P3 - Funções Diferenciáveis e Séries

Lourenço Henrique Moinheiro Martins Sborz Bogo - 11208005

23 de julho de 2020

Sumário

1 Questão 1 (Lista 6 Q2)

Primeiro vamos derivar em x e em y a função dada:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x^2}{(x^3+y^3)^{\frac{2}{3}}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y^2}{(x^3+y^3)^{\frac{2}{3}}}$$

Como as derivadas parciais são um polinômio sobre a raiz de um outro polinômio, sabemos que elas são contínuas. O único ponto que pode nos causar alguma dúvida é o ponto $x = -y$, pois isso faria com que o denominador fosse 0, logo vamos tratar esse caso a parte, derivando pela definição. Portanto, assumindo que $x_0 = -y_0$, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x^3+y_0^3)^{\frac{1}{3}} - (x_0^3+y_0^3)^{\frac{1}{3}}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x^3+y_0^3)^{\frac{1}{3}}}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left(\frac{x^3 - x_0^3}{(x-x_0)^3}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\lim_{x \to x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{(x-x_0)^3}\right)^{\frac{1}{3}} \xrightarrow{\text{L'Hopital}} \left(\lim_{x \to x_0} \frac{3x^2}{3(x-x_0)^2}\right)^{\frac{1}{3}} = +\infty$$

Só podemos fazer esse último passo se $x_0 \neq 0$. Nesse caso, teríamos:

$$\left(\lim_{x \to x_0} \frac{3x^2}{3(x-x_0)^2}\right)^{\frac{1}{3}} \xrightarrow{x_0=0} \left(\lim_{x \to 0} \frac{3x^2}{3x^2}\right) = 1$$

Com isso, falta tratar apenas o caso onde $x_0 = y_0 = 0$, para isso, iremos usar o limite:

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y)}{\sqrt[2]{(x)^2 + (y)^2}}.$$

Se esse limite der 0, temos que a função é diferenciável em $(0,0)$. Vamos simplificar o limite usando nossas observações. Sabemos que no ponto $(0,0)$ a derivada parcial em x é 1, e como a derivada parcial em y é análoga, ela também é. Sabemos também, que $f(0,0) = 0$ e com isso em mente nosso limite se simplifica para:

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{\sqrt[3]{x^3+y^3} - x - y}{\sqrt[2]{x^2+y^2}}$$

Vamos mostrar que esse limite não existe, mostrando que seu valor difere caso usemos duas curvas diferentes para aproximar o ponto:

- Usando a curva $(0, t)$, temos:
$$\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt[3]{0^3+t^3} - 0 - t}{\sqrt[2]{0^2+t^2}} = \lim_{t \to 0} \frac{t-t}{|t|} = 0$$
- Usando a curva (t, t), temos:
$$\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt[3]{t^3+t^3} - t - t}{\sqrt[2]{t^2+t^2}} = \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt[3]{2}t - 2t}{|t|} \neq 0.$$

Provamos então que a função não é diferenciável em $(0,0)$.

Com isso, terminamos a prova do exercício, já que demonstramos que a função é diferenciável em todo ponto onde $x \neq y$ e, seu gradiente nesses pontos é:

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{x_0^2}{(x_0^3+y_0^3)^{\frac{2}{3}}}, \frac{y_0^2}{(x_0^3+y_0^3)^{\frac{2}{3}}}\right)$$

2 Questão 2 (Lista 6 Q15)

Primeiro vamos montar a Jacobiana da função T.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x+y) & \cos(x+y) \\ -\sin(x+y) & -\sin(x+y) \end{bmatrix} = J(T)$$

Tirando o determinante da Jacobiana, conseguimos o Jacobiano:

$det(J(T)) = -\sin(x+y)\cos(x+y) + \sin(x+y)\cos(x+y) = 0$

Agora, precisamos achar em que pontos a função é injetora localmente.

Para isso vamos supor uma bola aberta de raio $R > 0$ ao redor de um ponto genérico $P_0 = (x_0, y_0)$. Agora, escolhemos um número h tal que $0 < h < R$. Agora suponhamos o ponto $P_1 = (x_0 + h, y_0 - h)$. Os dois pontos, P_0, P_1, levam ao mesmo valor da função T. Desse modo, provamos que para qualquer ponto, não existe uma bola aberta ao seu redor, tal que a função seja injetora dentro dessa bola, logo, a função nunca é injetora localmente.

3 Questão 3 (Lista 7 Q17)

Seja f uma função de $\mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^3$, tal que:

$f(x, y, z, u, v, w) = (3x+2y+z^2+u+v^2, 4x+3y+z+u^2+w+2, x+z+w+u^2+2) = (f_1, f_2, f_3)$

Vamos escrever a parte da Jacobiana de f que é necessária para usarmos o Teorema da Função Implícita:

$$M = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} & \frac{\partial f_1}{\partial w} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} & \frac{\partial f_2}{\partial w} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial v} & \frac{\partial f_3}{\partial w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2v & 0 \\ 2u & 1 & 1 \\ 2u & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tirando seu determinante, temos:

$\det M = 1 + 4uv + 0 - 0 - 4uv - 0 = 1$

Já que o resultado foi diferente de 0, agora precisamos apenas mostrar que as expressões dão 0 nas condições dadas, ou seja, $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, $(u, v) = (0, 0)$ e $w = -2$.

- $3x + 2y + z^2 + u + v^2 = 0$
- $4x + 3y + z + u^2 + w + 2 = -2 + 2 = 0$
- $x + z + w + u^2 + 2 = -2 + 2 = 0$

Com isso, podemos responder o a pergunta feita no enunciado. Sim, é possível solucionar as equações da maneira pedida.

4 Questão 4 (Lista 7 Q18b)

Primeiro, vamos conseguir o gradiente da função f:

$\nabla f(x, y, z) = (2xy^2z^2, 2x^2yz^2, 2x^2y^2z)$

Agora, seja $g(x, y, z)$ uma função tal que $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Podemos perceber que sua curva de nível $C = 0$ é a restrição dada. Seu gradiente é:

$\nabla g(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$

Agora, usando os mutiplicadores de Lagrange, temos que:

$(2xy^2z^2, 2x^2yz^2, 2x^2y^2z) = \lambda(2x, 2y, 2z) \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} 2x\lambda = 2xy^2z^2 \\ 2y\lambda = 2x^2yz^2 \\ 2z\lambda = 2x^2y^2z \end{cases}$$

Quando x, y e z são diferentes de 0, podemos escrever:

$$\begin{cases} \lambda = y^2z^2 \\ \lambda = x^2z^2 \\ \lambda = x^2y^2 \end{cases} \rightarrow x^2 = y^2 = z^2$$

Aplicando isso na condição inicial:

$x^2 + y^2 + z^2 = 3x^2 = 1 \rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}, y = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}, z = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

Qualquer combinação dos possíveis valores de x, y e z aplicada na função f dará o mesmo resultado:

$f(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{1}{27}$

Esse é o máximo da função nas restrições dadas.

Agora para o mínimo, precisamos perceber duas coisas.

1. A função f é sempre positiva, seu valor mínimo possível é 0.
2. Se uma das cordenadas for 0, o valor da função é 0.

Com isso em mente, fica muito fácil perceber que o mínimo na restrição dada é 0, já que, por exemplo, o ponto $(0, 0, 1)$ está na restrição.