P2 - Funções diferenciáveis e séries

Lourenço Henrique Moinheiro Martins Sborz Bogo - 11208005

Questão 1

Preciso obter a expressão da série $\frac{x^4}{4} + \frac{x^8}{8} + \frac{x^{12}}{12} + \dots$.

Vamos chamar a série de $f(x)$. Agora, precisaremos derivar essa série:

$f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^8}{8} + \frac{x^{12}}{12} + \dots$

$f'(x) = x^3 + x^7 + x^{11} + \dots$

É fácil notar que essa $f'(x)$ é uma P.G. de termo inicial x^3 e razão x^4. Logo podemos escrever ela da seguinte maneira:

$f'(X) = \frac{x^3}{1-x^4}$, com convergência para $-1 < x < 1$.

Queremos a expressão de $f(x)$, logo precisamos integrar $f'(x)$.

Iremos fazer a seguinte substituição:

$u = 1 - x^4 \rightarrow du = -4x^3 \rightarrow x^3 = \frac{-du}{4}$.

Nossa integral então fica:

$f(x) = \frac{-1}{x^4} \int \frac{1}{u} du = \frac{-1}{4} \ln u + c = \frac{-1}{4} \ln (1 - x^4) + c$, com convergência para $-1 < x < 1$.

Agora precisamos descobrir a constante. Para isso iremos usar a fórmula para calcular $\frac{-1}{4} \ln 1$ e para isso queremos $x = 0$:

$\frac{-1}{4} \ln 1 - 0^4 + c = \frac{-1}{4} \ln 1 + c = \frac{0^4}{4} + \frac{0^8}{8} + \frac{0^{12}}{12} + \dots \rightarrow 0 + c = 0 \rightarrow c = 0$.

Nossa resposta então, é $\frac{x^4}{4} + \frac{x^8}{8} + \frac{x^{12}}{12} + \dots = \frac{-1}{4} \ln (1 - x^4)$.

Questão 2

Precisamos achar o valor de $\int_0^1 x^2 e^{-x^2} dx$ com um erro menor que 0.01.

Começaremos primeiro com a série de taylor de e^z ao redor de $x = 0$.

Todas as derivadas serão 1, logo temos a seguinte série:

$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$. Vamos mostrar que converge para qualquer z:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{z^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{z}{n+1} = 0, \forall z \in \mathbb{R}.$$

Como isso vale para qualquer z, podemos trocá-lo por $-x^2$, conseguindo a série de taylor de e^{-x^2}.

Multiplicamos então a série inteira por x^2, conseguindo então a série de $x^2e^{-x^2}$:

$x^2e^{-x^2} = x^2 - x^4 + \frac{x^6}{2!} - \frac{x^8}{3!} \cdots = t(x)$

Queremos então, a integral dessa série, de 0 até 1, com erro menor que 0.01, e como a série é alternada, para conseguir esse erro, precisamos simplesmente parar no termo anterior ao que fica menor que 0.01.

$\int_0^1 t(x)dx = \frac{1^3}{3} - \frac{1^5}{5} + \frac{1^7}{14} - \frac{1^9}{54}$, paramos aqui, pois o próximo termo é $\frac{1^{11}}{269} < \frac{1}{100}$. Nossa soma é aproximadamente 0.18.

Questão 3

Queremos mostrar, usando séries de taylor, que:

$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = \frac{1}{e}$.

Primeiro, iremos fazer a seguinte substituição $h = 1 - x$, e também iremos escrever a expressão na forma de ln:

$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{h\to 0}(1-h)^{\frac{1}{h}} = \lim_{h\to 0} e^{\ln(1-h)^{\frac{1}{h}}} = \frac{1}{e}$.

Portanto, temos que:

$\lim_{h\to 0} \ln(1-h)^{\frac{1}{h}} = -1 \to \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\ln(1-h)$.

Agora iremos usar a série de taylor de $\ln(1-h)$:

$f(x) = \ln(1-x) \to f'(x) = \frac{-1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} -x^{n-1} \to f(x) = \int f'(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{= x^{n-1}}{n} + c$, $-1 < x < 1$. Para provar que a constante é 0, é só calcular $\ln 1$, ou seja, a série para $x = 0$.

Logo, voltando para nosso limite, temos que:

$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\ln(1-h) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-h^n}{n} = \lim_{h\to 0}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-h^{n-1}}{n} = \lim_{h\to 0} -h^0 = -1$.

Concluímos então que:

$\lim_{h\to 0}(1-h)^{\frac{1}{h}} = \lim_{h\to 0} e^{\ln(1-h)^{\frac{1}{h}}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

Questão 4

Primeiro vamos provar que a função f_n converge uniformemente usando o Critério "M"de Weierstrass. Isso não é muito difícil de mostrar, pois:

Como nossos "M_n", usaremos a sequência c_n. Então, temos que mostrar que nossa $f_n(x) <= c_n$ e que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n < \infty$. Nos foi dado que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n < \infty$, logo precisamos apenas provar que $f_n(x) <= c_n$:

$f_n(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i I(x - x_i)$, e como $I(x - x_i) <= 1$, temos que $f_n(x) <= c_n$.

Agora precisamos provar que a função $f(x)$ é contínua. Vamos separar isso em dois casos.

1. A sequência x_n não converge para um certo ponto $z \in [a, b]$

   Nesse caso, existe um certa vizinhança ao redor de z na qual, para qualquer y o seguinte vale:

   $f(z) = f(y)$. Desse modo, temos que $f(z) - f(y) < \epsilon$, $\forall \epsilon \in \mathbb{R} - 0$. Logo f é contínua em $[a, b]$.

2. Agora temos que a sequência x_n converge para um $z \in [a, b]$. Sabemos por convergência uniforme que $(\forall \epsilon > 0)(\forall x \in [a, b])(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$. Vamos pegar então o menor n possível, ou seja n_0+1. Agora vamos definir $k_i = z - x_i$, $i = 0, \ldots, n_0 + 1 = n$. Vamos pegar o mínimo dos k_i e chamar de k. Essa era a vizinhança que precisávamos. De $x - k$ até $x + k$, $f_n(z) = f_n(y)$, $\forall y \in]z - k, z + k[$. Sabemos também que se f_n converge uniformemente para f e f_n é contínua, f também é, que é exatamente a situação que temos. Logo f é contínua.

Provamos então que a f é contínua para os dois casos, mostrando que a f é contínua em $[a, b]$.