ECMA

Projet d'optimisation robuste

Partie théorique

Question 1.

Le problème statique s'écrit :

$$\begin{aligned}
\min_x \ & \sum_{e\in E} l_e x_e \\
\text{st} \ & \sum_{v\in V} w_v\, y_{k,v} \le B && \forall k \in [\![1,K]\!] \\
& \sum_{k=1}^{K} y_{k,v} = 1 && \forall v \in V \\
& z_{k,e} \ge \sum_{v\in V} y_{k,v}\, A_{ve} - 1 && \forall e\in E,\ \forall k \in [\![1,K]\!] \\
& z_{k,e} \le \frac{1}{2}\sum_{v\in V} y_{k,v}\, A_{ve} && \forall e\in E,\ \forall k \in [\![1,K]\!] \\
& x_e = \sum_{k=1}^{K} z_{k,e} && \forall e \in E \\
& y_{k,v} \in \{0,1\} && \forall v\in V,\ \forall k \in [\![1,K]\!] \\
& z_{k,e} \in \{0,1\} && \forall e\in E,\ \forall k \in [\![1,K]\!]
\end{aligned}$$

$y_{k,v}$ vaut un 1 si v est dans le cluster k et 0 sinon. $x_{k,e}$ vaut 1 si l'arête e est entre deux sommets du cluster k et 0 sinon.

La première contrainte traduit le respect de la limite de poids des arêtes dans chacun des clusters, la seconde qu'un sommet ne peut être que dans un seul cluster, et les deux suivantes sont une linéarisation de la contrainte suivante : $\forall uv = e \in E, x_{k,e} = 1 \Leftrightarrow y_{k,u} = y_{k,v} = 1$.

Question 2.

Passons à la modélisation robuste. Pour l'objectif,
On note $x = (x_e)_{e\in E} = (\sum_{k=1}^{K} x_{k,e})_{e\in E}$. Alors $l^T x$ devient :

$$\begin{aligned}
& \max_{l^1\in\mathcal{U}^1} (l^1)^T x \\
\Leftrightarrow & \max_{\delta^1\in[0,3]^{|E|}} \sum_{ij\in E} (l_{ij} + \delta^1_{ij}(\widehat{l_i} + \widehat{l_j}))x_{ij} \\
& \sum_{ij\in E} \delta^1_{ij} \le L
\end{aligned}$$

Pour les contraintes,
On a pour tout $k \in [\![1,K]\!]$:

$$\begin{aligned}
\sum_{v\in V} w_v\, y_{k,v} \le B,\ \forall w \in \mathcal{U}^2 & \Leftrightarrow \max_{w^2\in\mathcal{U}^2} \sum_{v\in V} w^2_v\, y_{k,v} \le B \\
& \Leftrightarrow \max_{\delta^2\in[0,W_v]^{|V|}} \sum_{v\in V} w_v(1+\delta^2_v)\, y_{k,v} \le B \\
& \qquad \sum_{v\in V} \delta^2_v \le W
\end{aligned}$$

On réécrit alors le problème :

$$\begin{aligned}
\min_{x}\ \max_{\delta^1} & \sum_{ij\in E}(l_{ij}+\delta^1_{ij}(\widehat{l}_i+\widehat{l}_j))x_{ij} & \\
\text{st} & \sum_{ij\in E}\delta^1_{ij}\le L & \\
& \delta^1_{ij}\in[0,3] & \forall ij\in E\\
& \left\{\begin{array}{l} \max_{\delta^2}\sum_{v\in V} w_v(1+\delta^2_v)\,y_{k,v}\le B\\ \sum_{v\in V}\delta^2_v\le W\\ \delta^2_v\in[0,W_v],\ \forall v\in V\end{array}\right. & \forall k\in[\![1,K]\!]\\
& \sum_{k=1}^{K} y_{k,v}=1 & \forall v\in V\\
& z_{k,e}\ge\sum_{v\in V}y_{k,v}\,A_{ve}-1 & \forall e\in E,\ \forall k\in[\![1,K]\!]\\
& z_{k,e}\le\frac{1}{2}\sum_{v\in V}y_{k,v}\,A_{ve} & \forall e\in E,\ \forall k\in[\![1,K]\!]\\
& \sum_{k=1}^{K} z_{k,e}=x_e & \forall e\in E\\
& y_{k,v}\in\{0,1\} & \forall v\in V,\ \forall k\in[\![1,K]\!]\\
& z_{k,e}\in\{0,1\} & \forall e\in E,\ \forall k\in[\![1,K]\!]
\end{aligned}$$

