Legge di Gravitazione Universale

Forza di gravità

Equivalenza tra massa inerziale e massa gravitazionale

Moto orbitale

Forza di gravità in prossimità della Terra: forza peso

Lavoro della forza di gravità

Energia gravitazionale

Fuga dall'attrazione gravitazionale

Campo gravitazionale

Potenziale gravitazionale

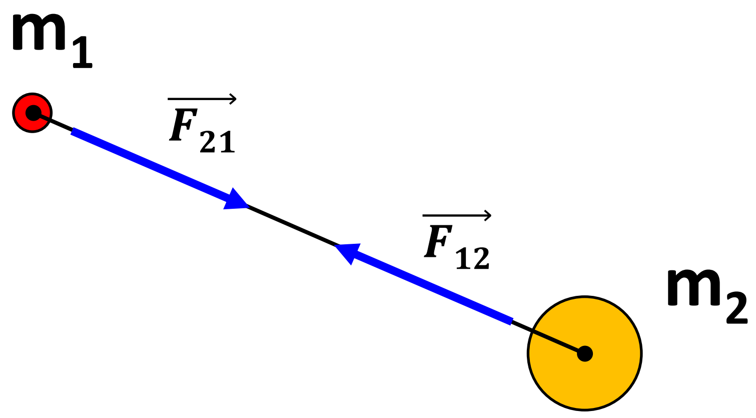
Forza di gravità

I corpi celesti, così come tutti i corpi con cui abbiamo esperienza quotidiana sono reciprocamente attratti da una forza:

$$\vec{F}_g = -\frac{G m_1 m_2}{r^2}\hat{r}$$

- proporzionale al prodotto delle masse degli oggetti
- Inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza

Direzione: lungo la congiungente i due oggetti
Verso: attrattivo



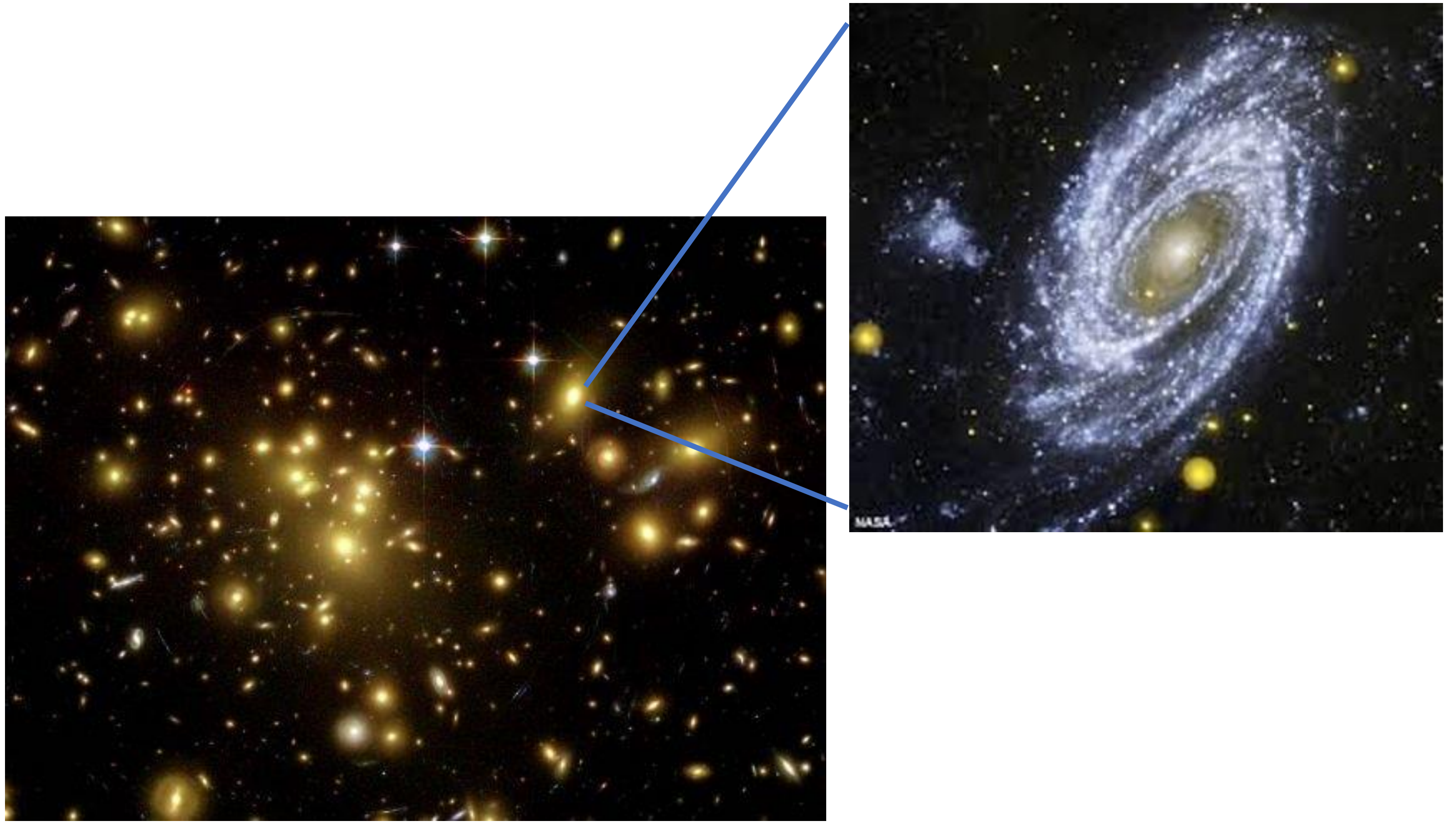
$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

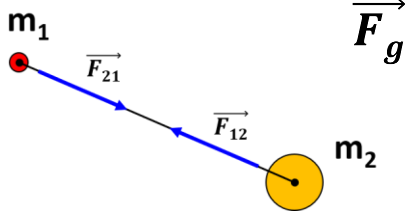
La costante di proporzionalita' **G** e' detta **costante gravitazionale** ed e' una costante universale, cioe' e' la stessa per qualsiasi coppia di oggetti in tutto l'universo.
Il valore oggi accettato e':

$$G = 6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N}\frac{m^2}{Kg^2}$$

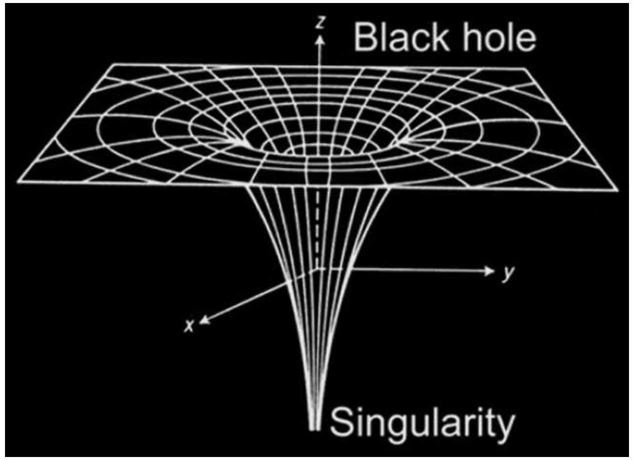
Forza di gravità

La forza gravitazionale è la forza che ci tiene attaccati al suolo terrestre ed è la forza che tiene assieme il Sistema Solare, le galassie, gli ammassi di galassie ed i super-ammassi di galassie che, insieme alla spazio vuoto, formano l'Universo. La forza gravitazionale è anche alla base della formazione dei buchi neri che potrebbero trovarsi nel centro di molte galassie





$$\overrightarrow{F_g} = -\frac{G m_1 m_2}{r^2}\hat{r}$$



Equivalenza tra massa inerziale e massa gravitazionale

Le costanti fisiche m_1 ed m_2 che appaiono nella legge di Gravità vengono chiamate **masse gravitazionali** e sono proprietà intrinseche dei corpi soggetti alla forza di gravità.

$$\vec{F}_g = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{r}$$

Nell'Universo vi sono anche particelle fondamentali che non possiedono una massa gravitazionale e quindi non sono soggette alla forza di gravità così come formulata sopra, per es. fotoni, gluoni ecc..

