Otimização Linear Lista 1

Lourenço Bogo - 11208005

18 de outubro de 2020

1 Questão 1

Sejam u e v elementos de C. Agora seja $x = Au$ e $y = Av$, desse modo, temos que:

$tx + (1-t)y = tAu + (1-t)Av = A(tu + (1-t)v)$, onde $t \in [0,1]$

Como C é convexo, $tu + (1-t)v$ está em C, logo $tx + (1-t)y$ está em $A(C)$.

2 Questão 2

Não. Contraexemplo:

Suponha um conjunto qualquer C pertencente a $\mathbb{R}^2$. Se pegarmos a transformação linear $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, vamos mapear o conjunto inteiro para o ponto $(0,0)$, inclusive se o conjunto era aberto.

3 Questão 3

Não. contraexemplo:

Suponhamos a curva (x, e^x). O gráfico dessa curva é um conjunto fechado. Agora suponhamos a transformação linear $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Quando aplicamos essa transformação linear na curva mencionada, ficamos com a nova curva $(0, e^x)$, cujo gráfico não é um conjunto fechado, pois o gráfico fica abitrariamente próximo do ponto $(0,0)$, mas o ponto em si não está no conjunto.

4 Questão 4

Sim, continua. Prova:

Seja C um compacto em $\mathbb{R}^n$ e T uma transformação linear. Vamos primeiro provar que $T(C)$ é limitado:

Seja v um vetor genérico em C. Podemos reescrevê-lo como $v_1e_1 + v_2e_2 + \cdots + v_ne_n$ onde todos os e_i são a base do espaço e os v_i são os coeficientes do vetor. Como o conjunto C é limitado, os valores de v_i são limitados por números $k_i \in \mathbb{R}$. Ao aplicarmos a transformação linear no vetor v, por linearidade, temos que o vetor resultante será: $v_1T(e_1) + v_2T(e_2) + \cdots + v_nT(e_n)$. Isso é necessariamente menor que $\sum_{i=1}^{n} k_iT(e_i)$, nos provando que o conjunto resultante também é limitado.

Agora, precisamos mostrar que $T(C)$ é fechado.

Suponhamos uma sequência convergente $y_1, y_2, \ldots, y_n$ que converge para y no conjunto $T(C)$. Para todo y_i existe pelo menos um x_i tal que $T(x_i) = y_i$. Como C é limitado, existe uma subsequência de x_i convergente. Vamos chamar essa subsequência de a_i e o valor que ela converge de a. Como C é fechado, $a \in C$. Como toda transformação linear é contínua, podemos dizer que:

$\lim T(a_i) = T(\lim a_i) = T(a)$. Como $T(a_i)$ é uma subsequência de y_i o limite de $T(a_i)$ é igual a y. Portanto $y = T(a) \in T(C)$. Como toda sequência convergente em $T(C)$ converge para um ponto em $T(C)$, o conjunto é fechado.

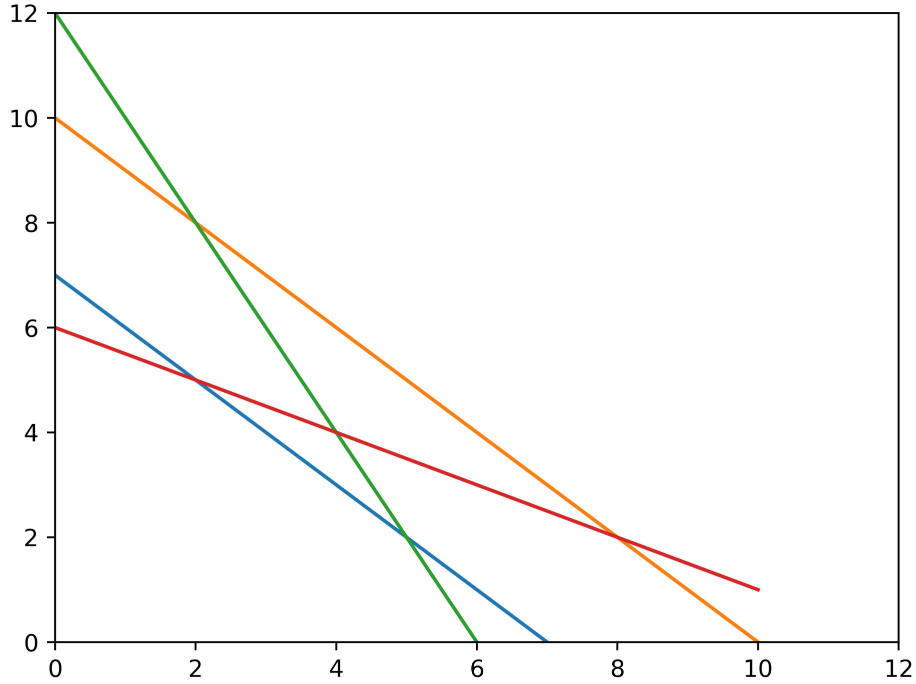
5 Questão 5

Formulando o problema temos 6 restrições:

- R1: $x + y \geq 7$
- R2: $x + y \leq 10$
- R3: $2x + y \leq 12$
- R4: $x + 2y \leq 12$
- R5: $x \geq 0$
- R6: $y \geq 0$

e queremos maximizar: $500x + 300y$.

