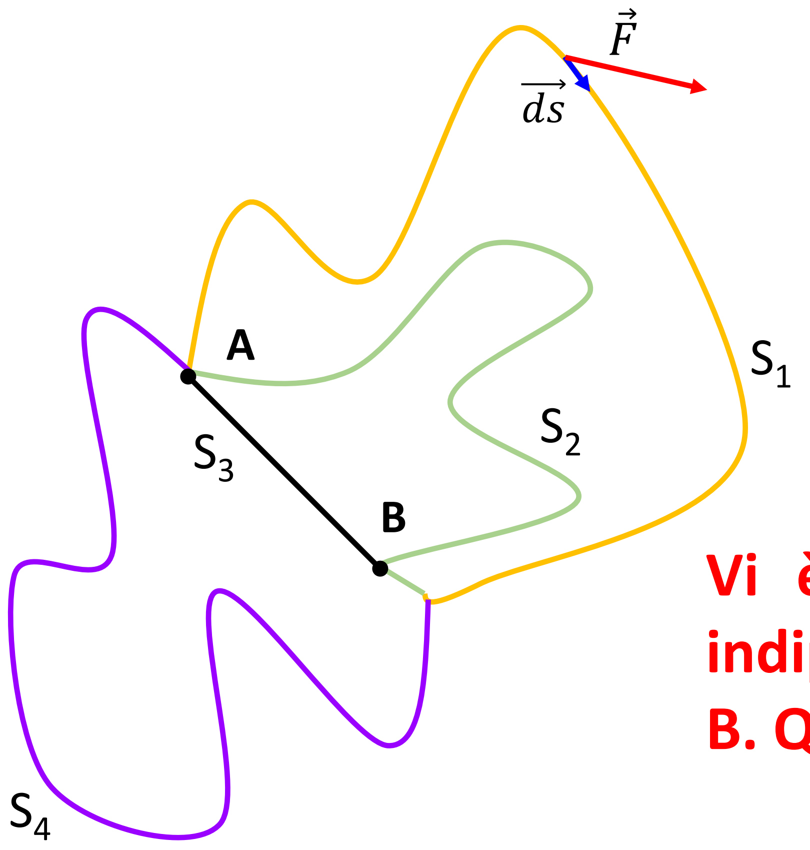
La forza di attrito è in modulo costante e diretta come la velocità dell'atleta e verso opposto, la traiettoria del bob non verrà pertanto deviata e, pur rallentando, l'atleta proseguirà in modo rettilineo

$$L_{freni} = \int_D -\frac{mg}{4}\hat{v}\cdot d\vec{s} = -\int_D \frac{mg}{4}ds = -\frac{mgD}{4}$$

$$-\frac{1}{2}mv_{fin}^2 = L_{freni} \rightarrow -\frac{1}{2}m2gh = -\frac{mgD}{4} \Longrightarrow$$

D= $\boldsymbol{4h}$

Lavoro delle forze conservative

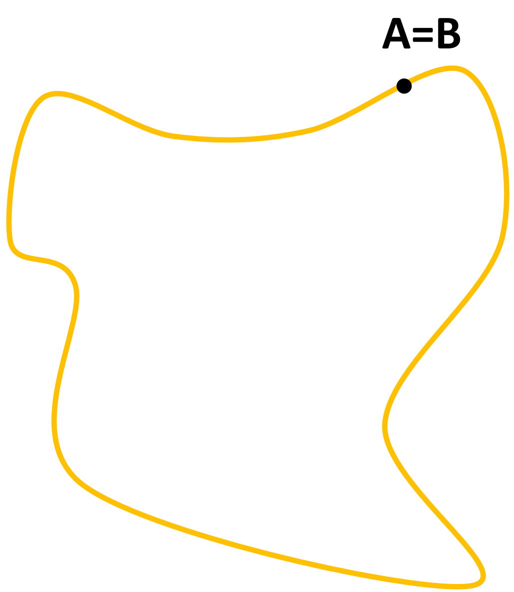


In generale il lavoro dipende dal percorso effettuato per spostare l'oggetto dal punto A al punto B

Vi è un sottoinsieme di Forze per cui il lavoro è indipendente dal percorso utilizzato per arrivare da A a B. Queste forze vengono denominate CONSERVATIVE

$$L = \int_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{s}_1 = \int_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{s}_2 = \int_{S_3} \vec{F} \cdot d\vec{s}_3 = \int_{S_4} \vec{F} \cdot d\vec{s}_4 = \cdots \ldots . = \int_{S_n} \vec{F} \cdot d\vec{s}_n$$

Lavoro delle forze conservative



Come si può capire se una forza è conservativa?

