Introdução aos Processos Estocásticos

Lourenço Bogo

March 23, 2022

1 Motivação

Considere que há um fenômeno se desenvolvendo aleatoriamente no decorrer do tempo. Então, a sequência ordenada $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ representa a evolução desse fenômeno, ou sistema, nos instantes $1, 2, \dots, n$. Essas variáveis não são necessariamente iid.

Temos, portanto, o conceito de um processo e não apenas de um evento. Daí o nome processo aleatório ou processo estocástico.

- Quando n cresce, qual é o comportamento da sequência?

Às vezes, o índice pode representar, não o tempo, mas uma localização no espaço. Nesse caso, temos um campo aleatório.

Em outras situações pode-se ter um processso duplamente indexado, um índice representando o espaço e o outro, o tempo, ou seja, temos um processo estocástico espacial.

2 Definição

3 Cadeia de Markov

Um processo estocástico, com espaço de estados discreto S em tempo discreto, é uma cadeia de Markov se possui a propriedade Markoviana, isto é, para todo $i_0, i_1, ...i_{n-1}, i, j \in S$,

$P(X_{n+1} = j | X_0 = i_0, X_1 = i_1 ...) = P(X_{n+1} = j | X_n = i) = p_{ij}(n)$

,ou seja, o próximo estado depende apenas do atual e não dos anteriores.

Uma cadeia é dita ser homogênea no tempo (ou estacionária) se, $\forall n \geq 0$,

$p_{ij}(n) = P(X_{n+1} = j | X_n = i) = P(X_1 = j | X_0 = i) = p_{ij}(0) = p_{ij}$.

Ou seja, ir de estado i para j tem sempre a mesma probabilidade independente do tempo no qual essa transição acontece.

Essas probabilidades de transição podem ser representadas por uma matriz P, chamada matriz de probabilidade de transição, cujos elementos p_{ij} satisfazem:

- $p_{ij} > 0$ para todo $i, j \in S$
- $\sum_{j \in S} p_{ij} = 1, \forall i \in S$, ou seja, a soma dos elementos de cada linha é 1 e isso vale para toda linha.

4 Distribuição Inicial

Denote por $\pi_0(j)$, a probabilidade que, no tempo 0 (estado inicial), o processo esteja no estado $j \in S$. Então o vetor (linha) π_0 representa a distribuição inicial da cadeia.

5 Caracterização do processo

A matriz de transição e a distribuição inicial caracterizam completamente a cadeia de Markov.

6 Transição em n Passos

Com a matriz e o estado atual, calcular o próximo é trivial. Agora, para calcular o estado daqui a dois passos, precisamos condicionar no estado daqui a um passo. Isso, porém, pode ficar muito trabalhoso, já que podemos ter vários estados possíveis, o que deixaria nossa árvore de estados gigantesca. Por isso, existe outro método para esse cálculo: podemos usar a matriz ao quadrado nos dá as probabilidades de transição daqui a dois estados.

Para as probabilidades de transição daqui a n estados, precisamos da matriz elevada a n.

7 Equações de Chapman-Kolmogorov

$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}$, ou matricialmente $P^{(n+m)} = P^{(n)} P^{(m)}$

8 Diagrama de Transição