Lista

Lourenço Henrique Moinheiro Martins Sborz Bogo

<u>Monomial Basis:</u> Primeiro temos que montar um sistema linear com os pontos que nos foram dados: $(-1,1),(0,1),(1,2),(2,0)$

$$\begin{cases} -a+b-c+d=1 \\ 0a+0b+0c+d=1 \\ a+b+c+d=2 \\ \ 8a+4b+2c+1=0 \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema linear temos que:

$$\begin{cases} a=\frac{-2}{3} \\ b=\frac{1}{2} \\ c=\frac{7}{6} \\ d=1 \end{cases}$$

Portanto o polinômio pela base monomial é: $\frac{4x^3-3x^2-7x-6}{-6}$

Lagrange Basis: Temos que achar os polinômios da base de Lagrange:

$L(x) = \sum_{j=0}^{k} y_j l_j(x)$,

com $l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{k} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$.

Para o nosso exemplo, temos:

$$l_0(x) = \prod_{i=0,0\neq i}^{k} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} = \frac{x}{-1} \cdot \frac{x-1}{-2} \cdot \frac{x-2}{-3} = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{-6}$$

$$l_1(x) = \prod_{i=0,1\neq i}^{k} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} = \frac{x+1}{1} \cdot \frac{x-1}{-1} \cdot \frac{x-2}{-2} = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{2}$$

$$l_2(x) = \prod_{i=0,2\neq i}^{k} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} = \frac{x+1}{2} \cdot \frac{x}{1} \cdot \frac{x-2}{-1} = \frac{x^3 - x^2 - 2x}{-2}$$

$$l_3(x) = \prod_{i=0,3\neq i}^{k} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} = \frac{x+1}{3} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x-1}{1} = \frac{x^3 - x}{6}$$

Agora que temos os polinômios da base de lagrange, podemos construir finalmente o polinômio final utilizando a somatória $L(x)$.

$$L(x) = \sum_{j=0}^{k} y_j l_j(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{-6} + \frac{-3x^3 + 6x^2 + 3x - 6}{-6} + \frac{6x^3 - 6x^2 - 12x}{-6} + 0 =$$

$$= \frac{4x^3 - 3x^2 - 7x - 6}{-6}.$$

Newton Basis: Para esse método, temos que achar $P_{n-1}(x)$, o polinômio que interpola n pontos, para depois construir P_n recursivamente.

Primeiro, vamos construir $P_0(x)$, o polinômio que interpola 1 ponto.

$P_0(x) = a_0 \to P_0(x_0) = y_0 \to P_0(-1) = 1.$

Agora para $n = 1$, temos:

$P_1(x) = P_0(x) + a_1(x - x_0) \to a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{1-1}{0-(-1)} = 0 \to P_1(x) = P_0(x) = y_0 = 1$

$n = 2$:

$P_2(x) = P_1(x) + a_2(x - x_0)(x - x_1) \to y_2 = P_1(x_2) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \to a_2 = \frac{y_2 - P_1(x)}{(x_2 - x_0)(x_1 - x_0)} = \frac{1}{2} \to P_2(x) = 1 + \frac{(x+1)(x)}{2}$

$n = 3$:

$P_3(x) = P_2(x) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \to y_3 = P_2(x_3) + a_3(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \to a_3 = \frac{y_3 - P_2(x_3)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} = \frac{-4}{6} \to P_3(x) = \frac{6}{6} + \frac{3x^2 + 3x}{6} + \frac{-4(x+1)(x)(x-1)}{6} = \frac{-4x^3 + 3x^2 + 7x + 6}{6}.$