Calcoliamo il lavoro della forza su di un cammino chiuso

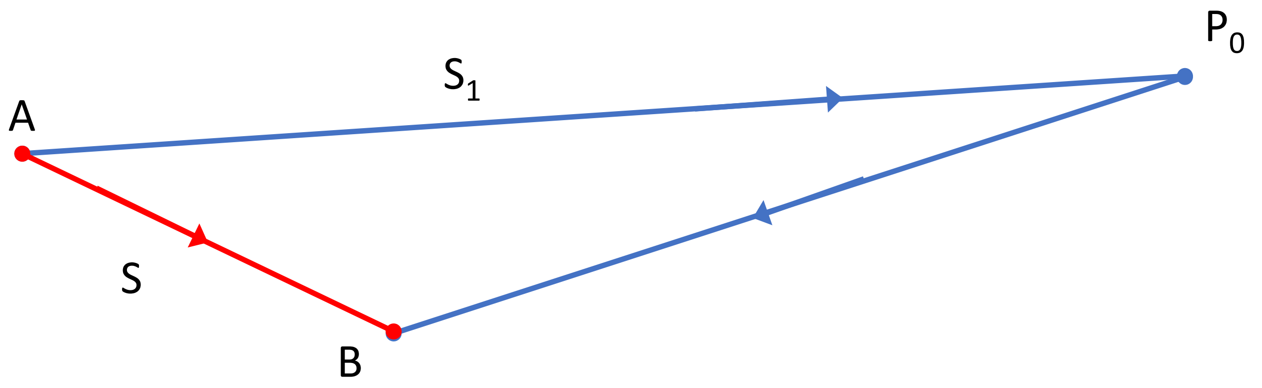
$$L_{S_{chiusa}} = \oint \vec{F}(r) \cdot d\vec{r} = 0$$

Se il lavoro compiuto dalla Forza su di un QUALSIASI cammino chiuso è nullo allora la forza è CONSERVATIVA

Lavoro delle forze conservative

Per tutte le forze conservative il lavoro è indipendente dal percorso effettuato per spostare un corpo/carica da un punto A ad un punto B

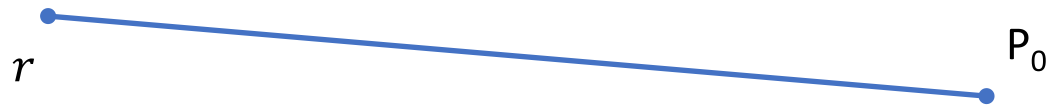
Decidiamo quindi di andare da A a B passando sempre per un punto di riferimento P_0



Energia Potenziale per le forze conservative

Vogliamo calcolare ora il lavoro per andare dal punto di riferimento P_0 ad un generico punto r dello spazio $[r = (x, y, z);\ P_0 = (P_0^x, P_0^y, P_0^z)]$

Essendo in un campo di forze conservative, il lavoro per andare dal punto P_0 al punto r è indipendente dal percorso che scegliamo, esso pertanto deve potere essere espresso tramite una funzione che dipende unicamente dalla posizione di r e di P_0



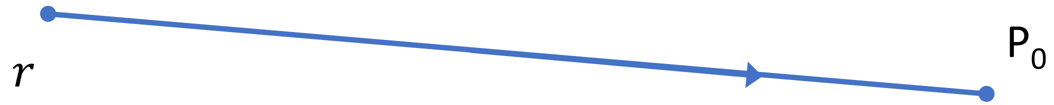
$$U(r) \stackrel{\text{def}}{=} \int_r^{P_0} \vec{F} \,.\, d\vec{r}$$

Definiamo tale funzione come

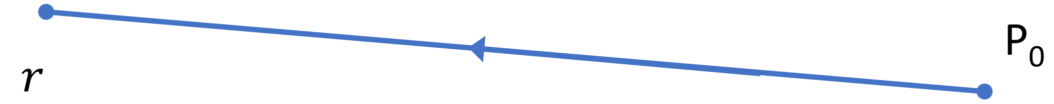
Energia Potenziale $U(r)$

Energia Potenziale per le forze conservative

Se andiamo da r a P_0 l'energia potenziale è $U(r)$



Se andiamo da P_0 a r che valore avrà l'energia potenziale?



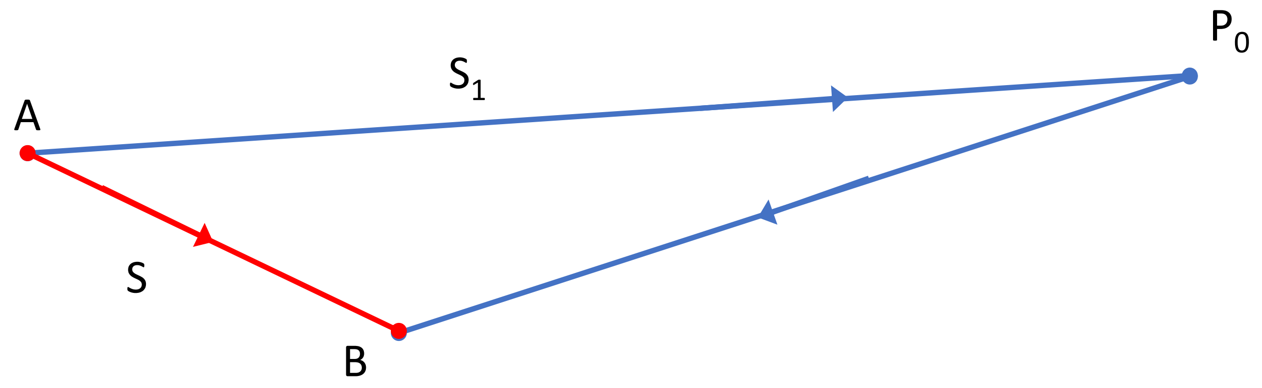
Siccome siamo in presenza di forze conservative, il lavoro per andare da r a P_0 e ritorno deve essere uguale al lavoro per rimanere fermi in r, dunque il lavoro totale dovrà essere nullo e necessariamente:

$$\boldsymbol{U_{P_0-r}(r) = -\,U(r)}$$

Energia Potenziale per le forze conservative

Torniamo ora al lavoro per andare dal punto A al punto B in presenza di forze conservative. Utilizzeremo il percorso ''universale'' che passa per il punto fissato P_0

$$L_{AB} = L(A, P_0) + L(P_0, B)$$



Possiamo a questo punto esprimerlo in forma generale utilizzando la funzione Energia Potenziale:

$$L_{AB} = U(A) - U(B) = -\Delta U$$

Lavoro delle forze conservative

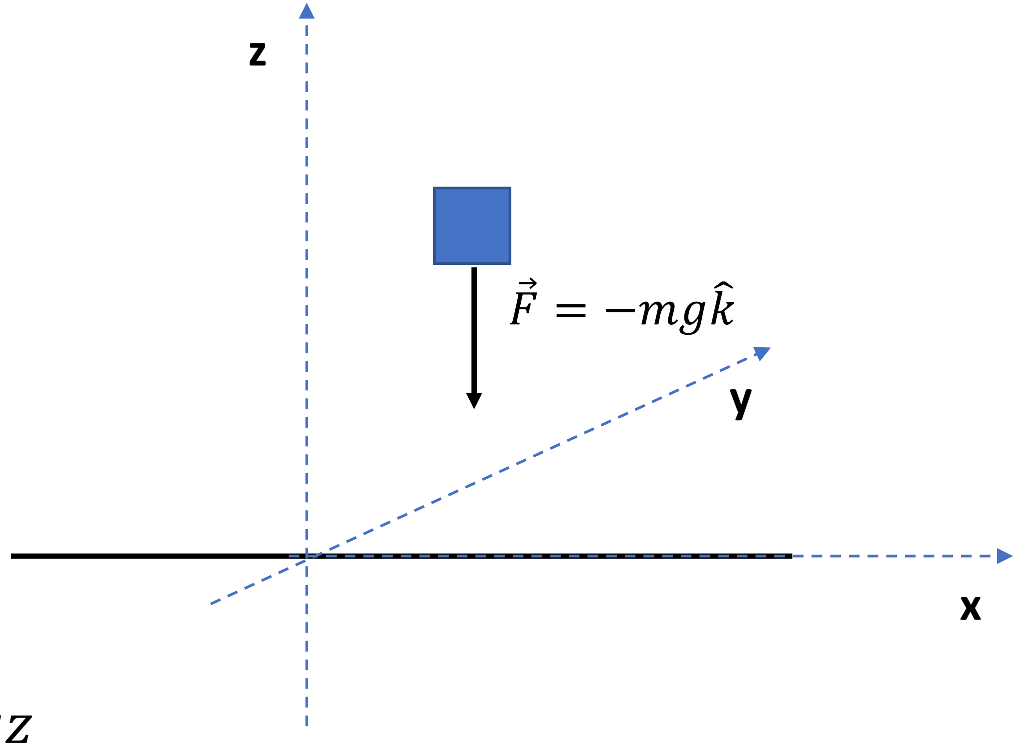
Esempi significativi di forze conservative:

- **Forza gravitazionale**
- **Forza elettrostatica**
- **Forza elastica**

Esempio: forza peso

Il lavoro della forza peso è nullo nelle direzioni x ed y

$$\vec{F}\,.\,d\vec{r} = F_z\,dz \qquad L_{12} = \int_{z_1}^{z_2} F_z\,dz$$



Scegliamo P_0 coincidente con z=0 $\rightarrow U = L(z,0)$

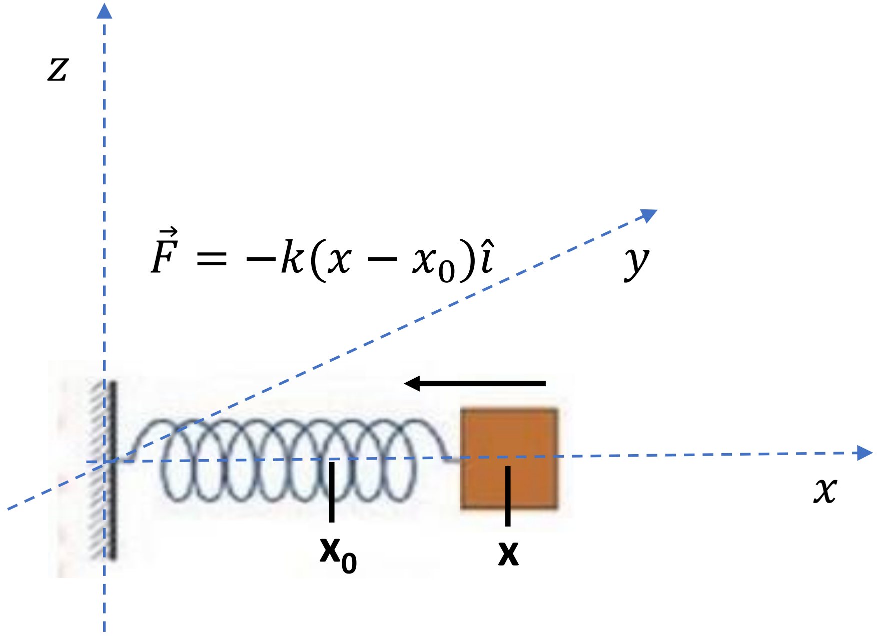
$$U(z) = \int_z^0 F_z\,dz = \int_z^0 -mg\,dz = [-mgz]_z^0 = mgz$$