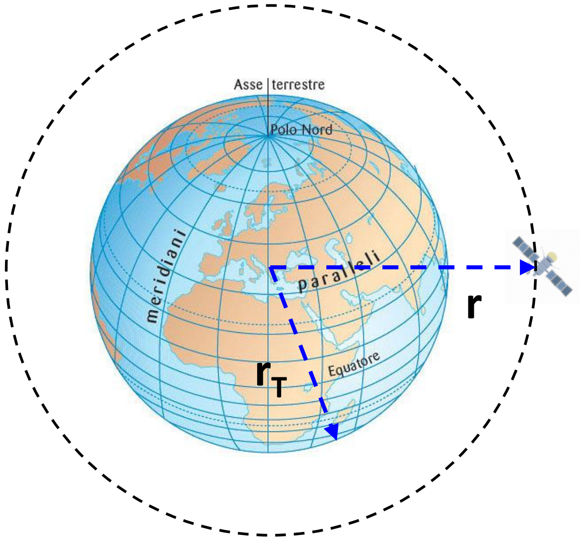
E' stato verificato sperimentalmente (esperimento di Etövös) che nel nostro Universo la massa gravitazionale di un corpo coincide con la sua **massa inerziale**, ovvero con la costante intrinseca del corpo che compare nel secondo Principio della Dinamica:

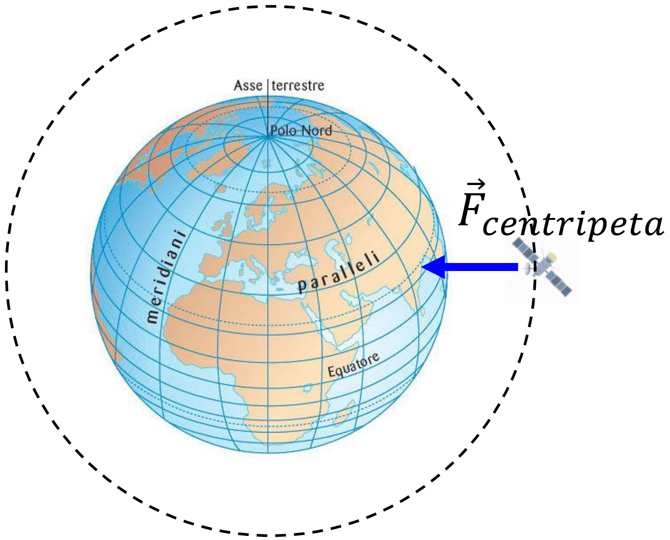
$$\vec{F} = m\vec{a}$$

UNIMORE UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MODENA E REGGIO EMILIA

Moto orbitale : problema del satellite

A quale velocità angolare si deve muovere un satellite per rimanere su di un'orbita circolare attorno alla Terra di raggio r?





$$\vec{F}_g = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{r}$$

$$|\vec{F}_g| = |\vec{F}_{centripeta}|$$

$$\frac{GM_G^{Terra}m_g^{sat}}{r^2} = \frac{m_i^{sat}v^2}{r}$$

Equivalenza massa inerziale e massa gravitazionale:
$m_g^{sat} = m_i^{sat}$

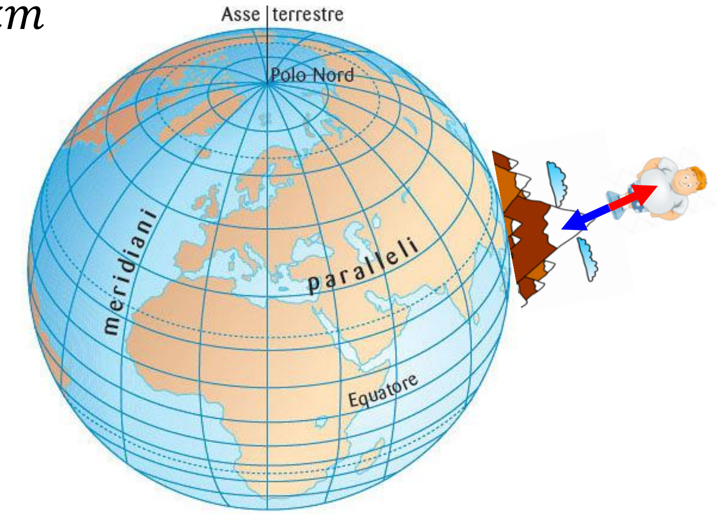
$$v = \omega r = \sqrt{\frac{GM_{Terra}}{r}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{GM_{Terra}}{r^3}} \qquad r = \left(\frac{GM_{Terra}}{\omega^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Ponendo $\omega = \omega_{terra}$ si ottiene la distanza a cui porre in orbita geostazionaria il satellite

La velocità angolare del satellite non dipende dalla sua massa, ma solo dal raggio dell'orbita e viceversa

Forza peso

$r_{terra} \cong 6373\ km$



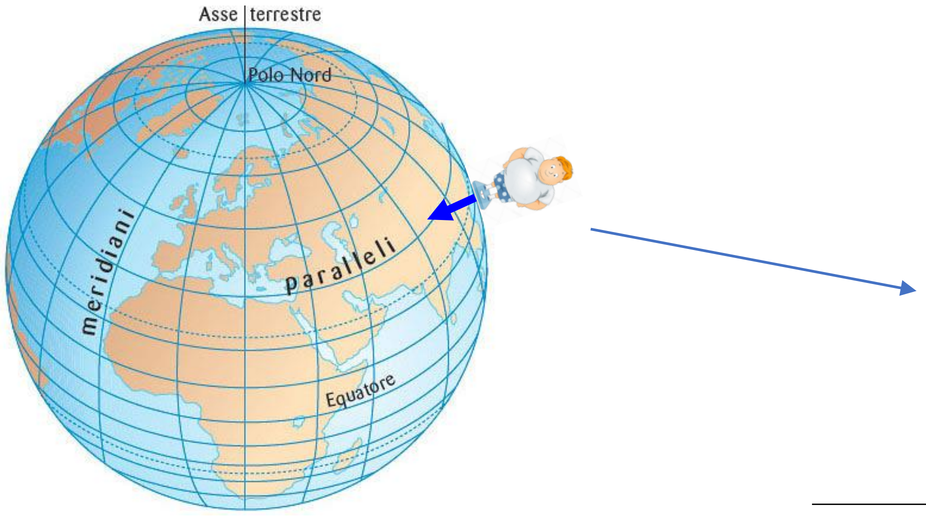
$$\vec{F} = -\frac{G m_{Terra} m_{uomo}}{(r_{Terra} + h)^2}\hat{r}$$