Question 3.

a) Le problème devient :

$$\begin{aligned}
\min_{x,t}\ & t & \\
\text{st} & \sum_{ij\in E}(l_{ij}+\delta^1_{ij}(\widehat{l}_i+\widehat{l}_j))x_{ij}\le t & \\
& \sum_{ij\in E}\delta^1_{ij}\le L & \\
& \delta^1_{ij}\in[0,3] & \forall ij\in E\\
& \left\{\begin{array}{l} \max_{\delta^2}\sum_{v\in V} w_v(1+\delta^2_v)\,y_{k,v}\le B\\ \sum_{v\in V}\delta^2_v\le W\\ \delta^2_v\in[0,W_v],\ \forall v\in V\end{array}\right. & \forall k\in[\![1,K]\!]\\
& \sum_{k=1}^{K} y_{k,v}=1 & \forall v\in V\\
& z_{k,e}\ge\sum_{v\in V}y_{k,v}\,A_{ve}-1 & \forall e\in E,\ \forall k\in[\![1,K]\!]\\
& z_{k,e}\le\frac{1}{2}\sum_{v\in V}y_{k,v}\,A_{ve} & \forall e\in E,\ \forall k\in[\![1,K]\!]\\
& \sum_{k=1}^{K} z_{k,e}=x_e & \forall e\in E\\
& y_{k,v}\in\{0,1\} & \forall v\in V,\ \forall k\in[\![1,K]\!]\\
& z_{k,e}\in\{0,1\} & \forall e\in E,\ \forall k\in[\![1,K]\!]
\end{aligned}$$

b)On pose :

$$\mathcal{U}^{1*} = \begin{cases} \{l_{ij} + \frac{L}{|E|}(\widehat{l}_i + \widehat{l}_j), \forall ij \in E\} & \text{si } \frac{L}{|E|} \leq 3 \\ \{l_{ij}, \forall ij \in E\} & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$\mathcal{U}^{2*} = \begin{cases} \{w_v(1 + \frac{W}{|E|}), \forall v \in V\} & \text{si } \frac{W}{|V|} \leq W_v \\ \{w_v, \forall v \in V\} & \text{sinon} \end{cases}$$

c) On a les sous-problèmes suivants.
Pour l'objectif :

$$\begin{aligned} \min_{\delta^1} \; & \sum_{ij \in E} (l_{ij} + \delta^1_{ij}(\widehat{l}_i + \widehat{l}_j))x^*_{ij} \\ \text{s.t.} \; & \sum_{ij \in E} \delta^1_{ij} \leq L \\ & \delta^1_{ij} \in [0, 3] & \forall ij \in E \end{aligned}$$

Pour la contrainte :
Pour tout $k \in [\![1, K]\!]$,

$$\begin{aligned} \max_{\delta^2} \; & \sum_{v \in V} w_v(1 + \delta^2_v) \, y^*_{k,v} \\ \text{st} \; & \sum_{v \in V} \delta^2_v \leq W \\ & \delta^2_v \in [0, W_v] & \forall v \in V \end{aligned}$$

d) On souhaite que :

$$l^* x^* \geq z^*$$

Et que pour tout $k \in [\![1, K]\!]$:

$$w^{2*} y^*_k \leq B$$

e) Ce qui nous donne les coupes suivantes à ajouter.
Pour le premier sous-problème :

$$z^* \leq \sum_{ij \in E} (l_{ij} + \delta^{1*}_{ij}(\widehat{l}_i + \widehat{l}_j))x_{ij}$$

Et pour ceux liés à la contrainte :
Pour tout $k \in [\![1, K]\!]$:

$$\sum_{v \in V} w_v(1 + \delta^{2*}_v) \, y_{k,v} \leq B$$

Question 4.
a) La fonction objectif se réécrit comme suit :

$$\max_{\delta^1} \sum_{ij \in E} (x_{ij} l_{ij} + \delta^1_{ij}(\widehat{l}_i + \widehat{l}_j)x_{ij}) \Leftrightarrow \sum_{ij \in E} x_{ij} l_{ij} + \max_{\delta^1} \sum_{ij \in E} \delta^1_{ij}(\widehat{l}_i + \widehat{l}_j)x_{ij}$$

b) Le problème interne lié aux variables δ^1_{ij} est donc :

