Otimização Linear Lista 2

Lourenço Bogo - 11208005

8 de dezembro de 2020

1 Questão 1

Primeiro vamos colocar o problema na forma canônica e adicionar as variáveis artificiais:

$$\begin{aligned} \max Z &= -A_1 - A_2 \\ -1x_1 + 1x_2 - 1S_1 + 0S_2 + 0S_3 + 1A_1 + 0A_2 &= 1 \\ 1x_1 + 1x_2 + 0S_1 - 1S_2 + 0S_3 + 0A_1 + 1A_2 &= 3 \\ 2x_1 + 1x_2 + 0S_1 + 0S_2 + 1S_3 + 0A_1 + 0A_2 &= 4 \\ x_1, x_2, S_1, S_2, S_3, A_1, A_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Em forma de tableaux temos:

Iteração 1		C_j	0	0	0	0	0	-1	-1	Razão
B	C_b	X_b	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	$\frac{X_b}{x_2}$
A_1	-1	1	-1	1	-1	0	0	1	0	1
A_2	-1	3	1	1	0	-1	0	0	1	3
S_3	0	4	2	1	0	0	1	0	0	4
Z = -4		Z_j	0	-2	1	1	0	-1	-1	
		$Z_j - C_j$	0	-2	1	1	0	0	0	

Podemos perceber que a variável que vai entrar é x_2. Tirando a razão, vemos que a variável que entra é A_1, ou seja, podemos excluí-la:

Agora precisamos montar a próxima iteração, como nosso pivô era 1, nossa linha 1 ficará igual e as outras serão subtraídas pelo seu valor, multiplicadas pelo valor da variável que está entrando na sua linha.

Iteração 2		C_j	0	0	0	0	0	-1	Razão
B	C_b	X_b	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	A_2	$\frac{X_b}{x_1}$
x_2	0	1	-1	1	-1	0	0	0	
A_2	-1	2	2	0	1	-1	0	1	1
S_3	0	3	3	0	1	0	1	0	1
Z = -2		Z_j	-2	0	-1	1	0	-1	
		$Z_j - C_j$	-2	0	-1	1	0	0	

A variável que entra agora é x_1 e a que sairá será A_2:

Iteração 3		C_j	0	0	0	0	0
B	C_b	X_b	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3
x_2	0	2	0	1	-0.5	-0.5	0
x_1	0	1	1	0	0.5	-0.5	0
S_3	0	0	0	0	-0.5	1.5	1
Z = 0		Z_j	0	0	0	0	0
		$Z_j - C_j$	0	0	0	0	0

Conseguimos fazer todos os $Z_j - C_j$ serem maiores ou iguais à 0, logo a solução ótima foi atingida com $x_1 = 1, x_2 = 2$.

Agora vamos para a fase 2, com nossa solução inicial sendo a solução que conseguimos na fase 1. Voltaremos a usar a função objetiva original.

Iteração 1		C_j	3	1	0	0	0	Razão
B	C_b	X_b	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	$\frac{X_b}{S_2}$
x_2	1	2	0	1	-0.5	-0.5	0	
x_1	3	1	1	0	0.5	-0.5	0	
S_3	0	0	0	0	-0.5	1.5	1	$\frac{0}{1.5} = 0$
Z = 5		Z_j	3	1	1	-2	0	
		$Z_j - C_j$	0	0	1	-2	0	

A variável que entra é S_2 e a que sai é S_3, nos dando:

Iteração 2		C_j	3	1	0	0	0
B	C_b	X_b	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3
x_2	1	2	0	1	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
x_1	3	1	1	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
S_2	0	0	0	0	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$
Z = 5		Z_j	3	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$
		$Z_j - C_j$	0	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$

Como todas as diferenças são novamente positivas, chegamos no ponto ótimo que é $x_1 = 1, x_2 = 2$, com $\max Z = 5$

2 Questao 2

Primeiro, colocando o problema na forma canônica e adicionando as variáveis artificiais temos:

$$\begin{aligned}
\max Z &= -A_1 - A_2 \\
-1x_1 + 1x_2 - 1S_1 + 0S_2 + 0S_3 + 1A_1 + 0A_2 &= 1 \\
1x_1 + 1x_2 + 0S_1 - 1S_2 + 0S_3 + 0A_1 + 1A_2 &= 3 \\
2x_1 + 1x_2 + 0S_1 + 0S_2 + 1S_3 + 0A_1 + 0A_2 &= 2 \\
x_1, x_2, S_1, S_2, S_3, A_1, A_2 &\geq 0
\end{aligned}$$