Primeiro vamos plotar as restrições e achar a região factível:



A região factível é o triângulo formado pelas restrições R1, R3 e R4.

Com isso, agora iremos achar os vértices desse triângulo, ou seja, os pontos que são a intersecção de duas dessas 3 restrições:

- R1 com R3: $(5, 2)$
- R1 com R4: $(2, 5)$
- R3 com R4: $(4, 4)$

Agora vamos avaliar o valor da função objetiva em cada um dos pontos:

- $500 * 5 + 300 * 2 = 3100$
- $500 * 2 + 300 * 5 = 2500$
- $500 * 4 + 300 * 4 = 3200$

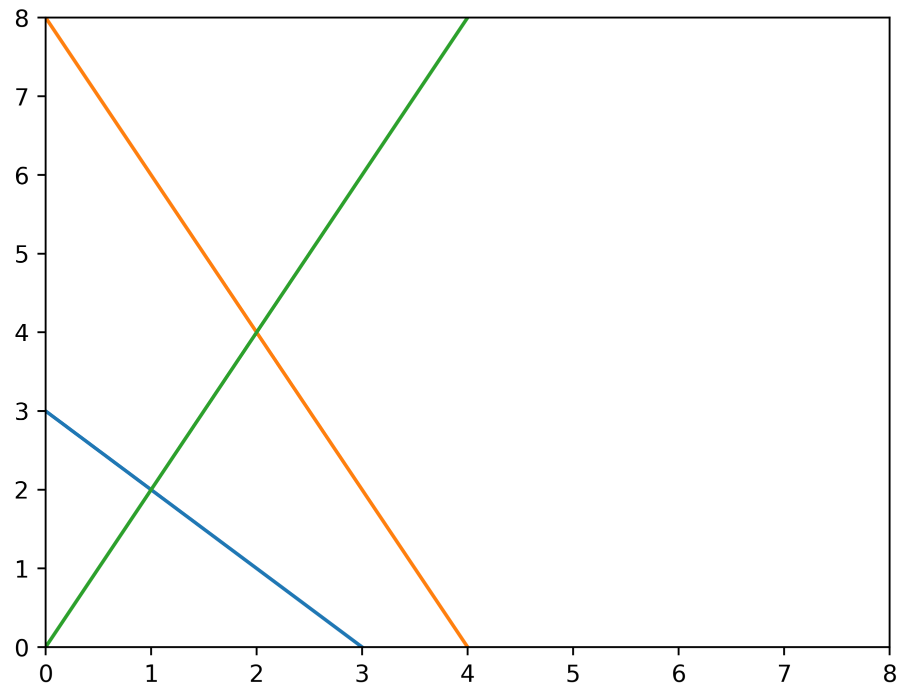
A solução para o problema é o ponto $(4, 4)$, pois é o ponto que maximiza a função objetiva satisfazendo as restrições. Ou seja, o fazendeiro deveria plantar 4 acres de cada.

6 Questão 6

Formulando o problema temos 5 restrições:

- R1: $a + b \geq 3$
- R2: $2a + b \geq 8$
- R3: $b \leq 2a$
- R4: $a \geq 0$
- R5: $b \geq 0$

e queremos maximizar $2a + 3b$.
Aqui faremos a mesma coisa que no exercício anterior, vamos plotar e achar a região factível:



A região factível é o polígono formado pelas restrições R1, R2, R3 e R5.
Acharemos os vértices factíveis:

- R1 com R3: $(1, 2)$
- R1 com R5: $(3, 0)$
- R2 com R3: $(2, 4)$
- R3 com R5: $(4, 0)$

Colocaremos os pontos na função objetiva e nossa solução será o que der o melhor resultado:

- $2 * 1 + 3 * 2 = 8$
- $2 * 3 + 3 * 0 = 6$

- $2 * 2 + 3 * 4 = 16$
- $2 * 4 + 3 * 0 = 8$

Portanto nossa solução é o ponto $(2, 4)$, ou seja, processar 2 toneladas da fonte A e 4 da fonte B.

