Exercícios do Capítulo 15

Lourenço Henrique Moinheiro Martins Sborz Bogo - 11208005

26 de junho de 2020

Sumário

1 Exercício 3

Precisamos deduzir a fórmula do erro da *Midpoint Rule*. Para isso, primeiro vamos expandir a função $f(x)$, que queremos, integrar usando taylor, até o termo de segunda ordem, ao redor do ponto $\frac{a+b}{2}$ (a e b são nossas bordas de integração):

$f(x) = f(\frac{a+b}{2}) + (x - \frac{a+b}{2})f'(\frac{a+b}{2}) + (x - \frac{a+b}{2})^2 \frac{f''(\xi_x)}{2}$

Agora, iremos calcular o erro em si:

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b f(\frac{a+b}{2})dx =$$

$$= \int_a^b f(\frac{a+b}{2}) + (x - \frac{a+b}{2})f'(\frac{a+b}{2}) + (x - \frac{a+b}{2})^2 \frac{f''(\xi_x)}{2} - f(\frac{a+b}{2}) =$$

$$= \int_a^b (x - (\frac{a+b}{2}))f'(\frac{a+b}{2}) + \frac{(x - \frac{a+b}{2})^2}{2} f''(\xi_x)dx =$$

$$= \int_a^b (x - (\frac{a+b}{2}))f'(\frac{a+b}{2}) + \int_a^b \frac{(x - \frac{a+b}{2})^2}{2} f''(\xi_x)dx =$$

$$= 0 + \frac{f''(\eta)}{2} \int_a^b (x - \frac{a+b}{2})^2 dx \text{ (Pelo T.V.M. para integrais) } =$$

$= \frac{(b-a)^3}{24} f''(\eta)$, $\eta \in [a, b]$.

2 Exercício 4

2.1 (a)

Sabemos que o erro da *Hermite Cubic Interpolation* é:

$$\frac{f^4(\eta)(x-a)^2(x-b)^2}{4!}$$

Portanto podemos escrever:

$$f(x) - p(x) = \frac{f^4(\eta)(x-a)^2(x-b)^2}{4!}$$

Depois, integramos os dois lados de a até b, conseguindo:

$$\int_a^b f(x) - p(x) = \int_a^b \frac{f^4(\eta)(x-a)^2(x-b)^2}{4!} \rightarrow$$
$$\rightarrow \int_a^b f(x) - \int_a^b p(x) = \frac{f^4(\eta)}{4!} \int_a^b (x-a)^2(x-b)^2$$

Ou seja, o erro de usarmos esse método para calcular a integral é $\frac{f^4(\eta)}{4!} \int_a^b (x-a)^2(x-b)^2$.

Agora precisamos simplificar essa expressão:

$$\frac{f^4(\eta)}{4!} \int_a^b (x-a)^2(x-b)^2 = \frac{f^4(\eta)}{4!} \int_a^b (x^2 - 2ax + a^2)(x^2 - 2bx + b^2) =$$
$$= \frac{f^4(\eta)}{4!} \frac{6b^5 - 6a^5 + 10b^5 + 40ab^4 + 10a^2b^3 - 10a^5 - 10a^3b^2 - 40a^4b + 15a^2 + 45a^4b - 15b^5 - 45ab^4}{30} =$$
$$= \frac{f^4(\eta)(b-a)^5}{720},\ \eta \in [a,b].$$

2.2 (b)

```
import numpy as np

'''Função que calcula a regra pedida no enunciado para a
função f de derivada df'''
def trap(f, df, a, b):
    c = b-a
    return (c/2)*(f(a)+f(b))+((c*c)/12)*(df(a)-df(b))

'''Função dada no enunciado (e^x)'''
def g(x):
    return np.exp(x)


'''Apenas cálculo do erro'''
res1 = np.e - 1
res2 = np.e - np.e**(.9)

aprox1 = trap(g, g, 0, 1)
aprox2 = trap(g, g, 0.9, 1)

err1 = abs(res1 - aprox1)
err2 = abs(res2 - aprox2)

print(err1)
print(err2)
```

Intervalo	Trapezoid	Simpson	Midpoint	Corrected
[0, 1]	0.1408	$6 \cdot 10^{-4}$	$6.96 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-3}$
[0.9, 1]	$2.2 \cdot 10^{-4}$	$9 \cdot 10^{-9}$	$1.1 \cdot 10^{-4}$	$3.6 \cdot 10^{-8}$

Podemos perceber que Corrigido aproximou melhor que a maioria dos outros métodos, com exceção do de Simpson, o que já era esperado, já que ele usa um polinômio de segundo grau, ao invés de um polinômio de primeiro.

3 Exercício 6

3.1 (a)

Para conseguir a fórmula é muito simples. Ao invés de aplicar a fórmula direto em $[a, b]$, vamos quebrar o intervalo em vários intervalos menores, equidistantes, e aplicar a fórmula nesses intervalos. Começaremos com a notação:

- $h = (a - b)/n$, com n sendo o número de sub-intervalos.
- $x_i = a + ih$

Temos então que a fórmula seria construída aplicando a fórmula do trapezío corrigida para os intervalos $[x_i, x_{i+1}]$:

$$I_{cctr} = \sum_{i=0}^{n-1}(\frac{x_{i+1} - x_i}{2}(f(x_{i+1})+f(x_i))+\frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{12}(f'(x_{i+1})-f'(x_i))) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}(\frac{h}{2}(f(x_{i+1}) + f(x_i)) + \frac{h^2}{12}(f'(x_{i+1}) - f'(x_i))) =$$

$$= \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(f(x_{i+1}) + f(x_i)) + \frac{h^2}{12}\sum_{i=0}^{n-1}(f'(x_{i+1}) - f'(x_i))$$

Agora, podemos perceber que a primeira parcela dessa soma: $\frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(f(x_{i+1}) + f(x_i))$, é a regra do trapézio composto, e, que a segunda parcela vai se cancelar quase que inteira, sobrando apenas $f'(x_0)$ e $f'(x_n)$, que são $f'(a)$ e $f'(b)$.

Fazendo, então, todas as simplificações necessárias, chegamos na seguinte fórmula:

$$h(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)) + h^2\frac{f'(a) - f'(b)}{12} = I_{tr} + h^2\frac{f'(a) - f'(b)}{12}$$

Código:

```python
import numpy as np

n = 10
a = 0;
b = 1;
h = (b-a)/n

def nCorr(f, h, a, b):
    fS = 0
    for i in np.arange(a+h, b, h):
        fS += f(i)

    return h*(fS + (f(a)+f(b))/2)

def corr(f, df, h, a, b):
    resp = nCorr(f, h, a, b)
    resp += (h*h*(df(a)-df(b)))/12
    return resp

def g(x):
    return np.exp(-(x*x))

def dg(x):
    return -2*x*np.exp(-(x*x))

print(f"Valor dado    = 0.746824133")
print(f"Não corrigida = {nCorr(g, h, a, b)}")
print(f"Corrigida     = {corr(g, dg, h, a, b)}")
```

Valor Dado no Enunciado	Não corrigida	Corrigida
0.746824133	0.746210796	0.746823928

Podemos perceber que o erro na versão não corrigida é da ordem de $10^{-4} = h^4$ e na versão corrigida é da ordem de $10^{-6} = h^6$, ou seja, uma melhora da ordem de $10^{-2} = h^2$ nos experimentos.

3.2 (b)