$$\boldsymbol{U(z) = mgz}$$

Esempio: forza elastica

Il lavoro della forza elastica è nullo nelle direzioni y e z

$$\vec{F}\,.\,d\vec{r} = F_x\,dx \qquad L_{12} = \int_{x_1}^{x_2} F_x\,dx$$



Scegliamo P$_0$ coincidente con $x = x_0 \quad \rightarrow U = L(x, x_0)$

$$U(x) = \int_x^{x_0} F_x\,dx = \int_x^{x_0} -k(x - x_0)\;dx = \left[-\frac{1}{2}k(x - x_0)^2\right]_x^{x_0} = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$$

$$\boldsymbol{U(x) = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2}$$

Conservazione dell'Energia Meccanica

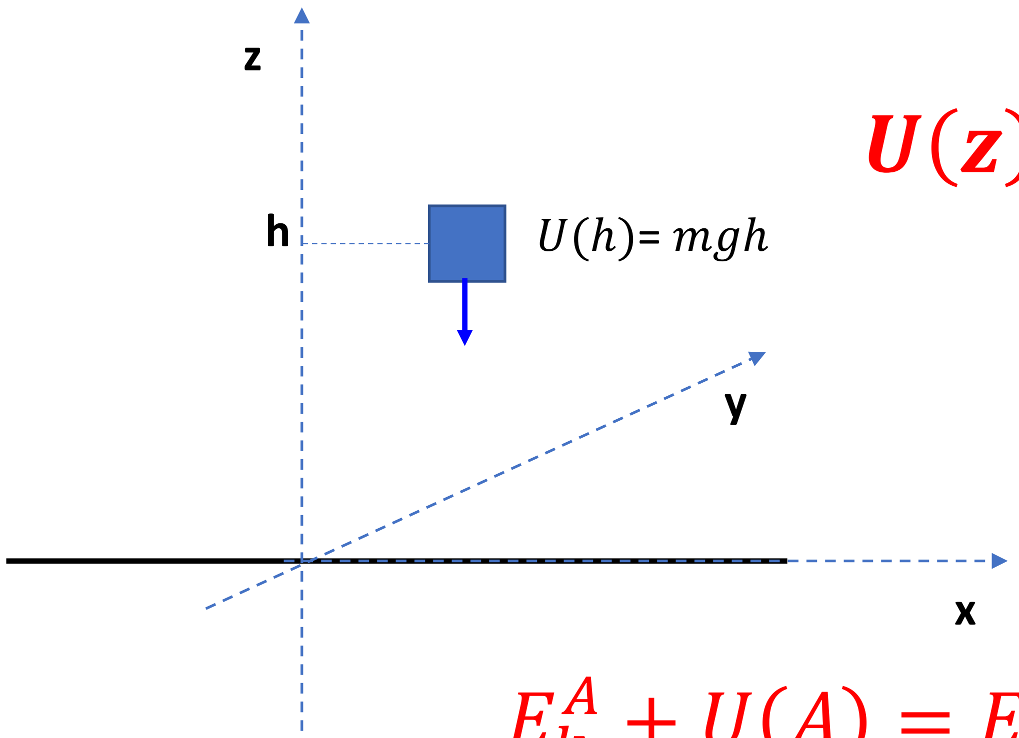
$$L_{AB} = E_k^B - E_k^A$$ Teorema dell'Energia Cinetica