7 Questão 7

- x_n é o número de livros enviados de Novato para São Francisco
- y_n é o número de livros enviados de Novato para Sacramento
- x_l é o número de livros enviados de Lodi para São Francisco
- y_l é o número de livros enviados de Lodi para Sacramento

Formulando o problema temos 8 restrições:

- R1: $x_n + x_l = 600$
- R2: $y_n + y_l = 400$
- R3: $x_n + y_n \leq 700$
- R4: $x_l + y_l \leq 800$
- R5, R6, R7, R8: $x_n, y_n, x_l, y_l \geq 0$

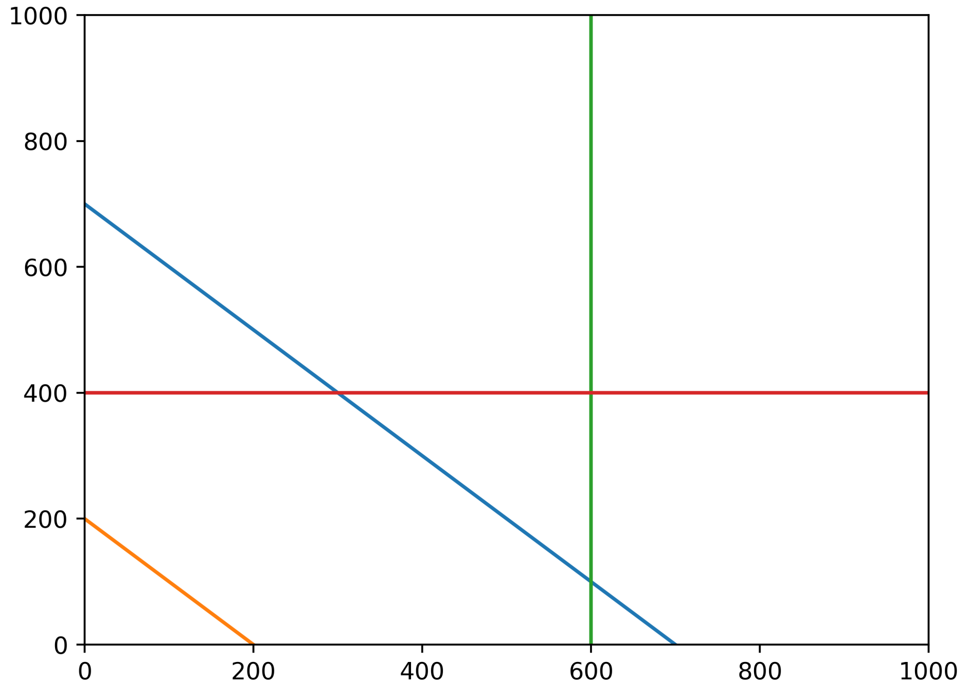
e queremos minimizar $5x_n + 10y_n + 15x_l + 4y_l$.
Primeiro vamos expressar x_l e y_l em função de x_n e y_n para conseguirmos plotar as restrições.

- $x_l = 600 - x_n$
- $y_l = 400 - y_n$

Isso nos dá um novo conjunto de restrições:

- R1: $x_n + y_n \leq 700$
- R2: $x_l + y_l = 600 - x_n + 400 - y_n \leq 800 \rightarrow 200 \leq x_n + y_n$
- R3: $x_n \geq 0$
- R4: $y_n \geq 0$
- R5: $x_l \geq 0 \rightarrow 600 \geq x_n$
- R6: $y_l \geq 0 \rightarrow 400 \geq x_n$

e a seguinte função objetiva: $5x_n + 10y_n + 15(600 - x_n) + 4(400 - y_n) = 10600 - 10x_n + 6y_n$
Plotando e achando a região factível:



A região factível é o polígono formado pelas 6 restrições.
Acharemos os vértices factíveis:

- R1 com R5: $(600, 100)$
- R1 com R6: $(300, 400)$
- R2 com R3: $(0, 200)$
- R2 com R4: $(200, 0)$
- R3 com R6: $(0, 400)$
- R4 com R5: $(600, 0)$

Colocaremos os pontos na função objetiva e nossa solução será o que der o melhor resultado:

- $10600 - 10 * 600 + 6 * 100 = 5200$
- $10600 - 10 * 300 + 6 * 400 = 10000$
- $10600 - 10 * 0 + 6 * 200 = 11800$
- $10600 - 10 * 200 + 6 * 0 = 8600$
- $10600 - 10 * 0 + 6 * 400 = 13000$
- $10600 - 10 * 600 + 6 * 0 = 4600$

Portanto nossa solução é o ponto $(0, 400)$, ou seja, mandar 600 cópias de Novato pra São Francisco e mandar 400 de Lodi para Sacramento.

