Cap11 Ex5

Começaremos com um spline cúbico padrão, ou seja, temos as seguintes condições:

1. $s_i(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \ldots, n-1$
2. $s_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1})$, $i = 0, \ldots, n-1$
3. $s_i'(x_{i+1}) = s_{i+1}'(x_{i+1})$, $i = 0, \ldots, n-2$
4. $s_i''(x_{i+1}) = s_{i+1}''(x_{i+1})$, $i = 0, \ldots, n-2$

Onde:

1. $s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$
2. $s_i'(x) = b_i + 2c_i(x - x_i) + 3d_i(x - x_i)^2$
3. $s_i''(x) = 2c_i + 6d_i(x - x_i)$

O que nós queremos inicialmente é determinar os coeficientes desses polinômios para $i = 0, 1, \ldots, n-1$

Notação:

- $a_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$
- $h_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$
- $f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$

Então, aplicando todas as condições impostas para splines cúbicos, chegaremos em:

$h_{i-1}c_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)c_i + h_i c_{i+1} = 3(f[x_i, x_{i+1}] - f[x_{i-1}, x_i])$, $i = 1, \ldots, n-1$.

(Os passos dessa parte foram pulados pois estão todos no livro e o exercício em si começa agora).

O sistema acima nos dará $n-1$ equações lineares, e queremos achar $n+1$ incógnitas. Ou seja, agora para fazer o not a knot, precisaremos apenas usar como nossas duas condições livres:

- $d_0 = d_1$

- $d_{n-1} = d_{n-2}$

Peguemos do livro a equação para achar d_i:

$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}$, $i = 0, \ldots, n-1$.

Vamos agora usar as condições impostas pelo knot a not:

- $d_0 = d_1 \rightarrow \frac{c_1 - c_0}{3h_0} = \frac{c_2 - c_1}{3h_1} \rightarrow c_1 - c_0 = \frac{h_0}{h_1}(c_2 - c_1) \rightarrow c_0 = c_1 - \frac{h_0}{h_1}(c_2 - c_1)$

- $d_{n-2} = d_{n-1} \rightarrow \frac{c_{n-1} - c_{n-2}}{3h_{n-2}} = \frac{c_n - c_{n-1}}{3h_{n-1}} \rightarrow \frac{h_{n-1}}{h_{n-2}}(c_{n-1} - c_{n-2}) = c_n - c_{n-1} \rightarrow$
  $\rightarrow c_n = c_{n-1} + \frac{h_{n-1}}{h_{n-2}}(c_{n-1} - c_{n-2})$

Agora, pegaremos o o sistema que tínhamos antes e nos casos $i = 1$ e $i = n-1$ iremos substituir c_0 e c_n respecetivamente, resultando nesse novo sistema:

$$\begin{cases} h_{i-1}c_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)c_i + h_i c_{i+1} = 3(f[x_i, x_{i+1}] - f[x_{i-1}, x_i]),\ i = 2, \ldots, n-2 \\ h_0(c_1 - \frac{h_0}{h_1}(c_2 - c_1)) + 2(h_0 + h_1)c_1 + h_1 c_2 = 3(f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]) \\ h_{n-2}c_{n-2} + 2(h_{n-2} + h_{n-1})c_{n-1} + h_{n-1}(c_{n-1} + \frac{h_{n-1}}{h_{n-2}}(c_{n-1} - c_{n-2})) = 3(f[x_{n-}, x_n] - f[x_{n-2}, x_{n-1}]) \end{cases}$$

Ou seja,

$$\begin{cases} h_{i-1}c_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)c_i + h_i c_{i+1} = 3(f[x_i, x_{i+1}] - f[x_{i-1}, x_i]),\ i = 2, \ldots, n-2 \\ c_1(3h_0 + 2h_1 + \frac{h_0^2}{h_1}) + c_2(h_1 - \frac{h_0^2}{h_1}) = 3(f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]) \\ c_{n-1}(3h_{n-1} + 2h_{n-2} + \frac{h_{n-1}^2}{h_{n-2}}) + c_{n-2}(h_{n-2} - \frac{h_{n-1}^2}{h_{n-2}}) = 3(f[x_{n-}, x_n] - f[x_{n-2}, x_{n-1}]) \end{cases}$$

Agora, escrevendo esse sistema na forma matricial, temos:

$H\vec{c} = \vec{f}$, com

$$H = \begin{bmatrix} 3h_0 + 2h_1 + \frac{h_0^2}{h_1} & h_1 - \frac{h_0^2}{h_1} & & & & \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & & & \\ & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & h_{n-3} & 2(h_{n-3} + h_{n-2}) & h_{n-2} \\ & & & & h_{n-2} - \frac{h_{n-1}^2}{h_{n-2}} & 3h_{n-1} + 2h_{n-2} + \frac{h_{n-1}^2}{h_{n-2}} \end{bmatrix}$$

$$\vec{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-2} \\ c_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\vec{f} = \begin{bmatrix} 3(f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]) \\ 3(f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]) \\ \vdots \\ 3(f[x_{n-2}, x_{n-1}] - f[x_{n-3}, x_{n-2}]) \\ 3(f[x_{n-1}, x_n] - f[x_{n-2}, x_{n-1}]) \end{bmatrix}$$

A matrix que estamos interessados para responder o exercício é a H, e podemos ver que ela é estritamente diagonal dominante e tridiagonal.