$$L_{AB} = U(A) - U(B)$$ Lavoro di una forza Conservativa

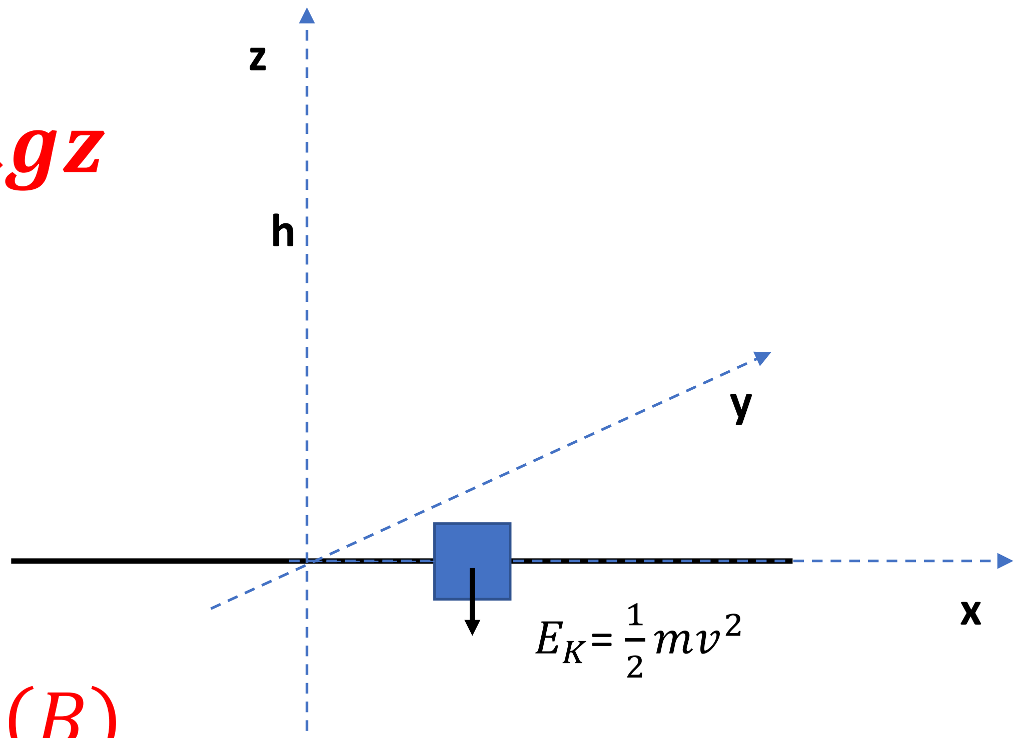
⬇ Conservazione dell'energia meccanica per le forze conservative