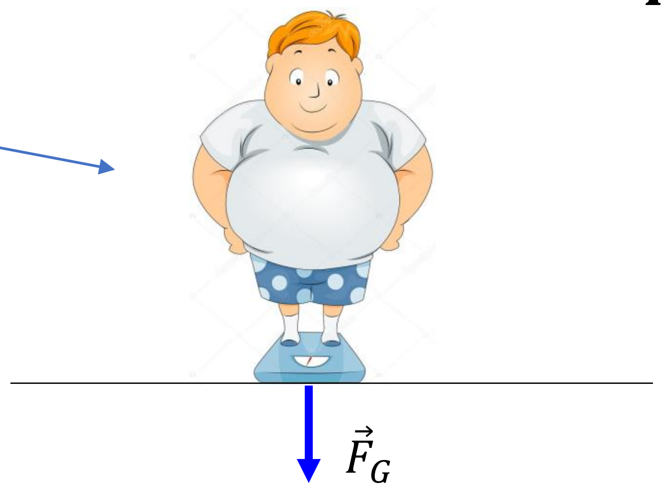
$$h \ll r_{Terra} \Rightarrow \vec{F} \cong -g\, m_{uomo}\hat{k}$$

In prossimità della superficie terrestre si considera la forza di gravità $\vec{F}$ esercitata dalla Terra su di un oggetto di massa m uguale a:

Detta anche forza peso $\vec{F} = -gm\hat{k}$

Forza peso





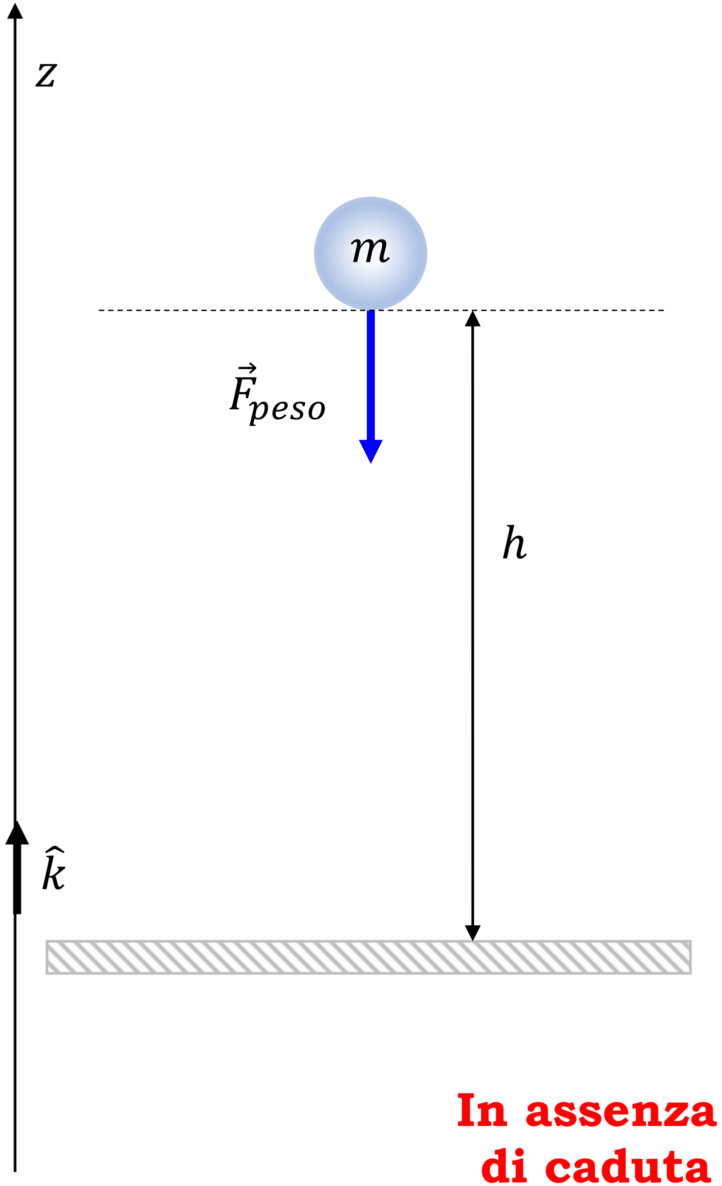
$$\vec{F}_G$$

$$\vec{F}_G = -\frac{G m_{Terra} m_{uomo}}{r^2}\hat{r}$$

$$\frac{G m_{Terra}}{r_{Terra}^2} \equiv g \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_G = -g\, m_{uomo}\, \hat{k}$$

g è l'accelerazione di gravità sulla superficie terrestre ~ 9.8 m/s^2

Forza peso



Supponiamo di lasciare cadere dall'altezza h un corpo di massa m e supponiamo di potere trascurare l'attrito dell'aria, quanto impiega in corpo a raggiungere terra?

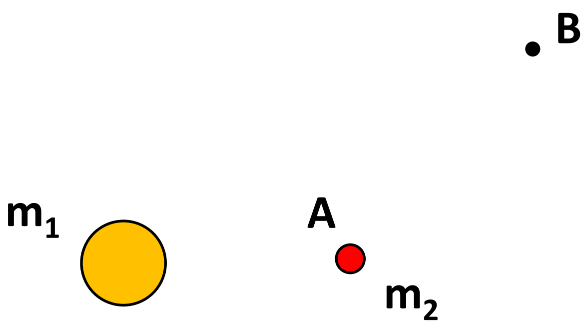
$$\vec{F}_{peso} = -m_g g\hat{k} \qquad \vec{F} = m_i\vec{a} \xrightarrow{\boxed{m_g = m_i}} \vec{a} = -g\hat{k}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2z}{dt^2} = -g \\ \dfrac{dz}{dt}(t=0) = v(t=0) = 0 \\ z(t=0) = h \end{cases}$$

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v(t=0)\,t + z(t=0) \rightarrow \qquad z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h$$

In assenza di attrito, la velocità istantanea ed il tempo di caduta di un corpo non dipendono dalla sua massa

Lavoro della Forza di Gravità

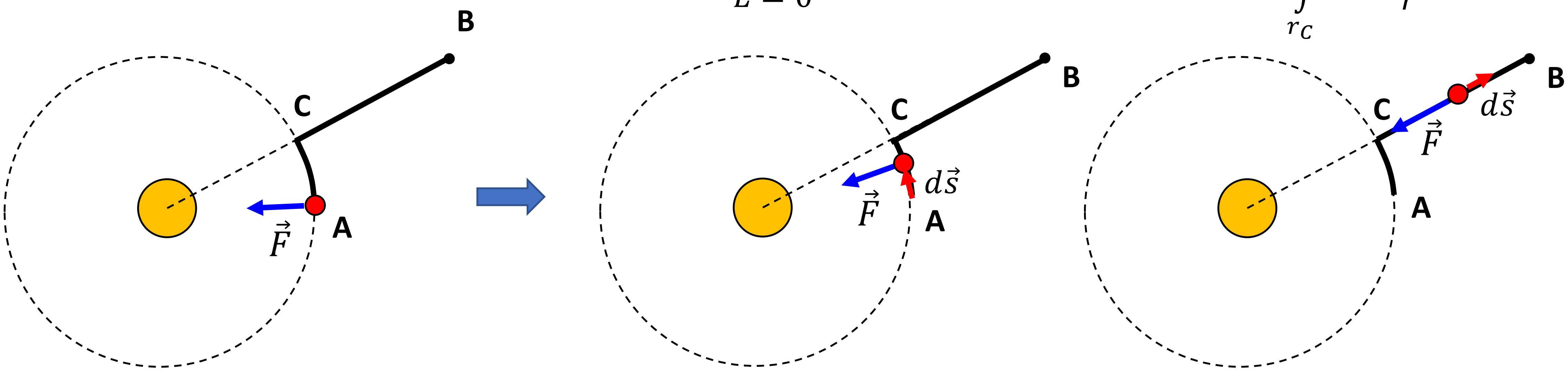


Vogliamo calcolare il lavoro compiuto dalla forza gravitazionale sulla massa m_2 mentre viene spostata dal punto A al punto B

