DISPOSIZIONI, PERMUTAZIONI

Una **disposizione semplice** di n oggetti a k a k è una $k-$upla ordinata di k oggetti scelti tra gli n dati (ovviamente: $k \leq n$).
Ad es. le disposizioni di 3 oggetti a, b, c a 2 a 2 ($n = 3$, $k = 2$), sono:

$$(a, b), \quad (b, c), \quad (c, a), \quad (b, a), \quad (c, b), \quad (a, c).$$

Si dice anche "disposizione semplice di n oggetti in classe k". L'aggettivo "semplice" vuol dire "senza ripetizioni"; il nome "disposizione" vuol dire che ha importanza l'ordine.

Proposizione. *Il numero di disposizioni semplici di n oggetti a k a k è il prodotto di k numeri naturali decrescenti a partire da n:*

$$D(n; k) = n(n-1)...(n-k+1)$$

Infatti: riempiamo k caselle in ordine: nella prima ho n possibilità di scelta, nella seconda $(n-1)$, ..., nella $k-$esima ho $n-k+1$ possibilità di scelta. $\square$

Ad es. in quanti modi 5 amici possono sedersi su tre sedili numerati di un treno? La domanda dà importanza all'ordine (primo sedile, secondo sedile, terzo sedile), e non ci sono ripetizioni della stessa persona. Quindi si tratta delle disposizioni semplici di 5 persone a 3 a 3: $D(5; 3) = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ modi diversi di occupare i tre posti!

CON LA CALCOLATRICE

Con la calcolatrice tascabile si usa l'operatore binario nPr, che di solito è azionabile usando prima "SHIFT". Ad esempio

$$D(9; 4) \quad = \quad 9 \ \ SHIFT \ \ nPr \ \ 4 \quad = \quad 3024$$

Una **permutazione** di n oggetti è una $n-$ upla i cui elementi sono tutti gli n oggetti. Detto altrimenti: è una disposizione semplice degli n oggetti: si tratta del caso $k = n$.

Proposizione. *Il numero di permutazioni di n oggetti è il prodotto dei primi n numeri naturali:*

$$P(n) = \ n(n-1)...4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \quad \equiv \ n!$$

[Il simbolo $n!$ si legge "n fattoriale" e designa il prodotto dei primi n numeri naturali].

Infatti: una permutazione di n oggetti una disposizione semplice di n oggetti ad n ad n. Quindi $P(n) = D(n;n) = n!$ □

Ad es.: in quanti modi 5 clienti possono mettersi in fila allo sportello di banca? Risposta: tanti quanti i modi di mettere in ordine 5 persone; cioè il numero di permutazioni di 5 oggetti: $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

CON LA CALCOLATRICE
Con la calcolatrice tascabile si usa l'operatore $x!$, che di solito è azionabile usando prima "SHIFT". Ad esempio

$$9! \quad = \quad 9 \ \ SHIFT \ \ x! \quad = \quad 362880$$

Una **disposizione con ripetizione** di n oggetti a k a k e una $k-$ upla i cui elementi sono gli n oggetti dati, con la possibilità di ripetizione.
Si noti che k può anche essere maggiore di n. Si dice anche: "disposizione con ripetizione di n oggetti in classe k". Il nome "disposizione" vuol dire che ha importanza l'ordine; l'espressione "con ripetizione" vuol dire che sono permesse ripetizioni.

Ad esempio ecco le diposizioni con ripetizione dei tre oggetti dati a, b, c a due a due (quindi: $n = 3, \ \ k = 2$):

$$(a, a), \ (a, b), \ (b, a), \ (b, b), \ (b, c), \ (c, b), \ (a, c), (c, a), (c, c)$$

Proposizione *Il numero di disposizioni con ripetizione di n oggetti a k a k è:*

$$D^R(n; k) \ = \ n^k.$$

Infatti: ogni disposizione una k-upla. Occupiamo le k posizioni di $k-$upla in ordine: nella prima posizione ho n possibilità, nella seconda ho ancora n

possibilità, ecc. Quindi: numero di oggetti elevato al numero di posizioni. O anche: numero di oggetti elevato al numero di classe. $\square$

Ad esempio: considerando dadi usuali con sei facce, quanti sono gli esiti possibili del lancio di tre dadi?

Gli esiti elementari sono del tipo

$$(1,1,1),\ (1,1,2),\ \dots\ ,\ (6,6,5),\ (6,6,6)$$

Si tratta di $3-$uple i cui elementi sono $1,2,...,6$, con ripetizione.

Sono le disposizioni con ripetizione di $n=6$ simboli a 3 a 3:

$$D^R(6;3) = \ 6^3 = 216.$$

ESERCIZIO 1.α

In quanti modi, tenendo in conto l'ordine, 10 persone possono sedersi su una panchina che ha solo 4 posti?

R.: 5040

ESERCIZIO 1.β

Se una targa é fatta di due lettere, tre cifre e due lettere, quante targhe si possono costruire?

R.: $\simeq 4.57 \cdot 10^8$

ESERCIZIO 1.γ

Si chiede di far sedere in fila 5 uomini e 4 donne in modo tale che le donne occupino i posti pari. Quante sono le sistemazioni possibili?

R.: 2880

ESERCIZIO 1.δ

Quanti sono i numeri di 4 cifre con le cifre $0, 1, 2, .., 9$ se si ammettono delle ripetizioni?

R.: 9000

ESERCIZIO 1.ϵ

Trova la probabilità che almeno due fra 14 persone abbiano lo stessa data di compleanno.

R.: 0.223

ESERCIZIO 1.ζ

In uno scaffale ci sono 10 libri, 3 di matematica e 7 di fisica; trova la probabilità che i 3 libri di matematica si trovino insieme.

R.: 0.066

ESERCIZIO 1.η

Un carattere è una lettera o una cifra. Una password è formata da 8 caratteri col vincolo che almeno un carattere sia una cifra. a) Quante password possono esserci? b) Se vengono generati a caso 8 caratteri, e ogni carattere ha la stessa probabilità di essere una delle 26 lettere o una delle 10 cifre, trova la probabilità che sia generata una password valida.

R.: a) $2.61 \cdot 10^{12}$; b) 0.925