ERROR en el análisis numérico

números de máquina

Los números de máquina se guardan en memoria con una terna de valores (S, C, Q) en base binaria

- S → Indica el SIGNO
- C → Indica la Mantisa
- Q → Exponente

$$m = (-1)^{S} * C * 2^{Q}$$

$S = \{0, 1\}$ → 0 : positivo; 1 : negativo

$C = b_1\, b_2\, b_3 \ldots b_n$ → tantos bits como tenga la representación del número

¿Cómo se construye un número? → p/ tener una única forma de representar al nº

- Por defecto siempre hay un '1' fijo adelante
- Luego del '1' agrego una coma ','
- Luego de la coma ubico la mantisa 'c'

$$1,0101100101 * 2^{Q}$$

- Agregamos el $\boxed{* 2^{Q}}$ que mueve la coma hacia derecha o izquierda

Rep. de P.F.

↳ los dígitos significativos son aquellos nº que representan correctamente a un cierto valor

7.2 dig seg → $\boxed{11239.80}8\cancel{9123}$ → esto es basura

precisión = mantisa + 1

cuenta DS ⇒ $\boxed{\log_{10}(2^{\text{mantisa}+1})}$ → a precisión

→ metodo de Arranque

BISECCION
"Busqueda Binaria"

→ Metodo + básico para búsqueda de raíces

Este metodo plantea:
Dentro de un determinado intervalo $[a,b]$, y una función f, a la cual le busco una raíz, y si f es continua en ese intervalo, cuando esa función provoca un cambio de signo

↳ $f(a) \cdot f(b) < 0$

Por el Teo. de Bolzano dice: debe existir un punto p donde $f(p) = 0$.
Puedo encontrar una aproximación de p (la raíz)

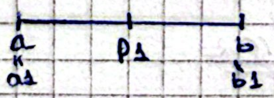
- f debe ser continua dentro del int. $[a,b]$
- Si $\exists\ p \in [a,b]$:

Pasos

1. → Partir intervalo $[a,b]$ a la mitad
2. → reasigno el intervalo
3. → Fijarse si hay cambio de signo entre el 1er subintervalo o entre el 2do
   → El p estará dentro del subint. con cambio de signo. O esta en 1 int. o está en el otro
4. → Repito desde el paso 1, siendo el intervalo $[a,b]$ aquel donde hubo cambio de signo

Nos armamos una "sucesión de pedacitos" con nuevos subíndices

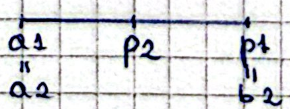
1.



- $p_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$; si $f(p_1) = 0 \Rightarrow p_1 = p$

si $f(a_1) \cdot f(p_1) < 0 \Rightarrow p \in [a_1, p_1]$

2.



- $p_2 = \dfrac{a_2 + b_2}{2}$

si $f(a_2) \cdot f(p_2) < 0 \Rightarrow p \in [a_2, p_2]$
si no $\Rightarrow p \in [p_2, b_2]$

} y continuo con el proceso en el int. corresp.

Papel de fibra de caña de azúcar.

Luego de cada iteración nos vamos acercando cada vez más

¿Cuando Termina? ¿Cuantos P_n calculo?

CRITERIOS DE PARO

- Fijar una tolerancia ε

Error Absoluto $|P_n - P_{n-1}| < \varepsilon$ ① $\Rightarrow$ frena cuando entre 2 iteraciones consecutivas el valor de la diferencia supera el ε

Error Relativo $\dfrac{|P_n - P_{n-1}|}{|P_n|} < \varepsilon$ ② , $p_n \neq 0$

OBS! $P_n \to p$ (se acerca a p)

③ $|f(P_n)| < \varepsilon$, $f(p_n) \to 0$

También se puede poner un limite de iteraciones para repetir el proceso

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \ n \leq 1000 \text{ (iteraciones)} \\ \quad o \\ \bullet \ |f(n)| < \varepsilon \end{array}\right\} \text{lo que ocurra primero}$$

Es un metodo lento pero Converge

¿Que cota debo darle a n para alcanzar la tolerancia ε?

$$|p_n - p| \leq \frac{b-a}{2^n} < \varepsilon$$

$$\log_2 2 = 1$$

$$\frac{b-a}{2^n} < \varepsilon$$

$$b-a < \varepsilon \cdot 2^n$$

$$\frac{b-a}{\varepsilon} < 2^n$$

$$\ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right) < n \ln 2 \Rightarrow \boxed{n > \frac{\ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\ln 2}}$$

apel de fibra de caña de azúcar.

Scanned with CamScanner

Punto Fijo

Def:

sea $f \in C[a,b]$ se dice que f tiene un punto fijo $p \in [a,b]$ si $f(p) = p$

→ Si esa función tiene PF entonces corta a la recta $y = x$

Condiciones para que f tenga PF

Expresión General

$$\boxed{g(x) = x - \psi(x) f(x)}$$

I) EXISTENCIA

- $g \in C[a,b]$ continua
- $g(x) \in [a,b]$ $\forall x \in [a,b]$

$\therefore$ g tiene un Punto Fijo en $[a,b]$

II) UNICIDAD

- $\exists g'(x)$ $\forall x \in (a,b)$ → derivo
- $\exists$ $0 < K < 1$ / $\forall x \in (a,b)$ se cumple que $|g'(x)| \leq k$

$\therefore$ El punto Fijo es único

Buscamos una función g que cumpla con esas condiciones.

Luego definimos la sucesión

$$\boxed{p_{n+1} = g(p_n)} \quad \forall n \geq 0$$

Para buscar p_0 "la semilla" hacemos una iteración de Bisección

La sucesión generada por este método de PF converge.

$$|p_0 - p| \leq \frac{1}{1-K} \, |p_0 - p_1|$$

$K < 1$
$1 - K > 0$

Cota del Error

$$|p_n - p| \leq \frac{K^n}{1-K} |p_1 - p_0| < \varepsilon$$

¿Que relación tiene la It. de PF con la Búsqueda de raíces?

