8 MEDIA E VARIANZA. V.A.STANDARDIZZATA. FUNZIONE GENERATRICE DEI MOMENTI

Def. *Media o speranza matematica* di una variabile casuale X discreta:

$$\mu \equiv E(X) := \sum x_j f(x_j)$$

sotto l'assunzione che sia assolutamente convergente la corrispndente serie numerica: $\sum |x_j| f(x_j) < +\infty$.

Media o speranza matematica di una variabile X continua:

$$\mu \equiv E(X) := \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx.$$

sotto l'assunzione che sia assolutamente convergente il corrispondente integrale: $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x) dx < +\infty$.

Oss. La media (o valor medio o speranza) appena definita dipende dalla variabile casuale esaminata; essa, nel caso discreto, è la somma dei valori x_j moltiplicati per le rispettive probabilità $f(x_j) \equiv P(X = x_j)$.

Invece, per evitare confusioni, si rammenti che la somma di tutte le probabilità $f(x_j)$ è uno, qualunque sia la variabile casuale X: $\sum f(x_j) = \sum P(X = x_j) = 1$. Nel caso continuo, l'integrale su tutto R della densità è 1:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = P(-\infty < X < +\infty) = 1.$$

Def. Si dice scarto di una v.a. X, avente media μ, la v.a. differenza $X - \mu$. Si dice *varianza* la media, se esiste finita, dello scarto al quadrato:

$$Var(X) \equiv \sigma^2 \ := \ E[(X - \mu)^2].$$

Nel caso discreto e in quello assolutamente continuo ciò si traduce nelle seguenti espressioni.

Se X è una v.a. discreta con valori x_i e con funzione di probabilità f, la varianza è la somma degli scarti al quadrato moltiplicati per le rispettive probabilità:

$$\sigma^2 \equiv Var(X) \ := \sum_i (x_i - \mu)^2 \cdot f(x_i).$$

Se X è assolutamente continua con densità di probabilità $f(x)$, la varianza è l'integrale della scarto al quadrato $(x-\mu)^2$ moltiplicato per la densità:

$$\sigma^2 \equiv Var(X) := \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)\ dx.$$

La radice quadrata della varianza si dice deviazione standard e si indica σ.

Oss. La varianza è nulla solo quando X è una variabile "degenere" o "costante": essa assume un unico valore (diciamo $x_\circ$) con probabilità 1:

$$\mu = x_\circ; \qquad \sigma^2 = (x_\circ - x_\circ)^2 \cdot 1 = 0.$$

Eccetto che in questo caso, la varianza è sempre strettamente positiva.
Non sempre esiste finita la varianza. Ad esempio se f è la densità di Cauchy, $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, non esiste finita né media né varianza.

Oss. La varianza misura quanto è dispersa la variabile aleatoria rispetto alla media; e lo fa in termini di dispersione quadratica (se ad es. X è in Kg, allora σ^2 è in Kg^2). La deviazione standard riporta alla dimensione lineare la misura della dispersione rispetto alla media.

PROPOSIZIONE (per abbreviare il calcolo della varianza)
La varianza di una v.a., se esiste finita, è uguale alla differenza tra la media del quadrato di X e il quadrato della media di X:

$$\sigma^2 \ = \ E(X^2) - \mu^2$$

Dimostrazione. -
Per fissare le idee supponiamo X assolutamente continua:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x^2 - 2\mu x + \mu^2) f(x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - 2\mu \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx + \mu^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

dove nel primo integrale riconosciamo la media di X^2, nel secondo integrale riconosciamo la media di X, mentre l'ultimo è l'integrale di $f(x)$ che è 1. Quindi il tutto è:

$$= E(X^2) - 2\mu \cdot \mu + \mu^2 \cdot 1 = E(X^2) - \mu^2. \quad \square$$

Es. Supponiamo che la probabilità di essere mancino sia 0.3. La variabile casuale

$$X: \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix}$$

ha media e varianza rispettivamente $\mu = 0 \cdot 0.7 + 1 \cdot 0.3 = 0.3$ e

$$\sigma^2 = (0 - 0.3)^2 \cdot 0.7 + (1 - 0.3)^2 \cdot 0.3 = 63/1000 + 147/1000 = 0.21$$

