

# Algoritmo do Spline Quadrático

Dado um intervalo  $[a, b]$  e uma divisão desse intervalo em  $n+1$  pontos equidistantes, conseguimos fazer o spline quadrático de uma certa função, nesse intervalo. Além dessas condições iniciais, iremos precisar também do valor da função  $f$  nos pontos que queremos interpolar (óbvio) e também, da derivada da  $f$  no ponto inicial do intervalo.

Notação que usarei:

- O intervalo  $[a, b]$  será dividido em  $n + 1$  pontos que chamarei de  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .
- O valor da função  $f$  em aplicada no ponto  $x_k$  será chamado  $y_k$ .
- O valor da derivada da função  $f$  no ponto  $x_k$  será chamado de  $z_k$ .
- O polinômio que interpola os pontos  $k$  e  $k + 1$  será chamado de  $Q_k$ .

## Explicação do Algoritmo

Inicialmente, iremos achar a derivada em todos os outros pontos recursivamente, a partir da derivada inicial com a fórmula:

$$z_{i+1} = -z_i + 2\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i}\right).$$

Com todas as derivadas em mãos, agora podemos criar cada um dos polinômios que irão interpolar o intervalo dois a dois pontos consecutivos com a seguinte fórmula:

$$Q_i(x) = \frac{z_{i+1}-z_i}{2(x_{i+1}-x_i)}(x-x_i)^2 + z_i(x-x_i) + y_i.$$

## Justificativa

Primeiramente iremos precisar de  $n - 1$  polinômios de segundo grau (ou menos) contínuos, cujas derivadas também são contínuas. Ou seja necessitamos que:

- $Q_i(x_i) = y_i$  para  $i = 0, 1, \dots, n - 1$ .
- $Q_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$  para  $i = 0, 1, \dots, n - 1$ .
- $Q'_i(x_i) = Q'_{i+1}(x_i)$  para  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ .

Como  $Q(x)$  é um spline quadrático de nossa  $f$ , sua derivada será um spline linear.

Desse modo, surgem 4 novas condições:

- $Q_i(x_i) = y_i$  (1).
- $Q_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$  (2).
- $Q'_i(x_i) = z_i$  (3).
- $Q'_i(x_{i+1}) = z_{i+1}$  (4).

De (1), (3) e (4):

$$Q_i(x) = \frac{z_{i+1} - z_i}{2(x_{i+1} - x_i)}(x - x_i)^2 + z_i(x - x_i) + y_i \quad (5).$$

Agora para achar os valores de  $z_i$  iremos usar (2):

$$z_{i+1} = -z_i + 2\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}\right) \quad (6).$$

Com (6), conseguiremos computar  $z_k$  dado  $z_{k-1}$ , logo precisaremos do  $f'(a)$  para usar esse algoritmo.