18-02-2026 Análisis Numérico I (75.12, 95.04, 95.13) Integrador

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

1	2	3	4	5
R-	B	B	B	B

EL EXAMEN SE APRUEBA CON 3 EJERCICIOS CORRECTAMENTE RESUELTOS

9 (nueve)

Apellido: De Meglio Nombres : Lourdes

Padrón: 111381

1. Dada la ecuación real $2cos(2x) + 4x - k = 0$.

   a) Determinar el valor de k para que tenga una única raíz triple en el intervalo $[0, 1]$.

   b) Para el valor de k, hallado en a), calcular la raíz con una cifra decimal exacta, utilizando el método de Newton modificado para raices múltiples. Usar como semilla $x_0 = 0.7$.

2. Considerar una barra delgada de longitud l que se mueve en el plano $x-y$. La barra se fija en uno de sus extremos con un alfiler y con una masa en el otro. Este sistema se resuelve con la siguiente ecuación diferencial de segundo orden:
   $\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} - \frac{g}{l}\theta(t) = 0$. Sabiendo que: $g = 9.81\frac{m}{s^2}$, $l = 0.5$ m, $\theta(0) = 0$ y $\frac{d\theta}{dt}(0) = 0.25\frac{rad}{s}$. Hallar el ángulo y la velocidad angular en $t = 0.2$ segundos utilizando dos iteraciones del método de Runge-Kutta del punto medio.

3. Hornbeck en 1975 propuso la siguiente ecuación diferencial ordinaria parásita no lineal:
   $\frac{dP(t)}{dt} = 5(P(t) - t^2)$. Si la condicii¿½n inicial es $P(0) = 0.08$. Hallar el valor de $P(0.3)$, usando tres iteraciones del método de Runge-Kutta del punto medio.

4. Hallar una aproximación del trabajo que realiza la fuerza $\vec{F}(x, y) = (3y^2 + 2, 16x)$ al mover una partícula desde $(1, 0)$ hasta el $(-1, 0)$, siguiendo la mitad superior de la elipse $x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$. Usar Simpson 1/3 y aproximar $\pi = 3$, con $N = 12$. Indicar el error cometido. Trabajar con dos decimales. (AYUDA: $W = \int_a^b \vec{F}(\sigma(t))\sigma'(t)dt$)

5. Una partícula se mueve a lo largo del eje x con una aceleración que en cualquier tiempo $t \geq 0$ se escribe como: $a(t) = 8 - 4t + t^2$. Se sabe que la partícula se encuentra en $x = 1$ en $t = 0$ y al cabo de dos segundos se encuentra en $x = 7$. Hallar la posición de la partícula en los instantes $t = 0.5$seg., $t = 1$seg.y $t = 1.5$seg. Usando diferencias finitas.

Lourdes De Meyers

1 Ecuación : $2\cos(2x) + 4x - k = 0$

a) Determinar el valor de K para que tenga una única raíz simple en int [0,1]

b) Calcular la raíz con 1 cifra decimal exacta. Utilizando método de N-R modificado. semilla $x_0 = 0.7$

~~si x es 0~~

~~si K=0 → la ecuación se anula en x=0 luego x=0 es raíz~~

a)

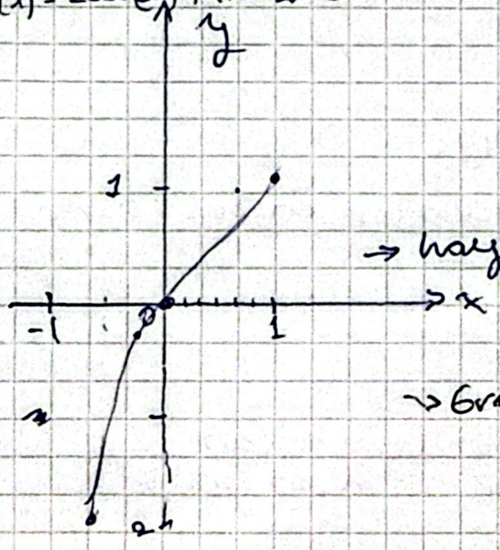
~~$2\cos(2x) + 4x = 0$~~

~~si $x=0$ → $2\cos(2\cdot 0) + 4\cdot 0 = 0$~~

Para que la ec. tenga raiz en el int [0,1]