Na forma de tableaux:

Iteração 1		C_j	0	0	0	0	0	-1	-1	Razão
B	C_b	X_b	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	$\frac{X_b}{x_2}$
A_1	-1	1	-1	1	-1	0	0	1	0	1
A_2	-1	3	1	1	0	-1	0	0	1	3
S_3	0	2	2	1	0	0	1	0	0	2
Z = -4		Z_j	0	-2	1	1	0	-1	-1	
		$Z_j - C_j$	0	-2	1	1	0	0	0	

A variável que entra é a x_2 e a que sai é a A_1, nos dando:

Iteração 2		C_j	0	0	0	0	0	-1	Razão
B	C_b	X_b	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	A_2	$\frac{X_b}{x_2}$
x_2	0	1	-1	1	-1	0	0	0	
A_2	-1	2	2	0	1	-1	0	1	1
S_3	0	1	3	0	1	0	1	0	$\frac{1}{3}$
Z = -2		Z_j	-2	0	-1	1	0	-1	
		$Z_j - C_j$	-2	0	-1	1	0	0	

Agora, a variável que irá entrar é a x_1 e a que irá sair é a S_3:

Iteração 3		C_j	0	0	0	0	0	-1	Razão
B	C_b	X_b	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	A_2	$\frac{X_b}{S_1}$
x_2	0	$\frac{4}{3}$	0	1	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	
A_2	-1	$\frac{4}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	-1	$-\frac{2}{3}$	1	4
x_1	0	$\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	1
Z $= -\frac{4}{3}$		Z_j	0	0	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	-1	
		$Z_j - C_j$	0	0	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	0	

A variável que irá entrar agora é a S_1 e a que irá sair é a x_1, nos dando:

Iteração 4		C_j	0	0	0	0	0	-1
B	C_b	X_b	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	A_2
x_2	0	2	2	1	0	0	1	0
A_2	-1	1	-1	0	0	-1	-1	1
x_1	0	1	3	0	1	0	1	0
Z = -1		Z_j	1	0	0	1	1	-1
		$Z_j - C_j$	1	0	0	1	1	0

Como todas as diferenças estão positivas, a solução ótima é $x_1 = 0, x_2 = 2$, porém essa solução não é factível, pois viola a restrição $x_1 + x_2 \geq 3$ e a variável artificial A_2 está na base. A fase 2, portanto, não é possível de ser feita.

3 Questão 3

O problema dual é:

$$\begin{aligned} &\max 20y_1 + 10y_2 - 30y_3 \\ &\text{suj. } 2y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 5 \\ &\quad 4y_1 - y_2 - 2y_3 \leq 6 \\ &\quad 7y_1 - y_2 - 3y_3 = 5 y_1 \geq 0, y_2 \leq 0, y_3 \text{ irrestrito} \end{aligned}$$

4 Questão 4

Teorema Fraco da Dualidade: Se x é uma solução factível de um problema primal de maximização e y é uma solução factível do dual, então $c^t x \leq b^t y$

Demonstração:

Por hipótese, temos que $Ax_0 \leq b$ e $A^t y_0 \geq c$. Sejam $u = b - Ax_0$ e $v = A^t y_0 - c$ as folgas das restrições.

Então: $u \geq 0$, $v \geq 0$, $b = u + Ax_0$ e $A^t y_0 = v + c$.

Temos:

$$\begin{aligned} b \cdot y_0 &= y_0^t b = y_0^t(u + Ax_0) = y_0^t u + y_0^t A x_0 \\ &= y_0 \cdot u + \left(y_0^t A x_0\right)^t = y_0 \cdot u + x_0^t(A^t y_0) \\ &= y_0 \cdot u + x_0^t(v + c) = y_0 \cdot u + x_0 \cdot v + x_0 \cdot c \end{aligned}$$

Ou seja:

$b \cdot y_0 = y_0 \cdot u + x_0 \cdot v + x_0 \cdot c$

Como $y_0 \cdot u + x_0 \cdot v$ é posivito, temos que $c \cdot x_0 \leq b \cdot y_0$

Teorema Forte da Dualidade: Se x^* é uma solução ótima do problema primal

$$\begin{aligned} \max c^t x \\ \text{suj } Ax = b \\ x \geq 0 \end{aligned}$$

então o problema dual

$$\begin{aligned} \max b^t y \\ \text{suj } A^t x = c \\ y \text{ irrestrito} \end{aligned}$$

tem solução ótima y^* com $c^t x^* = b^t y^*$.