Si buscamos $p \,/\, f(p) = 0$

→ Podemos definir $g(x) = x - \varphi(x) \cdot f(x)$

Entonces p es punto fijo de g, siempre y cuando g sea una función ADMISIBLE

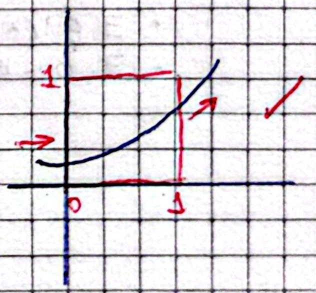
↳ Cumpla I) Existencia
II) Unicidad

Tecnicas para chequear las condiciones de g I) y II)

para verificar I) EXISTENCIA

→ Grafico $g(x)$. y ademas marco el intervalo $[a, b]$ propuesto

→ para que cumpla, la función debe ingresar por el lateral Izq y salir por el Derecho



para verificar II) Unicidad

- $\exists \; g'(x)$
- Grafico $g'(x)$ el grafico $-1 < g'(x) < 1$

Para la Cota de Error

$$\frac{K^n}{1-K} |p_0 - p_1| < \varepsilon$$

→ despejo el n
→ tolerancia
→ calculo el K cota

TEORÍA DE ERRORES

Al momento de realizar un cálculo en algún dispositivo vamos a:

recibir una Aproximación Numérica
+
cometer un determinado Error

ERROR DE REDONDEO

- Los que surgen al utilizar una calculadora o una computadora p/ cálculos con nº reales.
- En algún det. momento tomo un criterio p/ elegir un número o el otro

ERRORES INHERENTES

- Errores que podríamos tener al leer un mecanismo de medición (termómetro, velocímetro, etc) traducimos de manera errónea el resultado que obtenemos

ERROR DE TRUNCAMIENTO

- Hablamos de este error cuando decidimos cortar, por voluntad, a una cifra en un determinado punto
  - Existen más términos que podríamos estar + o - pero no lo estamos haciendo

Papel de fibra de caña de azúcar.

$$e_x = x - \bar{x}$$

ERROR ABSOLUTO → e_x

x → VALOR REAL

$\bar{x}$ → VALOR REPRESENTATIVO → el Aproximado

Δrep $\pm$ Cota Error

Representamos el x como

$$\boxed{x = \bar{x} \pm \Delta x}$$

$e_{r_x} = \dfrac{x - \bar{x}}{x}$, $x \neq 0$ → error Relativo } no lo podemos obtener ya que el valor real de x no lo conocemos

$$\Delta x_r = \frac{\Delta x}{\bar{x}}$$

CONVENCIÓN → p/ representar nuestro x

$x = \bar{x} \pm \Delta x$ → La Cota de Error debe ser mayorada a 1 dígito

$\bar{x}$ → El Valor Rep. Tiene que ser Redondeado

Ej

$\bar{x}$ ↓ 56.232145

Aplicamos Redondeo
Debe coincidir con la cantidad de decimales de la Δx

Δx ↓ 0.213823 2 → Tomo + cota de error de la que en verdad tenga

↳ fijarse el primer dígito <> a 0
mayorear ese nº a 1 dígito
En este caso → $\Delta x = 0.3$

56.232145 → redondeamos
0.3

∴ $\boxed{56.2 \pm 0.3} = x$

3 Dig. sig

Ejemplos.

$$945673.348 \pm 1234.45$$

$\Delta x = 2000$

$\bar{x} = 945673.348 \rightarrow \bar{x} = 946000$

2000.

$\therefore \boxed{x = \underbrace{946}_{1\,2\,3}000 \pm \underbrace{2000}_{\downarrow \text{mil}}}$ Con 3 Dig. Seg.

Papel de fibra de caña de azúcar.

NEWTON RAPHSON

Pedimos que la función $f \in C^2[a,b]$ (derivadas continuas hasta segundo orden)

Buscamos un p / $f(p) = p$

$f'(\bar{x}) \neq 0$

La Sucesión de NR es:

a anterior

$$\boxed{\begin{cases} p_n = p_{n-1} - \dfrac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})} \\ p_0 \text{ semilla} \end{cases}}$$

la obtengo con un paso de Bisección

$\forall n \geq 1$, $f'(p_n) \neq 0$

- La raiz que busco es SIMPLE entonces la f' no se anula

La semilla elegida debe estar cerca de la raiz sino puede no converger

CRITERIO DE PARO

$|P_n - P_{n-1}| < \varepsilon$, siendo ε una Tolerancia > 0

o

$\dfrac{|P_n - P_{n-1}|}{|P_n|} < \varepsilon$, $P_n \neq 0$

Este metodo converge muy rápido

Analisis De Convergencia

- Biseccion
- PF
- N-R

Con los metodos vistos generamos, con todos, una sucesión que converge a 'p'

(α) → nos da el orden de convergencia

si $\alpha = 1$ → converge linealmente
si $\alpha = 2$ → converge cuadraticamente

Punto Fijo ⇒ Converge linealmente (su sucesión)

Newton Raphson ⇒ Converge Cuadráticamente

RAICES Multiples

$x^2=0$
↓
0 es Raíz Doble

Usamos Newton Raphson modificado para poder encontrar raíces multiples y que conserve la convergencia cuadratica.

Multip. m ⇒

$$\boxed{\begin{array}{l} f(p)=0 \\ f'(p)=0 \\ f^{m-1}(p)=0 \\ f^{m}(p)\neq 0 \end{array}}$$

Modificación de Newton Raphson

Definimos

$$\mu(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$\mu'(P_n) = \frac{(f'(P_n))^2 - f(P_n)\, f''(P_n)}{[f'(P_n)]^2}$$

Definimos la Sucesión del metodo modificado como

$$\boxed{\begin{cases} P_{n+1} = P_n - \dfrac{f(P_n) \cdot f'(P_n)}{[f'(P_n)]^2 - f(P_n)\, f''(P_n)} \\ P_0 \quad \text{semilla} \end{cases}}$$

Interpolación Polinomial

Se nos van a dar tablas de valores. Y a partir de ellos buscamos construir un polinomio que pase, o "interpole", por todos esos nodos.