si $x=0$ → $2\cos(0) + 4\cdot 0 - K = 0$

$f(x) = 2\cos(2x) + 4x - 2 = 0$ → $2 - K = 0 \longrightarrow \boxed{K = 2}$



→ hay cambio de signo

→ Grafico Muy Aproximado

mal planteado

$f(x) = 0$

$f'(x) = 0$

$f''(x) = 0$

$k = 4$

arrastre error

(b) Si $k=2$

$$f(x) = 2\cos(2x) + 4x - 2$$

Uso N-R para raíces Multiples

$$\begin{cases} P_{n+1} = P_n - \dfrac{f(P_n)\cdot f'(P_n)}{f'(P_n)^2 - f(P_n)\cdot f''(P_n)} \\ P_0 \text{ semilla } 0.7 \end{cases}$$

- $f'(x) = -2\cdot 2\,\text{sen}(2x) + 4 = \underline{-4\,\text{sen}(2x) + 4}$
- $f''(x) = -4\cos(2x)\cdot 2 = \underline{-8\cos(2x)}$

Iteración 1

$$P_1 = 0.7 - \left[\frac{(2\cdot\cos(1.4) + 0.8)\cdot(-4\,\text{sen}(1.4) + 4)}{(-4\,\text{sen}(1.4)+4)^2 - (2\cos(1.4)+0.8)(-8\cos(0.7))}\right.$$

$$= 0.7 - \frac{0.06635}{0.00339 - -6.97496}$$

~~it 2 $P_1 = 0.6905$~~

→ hechos con calculadora

~~it 3 $P_2 = 0.5933$~~

~~it 4 $P_3 = 0.4938$~~

Cada vez se acerca mas a la raiz

~~it 5 $P_4 = 0.35649$~~

$r \approx 0.2$

~~it 6 $P_5 = 0.215880$~~

$\boxed{r \cong 0.7 \times 10^{-5}}$

it 1 → $0.6573 = P_1$
it 2 → $0.5934 = P_2$
it 3 → $0.4925 = P_3$
it 4 → $0.3629 = P_4$
it 5 → $0.1925 = P_5$
it 6 → $0.0491 = P_6$
it 7 → $0.0026 = P_7$
it 8 → $0.000007 = P_8$

vemos como en cada it. va convergiendo

DATOS

2. Barra de longitud l. Fijada en un extremo con un alfiler y con una masa en el otro.

La ecuación que resuelve el sistema es:

$$\theta''(t) - \frac{g}{l}\theta(t) = 0$$

$g = 9.81\ m/s^2$
$l = 0.5m$
$\theta(0) = 0$
$\theta'(0) = 0.25$

Me piden: Hallar el ángulo y la velocidad angular en $t = 0.2$ usando 2 iteraciones de R-K.

Planteo el PVI, uso cambio de variables

$$\begin{cases} \theta' = y \\ y' = \frac{g}{l}\theta = \frac{9.81}{0.5}\theta = 19.62\theta \\ \theta(0) = 0 \quad - k \\ y(0) = 0.25 \quad - m \end{cases}$$

$$h = \frac{0.2}{2} = 0.1$$

Runge Kutta punto medio:

$$\begin{pmatrix}\theta_{i+1} \\ y_{i+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\theta_i \\ y_i\end{pmatrix} + h\begin{pmatrix}k_2 \\ m_2\end{pmatrix}$$

- $k_1 = y_i$
- $k_2 = y_i + \frac{h m_1}{2}$
- $m_1 = f(t_i, y_i, \theta_i)$
- $m_2 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{m_1 h}{2}, \theta_i + \frac{k_1 h}{2}\right)$

