Introdução aos Processos Estocásticos

Lourenço Bogo

March 20, 2022

1 Motivação

Considere que há um fenômeno se desenvolvendo aleatoriamente no decorrer do tempo. Então, a sequência ordenada $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ representa a evolução desse fenômeno, ou sistema, nos instantes $1, 2, \ldots, n$. Essas variáveis não são necessariamente iid.

Temos, portanto, o conceito de um processo e não apenas evento. Daí o nome processo aleatório ou processo estocástico.

- Quando n cresce, qual é o comportamento da sequência?

Às vezes, o índice pode representar, não o tempo, mas uma localização no espaço $\rightarrow$ campo aleatório.

Em outras situações pode-se ter um processso duplamente indexado, um índice representando o espaço e o outro, o tempo, ou seja, temos um processo estocástico espacial.

2 Definição

3 Cadeia de Markov

Um processo estocástico, com espaço de estados discreto S eem tempo discreto, é uma cadeia de Markov se possui a propriedade Markoviana, isto é, para todo i0, i1, ... m in-1, i $\in$ S,

$P(X_{n+1} = j | X_0 = i_0, X_1 = i_1 ...) = P(X_{n+1} = j | X_n = i) = p_{ij}(n)$

Basicamente o passado é irrelevante, o próximo estado depende apenas do atual.

Uma cadeia é dita set homogênea no tempo (ou estacionaria) se, para $\forall n \geq 0$,

$p_{ij}(n) = P(X_{n+1} = j|X_n = i) = P(X_1 = j|X_0 = i) = p_{ij}(0) = p_{ij}$.

Ou seja, ir de estado i para j tem sempre a mesma probabilidade independente do tempo no qual essa transição acontece.

Essas probabilidades de transição podem ser representadas por uma matriz P, chamada matrizde probabilidade de transição, cujos elementos p_{ij} satisfazem:

- $p_{ij} > 0$ para todo $i, j \in S$
- sum $\mathrm{p_{ij}}$ sobre $j \in S = 1$ para todo $i \in S$, ou seja, a soma dos elements de cada linha é 1 e isso vale para toda linha.