Scegliamo il percorso che passa per il punto C

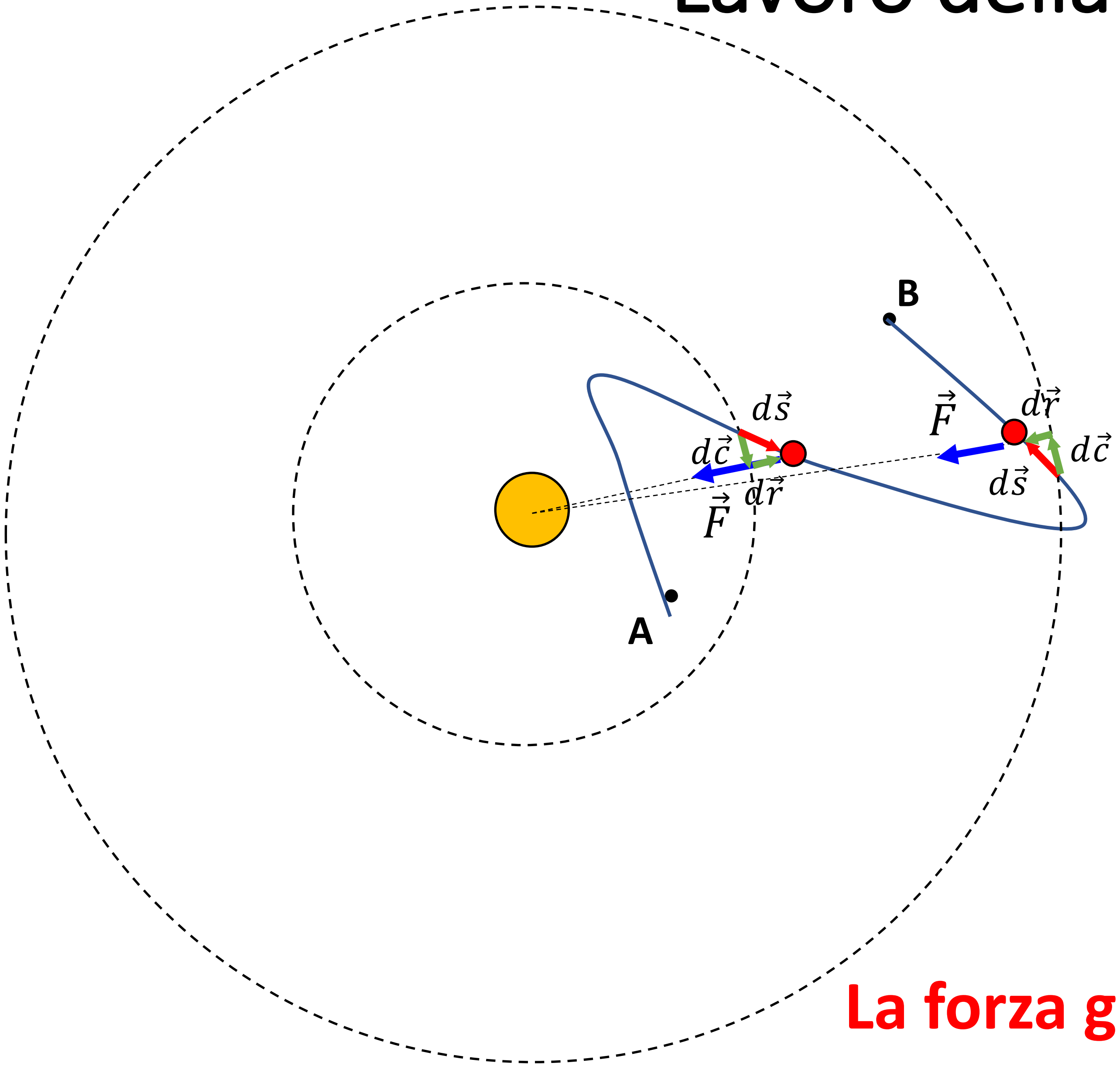
$$L = 0$$

$$L = \int_{r_C}^{r_B} -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\,dr$$



UNIMORE UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MODENA E REGGIO EMILIA

Lavoro della Forza di Gravità



Qualunque sia il percorso scelto per andare dal punto A al punto B, questo si può scomporre nella somma di segmenti lineari infinitesimi $d\vec{s}$, scomponibili nelle componenti $d\vec{c}$, perpendicolare alla forza gravitazionale, e $d\vec{r}$, parallela alla forza gravitazionale

$$d\vec{s} \to 0 \quad \Rightarrow \quad d\vec{s} = d\vec{c} + d\vec{r} \quad \Rightarrow$$

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{s} = \vec{F} \cdot d\vec{c} + \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}dr$$

$$\boldsymbol{L = \int_{r_A}^{r_B} -\frac{Gm_1m_2}{r^2}dr}$$

Il lavoro compiuto dalla forza gravitazionale dipende esclusivamente dalla differenza tra il modulo del raggio del punto A e quello del punto B

La forza gravitazionale è conservativa

UNIMORE
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MODENA E REGGIO EMILIA

Energia Potenziale Gravitazionale

Lavoro della forza gravitazionale

$$L = \int_{r_A}^{r_B} -\frac{Gm_1m_2}{r^2}dr$$

Energia potenziale gravitazionale

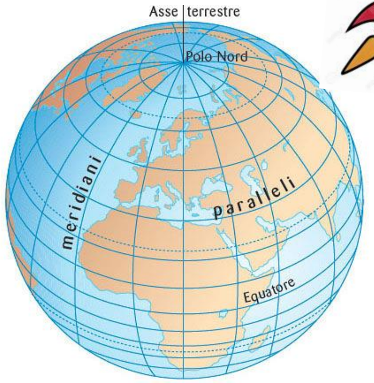
$$U(r) = L(r, P_0)$$

Scegliamo $P_0 = \infty$

$$U(r) = \int_r^{P_0} -\frac{Gm_1m_2}{r^2}dr = Gm_1m_2\left[\frac{1}{r}\right]_r^{\infty} = -\frac{Gm_1m_2}{r}$$

In altri termini, l'energia potenziale gravitazionale $U(r)$ è il lavoro che compie la forza gravitazionale se la massa m_2 (m_1) viene allontanata da un punto posto alla distanza r dalla massa m_2 (m_1) fino all'infinito

Velocità di fuga dalla Terra



Con che velocità v_{razzo} deve partire un razzo spaziale per potere uscire dall'effetto della gravità terrestre, ovvero arrivare in un punto lontanissimo ($r = \infty$) con velocità nulla ?

