ECMA

Projet d'optimisation robuste

Partie théorique

Question 1.

On se place dans un graphe $G = (V, E)$.

Le problème statique s'écrit :

$$
\begin{aligned}
\min_x \ & \sum_{e\in E} l_e \widehat{x_e} & \\
\text{st} \ & \sum_{v\in V} w_v\, y_{k,v} \le B & \forall k \in [\![1, K]\!] \ (1)\\
& \sum_{k=1}^{K} y_{k,v} = 1 & \forall v \in V \ (2)\\
& x_{k,e} \ge (y_{k,u} + y_{k,v}) - 1 & \forall e = (u,v) \in E,\ \forall k \in [\![1, K]\!] \ (3)\\
& x_{k,e} \le \frac{1}{2}(y_{k,u} + y_{k,v}) & \forall e = (u,v) \in E,\ \forall k \in [\![1, K]\!] \ (4)\\
& \widehat{x_e} = \sum_{k=1}^{K} x_{k,e} & \forall e \in E \ (5)\\
& y_{k,v} \in \{0,1\} & \forall v \in V,\ \forall k \in [\![1, K]\!]\\
& x_{k,e} \in \{0,1\} & \forall e \in E,\ \forall k \in [\![1, K]\!]\\
& \widehat{x_e} \in \{0,1\} & \forall e \in E
\end{aligned}
$$

$y_{k,v}$ vaut un 1 si v est dans le cluster k et 0 sinon.

$x_{k,e}$ vaut 1 si l'arête e est entre deux sommets du cluster k et 0 sinon.

La première contrainte traduit le respect de la limite de poids des arêtes dans chacun des clusters, la deuxième qu'un sommet est dans exactement un cluster, et les deux suivantes sont une linéarisation de la contrainte suivante : $\forall (uv) = e \in E, x_{k,e} = 1 \Leftrightarrow y_{k,u} = y_{k,v} = 1$. Enfin, avec la cinquième contrainte, $\widehat{x_e}$ vaut 1 si l'arête e est au sein d'une partie, 0 sinon.

Question 2.

Passons à la modélisation robuste. Pour l'objectif,
On note $x = (\widehat{x_e})_{e\in E} = (\sum_{k=1}^{K} x_{k,e})_{e\in E}$. Alors $l^T x$ devient :

$$
\begin{aligned}
& \max_{l^1\in\mathcal{U}^1} (l^1)^T x \\
\Leftrightarrow\ & \max_{\delta^1\in[0,3]^{|E|}} \sum_{(i,j)\in E} (l_{ij} + \delta^1_{ij}(\widehat{l_i} + \widehat{l_j}))\widehat{x_{ij}} \\
& \text{s.t.} \qquad \sum_{(i,j)\in E} \delta^1_{ij} \le L
\end{aligned}
$$

Pour les contraintes, on a pour tout $k \in [\![1, K]\!]$:

$$
\begin{aligned}
\sum_{v\in V} w_v\, y_{k,v} \le B,\ \forall w \in \mathcal{U}^2 \Leftrightarrow\ & \max_{w^2\in\mathcal{U}^2} \sum_{v\in V} w^2_v\, y_{k,v} \le B \\
\Leftrightarrow\ & \max_{\delta^2\in[0,W_v]^{|V|}} \sum_{v\in V} w_v(1 + \delta^2_v)\, y_{k,v} \le B \\
& \text{s.t.} \qquad \sum_{v\in V} \delta^2_v \le W
\end{aligned}
$$

On réécrit alors le problème :

$$
\begin{aligned}
\min_{x} \ \max_{\delta^1} \ & \sum_{(i,j)\in E} (l_{ij} + \delta^1_{ij}(\widehat{l_i} + \widehat{l_j}))\widehat{x_{ij}} & \\
\text{s.t.} \ & \sum_{(i,j)\in E} \delta^1_{ij} \leq L & \\
& \delta^1_{ij} \in [0,3] & \forall (i,j) \in E \\
& \begin{cases} \max_{\delta^2} \sum_{v\in V} w_v(1+\delta^2_v)\, y_{k,v} \leq B \\ \sum_{v\in V} \delta^2_v \leq W \\ \delta^2_v \in [0, W_v],\ \forall v \in V \end{cases} & \forall k \in [\![1,K]\!] \\
& \sum_{k=1}^{K} y_{k,v} = 1 & \forall v \in V \\
& x_{k,e} \geq (y_{k,u} + y_{k,v}) - 1 & \forall e=(u,v) \in E,\ \forall k \in [\![1,K]\!] \\
& x_{k,e} \leq \frac{1}{2}(y_{k,u} + y_{k,v}) & \forall e=(u,v) \in E,\ \forall k \in [\![1,K]\!] \\
& \sum_{k=1}^{K} x_{k,e} = \widehat{x_e} & \forall e \in E \\
& y_{k,v} \in \{0,1\} & \forall v \in V,\ \forall k \in [\![1,K]\!] \\
& x_{k,e} \in \{0,1\} & \forall e \in E,\ \forall k \in [\![1,K]\!] \\
& \widehat{x_e} \in \{0,1\} & \forall e \in E
\end{aligned}
$$

