Caderno de Labnum

Lourenço Bogo

Sumário

Capítulo 1

Introdução

1.1 Introdução

1.2 Conceitos Básicos da Matéria

Obviamente para representarmos modelos reais em computadores precisamos fazer aproximações, que no caso irá nos causar erros.

Definição: Dado $u \in \mathbb{R}$ e $v \in \mathbb{R}$, uma aproximação de u, definimos Erro Absoluto como $|u - v|$ e, se $u \neq 0$ e Erro Relativo como $\frac{|u-v|}{|u|}$

Tipos de Erro: $\begin{cases} \text{Modelagem} \\ \text{Representação} \\ \text{De aproximação} \\ \text{De convergência} \\ \text{De arredondamento} \end{cases}$

Ordem: Dizemos que $e = O(h^q)$ se existem constantes positivas C e q tais que $|e| \leq Ch^q$ para todo $h > 0$ suficientemente pequeno.

Definição (Não formal): Um problema é bem condicionado quando pequenos erros nos dados causam pequenos erros nas soluções e um problema é mal condicionado quando pequenos erros nos dados podem mudar drasticamente as soluções.

Definição: Um método (para corrigir erros) é chamado estável se, dado um problema, o que o método calcula é a solução exata de um problema parecido.

Não dianta aplicar um método estável a um problema mal condicionado, como também não adianta aplicar um método não estável a um problema bem condicionado.

1.3 Teoremas Úteis

Teorema de Taylor: Suponhamos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem derivadas até a ordem $k+1$ num intervalo que contém os pontos $x_0 e x_0 + h$ logo,

$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + \cdots + \frac{h^k}{k!}f^{(k)}(x_0) + \frac{h^{k+1}}{(k+1)!}f^{(k+1)}(\bar{x})$, com $\bar{x}$ entre $x_0 e x_0 + h$.

Teorema do Valor Intermediário: Se $f \in [a,b]$ e s é tal que $min(f(a), f(b)) < s < max(f(a), f(b))$, então existe $c \in [a,b]$, tal que $f(c) = s$.

Teorema do Valor Médio: Se $f \in C[a,b]$ é diferenciável em (a,b) então existe $c \in [a,b]$ tal que:

$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Terorema de Rolle: Se $f \in C[a,b]$ é diferenciável em (a,b) e, além disso, $f(a) = f(b)$ então existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = 0$.

1.4 Erros de Arredondamento

$c \in \mathbb{R}$ pode ser representado como:

$x = \pm 1.d_1 d_2 \ldots d_c d_{c+1} \cdots \times 2^e$, onde e é um número inteiro que representa o expoente e a mantissa pode ser reecrita como $1 + \frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{4} \ldots$.

Denotemos como $fl(x)$ a representação em ponto flutuante de $x \in \mathbb{R}$:

$fl(x) = Sinal(x) \times (1.\tilde{d}_1 \ldots \tilde{d}_t) \times 2^e$.

Para um t dado e e com os dígitos $\tilde{d}_1 \ldots \tilde{d}_t$ de alguma forma relacionados com $d_1 \ldots$.

O que nos interessa é limitar $\frac{|fl(x)-x|}{|x|} \leq \frac{|fl(x)-x|}{2^e} << \leq 0.0 \ldots 1 \leq 2^{-t}$, supondo $x \neq 0$.

É fácil ver que da para escolher $\tilde{d}_1 \ldots \tilde{d}_t$ de forma que:

$\frac{|fl(x)|-x}{|x|} \leq \eta$, com $\eta = 2^{-t}$.

Por outro lado, se esccolhermos $\tilde{d}_1 \ldots \tilde{d}_t$ "Arredondando"x, temos que $\eta = \frac{1}{2}.2^{-t}$ (precisão da máquina).

1.5 Cancelamento Catastrófico

Capítulo 2

Ponto Flutuante (Float)

Num computador de verdade, temos 64 bits. 1 para o sinal, 11 para expoente e 52 para a mantissa.

2.1 Operações

Sejam x e y números em **ponto flutuante**.

