Capítulo 11 Exercício 5

Lourenço Henrique Moinheiro Martins Sborz Bogo

Notação

- S_i é o polinômio que interpola os pontos i e $i+1$.
- $z_i = S''(x_i)$

Para que nosso spline cúbico satisfaça a condição not a knot, é necessário que nossas condições livres sejam:

- $S_0(x) \equiv S_1(x)$
- $S_{n-2}(x) \equiv S_{n-1}(x)$
- $h_i = x_{i+1} - x_i$
- $b_i = \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}$

Ou seja, o primeiro polinômio deve ser exatamente igual ao segundo e o penúltimo deve ser exatamente igual ao último.

Isso implica que $S_0'''(x) = S_1'''(x)$ e que $S_{n-2}'''(x) = S_{n-1}'''(x)$.

Logo, temos que: $\frac{z_1-z_0}{h_0} = \frac{z_2-z_1}{h_1}$ e $\frac{z_n-z_{n-1}}{h_{n-1}} = \frac{z_{n-1}-z_{n-2}}{h_{n-2}}$.

Então, a primeira e a última equação do sistema linear são:

- $-h_1 z_0 + (h_0+h_1)z_1 - h_0 z_2 = 0$
- $-h_{n-1}z_{n-2} + (h_{n-2}+h_{n-1})z_{n-1} - h_{n-2}z_n = 0.$

Além dessas duas, temos as equações que vêm da interpolação cubica independente da condição que estamos usando:

$h_{i-1}z_{i-1} + 2(h_{i-1}+h_i)z_i + hz_{i+1} = 6(b_i - b_{i-1}),\ i = 1, 2, \ldots, n-1.$

Desse modo, podemos escrever nosso sistema linear na forma de matrizes:

$H \cdot \vec{z} = \vec{v}$,

$$\vec{z} = \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-2} \\ z_{n-1} \\ z_n \end{bmatrix}, \ \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6(b_1 - b_0) \\ 6(b_2 - b_1) \\ \vdots \\ 6(b_{n-2} - b_{n-3}) \\ 6(b_{n-1} - b_{n-2}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

E a nossa matriz de coficientes (que é o que queremos para o problema) é:

$$H = \begin{bmatrix} -h_1 & h_0 + h_1 & -h_0 & & & \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & & & \\ & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & h_{n-3} & 2(h_{n-3} + h_{n-2}) & h_{n-2} & \\ & & & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_n \\ & & & -h_{n-1} & h_{n-2} + h_{n-1} & -h_{n-2} \end{bmatrix}$$

Podemos ver que ela é tridiagonal caso desconsideremos a primeira e a última linha e que ela é dominante diagonalmente (os espaços em branco são 0).