Iteración 1 $i=0$

$$\begin{pmatrix}\theta(0.1s) \\ y(0.1)\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}\theta_1 \\ y_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\theta_0 \\ y_0\end{pmatrix} + h\begin{pmatrix}k_2 \\ m_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 \\ 0.25\end{pmatrix} + 0.1\begin{pmatrix}0.25 \\ 0.245\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0.025 \\ 0.2745\end{pmatrix}$$

- $k_1 = y_0 = 0.25$
- $k_2 = y_0 + \frac{0.01 \cdot 0}{2} = 0.25$
- $m_1 = f(0, 0.25, 0) = 19.62 \cdot 0 = 0$
- $m_2 = f\left(-, -, 0 + \frac{k_1 \cdot h}{2}\right) = 19.62\left(0 \frac{25 \cdot 0.1}{2}\right) = 0.245$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}\theta(0.1) \\ y(0.1)\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}\theta_1 \\ y_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0.025 \\ 0.2745\end{pmatrix}$$

Iteración 2 $\quad i=1$

$$\begin{pmatrix} \theta(0.2s) \\ y(0.2s) \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \theta_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + h\begin{pmatrix} k_2 \\ m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.025 \\ 0.2745 \end{pmatrix} + 0.1\begin{pmatrix} 0.2990 \\ 0.7598 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0549 \\ 0.3504 \end{pmatrix}$$

- $k_1 = y_1 = \underline{0.2745}$
- $m_1 = f(0.1, 0.2745, 0.025) = 19.62(0.025)$

  $\underline{m_1 = 0.4905}$

- $k_2 = y_1 + \frac{m_1 h}{2} = 0.2745 + \frac{0.4905(0.1)}{2}$

  $\underline{k_2 = 0.2990}$

- $m_2 = f\left(\ldots, 0.025 + \frac{0.2745(0.1)}{2}\right)$

  $= 19.62(0.025 + 0.0137)$

  $\underline{m_2 = 0.7598}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} \theta(0.2s) \\ y(0.2s) \end{pmatrix} \simeq \underbrace{\begin{pmatrix} \theta_2 \\ y_2 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} \theta \\ \theta' \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0.0549 \\ 0.3504 \end{pmatrix}}$$

Lourdes de Meges

(3) Hornbeck propuso la ecuación diferencial:

$$\frac{dP(t)}{dt} = 5\left(P(t) - t^2\right)$$

Condición inicial es $P(0)=0.08$. Hallar el valor de $P(0.3)$ Usando 3 iteraciones de Runge-Kutta punto medio

Planteo el PVI

$$\begin{cases} P(t)' = 5\left(P(t) - t^2\right) \\ P(0) = 0.08 \end{cases} , \quad h = \frac{0.3}{3} = \underline{0.1}$$

RK: $\left\{ P_{i+1} = P_i + h\,K2 \right.$ $\quad \circ\ K1 = f(t_i, P_i)$; $\circ\ K2 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, P_i + \frac{hK1}{2}\right)$

$t_0 = 0$
$t_1 = 0.1$
$t_2 = 0.2$

Iteración 1, $i=0$

$$P(0.1) \cong P_1 = P_0 + hK2 = 0.08 + 0.1\,(0.4875) = 0.1288$$

- $K1 = f(0, 0.08) = 5\,(0.08 - 0^2) = 5\,(0.08) = 0.4$
- $K2 = f\left(0 + \frac{0.1}{2}, 0.08 + \frac{0.1(0.4)}{2}\right) = f(0.05, 0.1) = 5\left(0.1 - (0.05)^2\right)$

$\underline{K2 = 0.4875}$

$$P(0.1) \cong P_1 = 0.1288$$

Iteración 2, $i=1$

$$P(0.2) \cong P_2 = P_1 + hK2 = 0.1288 + 0.1\,(0.68) = \underline{0.1968}$$

- $K1 = f(0.1, 0.1288) = 5\left(0.1288 - (0.1)^2\right) = \underline{0.594}$
- $K2 = f\left(0.1 + \frac{0.1}{2}, 0.1288 + \frac{0.594}{2}(0.1)\right) = f(0.15, 0.1585)$