Question 3.

a) Le problème devient :

$$
\begin{aligned}
\min_{x,t} \ & t & \\
\text{st} \ & \sum_{(i,j)\in E} (l_{ij} + \delta^1_{ij}(\widehat{l_i} + \widehat{l_j}))\widehat{x_{ij}} \leq t & \\
& \sum_{(i,j)\in E} \delta^1_{ij} \leq L & \\
& \delta^1_{ij} \in [0,3] & \forall (i,j) \in E \\
& \begin{cases} \max_{\delta^2} \sum_{v\in V} w_v(1+\delta^2_v)\, y_{k,v} \leq B \\ \sum_{v\in V} \delta^2_v \leq W \\ \delta^2_v \in [0, W_v],\ \forall v \in V \end{cases} & \forall k \in [\![1,K]\!] \\
& \sum_{k=1}^{K} y_{k,v} = 1 & \forall v \in V \\
& x_{k,e} \geq (y_{k,u} + y_{k,v}) - 1 & \forall e=(u,v) \in E,\ \forall k \in [\![1,K]\!] \\
& x_{k,e} \leq \frac{1}{2}(y_{k,u} + y_{k,v}) & \forall e=(u,v) \in E,\ \forall k \in [\![1,K]\!] \\
& \sum_{k=1}^{K} x_{k,e} = \widehat{x_e} & \forall e \in E \\
& y_{k,v} \in \{0,1\} & \forall v \in V,\ \forall k \in [\![1,K]\!] \\
& x_{k,e} \in \{0,1\} & \forall e \in E,\ \forall k \in [\![1,K]\!] \\
& \widehat{x_e} \in \{0,1\} & \forall e \in E
\end{aligned}
$$

b)On pose :

$$\mathcal{U}^{1*} = \begin{cases} \{l_{ij} + \frac{L}{|E|}(\widehat{l_i} + \widehat{l_j}),\ \forall (i,j) \in E\} & \text{si } \frac{L}{|E|} \leq 3 \\ \{l_{ij},\ \forall (i,j) \in E\} & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$\mathcal{U}^{2*} = \begin{cases} \{w_v(1 + \frac{W}{|E|}),\ \forall v \in V\} & \text{si } \frac{W}{|V|} \leq W_v \\ \{w_v,\ \forall v \in V\} & \text{sinon} \end{cases}$$

c) On a les sous-problèmes suivants.
Pour l'objectif :

$$\begin{aligned} \max_{\delta^1} & \sum_{(i,j)\in E} (l_{ij} + \delta^1_{ij}(\widehat{l_i} + \widehat{l_j}))\widehat{x_{ij}}^* \\ \text{s.t.} & \sum_{(i,j)\in E} \delta^1_{ij} \leq L \\ & \delta^1_{ij} \in [0,3] & \forall (i,j) \in E \end{aligned}$$

Pour la contrainte, pour tout $k \in [\![1, K]\!]$,

$$\begin{aligned} \max_{\delta^2} & \sum_{v\in V} w_v(1 + \delta^2_v)\, y^*_{k,v} \\ \text{st} & \sum_{v\in V} \delta^2_v \leq W \\ & \delta^2_v \in [0, W_v] & \forall v \in V \end{aligned}$$

d) On souhaite que :

$$l^* x^* \leq t^*$$

Et que pour tout $k \in [\![1, K]\!]$:

$$w^{2*} y^*_k \leq B$$

e) Ce qui nous donne les coupes suivantes à ajouter.
Pour le premier sous-problème :

$$t \geq \sum_{(i,j)\in E} (l_{ij} + \delta^{1*}_{ij}(\widehat{l_i} + \widehat{l_j}))\widehat{x_{ij}}$$

Et pour ceux liés à la contrainte :
Pour tout $k \in [\![1, K]\!]$:

$$\sum_{v\in V} w_v(1 + \delta^{2*}_v)\, y_{k,v} \leq B$$

Question 4.
a) La fonction objectif se réécrit comme suit :

$$\max_{\delta^1} \sum_{(i,j)\in E} (\widehat{x_{ij}} l_{ij} + \delta^1_{ij}(\widehat{l_i} + \widehat{l_j})\widehat{x_{ij}}) \Leftrightarrow \sum_{(i,j)\in E} \widehat{x_{ij}} l_{ij} + \max_{\delta^1} \sum_{(i,j)\in E} \delta^1_{ij}(\widehat{l_i} + \widehat{l_j})\widehat{x_{ij}}$$

b) Le problème interne lié aux variables δ^1_{ij} est donc :