$$E_k^A + U(A) = E_k^B + U(B)$$

Esempio: forza peso….. conservazione dell’energia



$$U(z) = mgz$$

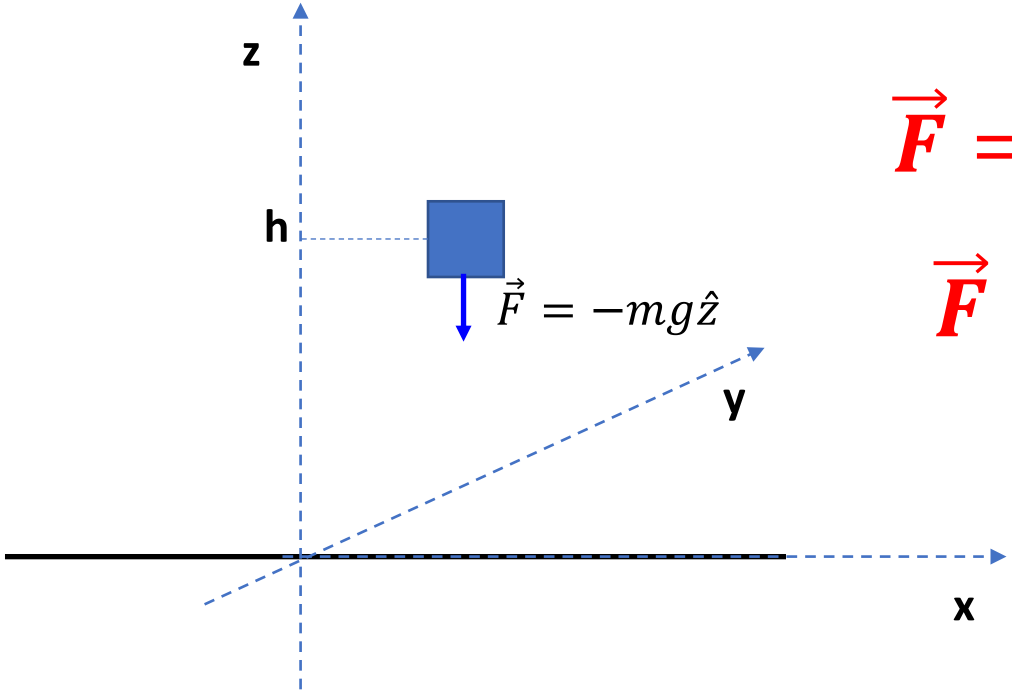


$$E_k^A + U(A) = E_k^B + U(B)$$

$$E_k^h + U(h) = E_k^0 + U(0) \qquad mgh = \frac{1}{2} m\, v^2$$

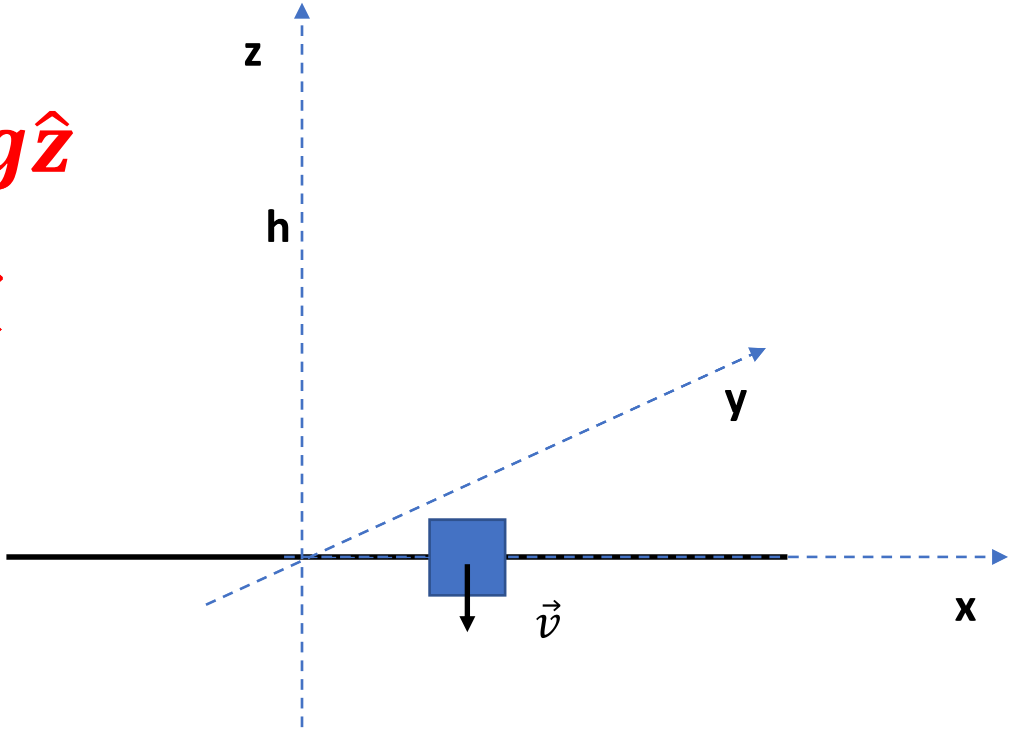
$$|v| = \sqrt{2gh}$$

Esempio: forza peso … dinamica



$$\vec{F} = -mg\hat{z}$$

$$\vec{F} = m\vec{a}$$



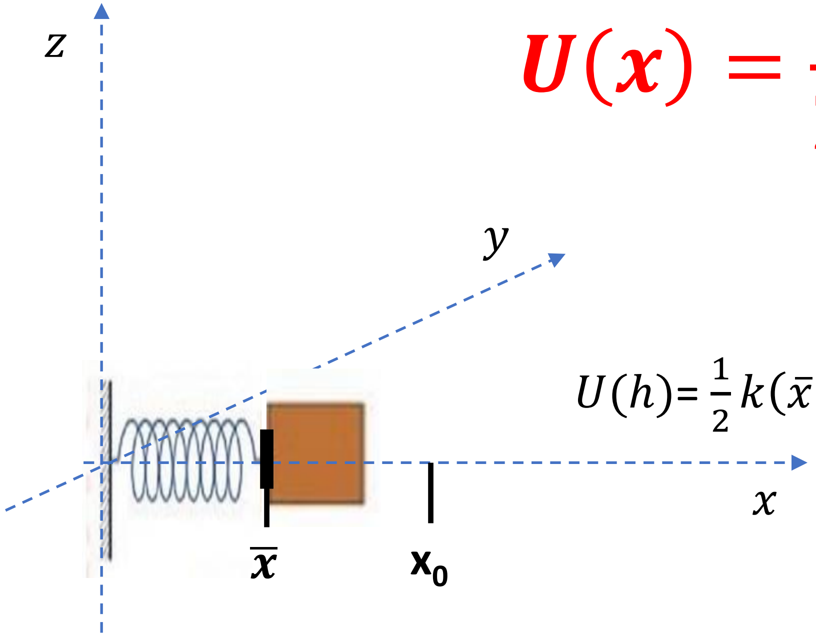
$$\vec{a} = -g\hat{z} \qquad a_z = -g \qquad v_0 = 0 \qquad z_0 = h$$

$$v_z = -gt + v_0 \qquad z = -\frac{1}{2}gt^2 + z_0$$

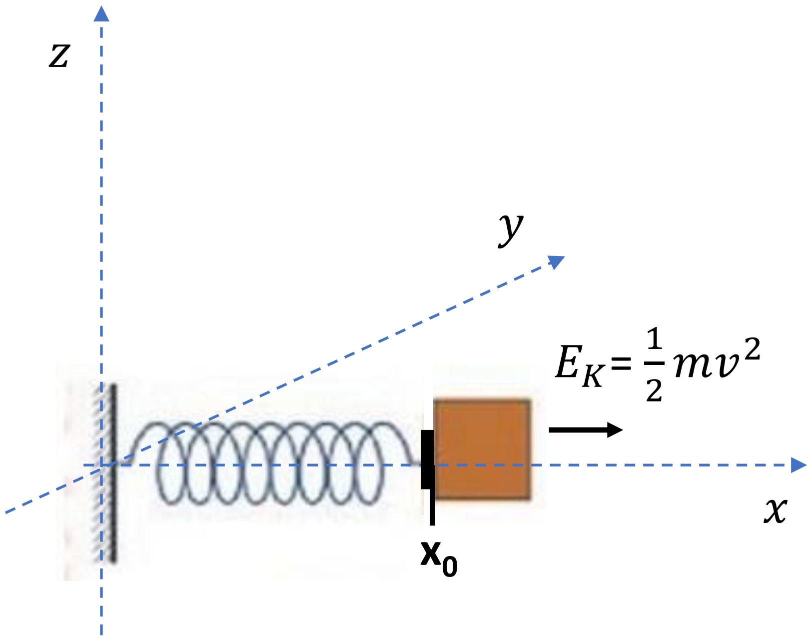
$$0 = -\frac{1}{2}g\bar{t}^2 + h \qquad \bar{t} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \qquad \overline{v_z} = -g\sqrt{\frac{2h}{g}} = -\sqrt{2gh} \Rightarrow |v| = \sqrt{2gh}$$

