P1

Lourenço Henrique Moinheiro Martins Sborz Bogo - 11208005

1. Mostrar se $a_n = (\frac{3n+5}{5n+1})^n(\frac{5}{3})^n$ converge ou diverge, calculado o limite caso convirja.

   Vamos primeiro achar a função cuja discretização é a sequência dada: $f(x) = (\frac{3x+5}{5x+1})^x(\frac{5}{3})^x$.

   Agora iremos cacular o limite desta função quando $x \to \infty$.

   $\lim_{x\to\infty}(\dfrac{3x+5}{5x+1})^x(\dfrac{5}{3})^x = \lim_{x\to\infty}(\dfrac{15x+25}{15x+3})^x = \lim_{x\to\infty} e^{n\ln(\frac{15n+25}{15n+5})}$. Portanto, vamos achar o limite do expoente, pois e é uma constante.

   $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\ln(\frac{15n+25}{15n+3})}{n^{-1}} = \lim_{x\to\infty}\dfrac{\ln(15n+25)-\ln(15n+3)}{n^{-1}} \to L'Hopital \to = \lim_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{15n+25}15 - \frac{1}{15n+3}15}{-n^{-2}} = \lim_{x\to\infty} 15\dfrac{22n^2}{15n^2+15n28+75} = \lim_{x\to\infty}\dfrac{22}{15+\frac{28}{n}+\frac{5}{n^2}} = \dfrac{22}{5}$.

   Potanto, a nossa sequência converge para: $e^{\frac{22}{5}}$.

2. Decidir se $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{\sin k}$ é convergente, e se possível, calcular sua soma.

   Pelo Teste da Divergência, temos que se o último termo da sequência que gera a série não converge para 0, a série não converge. Portanto iremos calcular o limite do último termo.

   Para isso iremos usar a função $f(x) = \frac{x}{\sin x}$, pois nos inteiros, ela é igual a sequência.

   $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x}{\sin x}$. Esse limite não existe, pois não sabemos quanto é $\sin x$ quando $x \to \infty$, portanto a série não converge pelo Teste da Divergência.

3. Decidir se a série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(\ln n)^2}$ converge absolutamente, condicionalmente ou diverge.

   Se mostrarmos que o módulo converge, teremos que a série converge absolutamente.

   Como a série com módulo é decrescente e seu último termo tende a 0, podemos usar o critério da integral para avaliá-la.

Seja $f(x)$ a função cuja discretização é a sequência que gera a série dada com módulo, ou seja $\frac{1}{x(\ln x)^2}$. Temos que:

$\int \frac{1}{x(\ln x)^2} dx$

$u = \ln x \to du = \frac{1}{x} dx$

$\int \frac{1}{x(\ln x)^2} dx = \int \frac{1}{u^2} du = \frac{-1}{u} = \frac{-1}{\ln x}$.

Agora precisamos fazer essa integral no infinito menos ela no ponto 2:

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{-1}{\ln x} - \dfrac{-1}{\ln 2} = 0 - \dfrac{-1}{\ln 2} = \dfrac{1}{\ln 2}$.

Como a série com módulo converge, temos que a série converge absolutamente.

4. Determinar os valores de x para os quais a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n + \frac{1}{2^n x^n}$ converge.

   Primeiro vamos achar os valores de x que fazem a série passar pelo Teste da Divergência.

   Para isso usaremos a função cuja discretização é a sequência formadora da série dada $f(a) = x^a + \frac{1}{2^a x^a}$.

   Como x^a e $\frac{1}{2^a x^a}$ têm o mesmo sinal, para sua soma tender a 0, precisamos que as duas partes tendam a 0.

   $\lim\limits_{a \to \infty} x^a$ só vai tender a 0 quando $0 \leq |x| < 1$.

   $\lim\limits_{a \to \infty} \dfrac{1}{2^a x^a}$ só vai tender a 0 quando $0 < |\frac{1}{2x}| < 1 \to |x| > \frac{1}{2}$.

   Ou seja, para para a série passar pelo Teste da Divergência, $\frac{1}{2} < |x| < 1$. Agora iremos usar o teste da integral para verificar se nesses valores, a série converge.

   Iremos tirar a integral do módulo da função, pois se a série converge com o módulo, sem o módulo também irá convergir. Além disso, iremos começar a integral no ponto 2, pois no ponto 1 a integral seria diferente.

   $\int x^n + (\frac{1}{2x})^n dn = \frac{x^n}{\ln x} + \frac{(\frac{1}{2x})^n}{\ln \frac{1}{2x}}$.

   Agora vamos calcular de 2 até ∞:

   $\lim\limits_{n \to \infty} (\dfrac{x^n}{\ln x} + \dfrac{(\frac{1}{2x})^n}{\ln \frac{1}{2x}}) - \dfrac{x^2}{\ln x} + \dfrac{(\frac{1}{2x})^2}{\ln \frac{1}{2x}}$, que para $\frac{1}{2} < x < 1$, converge.

   Logo, a série dada converge para $\frac{1}{2} < |x| < 1$ e diverge para o resto.