5 Questão 5

Primeiro vamos adcionar as variáveis de folga, nos dando o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \max z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + 3x_3 + x_5 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_6 = 7 \end{aligned}$$

Nossa base inicial é $X_b = (x_4, x_5, x_6) = (4, 5, 7)$, nossa matriz B é a indentidade e nosso vetor y é $(0, 0, 0)$.

Calculando os valores $c_j - z_j = c_j - yP_j$, temos:

$$\begin{aligned} c_1 - yP_1 = 3 - (0, 0, 0) \cdot P_1 = 3 \\ c_2 - yP_2 = 2 - (0, 0, 0) \cdot P_2 = 2 \\ c_3 - yP_3 = 4 - (0, 0, 0) \cdot P_3 = 4 \end{aligned}$$

Logo, a variável que irá entrar é a variável x_3.

Agora, vamos descobrir quem sai:

$\bar{P_j} = B^{-1}Pj = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$

Fazendo as razões entre os elementos do vetor X_b e P_j e pegando o mínimo, temos que o elemento que irá sair é o x_5.

Agora para a próxima iteração, temos o novo vetor $X_b = (x_4, x_3, x_6) = (\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2)$.

Para calcular y, precisamos da inversa da nova matriz B, logo vamos usar as propriedades de matrizes Eta para conseguir isso:

Vamos falar que nossa nova matriz B_1 é igual à $B \cdot H_1$ onde H_1 é uma matriz theta cuja coluna não identidade é o vetor $\bar{P_j}$ da iteração anterior. Com isso, temos:

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$y = C_b B_1^{-1} \rightarrow yB_1 = C_b \rightarrow yBH_1 = C_b$$

Resolvendo esse sistema, encontramos $y = (0, \frac{4}{3}, 0)$.

Agora, fazendo o mesmo processo que fizemos antes, calculamos todos os $C_j - z_j$ e descobrimos que quem irá entrar é o elemento x_2.

Agora, precisamos calcular $\bar{P}_j$:

$$\bar{P}_j = B_1^{-1} P_j \rightarrow B_1 \bar{P}_j = P_j$$

Resolvendo esse sistema, temos $\bar{P}_j = (1, 0, 1)$ e isso indica que o elemento que irá sair é o x_4.

Agora, para a próxima iteração, iremos repetir todo o processo:

- Calculamos nosso novo X_b usando o pivô: $X_b = (\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, \frac{4}{3})$
- Usaremos outra matriz eta para não termos que calcular B^{-1}: $B_2 = B_1 \cdot H_2 = B \cdot H_1 \cdot H_2$
- Achamos y resolvendo o sistema $yB_2 = C_b$, nos dando $y = (2, 0, 0)$
- Usamos o y que calculamos para fazer as contas $C_j - z_j$, e descobrimos que quem irá entrar é o elemento x_2
- Usamos os valores coeficientes de x_2 nas equações para calcular $\bar{P}_j$, nos dando $\bar{P}_j = (1, 2, 2)$
- Usamos o vetor $\bar{P}_j$ para descobrir quem irá sair (será o que tiver a menor razão), nesse caso é o elemento x_3

Agora, continuamos para a próxima iteração, onde repetiremos o processo mais uma vez:

- $X_b = (x_2, x_1, x_6) = (\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{1}{2})$
- $B_3 = B_0 \cdot H_1 \cdot H_2 \cdot H_3$
- $y = (2, \frac{1}{2}, 0)$
- Agora, ao calcularmos as diferenças $C_j - z_j$, todas dão negativas, o que significa que chegamos na solução ótima.

Temos, então, que a solução ótima é $(x_1, x_2, x_3) = (\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 0)$ com função objetiva no valor de 10.5.

Todas as contas e manipulações algébricas estarão em uma foto que enviarei como anexo, preferi deixar o espaço aqui o mais limpo possível.

6 Questão 6

Vamos usar o método simplex para achar a melhor solução para o problema.

