Caderno de Funções Diferenciáveis e Séries

Sumário

Capítulo 1

Sequências Numéricas

1.1 Introdução

Definição: Lista infinita de números reais (ou complexos, inteiros). Formalmente é uma função:

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, onde $a_n = f(n)$.

Notação: $\{a_N\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, ...

1.2 Limites

Definição: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tem limite finito $L \in \mathbb{R}$, e escrevemos $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ ou $a_n \to L$, se dado $\epsilon > 0$ existe N tal que:

$n \geq \Rightarrow |a_n - L| < \epsilon$

Teorema: Suponhamos que uma sequência $\{a_n\}$ é dada por $a_n = f(n)$, onde $f : [1, +\infty] \to \mathbb{R}$. Se

$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ então $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

Definição: Dizemos que $\{a_n\}$ diverge para $+(-)\infty$, e escrevemos $\lim_{n\to\infty} a_n = +(-)\infty$, se dadoa $M > 0$, existe N tal que $N \geq n \Rightarrow a_n > M(< -M)$. Se o limite da sequência quando $n \to \infty$ não existe, também dizemos que $\{a_n\}$ é divergente.

1.3 Propriedades Algébricas dos Limites

- $lim(a_n + b_n) = lim(a_n) + lim(b_n)$
- $lim(ca_n) = clim(a_n),\ c \in \mathbb{R}$
- $lim(a_n b_n) = lim(a_n)lim(b_n)$
- $lim\frac{a_n}{b_n} = \frac{lim(a_n)}{lim(b_n)}$, se $lim(b_n) \neq 0$

Caso os limites do lado direito existam.

1.4 Outras Propriedades

Se f é uma função contínua, então:

$lim(f(a_n)) = f(lim(a_n))$.

Definição(Teorema do Confronto): Se $a_n \leq b_n \leq_n$, $\forall n$ e $a_n \to L$, $c_n \to L$ então $b_n \to L$.

Definição: $\{a_n\}$ é crescente se $a_{n+1} \geq a_n$ e estritamente crescente se $a_{n+1} > a_n$ (definido analogamente para decrescente). $\{a_n\}$ é monotônica se é crescente ou decrescente.

Definição: $\{a_n\}$ é limitada superiormente (inferiormente) se $\exists M$ tal que $a_n \leq (\geq) M$, $\forall n$.