No exprese ningún cálculo en forma fraccionaria. El examen se aprueba con dos ejercicios correctamente resueltos en su totalidad y un ejercicio planteado. Salvo indicación contraria, use al menos 5 cifras significativas (preferible usar memorias de la calculadora)

Apellido, nombre(s): De Meglo, Lourdes

1. Halle la primera raíz positiva de la ecuación $x = 3.cos(x)$, a través del método de punto fijo.
   (a) Encuentre explícitamente un intervalo de interés.
   (b) Estudie las propiedades de convergencia del método propuesto.
   (c) Encuentre el cero buscado con una diferencia entre dos iteraciones sucesivas de $1 \cdot 10^{-7}$.
   (d) Represente la respuesta final respetando la convención del curso $x = \bar{x} \pm \Delta x$

2. De una función desconocida se obtuvieron los siguiente valores.

x	0.5	0.5	1.0	1.5	2.0	4.0
y	5.645	5.823	4.682	3.340	2.800	0.980

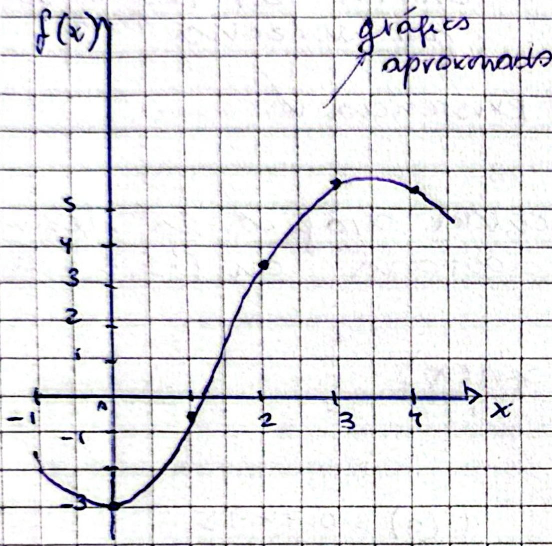
   (a) Se pide hallar la estimación de la función en $x = 3$, tenga en cuenta que si lo desea se puede descartar solamente 1 valor. No se requiere estimar la cota de error.
   (b) Se pide hallar la estimación de segundo orden del valor de la primera derivada en $x = 3$, utilizando un $h = 1$.

3. Bajo los conceptos que presentamos a lo largo de las clases que corresponden a los temas de la primera parte.
   Determinar:
   (a) Sí e es una constante o una variable, justificar.
   (b) Con que tipo de errores nos encontramos al intentar hallar el valor de e, solo nombrarlos, justificando su respuesta.
   (c) Dar una representación válida de e con 5 cifras significativas, justificar.

(1) Hallar raíz a $x = 3\cos(x)$ a través de PF

$f(x) = x - 3\cos(x)$, busco $p \,/\, f(p) = 0$, p raíz

Grafico $f(x)$ para encontrar un intervalo de interés



x_i	$f(x_i)$
0	-3
1	-0.6209
2	3.2484
3	5.96998
4	5.96093

→ podemos ver un cambio de signo entre 0 y 3

Elijo intervalo: $[0, 3]$

- Ahora propongo una $g(x)$

$$\left[g(x) = x - \psi(x) f(x)\right] \rightarrow \text{exp. general}$$

propongo una $\psi(x)$ tal que mi g cumpla con las condiciones para ~~sea~~ $\exists$ PF de mi función

Si $\psi(x) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$ donde
- $f'(x_0) = 1 + 3\,\text{sen}(x)$
- $x_0 = 1.5 \rightarrow$ paso de bisección "semilla"