Esempio: forza elastica

$$U(x) = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$$



$$U(h) = \frac{1}{2}k(\bar{x} - x_0)^2 = k\,\Delta x^2$$

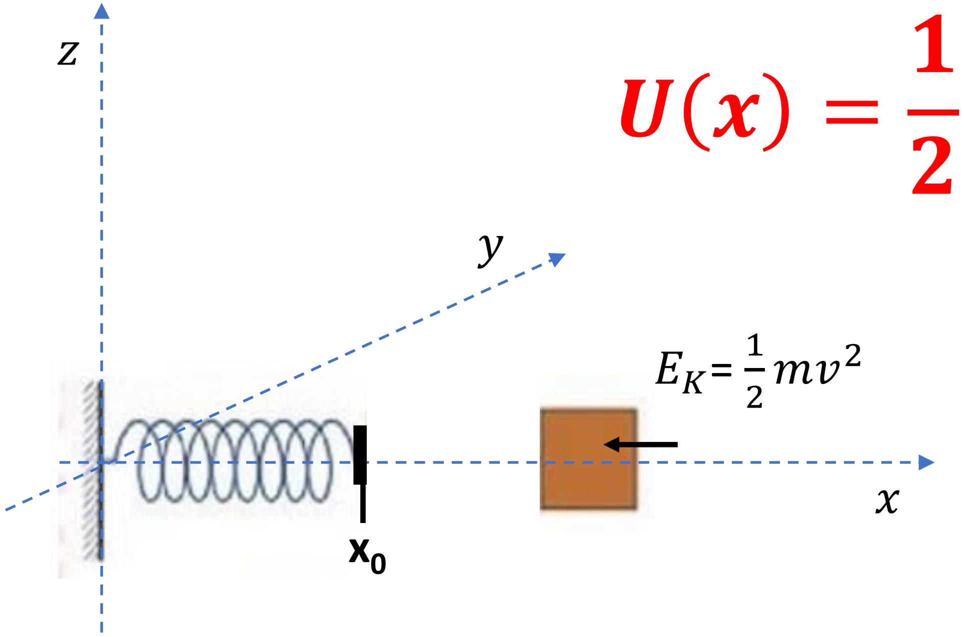


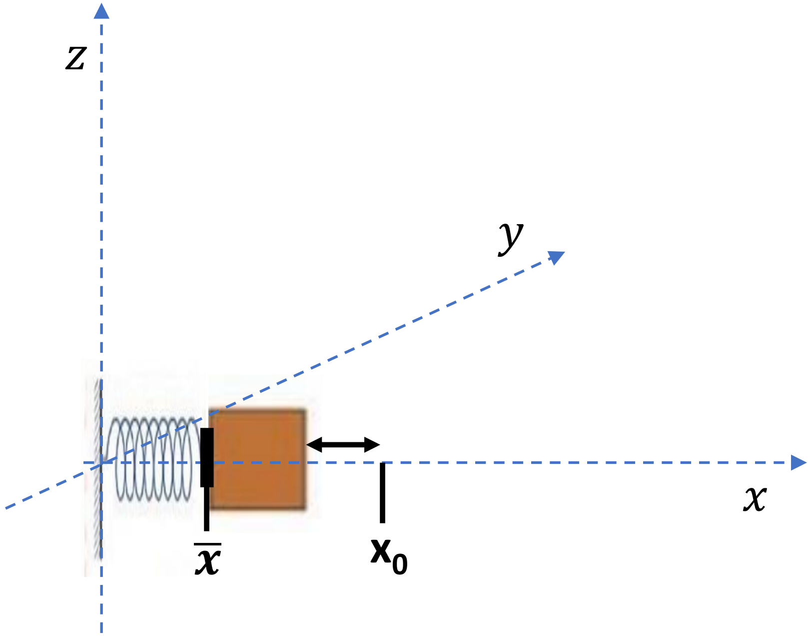
$$E_k^{\bar{x}} + U(\bar{x}) = E_k^0 + U(0)$$

$$\frac{1}{2}k\Delta x^2 = \frac{1}{2}m\,v^2 \longrightarrow |v| = |\Delta x|\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Esempio: forza elastica

