Exercícios do Capítulo 15

Lourenço Henrique Moinheiro Martins Sborz Bogo - 11208005

29 de junho de 2020

Sumário

1 Exercício 3

Precisamos deduzir a fórmula do erro da *Midpoint Rule*. Para isso, primeiro vamos expandir a função $f(x)$, que queremos, integrar usando taylor, até o termo de segunda ordem, ao redor do ponto $\frac{a+b}{2}$ (a e b são nossas bordas de integração):

$f(x) = f(\frac{a+b}{2}) + (x - \frac{a+b}{2})f'(\frac{a+b}{2}) + (x - \frac{a+b}{2})^2 \frac{f''(\xi_x)}{2}$

Agora, iremos calcular o erro em si:

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b f(\frac{a+b}{2})dx =$$
$$= \int_a^b f(\frac{a+b}{2}) + (x - \frac{a+b}{2})f'(\frac{a+b}{2}) + (x - \frac{a+b}{2})^2 \frac{f''(\xi_x)}{2} - f(\frac{a+b}{2}) =$$
$$= \int_a^b (x - (\frac{a+b}{2}))f'(\frac{a+b}{2}) + \frac{(x - \frac{a+b}{2})^2}{2} f''(\xi_x)dx =$$
$$= \int_a^b (x - (\frac{a+b}{2}))f'(\frac{a+b}{2}) + \int_a^b \frac{(x - \frac{a+b}{2})^2}{2} f''(\xi_x)dx =$$
$$= 0 + \frac{f''(\eta)}{2} \int_a^b (x - \frac{a+b}{2})^2 dx \text{ (Pelo T.V.M. para integrais) } =$$
$$= \frac{(b-a)^3}{24} f''(\eta),\ \eta \in [a, b].$$

2 Exercício 4

2.1 (a)

Sabemos que o erro da *Hermite Cubic Interpolation* é:

$$\frac{f^4(\eta)(x-a)^2(x-b)^2}{4!}$$

Portanto podemos escrever:

$$f(x) - p(x) = \frac{f^4(\eta)(x-a)^2(x-b)^2}{4!}$$

Depois, integramos os dois lados de a até b, conseguindo:

$$\int_a^b f(x) - p(x) = \int_a^b \frac{f^4(\eta)(x-a)^2(x-b)^2}{4!} \rightarrow$$
$$\rightarrow \int_a^b f(x) - \int_a^b p(x) = \frac{f^4(\eta)}{4!}\int_a^b (x-a)^2(x-b)^2$$

Ou seja, o erro de usarmos esse método para calcular a integral é $\frac{f^4(\eta)}{4!}\int_a^b (x-a)^2(x-b)^2$.

Agora precisamos simplificar essa expressão:

$$\frac{f^4(\eta)}{4!}\int_a^b (x-a)^2(x-b)^2 = \frac{f^4(\eta)}{4!}\int_a^b (x^2-2ax+a^2)(x^2-2bx+b^2) =$$
$$= \frac{f^4(\eta)}{4!}\frac{6b^5-6a^5+10b^5+40ab^4+10a^2b^3-10a^5-10a^3b^2-40a^4b+15a^2+45a^4b-15b^5-45ab^4}{30} =$$
$$= \frac{f^4(\eta)(b-a)^5}{720},\ \eta \in [a,b].$$

2.2 (b)

```python
import numpy as np

'''Função que calcula a regra pedida no enunciado para a
função f de derivada df'''
def trap(f, df, a, b):
    c = b-a
    return (c/2)*(f(a)+f(b))+((c*c)/12)*(df(a)-df(b))

'''Função dada no enunciado (e^x)'''
def g(x):
    return np.exp(x)


'''Apenas cálculo do erro'''
res1 = np.e - 1
res2 = np.e - np.e**(.9)

aprox1 = trap(g, g, 0, 1)
aprox2 = trap(g, g, 0.9, 1)

err1 = abs(res1 - aprox1)
err2 = abs(res2 - aprox2)

print(err1)
print(err2)
```

Intervalo	Trapezoid	Simpson	Midpoint	Corrected
[0, 1]	0.1408	$6 \cdot 10^{-4}$	$6.96 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-3}$
[0.9, 1]	$2.2 \cdot 10^{-4}$	$9 \cdot 10^{-9}$	$1.1 \cdot 10^{-4}$	$3.6 \cdot 10^{-8}$

Podemos perceber que Corrigido aproximou melhor que a maioria dos outros métodos, com exceção do de Simpson, o que já era esperado, já que ele usa um polinômio de segundo grau, ao invés de um polinômio de primeiro.