Stesso risultato usando la via breve di calcolo:

$$E(X^2) - E(x)^2 = 0^2 \cdot 0.7 + 1^2 \cdot 0.3 - 0.3^3 = 0.3(1 - 0.3) = 0.21$$

Prendiamo ora Y = numero di mancini fra 2 individui. Usiamo l'indipendenza: la probabilità che siano ambedue destri è il prodotto 0.7^2; che siano il primo destro e il secondo mancino o viceversa è il doppio del prodotto $0.7 \cdot 0.3$; che siano entrambi mancini è il prodotto 0.3^2:

$$Y := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ (0.7)^2 & 2 \cdot (0.7)(0.3) & (0.3)^2 \end{pmatrix}$$

Allora media e varianza si calcolano così:

$$\mu = E(Y) = 0 \cdot 0.49 + 1 \cdot 0.42 + 2 \cdot 0.09 = 0.6$$

$$\sigma^2 = (0 - 0.6)^2 \cdot 0.49 + (1 - 0.6)^2 \cdot 0.42 + (2 - 0.6)^2 \cdot 0.09 = 0.42$$

Con la formula breve

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = 1^2 \cdot 2 \cdot 0.7 \cdot 0.3 + 2^2 \cdot 0.3^2 - 0.6^2 = 0.42$$

La deviazione standard è la radice della varianza:

$$\sigma = \sqrt{0.42} \simeq \; 0.65. \quad \square$$

Teorema (trasformazione affine di v.a.) Se una v. a. X ha media μ e varianza σ^2, allora la v.a. $X^* = c_1 X + c_2, \quad c_1 \neq 0$, ha media e varianza:

$$\mu^* = c_1\mu + c_2, \quad \sigma^{*\,2} = c_1^2\sigma^2.$$

Dim. Lo proviamo nel caso discreto. La v.a. $X^* = c_1\mu + c_2$ è la seguente:

$$\begin{pmatrix} c_1x_1 + c_2 & c_1x_2 + c_2 & ... & c_1x_n + c_2 & ... \\ f(x_1) & f(x_2) & ... & f(x_n) & ... \end{pmatrix}$$

Pertanto

$$\mu^* = \sum (c_1x_j + c_2)f(x_j) = c_1 \sum x_j f(x_j) + c_2 \sum f(x_j) = c_1\mu + c_2$$

$$(\sigma^*)^2 = \sum (c_1x_j + c_2 - c_1\mu - c_2)^2 f(x_j) =$$

$$= (c_1)^2 \sum (x_j - \mu)^2 f(x_j) = (c_1)^2\sigma^2$$

Corollario (variabile standardizzata) Se X ha media μ e varianza σ^2, allora la corrispondente variabile aleatoria

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

ha media 0 e varianza 1.

Dim.
Basta prendere $c_1 = \frac{1}{\sigma}, \quad c_2 = -\frac{\mu}{\sigma}$. Allora

$$c_1X + c_2 = \frac{1}{\sigma}X - \frac{\mu}{\sigma}$$

ha media e varianza rispettivamente:

$$\frac{\mu}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma} = 0, \quad c_1^2\sigma^2 = (\sigma^{-1})^2\sigma^2 = \ 1. \qquad \square$$

La standardizzazione di una v.a. consente di riportare i valori di X a "unità standard",

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_j & ... \\ p_1 & p_2 & ... & p_j & ... \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad Z \sim \begin{pmatrix} \frac{x_1-\mu}{\sigma} & \frac{x_2-\mu}{\sigma} & ... & \frac{x_j-\mu}{\sigma} & ... \\ p_1 & p_2 & ... & p_j & ... \end{pmatrix}$$

Il vantaggio è di avere media nulla e varianza 1. Inoltre in unità standard le variabili risultano adimensionali (ad esempio se X è in Kg, Z è un numero puro) e si possono confrontare le loro variabilità statistiche sebbene siano di dimensioni diverse.