$$E_k^A + U(A) = E_k^B + U(B)$$

Conservazione dell'energia meccanica per le forze conservative

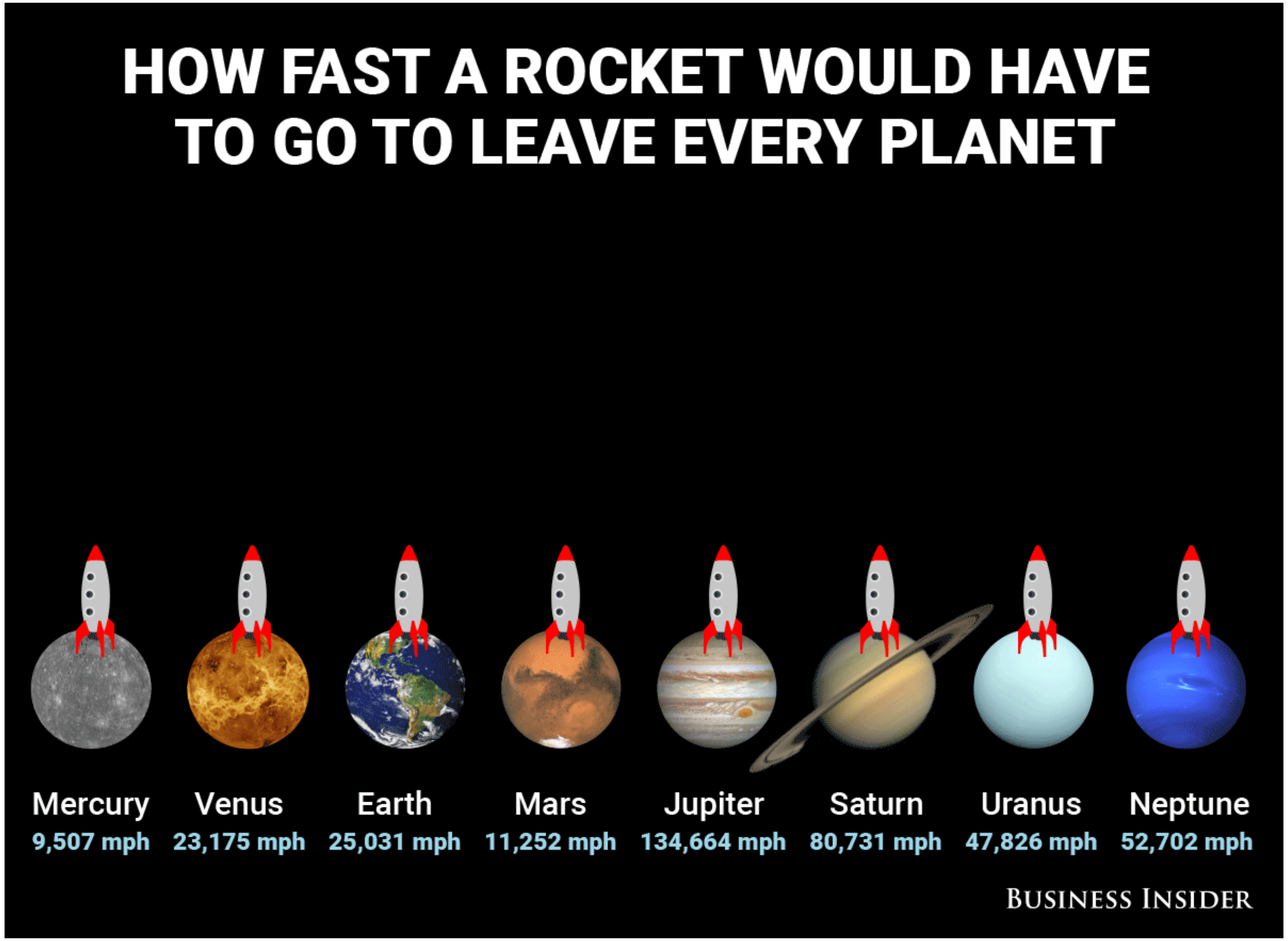
$$\frac{1}{2} m_{razzo} v_{razzo}^2 - \frac{\mathrm{G m_{razzo} m_{terra}}}{r_{terra}} = 0$$

$$v_{razzo} = \sqrt{\frac{2\mathbf{G}m_{terra}}{r_{terra}}}$$

$r_{terra} \cong 6373\ km$ $\quad m_{terra} \cong 5.97\ 10^{24}\ kg$ $\Rightarrow$ $v_{razzo} \cong 11.2 \cdot 10^3 m/s$

La velocità di fuga dipende solo dal rapporto tra la massa ed il raggio del pianeta

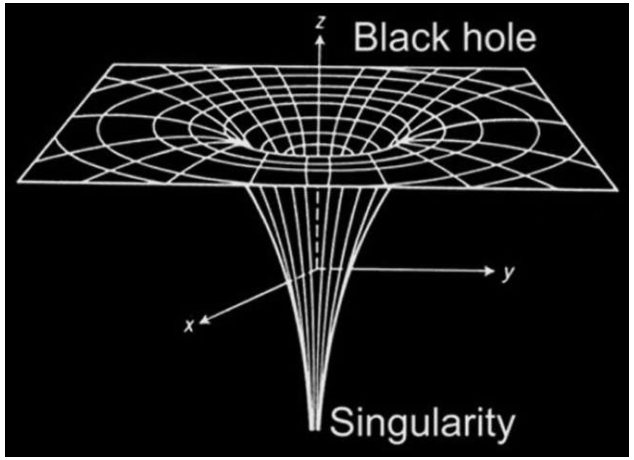
Velocità di fuga da un pianeta



La velocità di fuga dipende solo dalla massa e dal raggio del pianeta

Buchi neri

- E se ci fosse un corpo con massa grande e raggio piccolo tale che velocita' di fuga $\geq$ velocita' della luce c? $\boldsymbol{c = 10^8 m/s}$
- Non sfuggirebbe niente da quel corpo... neanche la luce... → detto **buco nero** proprio perché risucchia anche la luce



- Un corpo di massa m si comporta come un buco nero

se il suo raggio e' minore di un certo raggio critico R_S

$c = \sqrt{\dfrac{2Gm}{R_S}}$ $\Rightarrow$ un raggio piccolissimo $R_s = \dfrac{2Gm}{c^2}$

risultato corretto anche se in realta' serve la relativita' generale (l'energia cinetica della luce non e' $\dfrac{mc^2}{2}$ ed il potenziale gravitazionale vicino ad un buco nero non e' lo stesso di quello generato da un pianeta)

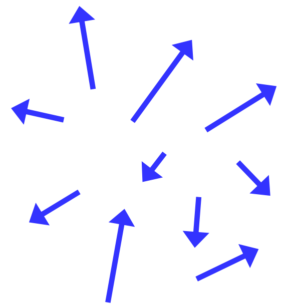
- Idea fondamentale puo' essere compresa gia' sulla base dei principi della meccanica classica

Campo gravitazionale

Risulta ora utile introdurre una nuova grandezza fisica vettoriale che chiameremo CAMPO GRAVITAZIONALE: $\vec{g}$

Il CAMPO GRAVITAZIONALE ha le dimensioni di una forza divisa per una massa: $[\vec{g}] = \dfrac{[\vec{F}]}{m}$

Il CAMPO GRAVITAZIONALE è definito in tutti i punti dello spazio $\vec{g} = \vec{g}(x, y, z)$



Il CAMPO GRAVITAZIONALE è tale per cui un corpo di massa m posto nel generico punto P risente della forza:

$$\vec{F}(x_P, y_P, z_P) = m\vec{g}\,(x_P, y_P, z_P)$$

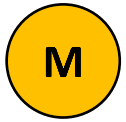
brevemente

$$\vec{F} = m\vec{g}$$

INDIPENDENTEMENTE DALLE CAUSE CHE GENERANO UN DETERMINATO CAMPO GRAVITAZIONALE, SE CONOSCIAMO IL SUO VALORE, POSSIAMO CALCOLARE PUNTO PER PUNTO LA FORZA GRAVITAZIONALE DI CUI RISENTE UN CORPO MASSIVO IN UNA DETERMINATA REGIONE DELLO SPAZIO