- $f'(1.5) = 3.99248$ → OBS! esto es partic. NS

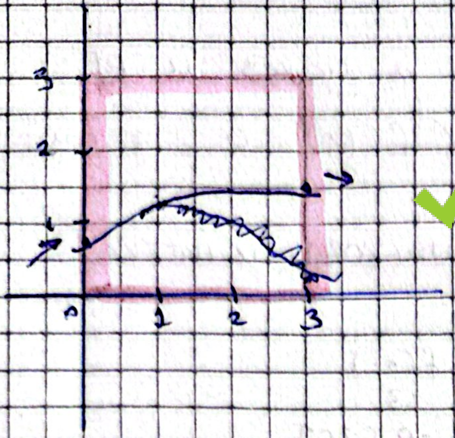
entonces $g(x) = x - \dfrac{1}{3.99248}\left(x - 3\cos(x)\right)$

$$\rightarrow g(x) = x - 0.25047x + 0.75141 \cdot \cos(x)$$

$$\hookrightarrow \left[g(x) = 0.74953x + 0.75141\cos(x)\right]$$

Ahora pruebo g las condiciones p/ PF
- existencia
- unicidad

i) $g(x) \in [a,b] \quad \forall x \in [a,b]$, int $[0,3]$



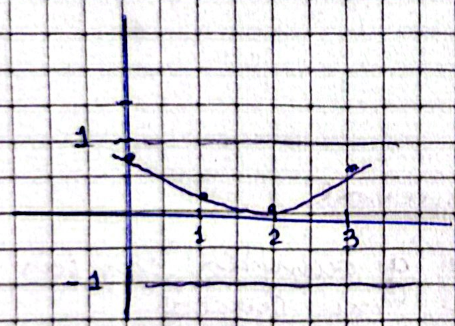
$g(0) = 0.7514$
$g(1) = 1.15552$
$g(3) = \cancel{0.0} \cancel{5.6397 \times 10^{-3}} \cancel{= 0.005}$
$\to 1.5046997$

→ vemos entra por izq y sale por derecha

i) Existencia ✓

ii) Para la prop. de unicidad grafico la derivada y verifico que está acotada en $[-1,1]$ dentro del intervalo

$g'(x) = 0.7495 - 0.7514 \operatorname{sen}(x)$



$g'(0) = 0.7495$
$g'(1) = 0.1172$
$g'(3) = 0.643$

ii) Unicidad ✓

→ con $g(x)$ encontrada iteramos

Semilla : 1.5 (paso de Bisección)

→ $P_n = g(P_{n-1})$, dif de 0.0000001

Lourdes De Mey... pag 2

e)

$g(x) = 0.74953x + 0.75141\cos(x)$

hechos con calculadora

n	P_n	$g(P_{n-1})$
0	1.5	1.174476
1		1.170535
2		1.170145
3		1.170122
4		1.170121
5		1.1701209
6		1.17012095

$\} \Delta = 3.9 \times 10^{-4}$

$\} 1.10^{-7}$ → ya cumple hasta it 5

4.1

d) Representar Rta:

$$\boxed{x = 1.1701209 \pm 0.0000001}$$

Vemos que converge rapido ya en la it 2 estaba muy cercano. Esto fue por la $g(x)$ la cual fue creada con el $\varphi(x) = \frac{1}{f'(x_0)}$ que particularmente es NR. Sabemos que Newton Raphson posee convergencia cuadratica

Lourdes De Megeis

② Valores Obtenidos

X	Y
0.5	5.645
0.5	5.823
1.0	4.682
1.5	3.340
2.0	2.800
4.0	0.980

ⓐ Estimar $f(3)$
Se puede descartar un valor. No se requiere estimar cota de error

ⓐ Para estimar $f(3)$, busco armar el Polinomio de Newton de orden 4 ya que nos permiten descartar 1 valor → descarto $(0.5, 5.645)$

$P_{N_4}(x)$.

	X	Y (a_0)	$[f x_0, f x_1]$ DD1 (a_1)	$[F x_0, x_1, x_2]$ DD2 (a_2)	$[x_0, x_1, x_2, x_3]$ DD3 (a_3)	$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}, x_4]$ DD4 (a_4)
x_0	0.5	5.823				
			Ⓐ -2.282			
x_1	1.0	4.682		ⓔ -0.402		
			Ⓑ -2.684		ⓗ 1.33733	
x_2	1.5	3.340		ⓕ 1.604		Ⓙ -0.52838
			Ⓒ -1.08		ⓘ -0.512	
x_3	2.0	2.800		ⓖ 0.068		
			Ⓓ -0.91			
x_4	4.0	0.980				