→ Construir el polinomio me sirve luego para aproximar un valor en determinado nodo

Ej: si tengo una tabla que muestra los datos de una población desde 1940 hasta el 2000

puedo aproximar cuánto era la población en 1975 como:

$$P(1975) \simeq P_L(1975)$$

No sirve para predecir ni ser futurista
No se puede estimar por fuera del rango

Nos sirve para estimar lo que pasa entre nodos medidos!!

x_i	$f(x_i)$
x_0	$f(x_0)$
x_1	$f(x_1)$

$P_{Lagrange}$ interpola $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$

$$\underbrace{P_L(x) = L_0(x)\,f(x_0) + L_1(x)\,f(x_1)}$$

- $L_0(x) = \dfrac{x - x_1}{x_0 - x_1}$
- $L_1(x) = \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0}$

POLINOMIO DE LAGRANGE

x_i	$f(x_i)$
x_0	$f(x_0)$
x_1	$f(x_1)$
$\vdots$	$\vdots$
x_n	$f(x_n$

$n+1$ nodos

grado del Pol $\leq n$

$$P_L(x_0) = \sum_{k=0}^{n} L_k(x) \cdot f(x_k)$$
$$= L_0(x) \cdot f(x_0) + L_1(x) f(x_1) + \cdots + L_n(x) f(x_n)$$

- Los $f(x_k)$ los conozco de la tabla

- $L_0(x) = x -$

$$L_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

- $P_L(x_k) = f(x_k)$

Calculo Error

solo me sirve si conozco la f

$$E_{P_L} = \frac{\left| f^{(n+1)}(\text{Pto Int.})(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n) \right|}{(n+1)!}$$

Polinomio De Newton

Supongamos que $P_L(x)$ es un pol. de Lagrange de grado n que interpola a la función f en los nodos $x_0, x_1, \ldots, x_n$.
Las diferencias divididas de f respecto a $x_0, x_1, \ldots, x_n$ se usan para expresar $P_L(x)$ en la forma:

$$P_N(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \ldots + a_n(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})$$

siendo $a_1, a_1, \ldots, a_n$ constantes y:

$$a_0 = P_N(x_0) = f(x_0)$$

$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Diferencia dividida de orden cero

$$f[x_i] = f(x_i)$$

Primera diferencia dividida

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}$$

Segunda Diferencia dividida

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$$

N-esima diferencia dividida

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_n] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

Papel de fibra de caña de azúcar.

Cada una de las diferencias divididas me dará el resultado de c/u de los coeficientes. y con eso armo el Pol. de Newton

$$a_0 = f[x_0] \; ; \; a_1 = f[x_0, x_1] \; ; \; a_2 = f[x_0, x_1, x_2] \; ; \; \dots \; ; a_n = f[x_0, x_1, \dots x_n]$$

Entonces ...

$$\boxed{P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, \dots, x_k](x - x_0)\dots(x - x_{k-1})}$$

↳ Polinomio de Newton

Se puede armar con una Tabla

x	$f[x_i]$	1° DDV	2 DDV
x_0	$f[x_0] \rightarrow a_0$		
		$f[x_0,x_1] = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1 - x_0} \rightarrow a_1$	
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0,x_1,x_2] = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2 - x_0} \rightarrow a_2$
		$f[x_1,x_2] = \frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2 - x_1}$	
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1,x_2,x_3] = \frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3 - x_1}$
		$f[x_2,x_3] = \frac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3 - x_2}$	
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2,x_3,x_4] = \frac{f[x_3,x_4]-f[x_2,x_3]}{x_4 - x_2}$
		$f[x_3,x_4] = \frac{f[x_4]-f[x_3]}{x_4 - x_3}$	
x_4	$f[x_4]$		$f[x_3,x_4,x_5] = \frac{f[x_4,x_5]-f[x_3,x_4]}{x_5 - x_3}$
		$f[x_4,x_5] = \frac{f[x_5]-f[x_4]}{x_5 - x_4}$	
x_5	$f[x_5]$		

OBS!

La ultima DDV, que contiene a todos los nodos $(x_0, x_1, \dots x_n)$

Podemos estimar el error usando esa DDV

$$\frac{|f^n(\xi)|}{n!} \left| (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}) \right|$$

Polinomios de Chebyshev

Se definen de forma recursiva

Polinomios acotados en $[-1,1]$

-> Debo tomar los ceros del Pol de Ch. que se alcanzan en los x_k

$$x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right)$$

Si $x \notin [-1,1]$

Redefino mi variable:

los traslado a $-1,1$

$$\bar{x} = \frac{1}{2}\left[(b-a)x + a+b\right]$$

Ejemplo

Sea $f(x) = xe^x$ con $x \in [0, 1.5]$. Comparar los valores dados por el pol. de Lagrange con 4 nodos dados por ceros del 4to polinomio de Chebyshev y con el pol. de Ch.

Los ceros de Ch se encuentran en

$$x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right)$$

1°) Realizo el desplazamiento p/ $\bar{x} \in [-1,1]$

$a = 0$, $b = 1.5$

$$\tilde{x} = \frac{1}{2}(1.5)x + 1.5 = \frac{1.5}{2}x + \frac{1.5}{2}$$

2) Buscamos pol de grado 4. $n = 4$ (x_0, x_1, x_2, x_3)

$$x_0 = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right); \quad x_1 = \cos\left(\frac{3}{8}\pi\right); \quad x_2 = \cos\left(\frac{5}{8}\pi\right); \quad x_3 = \cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)$$

Ahora los valores x_0, x_1, x_2, x_3 obtenidos $\in$ al intervalo $[-1,1]$, debo trasladarlos al original $[a,b]$

$$\boxed{x_k = \frac{1}{2}\left[(1.5 - 0)\tilde{x}_k + a + 1.5\right]}$$

Así calculamos

$\tilde{x}_0 = 1/2\,[1.5 \cdot x_0 + 1.5] = 1.4429$
$\tilde{x}_1 = 1/2\,[1.5\,x_1 + 1.5] = 1.0870$
$\tilde{x}_2 = 1/2\,[1.5\,x_2 + 1.5] = 0.46299$
$\tilde{x}_3 = 1/2\,[1.5\,x_3 + 1.5 = 0.05709$

Armamos el Polinomio de Lagrange

$$\tilde{L}_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3}$$

$\tilde{L}_1$

$\tilde{L}_2$

$\tilde{L}_3$

$$\cancel{P(x) = \tilde{L}_0(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) + \tilde{L}_1(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3) + \tilde{L}_2(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3) + \tilde{L}_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}$$

$$P_L(x) = \tilde{L}_0\, f(x_0) + \tilde{L}_1\, f(x_1) + \tilde{L}_2\, f(x_2) + \tilde{L}_3\, f(x_3)$$