3 Exercício 6

3.1 (a)

Para conseguir a fórmula é muito simples. Ao invés de aplicar a fórmula direto em $[a, b]$, vamos quebrar o intervalo em vários intervalos menores, equidistantes, e aplicar a fórmula nesses intervalos. Começaremos com a notação:

- $h = (a - b)/n$, com n sendo o número de sub-intervalos.
- $x_i = a + ih$

Temos então que a fórmula seria construída aplicando a fórmula do trapezío corrigida para os intervalos $[x_i, x_{i+1}]$:

$$I_{cctr} = \sum_{i=0}^{n-1}(\frac{x_{i+1} - x_i}{2}(f(x_{i+1}) + f(x_i)) + \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{12}(f'(x_{i+1}) - f'(x_i))) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}(\frac{h}{2}(f(x_{i+1}) + f(x_i)) + \frac{h^2}{12}(f'(x_{i+1}) - f'(x_i))) =$$

$$= \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(f(x_{i+1}) + f(x_i)) + \frac{h^2}{12}\sum_{i=0}^{n-1}(f'(x_{i+1}) - f'(x_i))$$

Agora, podemos perceber que a primeira parcela dessa soma: $\frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(f(x_{i+1}) + f(x_i))$, é a regra do trapézio composto, e, que a segunda parcela vai se cancelar quase que inteira, sobrando apenas $f'(x_0)$ e $f'(x_n)$, que são $f'(a)$ e $f'(b)$.

Fazendo, então, todas as simplificações necessárias, chegamos na seguinte fórmula:

$$h(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)) + h^2\frac{f'(a) - f'(b)}{12} = I_{tr} + h^2\frac{f'(a) - f'(b)}{12}$$

Código:

```python
import numpy as np

n = 10
a = 0;
b = 1;
h = (b-a)/n

def nCorr(f, h, a, b):
    fS = 0
    for i in np.arange(a+h, b, h):
        fS += f(i)

    return h*(fS + (f(a)+f(b))/2)

def corr(f, df, h, a, b):
    resp = nCorr(f, h, a, b)
    resp += (h*h*(df(a)-df(b)))/12
    return resp

def g(x):
    return np.exp(-(x*x))

def dg(x):
    return -2*x*np.exp(-(x*x))

print(f"Valor dado    = 0.746824133")
print(f"Não corrigida = {nCorr(g, h, a, b)}")
print(f"Corrigida     = {corr(g, dg, h, a, b)}")
```

Valor Dado no Enunciado	Não corrigida	Corrigida
0.746824133	0.746210796	0.746823928

Podemos perceber que o erro na versão não corrigida é da ordem de $10^{-4} = h^4$ e na versão corrigida é da ordem de $10^{-6} = h^6$, ou seja, uma melhora da ordem de $10^{-2} = h^2$ nos experimentos.

3.2 (b)

Primeiro, vamos mostrar que o erro do trapézio corrigido composto é $O(h^4)$:

$I - I_{tcc} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^4(\eta_i)h^5}{720} = \frac{h^5}{720} \sum_{i=0}^{n-1} f^4(\eta_i)$.

Agora vamos multiplicar a expressão por $\frac{a-b}{nh}$. Podemos fazer isso pois essa fração é igual a 1.

$\frac{a-b}{nh} \frac{h^5}{720} \sum_{i=0}^{n-1} f^4(\eta_i)$.

Agora usando o Teorema do Valor Intermediário, $\frac{\sum_{i=0}^{n-1} f^4(\eta_i)}{n} = f^4(\eta)$, $\eta \in [a, b]$, onde $[a, b]$ é o nosso intervalo de integração.

Simplificando, temos:

$I - I_{tcc} = \frac{h^4(a-b)f^4(\eta)}{720} = O(h^4)$.

Com essa informação, podemos provar o que o exercício pede:

$I - I_{tcc} = O(h^4) \rightarrow I - I_{tc} - h^2 \frac{f'(a)-f'(b)}{12} = O(h^4) \rightarrow$
$\rightarrow I - I_{tc} = h^2 \frac{f'(a)-f'(b)}{12} + O(h^4)$.