$= 5\left(0.1585 - (0.15)^2\right) = \underline{0.68}$

$$P(0.2) \cong P_2 = 0.1968$$

Iteración 3 $\quad i=2$

$$P(0.3) \cong P_3 = P_2 + hk_2 = 0.1968 + 0.1(0.8675) = 0.2836$$

- $k_1 = f(t_2, P_2) = f(0.2, 0.1968) = 5(0.1968 - (0.2)^2) = 0.784$
- $k_2 = f\left(0.2 + \frac{0.1}{2}, 0.1968 + \frac{(0.784) \cdot 0.1}{2}\right) = f(0.25; 0.236)$

$$= 5(0.236 - (0.25)^2) = 0.8675$$

$$\boxed{P(0.3) \cong P_3 = 0.2836}$$

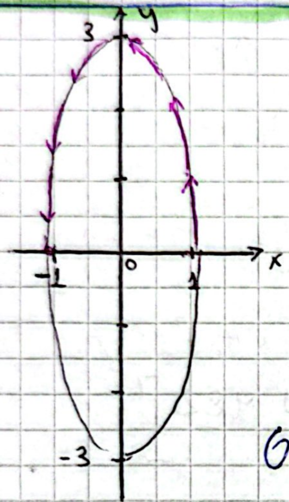
Lourdes De Megias

4 • $\vec{F}(x,y) = (3y^2+2\,,\,16x)$

• particula se mueve desde $(1,0)$ hasta $(-1,0)$, siguiendo la mitad superior de la elipse $x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$

Usar Simpson 1/3 y aproximar $\pi = 3$, $N = 12$

$$W = \int_a^b F(\sigma(t))\,\sigma'(t)\,dt$$



Elipse ec: $x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$

Debemos conseguir la parametrización

$$\begin{cases} x\,1 = \cos(x) \rightarrow x = \cos(x) \\ y\,1/3 = \operatorname{sen}(x) \rightarrow y = 3\operatorname{sen}(x) \end{cases}$$

$$\sigma(t) = [\overbrace{\cos(t)}^{x}\,,\,\overbrace{3\operatorname{sen}(t)}^{y}]\quad,\quad t \in [0,\pi]$$

toma $\pi = 3$ por enunciado

• $\sigma'(t) = [-\operatorname{sen}(t)\,,\,3\cos(t)]$

• $f[\sigma(t)] = (3(3\operatorname{sen}(t))^2 + 2\,,\,16\cos(t))$

$= (27\operatorname{sen}^2(t) + 2\,,\,16\cos(t))$

• $f[\sigma(t)] \cdot \sigma'(t) = (27\operatorname{sen}^2(t)+2\,,\,16\cos(t)) \cdot (-\operatorname{sen}(t)\,,\,3\cos(t)]$

$= -27\operatorname{sen}^3(t) - 2\operatorname{sen}(t) + 48\cos^2(t)$

Entonces

$$W = \int_0^{\pi=3} (-27\operatorname{sen}^3(t) - 2\operatorname{sen}(t) + 48\cos^2(t))\,dt$$

Resuelvo con Simpson 1/3

$$I \approx \frac{h}{3}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{N/2-1} f\text{pares} + 4\sum_{i=0}^{N/2-1} f\text{impares}\right]$$

$f = -27\,\text{sen}^3(t) - 2\,\text{sen}(t) + 48\cos^2(t)$ $\qquad h = \frac{3-0}{12} = 0.25$