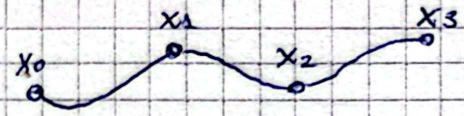
1° Desplazar los x al $[-1,1]$
2° Obtener los $\tilde{x}_k$
3° Desplazar cada $\tilde{x}_k$ con la formula $x_k = 1/2\,[(b-a)\tilde{x}_k + a + b]$
4° Armar pol de Lagrange

Rta

$$P_3(x) = 1.3811x^3 + 0.0447x^2 + 1.3031x - 0.0144$$

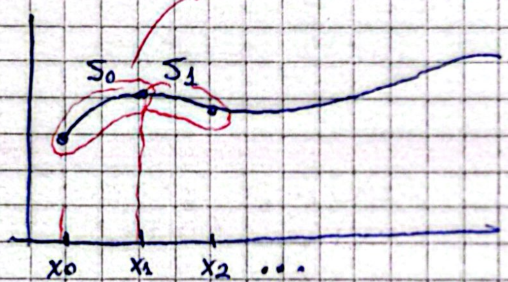
TRAZADOR Cúbico Spline

Entre nodos medidos, en lugar de hacer un Polinomio que pase por todos, será un polinomio segmentado



El polinomio Optimo es $\Rightarrow$ Grado 3 $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$

entre x_0 y x_1 defino un S_0



mi Sx se define de a pedazos

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = a_0 + b_0(x-x_0) + c_0(x-x_0)^2 + d_0(x-x_0)^3, & x \in [x_0, x_1] \\ S_1(x) = a_1 + b_1(x-x_1) + c_1(x-x_1)^2 + d_1(x-x_1)^3, & x \in [x_1, x_2] \\ \vdots & \\ S_{n-1}(x) = a_{n-1} + b_{n-1}(x-x_{n-1}) + c_{n-1}(x-x_{n-1})^2 + d_{n-1}(x-x_{n-1})^3, & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

$S(x_0) = f(x_0)$; $\boxed{S_0(x_1) = S_1(x_1)}$

$\boxed{S_1(x_2) = S_2(x_2)}$

$\vdots$

$\boxed{S_j(x_{j+1}) = S_{j+1}(x_{j+1})} = f(x_{j+1})$

y comparten derivada en los extremos

$$\boxed{\begin{aligned} S'_j(x_{j+1}) &= S'_{j+1}(x_{j+1}) \\ S''_j(x_{j+1}) &= S''_{j+1}(x_{j+1}) \end{aligned}}$$

Spline Cúbica $S(x)$

$\Rightarrow$ Definida por la concatenación de Polinomios de grado 3

Condiciones

Interpola a f

$S(x_0) = f(x_0) \Rightarrow \underbrace{S_0(x_0) = f(x_0) = a_0}$

$S(x_1) = f(x_1) \Rightarrow \underbrace{S_1(x_1) = f(x_1) = a_1}$

$\vdots$

$S(x_{n-1}) = f(x_{n-1}) \Rightarrow S_{n-1}(x_{n-1}) = a_{n-1} = f(x_{n-1})$

$S(x_n) = f(x_n)$

Valen lo mismo en los extremos compartidos

$S_0(x_1) = S_1(x_1)$

$S_1(x_2) = S_2(x_2)$

$\vdots$

$S_{j-1}(x_j) = S_j(x_j)$

En Derivadas

$S'_j(x_{j+1}) = S'_{j+1}(x_{j+1})$

$S''_j(x_{j+1}) = S''_{j+1}(x_{j+1})$

Condición Ligada

se nos sabe $S'(x_0) = f'(x_0)$
y $S'(x_n) = f'(x_n)$

Frontera Libre

$\underbrace{S''(x_0) = S''(x_n) = 0}$

no cambia de conc. en los extremos

Ajuste por Cuadrados Mínimos

El ajuste de un conjunto de pares medidos: (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_n, y_n)

x_i	$f(x_i) = y_i$
x_1	y_1
x_2	y_2
$\vdots$	$\vdots$
x_n	y_n

Primero pensamos en un ajuste LINEAL mediante una recta

$$y = a_0 + a_1 x + e \to \text{error}$$

hacer la tabla

	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	-	-	-	-
$n=3$ 2	-	-	-	-
3	-	-	-	-
	Σx_i	Σy_i	Σx_i^2	$\Sigma x_i y_i$

Buscamos resolver el sist $\boxed{A\hat{x} = b}$ sin solución
→ Busco $\hat{x}$ lo más cercana a la solución

$$\hookrightarrow \boxed{A^t A \check{x} = A^t b}$$

y el $\check{x}$ es el que minimiza la distancia de b al Col de A

MODELO LINEAL

$$y = a_0 + a_1$$

$$\begin{cases} y_1 = a_0 + a_1 x_1 \\ y_2 = a_0 + a_1 x_2 \\ \vdots \\ y_n = a_0 + a_1 x_n \end{cases}$$

escribimos de forma matricial

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{b}$$

El sistema no tiene solución

Resolvemos $A^T A \check{X} = A^T b$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum x_i y_i \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} n a_0 + a_1 \sum x_i = \sum y_i \\ \sum x_i a_0 + a_1 \sum x_i^2 = \sum x_i y_i \end{cases}$$

busca $\boxed{a_0 \text{ y } a_1}$

MODELO NO LINEAL

crecimiento poblacional $\Rightarrow$ modelos exponencial en tiempo corto

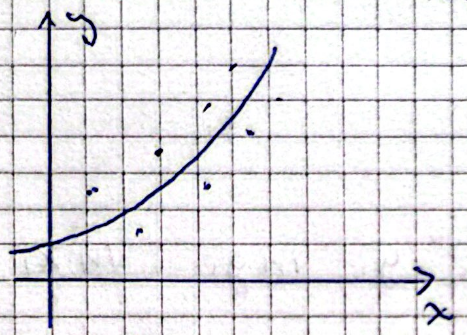
EXPONENCIAL

$\boxed{y = ae^{bx}}$ o $y = a10^{bx}$

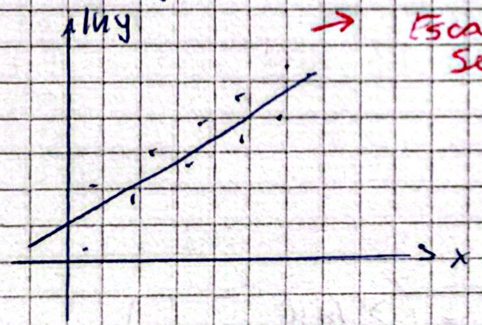
→ Aplico ln a.m.