Infine, ecco la funzione generatrice dei momenti, utile a calcolare di fatto media e varianza.

Lemma sulla funzione generatrice. *Sia X una v.a. Se esistono finiti i momenti $E[X^n]$, $\forall n \in N$, e se esiste finita la funzione,*

$$G(t) = E[e^{tX}] = \begin{cases} \sum_j e^{tx_j} f(x_j), & \textit{nel caso discreto} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)\, dx & \textit{nel caso continuo} \end{cases} \qquad (t \in R),$$

allora $G(t)$ soddisfa

$$E(X) \equiv \mu \ = \ G'(0), \qquad E(X^2) \ = \ G''(0), \dots, E(X^n) = G^{(n)}(0).$$

G è detta "funzione generatrice dei momenti".

Dim. Infatti, derivando sotto il segno di serie (o di integrale)

$$G'(t) = E[\ \frac{d}{dt} e^{tX}\ ] \ = \ E[\ X e^{tX}\ ], \qquad G''(t) = E[\ \frac{d^2}{dt^2} e^{tX}\ ] \ = E[\ X^2 e^{tX}\ ].$$

I momenti sono dunque:

$$G'(t)|_{t=0} = E(X), \quad G''(t)|_{t=0} = E(X^2), ..., G^{(n)}(0) = E(X^n).$$

$\square$

(8) Il segreto per vivere tutto ciò senza pesantezza è quello di sforzarsi, attraverso le risposte che i libri ci riportano, di rintracciare le domande degli uomini e delle donne che hanno attraversato l'avventura della vita prima di noi. Certo, tu potresti dirmi che oggi viviamo in un'epoca ricchissima di informazioni e che c' sempre ""mamma"" Google.com, che confeziona i dati desiderati in 0.15 secondi... Eppure fare ricerca è regalarsi del tempo prezioso per cogliere le domande giuste, per farle vivere e maturare, per permettere loro di condurci verso le risposte e verso altre domande. **Caro amico, cara amica, amate le domande con tutte le vostre forze.**

Esercizio 8.α

- Il numero X di difetti di un certo prodotto è $0, 1, 2, 3$ con rispettive probabilità:

$$P(X = 0) = 0.38,\ P(X = 1) = 0.29,\ P(X = 2) = 0.20,\ P(X = 3) = 0.13$$

a) Trova la varianza di X; b) trova i valori della standardizzata di X.

[a) $\sigma^2 = 1.09$, $\sigma = 1.04$; b) $(-1.03; -0.076; 0.88; 1.84)$]

Esercizio 8.β

Una ditta chimica vende un certo solvente in fusti da 10 Kg. Il numero X di fusti acquistati da un cliente a caso è una v.a. discreta con la seguente funzione di ripartizione:

$$\text{per } x = 1, 2, 3, 4, 5, \quad F(x) = 4/10, 6/10, 8/10, 9/10, 1.$$

Inoltre chiamiamo Y il numero di Kg acquistati. Trova: a) il numero medio di fusti acquistati; b) la varianza del numero di Kg acquistati.

[a) $\mu_X = 2.3$; b) $\sigma_Y^2 = 181$]

Esercizio 8.γ

La funzione distribuzione $F(x)$ di una variabile aleatoria X discreta ha questi valori:

$$\text{per } \ x = 20,\ 25,\ 30,\ 44,\ 51$$

$$F(x) = \qquad 0.10,\ 0.40,\ 0.70\ 0.80,\ 1$$

Trova: a) media e varianza di X; b) i valori della v.a. standardizzata di X.

R.: a) $\mu = 33.1$; $\sigma^2 = 115.69$

$$b) \qquad Z \sim \begin{pmatrix} -1.22 & -0.75 & -0.29 & 1.01 & 1.66 \\ 0.10 & 0.30 & 0.30 & 0.10 & 0.20 \end{pmatrix}$$