Denotamos por $c(x, y)$ uma operação elementar $(+, -, \times, \div)$ sobre x e y.

Queremos: $fl(c) = c(1 + e)$, com $|e| \leq \eta$.

Note que isso é o mesmo que: $|\frac{fl(c)-c}{c}| \leq \eta$.

Isso nos dá a impressão de que nossas contas são seguras.

O problema é que o que temos não é x e y, mas $\hat{x}$ e $\hat{y}$ tais que $\hat{x} = x(1 + e_x)$ e $\hat{y} = y(1 + e_Y)$.

Queremos comparar $fl(c(\hat{x}, \hat{y}))$ com $c(x, y)$.

Chamemos $fl(\hat{x}, \hat{y}) := fl(c(\hat{x}, \hat{y}))$.

$fl(\hat{x} * \hat{y}) = \hat{x}\hat{y}(1 + e_*) = x(1 + e_x y(1 + e_y)(1 + e_*) = xy(1 + e_x + e_y + e_* + e_x e_y + e_x e_* + e_Y e_* + e_x e_y e_*) = xy(1 + e)$, com $|e| \leq \mu\eta$ (pequeno).

Sabendo que $1 - e + e^2 - e^3 + \cdots = \frac{1}{1+e}$

$fl(\frac{\hat{x}}{\hat{y}}) = \frac{x(1e_X)}{y(1+e+y)}(1 + e_/) \sim \frac{x}{y}(1 + e_x)(1 - e_y)(1 + e_/) = \frac{x}{y}(1 + e)$, com $|e| \leq \mu\eta$ (pequeno).

Para simplificarmos $fl(\hat{x} + \hat{y})$, vamos compará-lo com $x + y$.

$\hat{x} + \hat{y} = x(1 + e_x) + y(1 + e_y) = x + xe_x + y + ye_y = (x + y)(1 + (\frac{x}{x+y})e_x + (\frac{y}{x+y})e_y)$, com $e = (\frac{x}{x+y})e_x + (\frac{y}{x+y})e_y$.

Sabemos que $e_x, e_y \leq \mu$, queremos avaliar e. e é pequeno sse $(\frac{x}{x+y})$ e $\frac{y}{x+y}$ são pequenos. Contudo, se x e y têm módulo parecido, mas sinais contrários, então $x + y$ é pequeno e, logo, temos um erro grande!

Esse tipo de erro chamamos de **cancelamento catastrófico**.

Como esse tipo de erro é impossível de evitar, nós o ignoramos em nossas análises.

2.2 Achar Raízes de Funções

Nosso problema é, dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, achar x tal que $f(x) = 0$.

Para resolver esse tipo de problema, criamos um algoritmo que, dado x_0, gera uma seq. $x_{n\in\mathbb{N}} = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ tal que $x_n \to x$.

Chamamos esse tipo de método de **método iterativo**.

Temos que determinar quando parar. Três opções são:

- $|x_i - x_{i-1}| < A_{tol}$
- $|x_i - x_{i-1}| < R_{tol} - |x_i|$
- $|f(x_i)| < F_{tol}$

, onde A_{tol}, R_{tol} e F_{tol} sao tolerâncias.

Por enquanto, vamos supor $f \in C[a, b]$ e $f(a)f(b) < 0$. Pelo teorema do valor intermediário existe $x^* \in [a, b]$ com $f(x^*) = 0$.

Outro método que podemos usar é o **método da bissecção (busca binária)**.

1. Definimos $p := (a + b)/2$; e avaliamos $f(p)$.
2. Se $f(a)f(p) < 0$, $b := p$, senão $a := p$.
3. voltar p/ 1.

$\frac{b-a}{2^n} = A_{tol} \to b - a = A_{tol}2^n \to \log b - a = \log(A_{tol}2^n) = \log(b - a) = \log A_{tol} + n \to n = \log(b - a) - \log(Atol)$.

Logo podemos fazer $n = [\log_2(b - a) - \log_2(A_{tol})] = [\log_2(\frac{b-a}{A_{tol}})]$