$$\ln y = \ln(ae^{bx})$$

$$[\ln y = \ln a + \cancel{\ln} bx]$$



$\Downarrow$



→ Escala semilogarítmico

relacion lineal entre $\ln y$ y x

La tabla:

x_i	y_i	$\ln y_i$	x_i^2	$x_i \ln y_i$

$$\begin{cases} \ln a + \cancel{\ln} b x_1 = \ln y_1 \\ \ln a + \cancel{\ln} b x_2 = \ln y_2 \\ \vdots \\ \ln a + \cancel{\ln} b x_n = \ln y_n \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln a \\ \cancel{\ln} b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln y_1 \\ \ln y_2 \\ \vdots \\ \ln y_n \end{pmatrix}$$

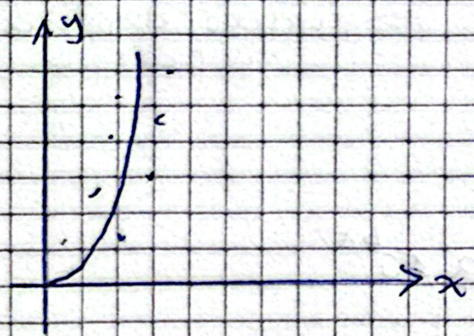
Resolvemos $A^t A \check{x} = A^t y$

$$\begin{pmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln a \\ \cancel{\ln} b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum \ln y_i \\ \sum \ln y_i \cdot x_i \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} n \ln a + \sum x_i \cancel{\ln} b = \sum \ln y_i \\ \sum x_i \ln a + \sum x_i^2 \cancel{\ln} b = \sum \ln y_i \cdot x_i \end{cases}$$

POTENCIAL

$$y = ax^b$$

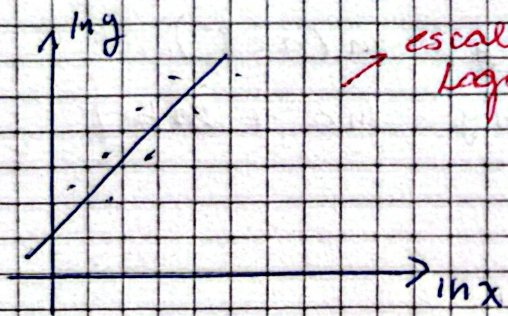


$$\ln y = \ln(ax^b)$$

$$\ln y = \ln a + \ln x^b$$

$$\ln y = \ln a + \ln x \, b$$

$$\Downarrow$$



escala Logarítmica

Tabla:

x_i	y_i	$\ln y_i$	$\ln x_i$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \ln x_1 \\ 1 & \ln x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \ln x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln y_1 \\ \ln y_2 \\ \vdots \\ \ln y_n \end{pmatrix}$$

Resolvemos:
$$\begin{pmatrix} n & \sum \ln x_i \\ \sum \ln x_i & \sum (\ln x_i)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum \ln y_i \\ \sum \ln y_i \cdot \ln x_i \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} n \ln a + \sum \ln x_i \cdot b = \sum \ln y_i \\ \sum \ln x_i \cdot \ln a + \sum (\ln x_i)^2 b = \sum \ln y_i \cdot \ln x_i \end{cases}$$

Buscas a y b

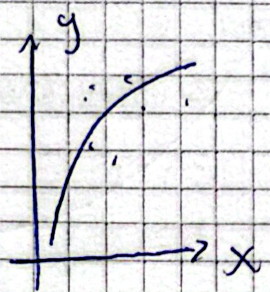
$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2.$$

RACIONAL

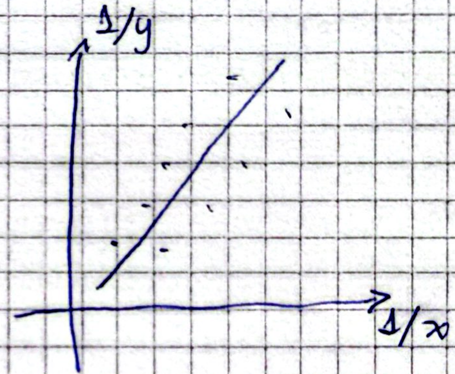
$$y = \frac{ax}{b+x} \longrightarrow \frac{1}{y} = \frac{b+x}{ax} \qquad a \neq 0$$

$$\frac{1}{y} = \frac{b}{ax} + \frac{1}{a}$$

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{ax}\frac{b}{a} + \frac{1}{a}$$



$\Rightarrow$



$$\begin{cases} \dfrac{1}{y_1} = 1/x_1 \; b/a + 1/a \\ \dfrac{1}{y_2} = 1/x_2 \; b/a + 1/a \\ \vdots \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1/x_1 \\ 1 & 1/x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 1/x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/a \\ b/a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/y_1 \\ 1/y_2 \\ \vdots \\ 1/y_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} n & \Sigma\, 1/x_i \\ \Sigma\, 1/x_i & \Sigma (1/x_i)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/a \\ b/a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma\, 1/y_i \\ \Sigma\, 1/y_i \cdot 1/x_i \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} n/a + b/a \cdot \Sigma\, 1/x_i = \Sigma\, 1/y_i \\ \dfrac{1}{a} \Sigma \dfrac{1}{x_i} + \dfrac{b}{a} \cdot \Sigma \left(\dfrac{1}{x_i^2} \right. = \Sigma \dfrac{1}{y_i} \cdot \dfrac{1}{x_i} \end{cases}$$

