Exercícios 3 e 12 do capítulo 14

Lourenço Henrique Moinheiro Martins Sborz Bogo - 11208005

19 de junho de 2020

Sumário

1 Questão 3

Inicialmente foi necessário expandir, usando taylor até o termo a oitava, as seguintes expressões.

- $f(x \pm h)$
- $f(x \pm 2h)$
- $f(x \pm 3h)$

Somando as duas equações do primeiro item:

- $f''(x) = \frac{f(x-h)-2f(x)+f(x+h)}{h^2} - \frac{h^2}{12}f^4(x) - \frac{h^4}{360}f^6(x) + O(h^6)$

Somando as duas equações do segundo item:

- $f''(x) = \frac{f(x-2h)-2f(x)+f(x+2h)}{4h^2} - \frac{h^2}{3}f^4(x) - \frac{2h^4}{45}f^6(x) + O(h^6)$

Somando as duas equações do terceiro item:

- $f''(x) = \frac{f(x-3h)-2f(x)+f(x+3h)}{9h^2} - \frac{3h^2}{4}f^4(x) - \frac{9h^4}{40}f^6(x) + O(h^6)$

Agora temos 3 expressões para $f''(x)$ cujo erro é O(h^2).
Usando a primeira e a segunda, obtemos:

- $\frac{3f''(x)}{4} = \frac{f(x-h)-2f(x)+f(x+h)}{h^2} - \frac{f(x-2h)-2f(x)+f(x+2h)}{16h^2} + \frac{3h^4}{360}f^6(x) + O(h^6)$

Usando a primeira e a terceira, obtemos:

- $\frac{8f''(x)}{9} = \frac{f(x-h)-2f(x)+f(x+h)}{h^2} - \frac{f(x-3h)-2f(x)+f(x+3h)}{81h^2} + \frac{8h^4}{360}f^6(x) + O(h^6)$

E juntando essas duas últimas expressões, conseguimos obter a expressão experada:

- $f''(x) = \frac{(2f(x-3h)-27f(x-2h)+270f(x-h)-490f(x)+270f(x+h)-27f(x+2h)+2f(x+3h))}{180h^2}$

O algoritmo foi muito simples de implementar, apenas fiz uma função com essa expressão final e apliquei nela os valores pedidos.

2 Questão 12

Aqui, foi apenas uma questão de implementar a função que nos foi dada, calcular o erro nas condições pedidas e plotar num gráfico loglog.

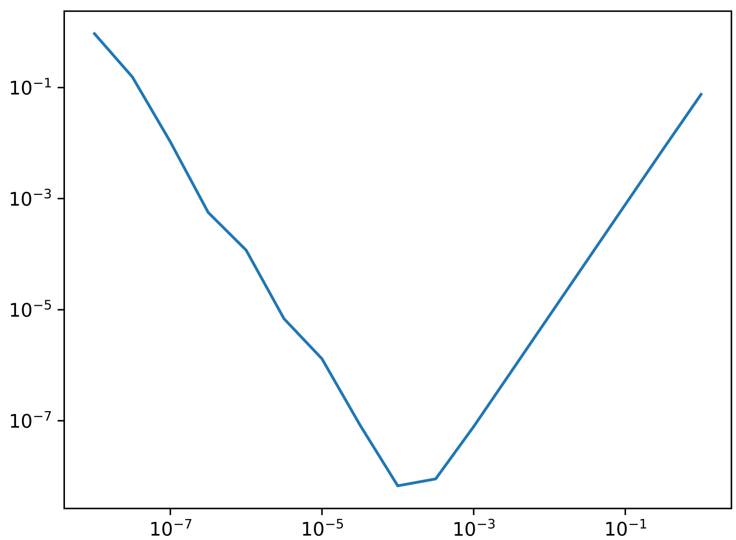

Figura 1: Gráfico loglog do erro

A explicação do gráfico é a seguinte: o erro tende a diminuir quanto mais diminuimos o h, o que pode ser evidenciado na metade direita do gráfico. O comportamento irregular que acontece no lado esquerdo se deve ao fato de que quando o h é muito pequeno, ocorre cancelamento catastrófico na conta, fazendo com que os erros de arredondamento dos pontos flutuantes fiquem maiores que o próprio erro do método de aproximação que estamos usando.