$$\begin{aligned}
&\max_{\delta^1} \sum_{(i,j)\in E} \delta^1_{ij}(\widehat{l_i}+\widehat{l_j})\widehat{x_{ij}} \\
&\text{s.t.} \sum_{ij\in E} \delta^1_{ij} \leq L \\
&\quad \delta^1_{ij} \leq 3 && \forall (i,j)\in E \\
&\quad \delta^1_{ij} \geq 0 && \forall (i,j)\in E
\end{aligned}$$

c) Que l'on dualise comme suit :

$$\begin{aligned}
&\min_{\alpha,\beta} L\alpha + 3\sum_{(i,j)\in E} \beta_{ij} \\
&\text{s.t. } \alpha + \beta_{ij} \geq (\widehat{l_i}+\widehat{l_j})\widehat{x_{ij}} && \forall (i,j)\in E \\
&\quad \alpha \geq 0 \\
&\quad \beta_{ij} \geq 0 && \forall (i,j)\in E
\end{aligned}$$

d) Les contraintes robustes, de la forme :
Pour tout $k \in [\![1,K]\!]$,

$$\begin{aligned}
\max_{\delta^2\in[0,W_v]^{|V|}} \sum_{v\in V} w_v(1+\delta^2_v)\, y_{k,v} &\quad \leq B \\
\text{s.t.} \sum_{v\in V} \delta^2_v \leq W &
\end{aligned}$$

peuvent aussi s'écrire :
Pour tout $k \in [\![1,K]\!]$,

$$\begin{aligned}
(\sum_{v\in V} w_v\, y_{k,v} + \max_{\delta^2\in[0,W_v]^{|V|}} \sum_{v\in V} w_v\, \delta^2_v\, y_{k,v}) &\quad \leq B \\
\text{s.t.} \sum_{v\in V} \delta^2_v \leq W &
\end{aligned}$$

e) Les problèmes internes liés aux variables δ^2_v sont donc :
Pour tout $k \in [\![1,K]\!]$,

$$\begin{aligned}
&\max_{\delta^2} \sum_{v\in V} \delta^2_v\, w_v\, y_{k,v} \\
&\text{s.t.} \sum_{v\in V} \delta^2_v \leq W \\
&\quad \delta^2_v \leq W_v && \forall v\in V \\
&\quad \delta^2_v \geq 0 && \forall v\in V
\end{aligned}$$

f) Soit $k \in [\![1,K]\!]$. Le dual du problème robuste (R_k) est :

$$\begin{aligned}
&\min_{\zeta,\gamma} W\,\zeta + \sum_{v\in V} W_v\,\gamma_v \\
&\text{s.t. } \zeta + \gamma_v \geq w_v\, y_{k,v} && \forall v\in V \\
&\quad \zeta \geq 0 \\
&\quad \gamma_v \geq 0 && \forall v\in V
\end{aligned}$$

g) En conclusion, on obtient le problème :

$$
\begin{aligned}
& \min_{x,\alpha,\beta} \sum_{(i,j)\in E} l_{ij}\widehat{x_{ij}} + L\alpha + 3\sum_{(i,j)\in E}\beta_{ij} && \\
& \text{st } \alpha + \beta_{ij} \geq x_{ij}(\widehat{l_i} + \widehat{l_j}) && \forall (i,j)\in E \\
& \quad \alpha \geq 0 && \\
& \quad \beta_{ij} \geq 0 && \forall (i,j)\in E \\
& \quad \left\{ \begin{array}{ll} \min_{\zeta,\gamma} & W\,\zeta + \sum_{v\in V} W_v\,\gamma_v \leq B - \sum_{v\in V} w_v\, y_{k,v} \\ & \zeta + \gamma_v \geq w_v\, y_{k,v}, \forall v\in V \\ & \zeta \geq 0 \\ & \gamma_v \geq 0, \forall v \in V \end{array} \right. && \forall k \in [\![1,K]\!] \\
& \quad \sum_{k=1}^{K} y_{k,v} = 1 && \forall v\in V \\
& \quad x_{k,e} \geq (y_{k,u} + y_{k,v}) - 1 && \forall e=(u,v)\in E,\ \forall k\in[\![1,K]\!] \\
& \quad x_{k,e} \leq \frac{1}{2}(y_{k,u} + y_{k,v}) && \forall e=(u,v)\in E,\ \forall k\in[\![1,K]\!] \\
& \quad \widehat{x_e} = \sum_{k=1}^{K} x_{k,e} && \forall e\in E \\
& \quad y_{k,v} \in \{0,1\} && \forall v\in V,\ \forall k\in[\![1,K]\!] \\
& \quad x_{k,e} \in \{0,1\} && \forall e\in E,\ \forall k\in[\![1,K]\!] \\
& \quad \widehat{x_e} \in \{0,1\} && \forall e\in E
\end{aligned}
$$