Busca a y b/

$$\boxed{y = \frac{ax}{b+x}}$$

Diferenciación Numérica

x_i	$f(x_i)$
x_{i-1}	$f(x_{i-1})$
x_i	$f(x_i)$
x_{i+1}	$f(x_{i+1})$

Dif. HACIA ADELANTE

$$f'(x_i) \cong \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

DIFERENCIAS DE PRIMER ORDEN

HACIA ADELANTE

$$f'(x_i) \cong \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}$$

HACIA ATRAS

$$f'(x_i) \cong \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}$$

CENTRADAS

$$f'(x_i) \cong \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h}$$

$\rightarrow O(h^2)$
Mejor Aproximación

DERIVADA SEGUNDA

DIF. CENTRADAS

$$f''(x_i) = \frac{f'(x_{i+1}) - f'(x_{i-1})}{2h}$$

$$= \frac{\frac{f(x_{i+2}) - f(x_i)}{2h} - \frac{f(x_i) - f(x_{i-2})}{2h}}{2h}$$

$$= \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_i) + f(x_{i-2})}{2h} \cdot \frac{1}{2h}$$

$$\boxed{f''(x_i) \cong \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_i) + f(x_{i-2})}{4h^2}}$$

DIF. HACIA ADELANTE

$$f''(x_i) = \frac{f'(x_{i+1}) - f'(x_i)}{h}$$

$$= \frac{\frac{f'(x_{i+2}) - f(x_{i+1})}{h} - \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}}{h}$$

$$\boxed{f''(x_i) = \frac{f'(x_{i+2}) + f(x_i) - 2f(x_{i+1})}{h^2}}$$

DIF. HACIA ATRAS

$$f''(x_i) = \frac{f'(x_i) - f'(x_{i-1})}{h}$$

$$= \frac{\frac{f'(x_i) - f(x_{i-1})}{h} - \frac{f'(x_{i-1}) - f'(x_{i-2})}{h}}{h}$$

$$\boxed{f''(x_i) = \frac{f'(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^2}}$$

Richardson

$$\left[L(f) = f'(x) = R(h) + a_2h^2 + a_4h^4 + a_6h^6 + \dots\right] (1)$$

- $R(h) = \dfrac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$ → Dif Centrados

- $a_k = -\dfrac{f^{(k+1)}(x)}{(k+1)!}$

La Ec. (1) da la primera estimacion de la derivada usando el metodo de Richardson

Luego evaluo en $h/2$

(*) Si aproximo

$$f'(x) = \frac{4\,R(h/2) - R(h)}{3}$$ cometo un error de $O(h^4)$

Puedo seguir todas las veces que quiera. Incrementando: $h/4$, $h/8$, $h/12$ ...

$R(h) = \dfrac{f(h+x) - f(x-h)}{2h}$

$R(h/2) = \dfrac{f(x+h/2) - f(x-h/2)}{h}$

$R(h/4) = \dfrac{f(x+h/4) - f(x-h/4)}{h/2}$

$R^{(2)}(h) = \dfrac{4\,R(h/2) - R(h)}{3}$

$R^{(2)}(h/2) = \dfrac{4\,R(h/4) - R(h/2)}{3}$

$R^{(2)}(h) = \dfrac{16\,R(h/2) - R(h}{15}$

⋮

$$\boxed{R^{(k)}(h) = \frac{4^k R^{(k-1)}(h/2) - R^{(k-1)}(h)}{4^k - 1}} \rightarrow \text{Genérico}$$

$$R^{(0)}(h) = R(h)$$

$$R(h) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

$$\begin{tikzcd}[row sep=tiny, column sep=small]
R(h) \arrow[dr] & & & \\
& R^{(1)}(h) \arrow[dr] & & \\
R(h/2) \arrow[ur] \arrow[dr] & & R^{(2)}(h) & \\
& R^{(1)}(h/2) \arrow[ur] \arrow[dr] & & R^{3}(h) \\
R(h/4) \arrow[ur] \arrow[dr] & & R^{(2)}(h/2) & \\
& R^{(1)}(h/4) \arrow[ur] & & \\
R(h/8) \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

$\downarrow$ Dif. Centradas

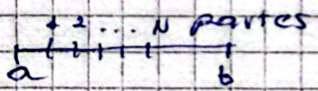
Integración Numerica.

Metodo de Romberg $\rightarrow \int_a^b$

$$R_{11} = \frac{b-a}{2}\left[f(a) + f(b)\right]$$

$$R_{i,1} = \frac{1}{2}\left[R_{i-1,1} + h_{i-1}\sum_{k=1}^{2^{i-2}} f\left(a + \frac{2k-1}{2}h_{i-1}\right)\right]$$

Simpson 1/3 : • 3 nodos consec
• Pol de Grado 2

Intervalo 

La separación entre 2 nodos es equidistante de h

REGLA DE LOS TRAPECIOS

La función se aproxima en cada intervalo $[x_k, x_{k+1}]$ $k = 0, 1, \dots, N$ mediante el Polinomio de Lagrange $P_k(x)$

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) \cong \int_{x_k}^{x_{k+1}} P_L(x)\,dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} (*)$$

$$(*)\ P_L(x) = f(x_k) \cdot \frac{(x - x_{k+1})}{(x_k - x_{k+1})} + f(x_{k+1}) \cdot \frac{(x - x_k)}{x_{k+1} - x_k}$$

N>1 ; Regla compuesta de los Trapecios

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{N-1} f(x_k)\right]$$

N=1 , Regla de los Trapecios Simple

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\left[f(a) + f(b)\right]$$

$$\boxed{h = \frac{b-a}{N}}$$

REGLA DE SIMPSON 1/3

se aproxima f en cada subintervalos $[x_k, x_{k+2}]$ $k = 0, 2, \ldots N-2$. mediante un pol. de Lagrange de grado ≤ 2