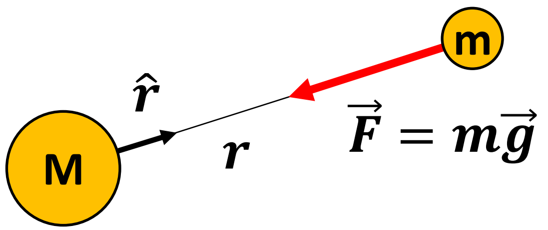
Campo gravitazionale generato da un’unica massa M

Consideriamo uno spazio vuoto in cui è presente un corpo di massa M fisso



Campo gravitazionale generato da un'unica massa M

Introduciamo in questo spazio un secondo corpo di massa m



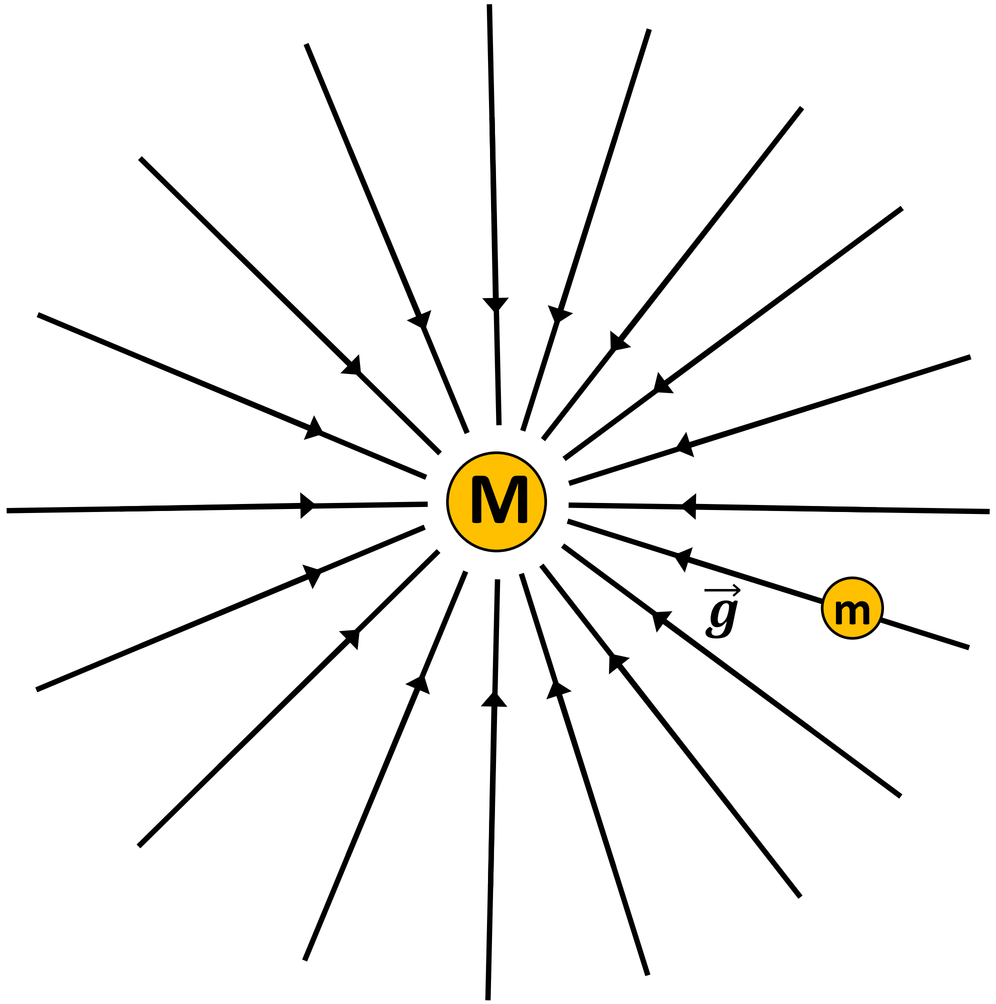
La forza di cui risente la massa m è uguale a: $\vec{F} = -\dfrac{GMm}{r^2}\hat{r}$

Dalla forza possiamo ricavare il valore del campo $\vec{g}$ che agisce sulla massa m utilizzando la relazione: $\vec{F} = m\vec{g}$

Da cui otteniamo che il CAMPO GRAVITAZIONALE generato dalla massa M è : $\vec{g} = -\dfrac{GM}{r^2}\hat{r}$

Linee di forza del campo gravitazionale di una massa M

Spostando il corpo di massa m in tutto lo spazio circostante la massa M otterremo una mappatura del CAMPO GRAVITAZIONALE generato dalla massa M come mostrato in figura. In questa rappresentazione grafica vengono riportati direzione e verso del campo $\vec{g}$ attraverso l'utilizzo di linee continue dette LINEE DI FORZA

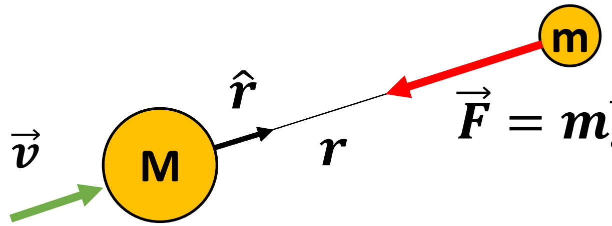


Campo gravitazionale generato da un'unica massa M

Consideriamo ora uno spazio vuoto in cui è presente un corpo di massa M LIBERO DI MUOVERSI

Campo gravitazionale generato da un'unica massa M

Introduciamo in questo spazio un secondo corpo di massa m



$$\vec{F} = m\vec{g} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$$

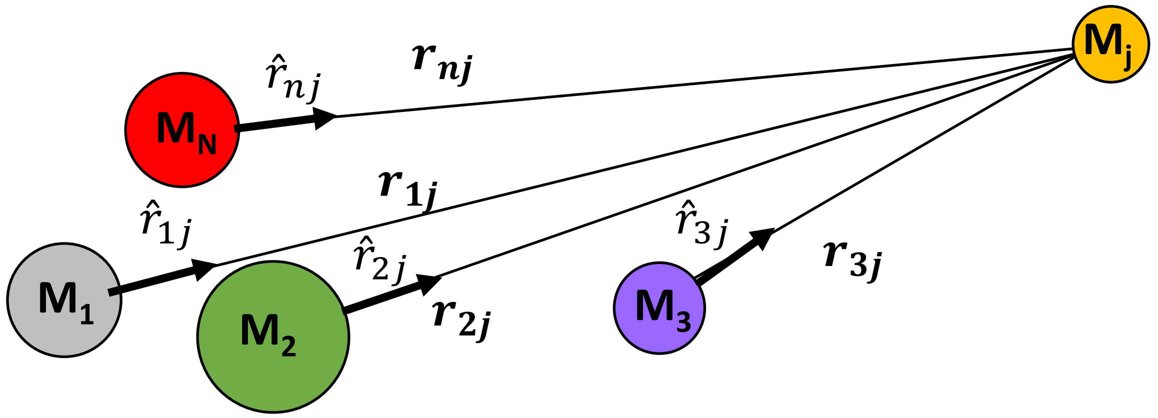
In questo caso l'introduzione del corpo di massa m potrebbe cambiare la posizione iniziale del corpo di massa M e metterlo in moto, in questo caso non è più possibile utilizzare quanto visto precedentemente per definire il campo gravitazionale generato dalla massa M

$$m\vec{a}_m = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r} \rightarrow \vec{a}_m = -\frac{GM}{r^2}\hat{r} \qquad M\vec{a}_M = \frac{GMm}{r^2}\hat{r} \rightarrow \vec{a}_M = \frac{Gm}{r^2}\hat{r}$$

$$Se\ m \ll M \rightarrow \vec{a}_M \ll \vec{a}_m$$ **IL CORPO DI MASSA M SI PUO' CONSIDERARE FISSO**

