Lista 4 - Álgebra Linear

<u>**Assuntos**</u>:

1. Autovalores e Autovetores
2. Matrizes ortogonais, simétricas, diagonais e matrizes com posto 1
3. Teorema Espectral
4. Diagonalização
5. Eliminação de Gauss (Escalonamento)
6. Espaço Nulo de matrizes
7. Espaço Coluna de matrizes
8. Espaço Linha de matrizes
9. $dimR(A) + dimN(A) = 0$ (Relações entre os espaços de uma matriz)
10. Transformações Lineares ($(T(x) = Ax)$)

Exemplo 1 : A é uma matriz anti-simétrica se $A^T = -A$. Podemos escrever qualquer matriz como a soma de uma matriz simétrica com uma anti-simétrica.
<u>**Resposta**</u>: $A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$, $(A + A^T)$ é simétrica e $(A - A^T)$ é anti-simétrica.

Exemplo 2 : Se M é uma matriz simétrica, então $M = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i v_i^T$, onde $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ são os autovalores de A e $\{v_1 \ldots v_n\}$ é a base ortonormal de autovetores de A (Teorema Espectral) (Ele VAI cobrar em uma questão).

Exemplo 3 : Se M é matriz simétrica, sem eigenvalue nulo, então podemos escrever M^-1 como $\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{\lambda_i} v_i v_i^t$.

<u>**Prova**</u>: Queremos provar que $(\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{\lambda_i} v_i v_i^t)M = I$. Então $(\sum_{j=0}^{n} \lambda_j v_j v_j^t)(\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{\lambda_i} v_i v_i^t$. Quando $i \neq j$ o termo zera, pois a base é ortonormal. Quando $i = j$, temos $\sum_{i=j=0}^{n} \lambda_i \frac{1}{\lambda_i} v_i v_i^T v_i v_i^T = \sum_{i=j=0}^{n} \lambda_i \frac{1}{\lambda_i} v_i v_i^T = \sum_{i=j=0}^{n} v_i v_i^T = I(1)$.

(1) Seja $M = \sum_{i=0}^{n} v_i v_i^T$. $Mx = x$, para qualquer vetor x.

<u>**Matrizes com Posto 1 (Revisão)**</u>:

Sempre $M = a.b^T \Rightarrow$

$\Rightarrow Mb = ||b||^2 a$

$\Rightarrow Ma = (b^T a)a \Rightarrow$ Então, o vetor a é um eigenvector, com eigenvalue $\lambda = b^T a$.

Os autovalores de A são: $\{b^T a, 0, 0, \ldots, 0\}$, com o 0 tendo multiplicidade $n - 1$.