- $f_0(0) = 48$
- $f_1(0.25) = 44.1583$
- $f_2(0.5) = 33.0331$
- $f_3(0.75) = 15.7832$
- $f_4(1) = -3.7577$
- $f_5(1.25) = -20.2004$
- $f_6(1.5) = -28.5524$
- $f_7(1.75) = -26.1665$
- $f_8(2) = -13.8054$
- $f_9(2.25) = 4.6665$
- $f_{10}(2.5) = 23.8234$
- $f_{11}(2.75) = 38.7437$
- $f_{12}(3) = 46.68597$

luego

$$I \simeq \frac{0.25}{3}\left[48 + 46.6859 + 4(f_1 + f_3 + f_5 + f_7 + f_9 + f_{11}) + 2(f_2 + f_4 + f_6 + f_8 + f_{10})\right]$$

$$= \frac{0.25}{3}\left[48 + 46.6859 + 227.9392 + 21.482\right]$$

$$\approx \frac{0.25}{3}\left[344.1071\right] = 28.6756$$

B

$$\therefore W \cong 28.6756$$

Lourdes De Meges

(5) • aceleración : $a(t) = 8 - 4t + t^2$

Sabemos • $t=0$, $x=1$
• $t=2$, $x=7$ } condiciones de frontera

Hallar la posición de la partícula en los instantes
→ $t = 0.5s$
→ $t = 1s$
→ $t = 1.5s$

Usando diferencias Finitas

La aceleración es la ~~xxxxx~~ derivada 2° de la posición
Planteo el PVF

$$\begin{cases} y'' = 8 - 4t + t^2 \\ y(0) = 1 \\ y(2) = 7 \end{cases}$$

$x_{t_0}(0_s) = 1$
$x_{t_1}(0.5_s)$?
$x_{t_2}(1)$?
$x_{t_3}(1.5)$?
$x_{t_4}(2) = 7$

$h = 0.5$

$t_0 = 0$
$t_1 = 0.5$
$t_2 = 1$
$t_3 = 1.5$
$t_4 = 2$

Usando Dif. Finitas

$$y_i'' + P(x_i)y_i' + Q(x_i)y_i = f(x_i)$$

- $P(x) = 0$
- $Q(x) = 0$
- $f(x) = 8 - 4t + t^2$

Usando dif Centrados

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = 8 - 4t + t^2$$

$$\boxed{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} = 0.25\left(8 - 4t_i + t_i^2\right)}$$

Si usamos formula nos queda lo mismo

$$\left(1 + \frac{h}{2}\cancelto{0}{P(x_i)}\right)y_{i+1} + \left(-2 + h^2\cancelto{0}{Q_i}\right)y_i + \left(1 - \frac{h}{2}\cancelto{0}{P_i}\right)y_{i-1} = h^2 f_i$$

$$\rightarrow \boxed{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} = 0.25\left(8 - 4t_i + t_i^2\right)}$$

General

$\rightarrow \quad y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} = 0.25\,(8 - 4t_i + t_i^2) \qquad i = 0, \ldots, 3$

$\underline{i=1}$, $t_1 = 0.5$

$$y_2 - 2y_1 + \overset{=1}{y_0} = 0.25\,(8 - 4(0.5) + 0.25)$$

$\underline{i=2}$, $t_2 = 1$

$$y_3 - 2y_2 + y_1 = 0.25\,(8 - 4 + 1)$$

$\underline{i=3}$, $t_3 = 1.5$

$$\underset{=7}{y_4} - 2y_3 + y_2 = 0.25\,(8 - 4(1.5) + 2.25)$$

Nos queda el sist de ec:

$$\begin{cases} y_2 - 2y_1 = 0.5625 \\ y_3 - 2y_2 + y_1 = 1.25 \\ -2y_3 + y_2 = -5.9375 \end{cases}$$

3Ec
3Inc.

$$\begin{array}{c|ccc|c} & y_1 & y_2 & y_3 & \\ \hline & -2 & 1 & 0 & 0.5625 \\ + & 1 & -2 & 1 & 1.25 \\ & 0 & 1 & -2 & -5.9375 \end{array}$$

$\rightarrow$ Resuelto con Calculadora

$$\therefore \quad \boxed{\begin{aligned} y_1 &= 0.4375 \\ y_2 &= 1.4375 \\ y_3 &= 3.6875 \end{aligned}}$$