Lista

Lourenço Henrique Moinheiro Martins Sborz Bogo

Para provar que perto do ponto 0 a função pode ser apoximada por $\frac{-x}{3}$ iremos usar Taylor.

$f(x) = \frac{xcos(x) - sin(x)}{x^2}$. $f'(x) = \frac{-x^3 sin(x) - 2x(xcos(x) - sin(x))}{x^4}$.

Denominando $t(x)$ a expansão de Taylor de primeira ordem da função $f(x)$ usando o ponto $x_0 = 0$ como base, temos:

$t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - 0) = f(x_0) + f'(x_0)(x)$.

Como $f'(x)$ e $f(x)$ não estão bem definidas no ponto $x = 0$, precisamos calcular o limite quando $x \to 0$. Temos então:

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{-x^3 sin(x) - 2x(xcos(x) - sin(x))}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2 sin(x) - 2(xcos(x) - sin(x))}{x^3} \to L'Hopital \to \lim_{x\to 0} \frac{-2xsin(x) - 2x^2 cos(x) + 2xsen(x)}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-2xsin(x) - 2x^2 cos(x) + 2xsen(x)}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2 cos(x)}{3x^2} = \frac{-1}{3}.$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{xcos(x) - sen(x)}{x^2} \to L'Hopital \to \lim_{x\to 0} \frac{-xsen(x)}{2x} = 0$$

Agora, por fim, temos:

$$\lim_{x_0\to 0} t(x) = \lim_{x_0\to 0} f(x_0) + f'(x_0)(x) = 0 + \frac{-x}{3} = \frac{-x}{3}\ .$$