Campo gravitazionale generato da una distribuzione di masse

Consideriamo una distribuzione di masse M1, M2, M3, …… M_N

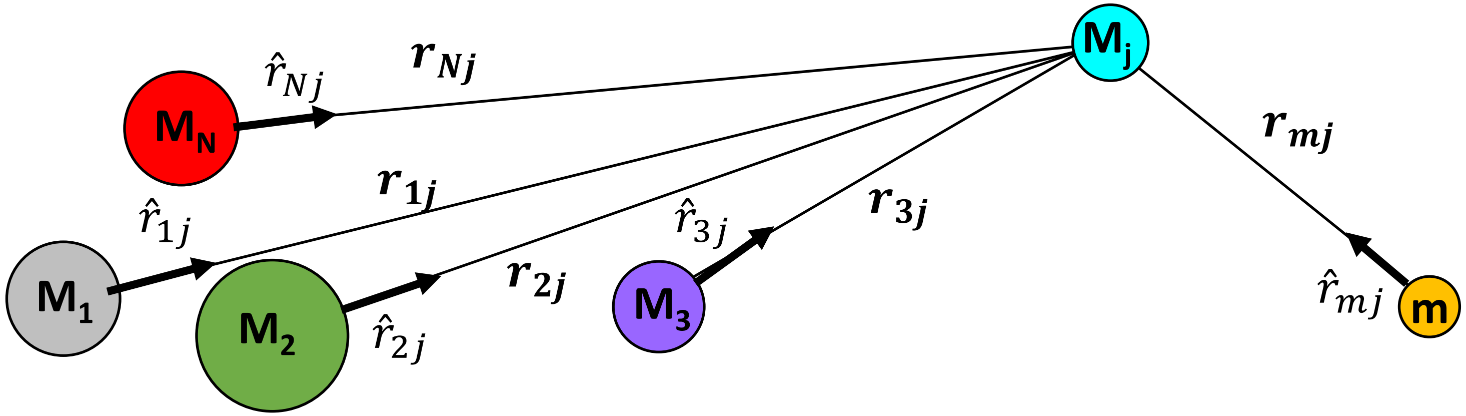


La forza gravitazionale agente su ognuna delle masse M_j (j=1,….,N) dovuta alla presenza delle restanti masse M_i (i=1,…., N; i≠ j) della distribuzione è uguale a:

$$\vec{F}_{M_j} = \sum_{i\neq j=1}^{N} -\frac{G M_j M_i}{r_{ij}^2}\hat{r}_{ij}$$

Campo gravitazionale generato da una distribuzione di masse

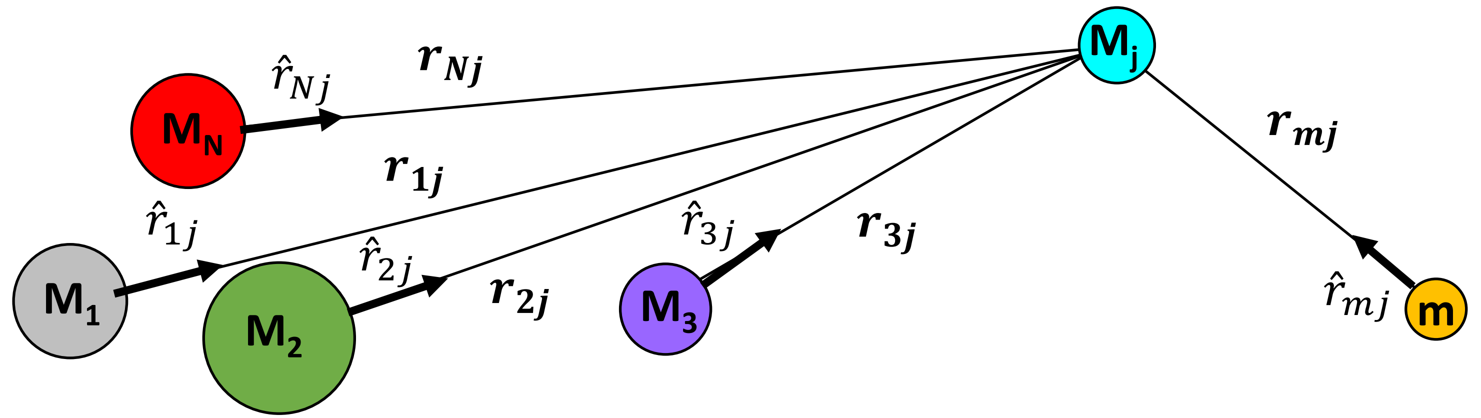
Se ora introduciamo un'altra massa m all'interno della distribuzione



La forza agente sulla generica massa $\mathbf{M_j}$ diventa:

$$\vec{F}_{M_j} = \sum_{i \neq j = 1}^{N} -\frac{G M_j M_i}{r_{ij}^2}\hat{r}_{ij} - \frac{G M_j m}{r_{mj}^2}\hat{r}_{mj} = -G M_j \left(\sum_{i \neq j = 1}^{N} \frac{M_i}{r_{ij}^2}\hat{r}_{ij} - \frac{m}{r_{mj}^2}\hat{r}_{mj} \right)$$

Campo gravitazionale generato da una distribuzione di masse



$$\vec{F}_{M_j} = -GM_j\left(\sum_{i\neq j=1}^{N}\frac{M_i}{r_{ij}^2}\hat{r}_{ij} - \frac{m}{r_{mj}^2}\hat{r}_{mj}\right) \overset{m\to 0}{\cong} -GM_j\sum_{i\neq j=1}^{N}\frac{M_i}{r_{ij}^2}\hat{r}_{ij}$$

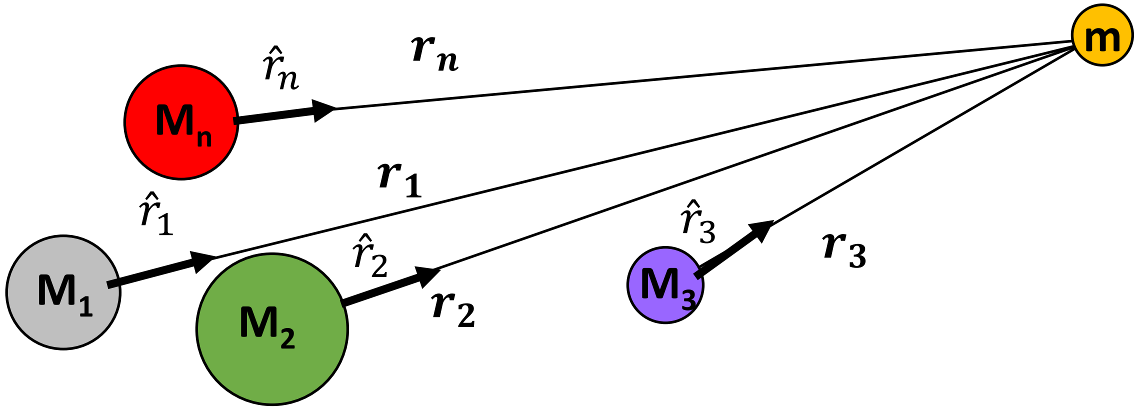
Se il valore della massa m può essere considerato trascurabile, allora la sua presenza non altera in modo sensibile la forza agente su ognuna delle masse Mi (i=1,…,n), dunque il sistema si comporta sostanzialmente come se la massa m non vi fosse.

