SPAZIO DI PROBABILITÁ

Eventi del mondo reale sono spesso descritti da frasi. Eventi come "esce Testa nel lancio di una moneta" oppure come "in una famiglia con tre figli, i figli stessi sono due femmine e un maschio" non sono certi. Si vorrebbe attribuire loro un numero tra zero ed uno che abbia sensatamente il ruolo di "probabilitá". L'idea é descrivere l'evento con un insieme, per cui la probabilità di un evento sarebbe una sensata "misura" dell'insieme.

Ma allora anche la negazione di una frase ("non"), nonché il collegamento tra frasi mediante connettivo logico ("e" , "oppure"), esige una coerente traduzione con operazioni su insiemi:

A" : "*avviene A*"

A^C : "*non avviene A*"

$A \cup B$: "*avviene A o avviene B*"

$A \cap B$: "*avviene A e avviene B*"

$A^C \cap B^C$: "*né avviene A né avviene B*"

$A \cap B^C$: " *avviene A ma non avviene B*" , ... *etc.*

Tutto ciò motiva le due definizioni seguenti: $\sigma-$*algebra di insiemi (per fare operazioni su eventi) e spazio di probabilità (per dare una misura o probabilitá a ogni evento e fare un "calcolo delle probabilitá".*

Def. *Sia* Ω *un insieme. Una famiglia* Σ *di sottoinsiemi di* Ω *si dice* $\sigma-$*algebra se:*

1) $\Omega, \ \emptyset \ \in \Sigma$

2) $A \in \Sigma \quad \Longrightarrow \quad \Omega - A \equiv A^C \ \in \Sigma$

3) $A_1, A_2, ... \in \ \Sigma \quad \Longrightarrow \quad A_1 \cup A_2 \cup ... \in \Sigma$

In altri termini, una famiglia Σ *di sottoinsiemi di* Ω *è una* $\sigma-$*algebra se comprende* Ω *stesso e l'insieme vuoto, e inoltre è chiusa rispetto alla complementazione e all'unione numerabile.*

Nota. - A che scopo selezionare una famiglia di sottoinsiemi di Ω? Lo scopo è fare una *teoria della misura* consistente, senza contraddizioni. Queste ci sarebbero in analisi reale, ad esempio, se pretendessimo di attribuire una misura ad ogni sottoinsieme di $\Omega = \mathrm{R}$.
In probabilità se lo spazio Ω è finito, di solito conviene usare come $\sigma-$algebra l'insieme delle parti di Ω, cioè l'insieme di tutti i sottoinsiemi di Ω.

Se $\Omega = \mathrm{R}$ oppure $\Omega = R^n$, per $n \in \mathrm{N}$, la $\sigma-$ algebra di gran lunga più utilizzata è la minima $\sigma-$algebra contenente i sottoinsiemi aperti di Ω (naturalmente "aperti" rispetto alla metrica usuale, di R o di R^n). Essa è denominata "$\sigma-$algebra di Borel", o famiglia degli insiemi "Boreliani". Tale famiglia si ottiene anche partendo da sottofamiglie più ristrette, usando le operazioni di unione numerabile e complementazione. Fra tali sottofamiglie notevoli di sottoinsiemi di $\Omega = \mathrm{R}$ segnaliamo gli intervalli semichiusi a destra $(a, b]$, con $a < b$, $a, b \in R$. Essa è sufficiente a generare la famiglia dei Boreliani: ad es. ogni intervallo aperto (a, b) si può ottenere come unione numerabile $\cup_n (a, b - \frac{1}{n}]$.

Def. *Uno spazio di probabilità è una terna* (Ω, Σ, P) *dove:* Ω *è un insieme non vuoto,* Σ *è una* $\sigma-$*algebra di sottoinsiemi di* Ω *(detta famiglia degli eventi),* P *è una legge a valori in* $[0, 1]$ *(detta probabilità) tali che*

1) per ogni evento $A \in \Sigma$ *esiste il numero* $P(A)$ *compreso fra* 0 *ed* 1 *detto "probabilità dell' evento* A*";*

2) $P(\Omega) = 1, \quad P(\emptyset) = 0$*;*

3) la probabilità P *è numerabilmente additiva su ogni successione di eventi a due a due disgiunti:*

$$\textit{dati gli eventi} \quad \{A_i\}_{i \in N}, \ \textit{con} \quad A_i \cap A_j = \emptyset, \ forall i \neq j, \quad \textit{si ha}$$

$$P[\ \cup_{i=1}^{\infty} A_i\ ] \ = \ \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \ \equiv \ \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

[In particolare per ogni coppia di eventi A, B *disgiunti si ha* $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$*.]*

Teorema (regola di addizione per eventi arbitrari). *Se* A, B *sono eventi arbitrari in uno spazio di probabilità* Ω*, allora*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Dim. Scriviamo A come unione disgiunta di $A-B$ e $A\cap B$, e analogamente facciamo per B :

$$A=(A-B)\cup(A\cap B),\qquad B=(B-A)\cup(A\cap B).$$

Allora applicando due volte l'additività (3):

$$P(A)+P(B)=P(A-B)+P(A\cap B)+P(B-A)+P(A\cap B)=$$

$$=P[(A-B)\cup(A\cap B)\cup(B-A)]+P(A\cap B)=P(A\cup B)+P(A\cap B)$$

da cui la tesi sottraendo $P(A\cap B)$ al primo e all'ultimo membro.

