Algoritmo do Spline Quadrático

1 Algoritmo

Dado um intervalo $[a, b]$ e uma divisão desse intervalo em n+1 pontos equidistantes, conseguimos fazer o spline quadrático de uma certa função, nesse intervalo. Além dessas condições iniciais, iremos precisar também do valor da função f nos pontoss que queremos interpolar (óbvio) e também, da derivada da f no ponto inicial do intervalo.

Notação que usarei:

- O intervalo $[a, b]$ será dividido em $n + 1$ pontos que chamarei de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
- O valor da função f em aplicada no ponto x_k será chamado y_k.
- O valor da derivada da função f no ponto x_k será chamado de z_k.
- O polinômio que interpola os pontos k e $k + 1$ será chamado de Q_k.

1.1 Explicação do Algoritmo

Inicialmente, iremos achar a derivada em todos os outros pontos recursivamente, a partir da derivada inicial com a fórmula:

$z_{i+1} = -z_i + 2(\frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i})$.

Com todas as derivadas em mãos, agora podemos criar cada um dos polinômios que irão interpolar o intervalo dois a dois pontos consecutivos com a seguinte fórmula:

$Q_i(x) = \frac{z_{i+1}-z_i}{2(x_{i+1}-x_i)}(x - x_i)^2 + z_i(x - x_i) + y_i$.

1.2 Justificativa

Primeiramente iremos precisar de $n-1$ polinômios de segundo grau (ou menos) contínuos, cujas derivadas também são contínuas. Ou seja necessitamos que:

- $Q_i(x_i) = y_i$ para $i = 0, 1, \ldots, n-1$.
- $Q_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$ para $i = 0, 1, \ldots, n-1$.
- $Q_i'(x_i) = Q_{i+1}'(x_i)$ para $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Para $Q(x)$ ser um spline quadrático precisamos das seguintes condições de continuidade:

- $Q_i(x_i) = y_i$ (1).
- $Q_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$ (2).
- $Q_i'(x_i) = z_i$ (3).
- $Q_i'(x_{i+1}) = z_{i+1}$ (4).

De (1), (3) e (4):

$Q_i(x) = \frac{z_{i+1}-z_i}{2(x_{i+1}-x_i)}(x-x_i)^2 + z_i(x-x_i) + y_i$ (5).

Agora para achar os valores de z_i iremos usar (2):

$z_{i+1} = -z_i + 2(\frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i})$ (6).

Com (6), conseguiremos computar z_k dado z_{k-1}, logo precisaremos do $f'(a)$ para usar essa algoritmo.

2 Erro

Para o erro, iremos apenas usar o teorema do erro de interpolação polinomial para intervalos iguamente espaçados que diz que:

$|R_n(x)| <= \frac{h^{n+1}}{4(n+1)} \max\limits_{\xi \in [a,b]} |f^{(n+1)}(\xi)|$,

com n sendo o grau do polinômio que estamos usando para interpolar a função.

Ou seja, no nosso caso:

$|R_2(x)| <= \frac{h^3}{12} \max\limits_{\xi \in [a,b]} |f^{(3)}(\xi)|$.