$$\begin{aligned}
\max_{\delta^1} \ & \sum_{ij \in E} \delta^1_{ij} (\widehat{l}_i + \widehat{l}_j) x_{ij} & \\
\text{s.t.} \ & \sum_{ij \in E} \delta^1_{ij} \leq L & \\
& \delta^1_{ij} \geq 0 & \forall ij \in E \\
& \delta^1_{ij} \leq 3 & \forall ij \in E
\end{aligned}$$

c) Que l'on dualise comme suit :

$$\begin{aligned}
\min_{\alpha,\beta} \ & L\alpha + 3 \sum_{ij \in E} \beta_{ij} & \\
\text{s.t.} \ & \alpha + \beta_{ij} \geq (\widehat{l}_i + \widehat{l}_j) x_{ij} & \forall ij \in E \\
& \alpha \geq 0 & \\
& \beta_{ij} \geq 0 & \forall ij \in E
\end{aligned}$$

d) Les contraintes robustes, de la forme :
Pour tout $k \in [\![1, K]\!]$,

$$\begin{aligned}
\max_{\delta^2 \in [0, W_v]^{|V|}} \ & \sum_{v \in V} w_v (1 + \delta^2_v) \, y_{k,v} \\
\text{s.t.} \ & \sum_{v \in V} \delta^2_v \leq W
\end{aligned}$$

peuvent aussi s'écrire :
Pour tout $k \in [\![1, K]\!]$,

$$\begin{aligned}
\sum_{v \in V} w_v \, y_{k,v} + \max_{\delta^2 \in [0, W_v]^{|V|}} \ & \sum_{v \in V} w_v \, \delta^2_v \, y_{k,v} \\
\text{s.t.} \ & \sum_{v \in V} \delta^2_v \leq W
\end{aligned}$$

e) Les problèmes internes liés aux variables δ^2_v sont donc :
Pour tout $k \in [\![1, K]\!]$,

$$\begin{aligned}
\max_{\delta^2} \ & \sum_{v \in V} w_v \, \delta^2_v \, y_{k,v} & \\
\text{s.t.} \ & \sum_{v \in V} \delta^2_v \leq W & \\
& \delta^2_v \leq W_v & \forall v \in V \\
& \delta^2_v \geq 0 & \forall v \in V
\end{aligned}$$

f) Soit $k \in [\![1, K]\!]$. Le dual du problème robuste (R_k) est :

$$\begin{aligned}
\min_{\zeta,\gamma} \ & W \, \zeta + \sum_{v \in V} W_v \, \gamma_v & \\
\text{s.t.} \ & \zeta + \gamma_v \geq w_v \, y_{k,v} & \forall v \in V \\
& \zeta \geq 0 & \\
& \gamma_v \geq 0 & \forall v \in V
\end{aligned}$$

g) En conclusion, on obtient le problème :

$$
\begin{aligned}
\min_{x,\alpha,\beta} & \sum_{ij\in E} l_{ij}x_{ij} + L\alpha + 3\sum_{ij\in E}\beta_{ij} & \\
\text{st } & \alpha + \beta_{ij} \geq x_{ij}(\widehat{l}_i + \widehat{l}_j) & \forall ij \in E \\
& \alpha \geq 0 & \\
& \beta_{ij} \geq 0 & \forall ij \in E \\
& \left\{ \begin{array}{ll} \min_{\zeta,\gamma} & W\,\zeta + \sum_{v\in V} W_v\,\gamma_v \leq B - \sum_{v\in V} w_v\,y_{k,v} \\ & \zeta + \gamma_v \geq w_v\,y_{k,v}, \forall v \in V \\ & \zeta \geq 0 \\ & \gamma_v \geq 0, \forall v \in V \end{array} \right. & \forall k \in [\![1, K]\!] \\
& \sum_{k=1}^{K} y_{k,v} = 1 & \forall v \in V \\
& z_{k,e} \geq \sum_{v\in V} y_{k,v}\,A_{ve} - 1 & \forall e \in E,\ \forall k \in [\![1, K]\!] \\
& z_{k,e} \leq \frac{1}{2}\sum_{v\in V} y_{k,v}\,A_{ve} & \forall e \in E,\ \forall k \in [\![1, K]\!] \\
& \sum_{k=1}^{K} z_{k,e} = x_e & \forall e \in E \\
& y_{k,v} \in \{0,1\} & \forall v \in V,\ \forall k \in [\![1, K]\!] \\
& z_{k,e} \in \{0,1\} & \forall e \in E,\ \forall k \in [\![1, K]\!]
\end{aligned}
$$