Primeior, vamos colocar o problema na forma canônica:

$$\max Z = 7x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 2x_5 + S_1 = 44x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 + S_3 = 32x_1 \tag{1}$$

Em forma de tableaux:

Iteration 1		C_j	7	6	5	-2	3	0	0	0	0	
B	C_b	X_b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	S_1	S_2	S_3	S_4	Min ratio $\frac{X_b}{x_1}$
S_1	0	4	1	3	5	-2	2	1	0	0	0	$\frac{4}{1}$
S_2	0	3	4	2	-2	1	1	0	1	0	0	$\frac{3}{4}$
S_3	0	5	2	4	4	-2	5	0	0	1	0	$\frac{5}{2}$
S_4	0	1	3	1	2	-1	-2	0	0	0	1	$\frac{1}{3}$
$Z = 0$		Z_j	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
		$Z_j - c_j$	-7	-6	-5	2	-3	0	0	0	0	

O mínimo negativo é -7, logo a variável que entra é x_1 e a menor razão é a de S_4 logo, ela é a variável que irá sair. O pivô é 3, logo a linha de da variável que sai será dividida por 3, e as outras serão subtraídas do novo valor dessa linha multiplicado pelo valor da variável que está entrando, na respectiva linha.

Iteration 2		C_j	7	6	5	-2	3	0	0	0	0	
B	C_b	X_b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	S_1	S_2	S_3	S_4	Min ratio $\frac{X_b}{x_1}$
S_1	0	$\frac{11}{3}$	0	$\frac{8}{3}$	$\frac{13}{3}$	$-\frac{5}{3}$	$\frac{8}{3}$	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{11}{8}$
S_2	0	$\frac{5}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{14}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{11}{3}$	0	1	0	$-\frac{4}{3}$	$\frac{5}{11}$
S_3	0	$\frac{13}{3}$	0	$\frac{10}{3}$	$\frac{8}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{19}{3}$	0	0	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{13}{19}$
x_1	7	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	0	0	1	
$Z = \frac{7}{3}$		Z_j	7	$\frac{7}{3}$	$\frac{14}{3}$	$-\frac{7}{3}$	$-\frac{14}{3}$	0	0	0	$\frac{7}{3}$	
		$Z_j - c_j$	0	$-\frac{11}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{23}{3}$	0	0	0	$\frac{7}{3}$	

Agora a variável que entra é a x_5, e tirando as razões, a que sai é a variável S_2. Nosso pivô é $\frac{11}{3}$

Iteration 3		C_j	7	6	5	-2	3	0	0	0	0	
B	C_b	X_b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	S_1	S_2	S_3	S_4	Min ratio $\frac{X_b}{x_1}$
S_1	0	$\frac{27}{11}$	0	$\frac{24}{11}$	$\frac{85}{11}$	$-\frac{37}{11}$	0	1	$-\frac{8}{11}$	0	$\frac{7}{11}$	$\frac{27}{85}$
x_5	3	$\frac{5}{11}$	0	$\frac{2}{11}$	$-\frac{14}{11}$	$\frac{7}{11}$	1	0	$\frac{3}{11}$	0	$-\frac{4}{11}$	
S_3	0	$\frac{16}{11}$	0	$\frac{24}{11}$	$\frac{118}{11}$	$-\frac{59}{11}$	0	0	$\frac{-19}{11}$	1	$\frac{18}{11}$	$\frac{8}{59}$
x_1	7	$\frac{7}{11}$	1	$\frac{5}{11}$	$-\frac{2}{11}$	$\frac{1}{11}$	0	0	$\frac{2}{11}$	0	$\frac{1}{11}$	
$Z = \frac{64}{11}$		Z_j	7	$\frac{41}{11}$	$-\frac{56}{11}$	$\frac{28}{11}$	3	0	$\frac{23}{11}$	0	$\frac{-5}{11}$	
		$Z_j - c_j$	0	$-\frac{25}{11}$	$-\frac{111}{11}$	$\frac{50}{11}$	0	0	$\frac{23}{11}$	0	$-\frac{5}{11}$	

Agora entra x_3 e sai S_3 com pivô $\frac{118}{11}$:

Iteration 4		C_j	7	6	5	-2	3	0	0	0	0	
B	C_b	X_b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	S_1	S_2	S_3	S_4	Min ratio $\frac{X_b}{x_1}$
S_1	0	$\frac{83}{59}$	0	$\frac{36}{59}$	0	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{61}{118}$	$-\frac{85}{118}$	$-\frac{32}{59}$	$\frac{166}{59}$
x_5	3	$\frac{37}{59}$	0	$\frac{26}{59}$	0	0	1	0	$\frac{4}{59}$	$\frac{7}{59}$	$-\frac{10}{59}$	
x_3	5	$\frac{8}{59}$	0	$\frac{12}{59}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{-19}{118}$	$\frac{11}{118}$	$\frac{9}{59}$	
x_1	7	$\frac{39}{59}$	1	$\frac{29}{59}$	0	0	0	0	$\frac{9}{59}$	$\frac{1}{59}$	$\frac{7}{59}$	
$Z = \frac{424}{59}$		Z_j	7	$\frac{341}{59}$	5	$-\frac{5}{2}$	3	0	$\frac{55}{118}$	$\frac{111}{118}$	$\frac{64}{59}$	
		$Z_j - c_j$	0	$-\frac{13}{59}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{55}{118}$	$\frac{111}{118}$	$\frac{64}{59}$	