N debe ser par y $N \geq 2$

Entonces:

$$\int_{x_k}^{x_{k+2}} f(x)\,dx \cong \frac{h}{3}\left[f(x_k) + 4f(x_{k+1}) + f(x_{k+2})\right]$$

luego... Regla Simpson 1/3 compuesta

$$\boxed{I = \int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{h}{3}\left[f(a) + f(b) + 4\sum_{k=0}^{\frac{N-2}{2}} f(x_{2k+1}) + 2\sum_{k=1}^{\frac{N-2}{2}} f(x_{2k})\right]}$$

impares

pares

N=2. Regla Simpson 1/3 simple

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{b+a}{2}\right) + f(b)\right]}$$

$$= f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)$$

Metodo de Romberg

$$h_i = \frac{b-a}{2^{i-1}}$$

Para la 1° columna Aplicamos trapecio

R_{11}
R_{21}
R_{31}
$\vdots$
R_{i1}

$$R_{1,1} = \frac{b-a}{2}\left[f(a) + f(b)\right]$$

$$R_{i,1} = \frac{1}{2}\left[R_{i-1,1} + h_{i-1}\sum_{k=1}^{2^{i-2}} f\left(a + \frac{2k-1}{2}h_{i-1}\right)\right]$$

Luego Aplicamos Richardson con

$$R_{i,j} = \frac{4^{j-1} R_{i,j-1} - R_{i-1,j-1}}{4^{j-1}-1}$$

Papel de fibra de caña de azúcar.

Ecuaciones Diferenciales

PROBLEMA DE LOS VALORES INICIALES : PVI $\begin{cases} y' = f(t,y), & a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$

EULER

- Debemos saber el valor de la solución en pto inicial

Este método tiene por objeto obtener una aproximación de un problema bien planteado.

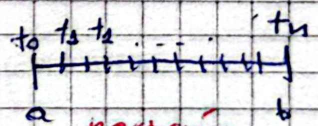
$$\frac{dy}{dt} = f(t,y) \qquad a \le t \le b, \quad y(a) = \alpha$$

Se generarán aproximaciones a la solución en varios valores llamados puntos de Red en el intervalo $[a,b]$
Estos puntos se seleccionan de la forma

$$t_i = a + ih \qquad \forall i = 0,1,2,\dots,N$$

$$t_0 = a$$

$$\boxed{h = \frac{b-a}{N}}$$



partición del intervalo en N partes

Pretendo en el nodo t_i

un $y_i \simeq y(t_i)$ ⇒ La aprox de la solución Real

Euler:

$$\boxed{\begin{cases} y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i) \\ y(a) = y_0 = \alpha \end{cases}} \qquad \forall i = 0,\dots,N-1$$

RUNGE-KUTTA

La idea es escribir la aproximación de la solución de PVI:

$$\begin{cases} y' = f(t,y) & a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

De la siguiente forma:

$$y_{i+1} = y_i + \varphi(t_i, y_i, h) \cdot h$$

donde $\varphi(t_i, y_i, h)$ es una función

Definimos:

$$\varphi(t_i, y_i, h) = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \dots + a_n k_n$$

donde $a_1, a_2, \dots, a_n$ son constantes
k_i se definen

$$K_1 = f(t_i, y_i)$$

$$K_2 = f(t_i + p_1 h, y_i + q_{11} \cdot K_1 \cdot h$$

para el K_n necesito todos los K_i previos

El orden de RK depende de la cantidad de Ks que tengamos.

RK - PuntoMedio

$$y_{i+1} = y_i + h(\cancelto{0}{a_1} k_1 + \cancelto{1}{a_2} k_2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_{i+1} = y_i + hk_2 \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

- $k_1 = f(t_i, y_i)$
- $k_2 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2} k_1 h\right)$

orden de convergencia $(RK\text{-}O2 = a_1k_1 + a_2k_2)$

$h^2 \sim \boxed{\varphi(h^2)}$

RK - orden 4

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

- $k_1 = f(t_i, y_i)$
- $k_2 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2} k_1 h\right)$
- $k_3 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2} k_2 h\right)$
- $k_4 = f(t_i + h, y_i + k_3 h)$

$\rightarrow O(h^4)$

SISTEMA DE EC. DIFERENCIALES

(PVI)

Dados el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{dt} = f_1(t, x_1, \dots x_n) \\ \dfrac{\partial x_2}{dt} = f_2(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial x_n}{dt} = f_n(t, x_1, \dots x_n) \end{cases}$$

Se puede aproximar la sol con cualquiera de los metodos anteriores

ejemplo aplicado al sistema

$$\begin{cases} x' = f(t, x, y) \\ y' = g(t, x, y) \\ x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \qquad t_0 \leq t \leq b$$

Euler $\quad y_{i+1} = y_i + h f(t_i, y_i)$

$$\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} f(t_i, x_i, y_i) \\ g(t_i, x_i, y_i) \end{pmatrix}$$

RK - Punto medio

$$x' = f(t, x, y)$$
$$y' = f(t, x, y)$$

$$x(t_0) = x_0$$
$$y(t_0) = y_0$$

$$y_{i+1} = y_i + k_2 h$$

- $k_1 = f(y_i, t_i)$
- $k_2 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1 h}{2}\right)$

- $x_{i+1} = x_i + h k_2$
- $y_{i+1} = y_i + h m_2$

$$\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} k_2 \\ m_2 \end{pmatrix}$$

- $k_1 = f(t, x, y)$
- $m_1 = g(t, x, y)$
- $k_2 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, x + \frac{k_1 \cdot h}{2}, y + \frac{m_1 h}{2}\right)$
- $m_2 = g\left(t_i + \frac{h}{2}, x + \frac{k_1 h}{2}, y_i + \frac{m_1 h}{2}\right)$

Ecuaciones Dif. De Orden Superior

Un problema de valores iniciales de 2º orden

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = u_0 \end{cases}$$

Se puede expresar como un problema de valores iniciales para un sist. de ec. dif de primer orden

Hacemos un 'cambio de variables' $\Rightarrow$ Si $y' = u$
nos queda:

$$\begin{cases} y' = u \longrightarrow k \\ u' = f(x, y, u \longrightarrow m \\ y(x_0) = y_0 \\ u(x_0) = u_0 \end{cases}$$

→ **Euler**

$$\begin{pmatrix} y_{i+1} \\ u_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_i \\ u_i \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} u_i \\ f(x_i, y_i, u_i) \end{pmatrix}$$

→ RK - 1/2

$$\begin{pmatrix} y_{i+1} \\ u_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_i \\ u_i \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} k_2 \\ m_2 \end{pmatrix}$$

