P3 - Funções Diferenciáveis e Séries

Lourenço Henrique Moinheiro Martins Sborz Bogo - 11208005

21 de julho de 2020

Sumário

1 Questão 1 (Lista 6 Q2)

Primeiro vamos derivar em x e em y a função dada:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x^2}{(x^3+y^3)^{\frac{2}{3}}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y^2}{(x^3+y^3)^{\frac{2}{3}}}$$

Como as derivadas parciais são um polinômio sobre a raiz de um outro polinômio, sabemos que elas são contínuas. O único ponto que pode nos causar alguma dúvida é o ponto $x = -y$, pois isso faria com que o denominador fosse 0, logo vamos tratar esse caso a parte, derivando pela definição.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{(x^3+y_0^3)^{\frac{1}{3}} - (x_0^3+y_0^3)^{\frac{1}{3}}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{(x^3+y_0^3)^{\frac{1}{3}}}{x-x_0} =$$
$$= \lim_{x\to x_0} \left(\frac{x^3 - x_0^3}{(x-x_0)^3}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\lim_{x\to x_0} \frac{x^3-x_0^3}{(x-x_0)^3}\right)^{\frac{1}{3}} \xrightarrow{\text{L'Hopital}} \left(\lim_{x\to x_0} \frac{3x^2}{3(x-x_0)^2}\right)^{\frac{1}{3}} = +\infty$$

Com isso, provamos que a função é diferenciável em qualquer ponto onde $x \neq -y$ e que o gradiente é:

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{x_0^2}{(x_0^3+y_0^3)^{\frac{2}{3}}}, \frac{y_0^2}{(x_0^3+y_0^3)^{\frac{2}{3}}}\right)$$