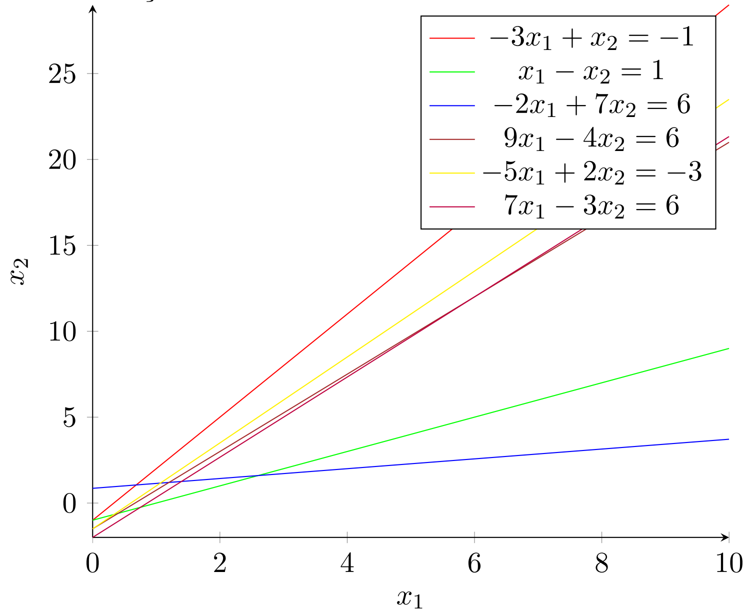
Agora entra x_4 e sai S_1 com pivô $\frac{1}{2}$

Iteration 5		C_j	7	6	5	-2	3	0	0	0	0	
B	C_b	X_b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	S_1	S_2	S_3	S_4	Min ratio $\frac{X_b}{x_1}$
x_4	-2	$\frac{166}{59}$	0	$\frac{72}{59}$	0	1	0	2	$\frac{122}{118}$	$-\frac{85}{59}$	$-\frac{64}{59}$	
x_5	3	$\frac{37}{59}$	0	$\frac{26}{59}$	0	0	1	0	$\frac{4}{59}$	$\frac{7}{59}$	$-\frac{10}{59}$	
x_3	5	$\frac{91}{59}$	0	$\frac{48}{59}$	1	0	0	1	$\frac{42}{118}$	$-\frac{37}{59}$	$-\frac{23}{59}$	
x_1	7	$\frac{39}{59}$	1	$\frac{29}{59}$	0	0	0	0	$\frac{9}{59}$	$\frac{1}{59}$	$\frac{7}{59}$	
$Z = \frac{509}{59}$		Z_j	7	$\frac{377}{59}$	5	2	3	1	0.9831...	0.2203...	0.5424...	
		$Z_j - c_j$	0	$-\frac{23}{59}$	0	0	0	1	0.9831...	0.2203...	0.5424...	

Nosso simplex acaba por aqui já que todas as diferenças são positivas. Nossa função objetiva tem valor maior do que a que foi dada no enunciado, logo a solução dada no enunciado não é a ótima.

7 Questão 7

Como temos apenas duas variáveis, vamos resolver o problema geometricamente. Primeiro vamos plotar as restrições:



Nossa região factível fica delimitada por 4 pontos:

- O primeiro é definido pelas restrições $-5x_1 + 2x_2 \leq -3$ e $x_2 \geq 0$. O ponto é o $(0.6, 0)$
- O segundo é definido pelas restrições $9x_1 - 4x_2 \leq 6$ e $x_2 \geq 0$. O ponto é o $(\frac{2}{3}, 0)$
- O terceiro é definido pelas restrições $-2x_1 + 7x_2 \leq 6$ e $9x_1 - 4x_2 \leq 6$. O ponto é o $(1.2, 1.2)$
- O quarto é definido pelas restrições $-2x_1 + 7x_2 \leq 6$ e $-5x_1 + 2x_2 \leq -3$. O ponto é o $(\frac{165}{155}, \frac{36}{31})$

Desses pontos, o que nos da o maior valor da função objetiva é o ponto $(0.6, 0)$, ou seja, o valor máximo da função objetiva é -0.6.