- $k_1 = u_i$
- $k_2 = u_i + \frac{h m_1}{2}$
- $m_1 = f(x_i, y_i, u_i)$
- $m_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1 h}{2}, u_i + \frac{m_1 h}{2}\right)$

Ecuaciones Dif.
Problema de Valores en la Frontera

Ec. dif. de 2º orden

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') & a \leq x \leq b \\ y(a) = \alpha \\ y(b) = \beta \end{cases}$$

→ Condiciones en la frontera

Momento de flexion: $M(x)$ $\quad \dfrac{\partial^2 M}{\partial x^2} = w(x)$ → carga por unidad de long

VIGA EMPOTRADA EN AMBOS EXTREMOS →

Necesito saber las condiciones en la frontera

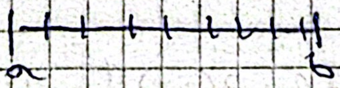
$$y(0) = 0 \quad , \quad y(L) = 0 \quad , \quad \underbrace{y'(0) = 0 \; , \; y'(L) = 0}$$

pendiente de la recta tg en los extremos

Dado un problema del estilo:

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') & , \; a \leq x \leq b \\ y(a) = \alpha \\ y(b) = \beta \end{cases}$$

→ partición del int. a, b



$$h = \frac{b-a}{N}$$

$$y''_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

$\Rightarrow$

$$y(x+h) - y(x-h) \cong 2h\, y'(x)$$

$$y'(x) \cong \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h}$$

$$\Rightarrow \boxed{y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}}$$, Def Centradas

↳ Esto lo voy a sustituir en la EDOs VF

sea el PVF:

$$\begin{cases} y'' + P(x)\,y' + Q(x)\,y = f(x) \\ y(a) = \alpha \\ y(b) = \beta \end{cases}$$

$x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \ldots, n$

$h = \frac{b-a}{N}$

ej: $y'' = y'x^2 - 2y + 5e^x$

escribo $\quad y'' \underbrace{-y'x^2}_{P(x)} + \underbrace{2y}_{Q(x)} = \underbrace{5e^x}_{f(x)}$

$x_0 = a$
$x_n = b$

Reemplazando con y'' e y'

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + P(x)\left[\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}\right] + Q(x_i)\,y_i = f(x_i)$$ $x_0 = a$

⋮

$$y_{i+1}\left[1 + 2h\,P(x_i)\right] - y_i\left[2 - h^2 Q(x_i)\right] + y_{i-1}\left[1 - 2h\,P(x_i)\right] = h^2 f(x_i)$$

Ec. Dif. P.V.F. en derivadas parciales

Una ecuación en derivadas parciales es aquella que expresa una relación entre una función de varias variables y todas o algunas de sus derivadas parciales.

Su representación general es:

$$f\left(x, y, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ldots\right) = 0$$

donde $u = g(x, y)$

Ej del formato de las ec de derivadas parciales de segundo orden.

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F = 0$$

donde A, B, C y F son funciones de las variables x e y

Clasificación

si $B^2 - 4AC < 0 \Rightarrow$ ELÍPTICA
si $B^2 - 4AC = 0 \Rightarrow$ PARABOLICA
si $B^2 - 4AC > 0 \Rightarrow$ HIPERBOLICA

Ecuación de Onda

Fuerza externa　　L longitud de cuerda

EDP　$u_{tt} - C^2 u_{xx} = F(x,t) \quad x \in [0, L]$

velocidad de las ondas

$\hookrightarrow$ EDO $\Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial t^2} - C^2 \dfrac{\partial u}{\partial x^2} = $ Fuerza ext

Ecuación del Calor

Temperatura de una barra homogenea de long. L con focos o sumideros de calor internos descritos por $F(x,t)$

La EDP es:

focos de calor

$$\boxed{u_t - k^2 u_{xx} = F(x,t)} \quad , \quad x \in (0,L) \; , \; t>0$$

$\boxed{k^2}$ depende de la conductividad térmica, la δ lineal y el calor esp. del material

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k^2 \frac{\partial u^2}{\partial t^2} = F(x,t)$$

Condiciones Iniciales

- desplazamiento
- velocidad
- temperatura

Ec. Ondas : 2DO orden (necesita 2 condiciones iniciales)

- desplazamiento inicial : $u(\bar{x},0) = f(x)$
- velocidad inicial : $u_t(\bar{x},0) = g(x)$

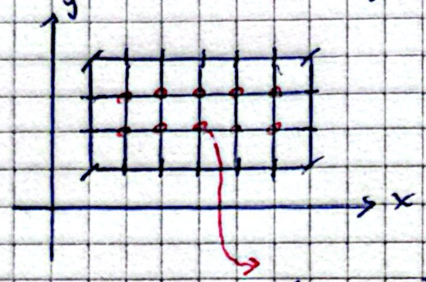
Ec. Calor : 1ER ORDEN (necesita 1 CI)

- temperatura inicial : $u(\bar{x},0) = f(x)$

El metodo utilizado en derivadas parciales es diferencias finitas.

- Se requiere de una función $F\ u(x_i, y_i)$: donde x e y son las variables independientes. 'i' es el indice de la posición para x y j es el indice para la pos. de y
- La solución es un arreglo de 2 dimensiones

Partición:
$0 \le i \le n$
$0 \le j \le m$



hago una partición en el eje x de 'n' partes y en el eje y de m partes
x — i
y — j

Cada punto lo llamo: (x_i, y_j)

La solución lo llamo $u_{ij} = (x_i, y_j)$

Considerando diferencias Centradas:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{ij} = \frac{1}{2\Delta x}\left[u_{i+1,j} - u_{i-1,j}\right]$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{ij} = \frac{1}{2\Delta y}\left[u_{i,j+1} - u_{i,j-1}\right]$$

(3) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{(\Delta x)^2}\left[u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}\right]$$

(4) $$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{(\Delta y)^2}\left[u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}\right]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{1}{4\Delta x \Delta y}\left[u_{i-1,j-1} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1} + u_{i+1,j+1}\right]$$

LA EC. EN DERIVADAS PARCIALES ELÍPTICAS

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}$$

$\Delta x = \frac{b-a}{n}$ $\quad x_i = a + i\Delta x$

$\Delta y = \frac{b-a}{m}$ $\quad y_j = a + j\Delta y$

usamos (3) y (4)