In generale, si può considerare l'effetto della massa m trascurabile se: $\boldsymbol{m \ll \sum_{i=1}^{N} M_i = M_{tot}}$

Campo gravitazionale: massa di prova

In generale, per determinare il campo gravitazionale generato da un unico corpo di massa M o da una distribuzione di più corpi di massa M_1, M_2, M_3, …… M_n si introduce nello spazio circostante al sistema studiato un corpo massivo di test della forza gravitazionale locale che viene detto MASSA DI PROVA (m) e che deve soddisfare la condizione $m \ll M_{TOT}$ per assicurare che la sua presenza non perturbi sensibilmente la distribuzione di masse di cui si vuole determinare il campo

Campo gravitazionale generato da una distribuzione di masse



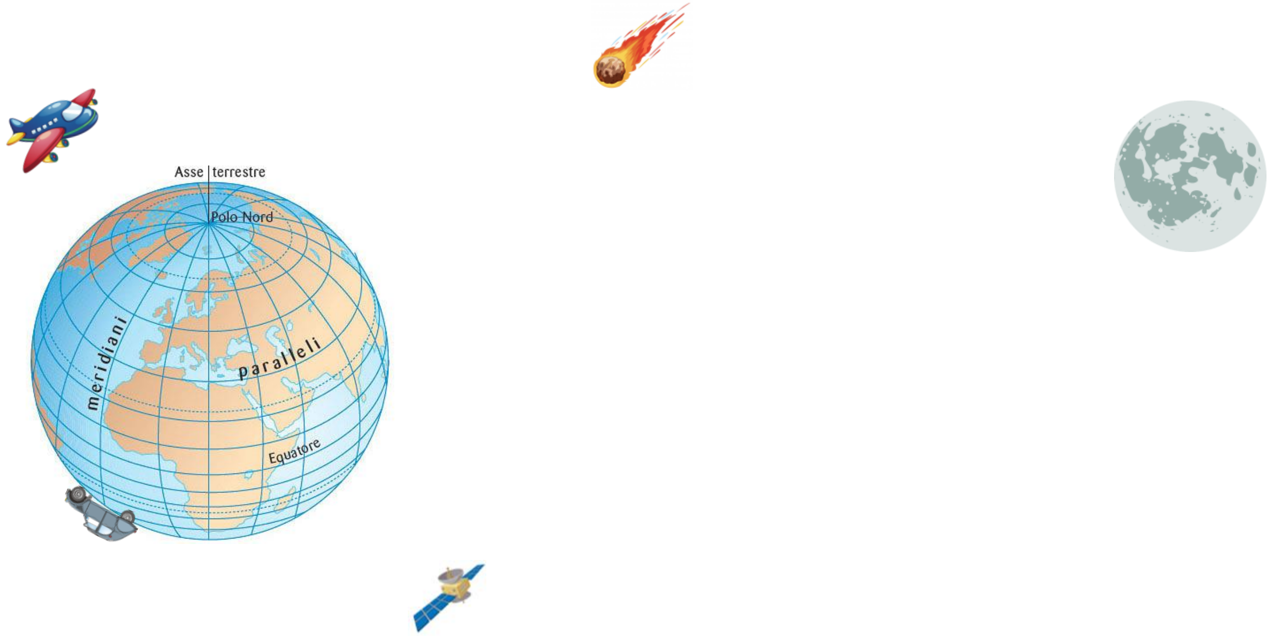
Forza agente sulla MASSA DI PROVA m

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} -\frac{GmM_i}{r_i^2}\hat{r}_i$$

Campo gravitazionale della distribuzione di masse M_1, M_2, M_3, …… M_n

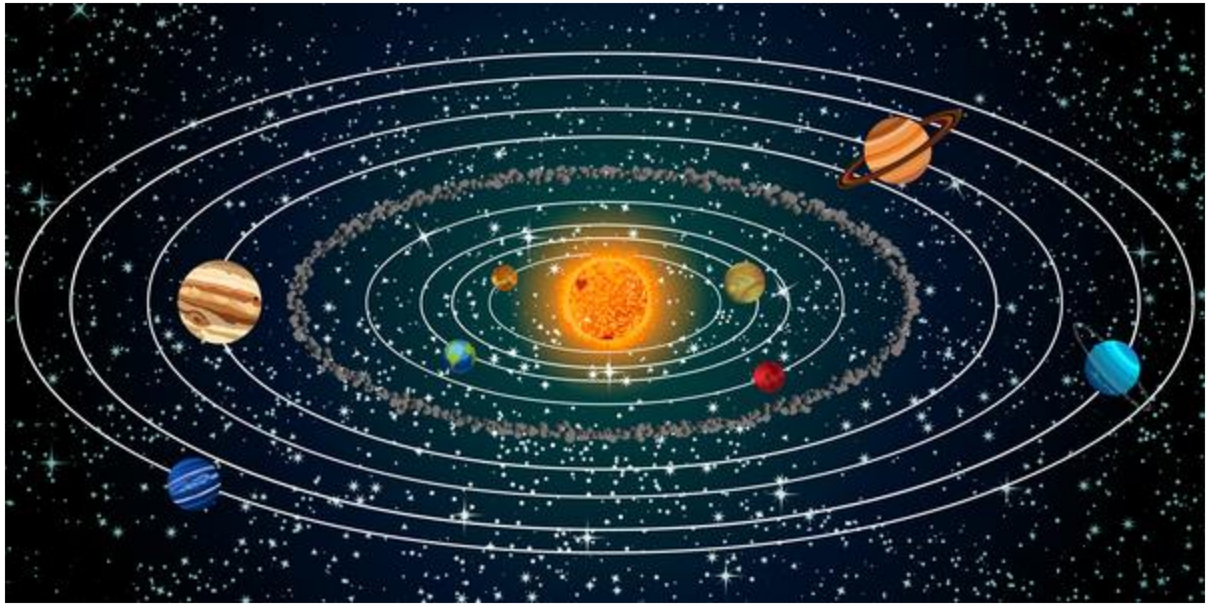
$$\vec{g} = \sum_{i=1}^{n} -\frac{GM_i}{r_i^2}\hat{r}_i$$

Campo gravitazionale terrestre



Nello spazio circostante la Terra qualsiasi corpo di massa m trascurabile rispetto alla massa della Terra M_T si può considerare come una massa di prova e pertanto risente con buona approssimazione unicamente del campo gravitazionale generato dalla Terra

Campo gravitazionale solare



Analogamente succede per i corpi celesti che orbitano attorno al Sole: la massa del Sole rappresenta più del 99% della massa complessiva di tutto il Sistema Solare

Potenziale gravitazionale

Definiamo POTENZIALE GRAVITAZIONALE $V(r)$ dell'oggetto di massa M l'energia potenziale gravitazionale necessaria per spostare una massa di prova m da un punto a distanza r da M fino all'infinito, normalizzata al valore della massa m.

DATA UN'UNICA MASSA M, IL POTENZIALE GRAVITAZIONALE AD ESSA ASSOCIATO RISULTA:

$$U(r) = -\frac{GmM}{r} = m\,V(r)$$

Energia gravitazionale

$$\mathrm{V}(r) = -\frac{GM}{r}$$

Potenziale gravitazionale

Le regioni dello spazio allo stesso potenziale vengono chiamate SUPERFICI EQUIPOTENZIALI E SONO SEMPRE PERPENDICOLARI ALLA LINEE DI FORZA DEL CAMPO CHE LE GENERA ($\vec{F} = -\nabla U \; se \; U = cost. \rightarrow \vec{F} = 0$)

Superfici equipotenziali