$$U(x) = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$$



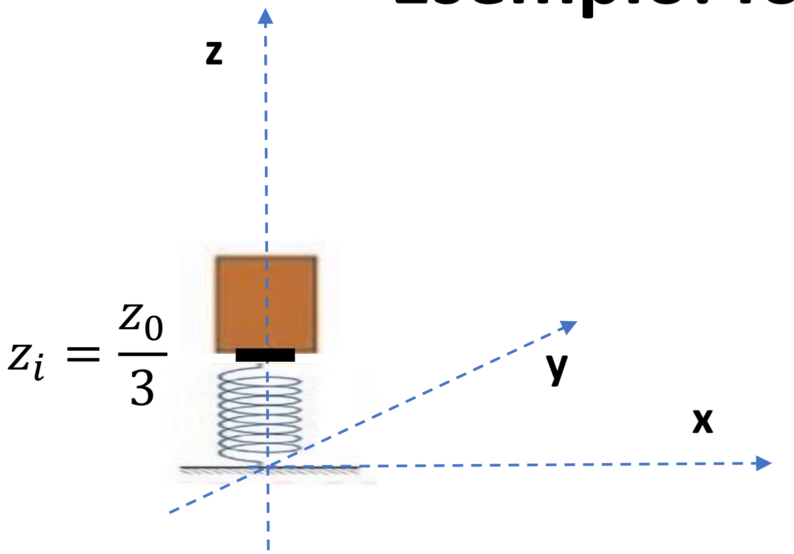


$$E_k^0 + U(0) = E_k^{\bar{x}} + U(\bar{x})$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}k\Delta x^2$$

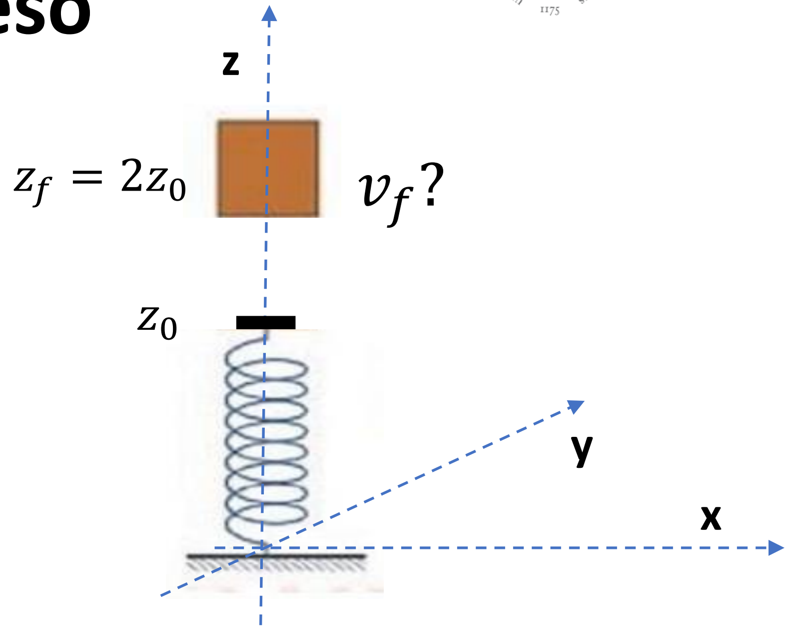
$$|\Delta x| = |v|\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Esempio: forza elastica e forza peso



$$U_{el}(z) = \frac{1}{2}k(z - z_0)^2$$

$$U_{peso}(z) = mgz$$



$$E_m^i = E_m^f \rightarrow \quad \frac{1}{2}k(z_i - z_0)^2 + mgz_i = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgz_f$$

$$\frac{1}{2}k\left(\frac{z_0}{3} - z_0\right)^2 + mg\frac{z_0}{3} = \frac{1}{2}mv_f^2 + 2mgz_0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_f^2 = \frac{2}{9}kz_0^2 - \frac{5}{3}mgz_o$$

$$v_f = \sqrt{\frac{4}{9}\frac{kz_0^2}{m} - \frac{10}{3}gz_0}$$

Forza ed Energia potenziale

Caso particolare: forza peso

$$U(z) = mgz \quad \Rightarrow \quad -\frac{dU(z)}{dz} = -mg = F_z$$

Caso particolare: forza elastica

$$U(x) = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 \quad \Rightarrow \quad -\frac{dU(x)}{dx} = -k(x - x_0) = F_x$$

In generale

$$U(x,y,z) = \int_r^{P_0} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = -\vec{\nabla}U \equiv -\frac{\partial U(x)}{\partial x}\hat{\imath} - \frac{\partial U(y)}{\partial y}\hat{\jmath} - \frac{\partial U(z)}{\partial z}\hat{k}$$

Grafico dell'energia potenziale

- Si puo' usare la curva dell'energia potenziale U(x) per ricavare in ogni punto la forza → Infatti, essendo $F_x = -dU(x)/dx$ la forza e' la pendenza di U(x) cambiata di segno

- Consideriamo un ipotetica funzione energia potenziale U(x)

– I punti di massimo e di minimo della funzione U(x) corrispondono a punti dove $F_x = 0$
  - punti di equilibrio

– Ogni punto di minimo di U(x) e' una posizione di equilibrio stabile (per spostamenti da questa posizione agisce una forza di richiamo)

– Ogni punto di massimo di U(x) e' una posizione di equilibrio instabile (spostamenti da questa posizione agisce una forza che allontana ulteriormente dalla posizione)