Teorema (regola di complementazione) *Se $E\subset\Omega$ è un evento ed $E^C\equiv\Omega-E$ è l'evento complementare, si ha*

$$P(E)=1-P(E^C).$$

Dim. Si può applicare la (3) perché sono due eventi disgiunti.

Oss. Se lo spazio di probabilità Ω è costituito da un numero finito di elementi, la famiglia Σ degli eventi coincide con la famiglia di tutti i sottoinsiemi di Ω. In tal caso, se gli elementi di Ω sono $\omega_i,\quad i=1,2,...,n,$, si fa spesso l'ipotesi di *"eventi elementari equiprobabili"*, il che significa attribuire probabilità $\frac{1}{n}$ a ciascun evento elementare $\{\omega_i\}$. E' in questo caso che vale la definizione classica di probabilità come **"numero dei casi favorevoli diviso il numero di casi possibili".**

ESEMPIO

Esempio tipico è il dado non truccato, dove si definisce:

$$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\},\ P(1)=\frac{1}{6},...,P(6)=\frac{1}{6}.$$

Così potremo calcolare, ad es., la probabilità degli eventi

$$A:\ \text{esce un numero pari},\quad B:\ \text{esce un numero minore di 3}$$

$$P(A)=P(2)+P(4)+P(6)=\frac{1}{2},\ \ P(B)=P(1)+P(2)=\frac{1}{3}\quad\square$$

ESEMPIO

La probabilità che in cinque lanci di una moneta esca "testa" almeno una volta si trova introducendo l'appropriato spazio di probabilità

$$\Omega = \text{ insieme delle 5-uple ordinate di lettere "T" o "C"}$$

In questo spazio l'evento "non esce alcuna testa" è costituito dall'unica 5-upla (C, C, C, C, C) per cui l'evento $A =$ "esce almeno una testa" ha probabilità

$$P(A) = 1 - P(A^C) = \frac{31}{32}.$$

ESEMPIO
La probabilità che almeno due fra 20 persone abbiano compleanno nello stesso giorno dell'anno è superiore o inferiore a $\frac{1}{2}$?

Soluzione: Consideriamo non solo l'evento descritto, ma anche il suo complementare:

$$A = \text{ almeno due tra i 20 compleanni coincidono"}$$

$$A^C = \text{ "i 20 compleanni sono tutti distinti"}$$

Per l'evento complementare ("i 20 compleanni sono tutti distinti") non ci sono ripetizioni: il numero di casi favorevoli è il numero di disposizioni semplici di 365 date annuali a 20 a 20. Il numero di casi possibili, cioè la cardinalità di Ω, è il numero di tutte le 20-uple di date annuali, anche con ripetizioni: numero di disposizioni con ripetizione di 365 oggetti a 20 a 20:

$$P(A^C) = \frac{\#A^C}{\#\Omega} = \frac{D(365; 20)}{D^R(365; 20)}$$

$$= \frac{365 \cdot 364 \cdot ... \cdot 347 \cdot 346}{(365)^{20}} = (\frac{365}{365})(\frac{364}{365})...(\frac{347}{365})(\frac{346}{365})$$

Ma allora

$$P(A) = 1 - \frac{D(365; 20)}{D^R(365; 20)} \simeq 1 - 0.59 = 0.41 \quad \square$$

ESEMPIO
In una famiglia con tre figli, trovare la probabilità che essi siano due femmine e un maschio.

L'insieme Ω degli esiti elementari è costituito dalle terne i cui elementi sono i simboli F o M. Sono le disposizioni con ripetizione di 2 oggetti a 3 a 3. Quindi la sua cardinalità è 8: $\#\Omega = 8$. La $\sigma-$algebra è "parti di Ω".
La legge P è ispirata alla "nozione classica" che vuole

$$\text{Probabilità} \ = \ \frac{\text{n. dei casi favorevoli}}{\text{n. dei casi possibili}}$$

per cui definiamo

$$P(E) = \frac{Card(E)}{Card(\Omega)}, \qquad \forall E \in \Sigma.$$

L'evento è $E = \{(M, F, F),\ (F, M, F),\ (F, F, M)\}$, allora $P(A) = \frac{3}{8}$. $\square$

Esercizio 3.α

Trova la probabilità che, nel lancio di due dadi equi, escano due numeri dispari.

R.: $\frac{1}{4}$

Esercizio 3.β

Fra 12 persone, trova la probabilità che almeno due abbiano lo stesso compleanno.

R.: $\simeq 0.17$

Esercizio 3.γ

Da un mazzo ben mescolato di 52 carte (12 "figure" e 40 carte "numeriche"), trovare la probabilità che ci siano 4 carte numeriche in una mano di 7 carte.

R.: $\simeq 0.15$

Esercizio 3.δ

Un programma deve collocare 7 variabili in 80 celle di memoria, mettendo ogni variabile in una cella a caso. Se c'è un conflitto (due variabili nella stessa cella), l'assegnazione deve ripetersi. Trovare la probabilità che non ci sia alcun conflitto.

[Suggerimento: Usare la legge di complementazione.]

R.: $\simeq 0.24$