Ⓐ $\dfrac{4.682 - 5.823}{1.0 - 0.5} = -2.282$ Ⓑ $\dfrac{3.340 - 4.682}{1.5 - 1.0} = -2.684$

Ⓒ $\dfrac{2.800 - 3.340}{2.0 - 1.5} = -1.08$ Ⓓ $\dfrac{0.980 - 2.800}{4.0 - 2.0} = -0.91$

ⓔ $\dfrac{-2.684 - (-2.282)}{1.5 - 0.5} = -0.402$ ⓕ $\dfrac{-1.08 - (-2.684)}{2.0 - 1} = 1.604$

ⓖ $\dfrac{-0.91 - (-1.08)}{4.0 - 1.5} = 0.068$ ⓗ $\dfrac{1.604 - (-0.402)}{2.0 - 0.5} = 1.33733$

ⓘ $\dfrac{0.068 - 1.604}{4.0 - 1.0} = -0.512$

Ⓙ $\dfrac{-0.512 - 1.33738}{4 - 0.5} = -0.52838$

Una vez obtenidos los valores de las DD procedo a armar el polinomio

$$P_N(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$
$$+ a_4(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

$$P_N(x) = 5.823 - 2.282(x-0.5) - 0.402(x-0.5)(x-1)$$
$$- 1.33733(x-0.5)(x-1)(x-1.5)$$
$$- 0.52832(x-0.5)(x-1)(x-1.5)(x-2)$$

$$f(3) \cong P_N(3)$$

$$P_N(3) = 5.823 - 5.705 - 2.01 + 10.029975 - 3.96285$$

$$\boxed{P_N(3) = 4.17513}$$

Lourdes De Meyer

b Hallar la estimación de segundo orden de la primera derivada en $x = 3$ utilizando $h = 1$

$x_{i-1} = 2$
$x_i = 3$
$x_{i+1} = 4$

$f(2)$ y $f(4)$ valores que obtengo de la tabla

Calculo las diferencias hacia adelante, atras y centradas para ver cual aproxima mejor

Hacia adelante

$$f'(3) \cong \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h} = \frac{f(4) - f(3)}{1} = \cancel{0.980} -$$

→ desconozco el valor en la funcion $f(3)$

Lo mismo ocurre con las dif. hacia atras. No puedo conseguir $f'(3)$, porque no se nada de $f(3)$.

En cambio con las Diferencias Centrales

$$f'(3) \cong \frac{f(4) - f(2)}{2h} = \frac{0.980 - 2.800}{2 \cdot 1} = \boxed{-0.91}$$

→ se sabe que las diferencias centradas tienen orden $O(h^2)$

③

ⓐ e es una 8.1 constante, pues posee un valor numérico fijo que no cambia.

ⓑ El error que podríamos encontrarnos es, por ejemplo que en un dispositivo ya sea la calculadora, o una computadora, no haya el suficiente espacio para representar el número.

Por ejemplo, mi calculadora al marcar e muestra: 2.718281828, pero no por haber llegado hasta ahí significa que ese sea su valor completo, la mantisa se ha alcanzado.

Podemos 8.2 además encontrarnos con errores de redondeo, los que surgen al utilizar la calculadora para realizar cálculos con nº reales. Errores de inherentes, que se pueden dar al leer datos de medición.

ⓒ 2.71828 → el valor en la calculadora se extiende unas cifras más.
Utilice esas 5 cs y el metodo de redondeo, pero al ser un '1' el que le sigue al 8 no redondea para arriba

Índice de comentarios

4.1 solo falto calcular la cota del error con el valor k en punto fijo

8.1 en el contexto de la materia, es una variable, ya que para calcular la propagacion de errores lineal en una funcion que incluye el valor irracional e, vamos a tomar su valor representativo y una cota de error, eso significa que dependiendo cuantos digitos tome puede valer una cosa u otra

8.2 tenemos error de truncamiento al cortar una sumatoria infinita para hallar el valor e, por otro lado error de redondeo