8 Questão 8

Primeiro vamos escrever o problema na forma canônica e vamos introduzir as varáveis novas:

$$\begin{cases} -2x + y + P = 0 \\ 2x + 3y + s_1 = 3 \\ x + 5y + s_2 = 1 \\ 2x + y + s_3 = 4 \\ 4x + y + s_4 = 5 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Agora, vamos escrever na forma de matriz:

x	y	s_1	s_2	s_3	s_4	P	RHS
2	3	1	0	0	0	0	3
1	5	0	1	0	0	0	1
2	1	0	0	1	0	0	4
4	1	0	0	0	1	0	5
-2	-1	0	0	0	0	1	0

Escolherei o x como pivô, e usarei a linha 2 para o processo de trocar a base:

x	y	s_1	s_2	s_3	s_4	P	RHS
0	-7	1	-2	0	0	0	1
1	5	0	1	0	0	0	1
0	-9	0	-2	1	0	0	2
0	-19	0	-2	0	1	0	1
0	9	0	2	0	0	1	2

O que fiz para zerar a primeira coluna com exceção da segundalinha foi:

- Subtrai $2L_2$ de L_1
- Subtrai $2L_2$ de L_3
- Subtrai $4L_2$ de L_4
- Adcionei $2L_2$ em L_5

Todos os valores da última linha agora são positivos, indicando que achamos a solução. Nossas variáveis livres são y e s_2, ou seja, trocaremos elas por 0 na nossa solução. Com o sistemas de equação que temos e trocando x e s_2 por 0, temos que:

- $x = 1$
- $y = 0$
- $s_1 = 1$
- $s_2 = 0$
- $s_3 = 2$
- $s_4 = 1$

Ou seja, o valor máximo é 2, que ocorre quando x é 1 e y é 0.

9 Questão 9

- Se a ou b são 0, o problema não tem solução, pois o gradiente invertido irá apontar pra uma direção que sempre podemos ir, ou seja, podemos deixar o custo infinitamente menor.
- Se $a = 0$ e $b = 0$, qualquer ponto dentro da região factível é um ponto ótimo pois nosso gradiente será $(0, 0)$ sempre.
- Se $a = 0$ e $b > 0$, qualquer ponto tal que $y = 0$ e $x \geq 6$ é ótimo. Isso acontece pois se o x for maior ou igual à 6 nós estaremos dentro da região factível e o nosso gradiente é perpendicular ao eixo x, ou seja, nossa solução se encontra nessa reta.
- Se $a > 0$ e $b = 0$, o argumento de cima vale para o eixo y ao invés do x.
- Se o vetor (a, b) for paralelo ao vetor $(2, 1)$, toda a reta $2x + y = 6$ será uma solução ótima, desde que o ponto escolhido esteja dentro da região factível
- Se o vetor (a, b) for paralelo ao vetor $(1, 2)$, toda a reta $x + 2y = 6$ será uma solução ótima, desde que o ponto escolhido esteja dentro da região factível
- Por último, se $a, b > 0$ temos 3 subcasos:
  - Se (a, b) pode ser escrito como $\alpha(1, 0) + \beta(2, 1)$ com $\alpha, \beta > 0$ temos que a solução ótima será o ponto $(0, 6)$.
  - Se (a, b) pode ser escrito como $\alpha(2, 1) + \beta(1, 2)$ com $\alpha, \beta > 0$ temos que a solução ótima será o ponto $(2, 2)$.
  - Se (a, b) pode ser escrito como $\alpha(0, 1) + \beta(1, 2)$ com $\alpha, \beta > 0$ temos que a solução ótima será o ponto $(6, 0)$.

10 Questão 10

- Se a e b são 0, todos os pontos da região factível são ótimos.
- Se $b < 0$ ou se $a > 0$, não temos solução ótima.
- Se $b = 0$ e $a < 0$, a reta $x = 4$ é solução ótima desde que $y \geq 6$
- Se $a = 0$ e $b > 0$, a reta $y = 0$ é solução ótima desde que $x \leq -2$
- Se o vetor (a, b) for paralelo ao vetor (-2, 1), toda a reta $-2x + y \geq -2$ é solução ótima, desde que o ponto escolhido esteja dentro da região factível
- Se o vetor (a, b) for paralelo ao vetor (-1, 2), toda a reta $-x + 2y \geq 2$ é solução ótima, desde que o ponto escolhido esteja dentro da região factível
- Por último, se $a < 0$ e $b > 0$, temos 3 subcasos:
  - Se (a, b) pode ser escrito como $\alpha(-2, 1) + \beta(-1, 0)$ com $\alpha, \beta > 0$ temos que a solução ótima será o ponto $(4, 6)$.
  - Se (a, b) pode ser escrito como $\alpha(-2, 1) + \beta(-1, 2)$ com $\alpha, \beta > 0$ temos que a solução ótima será o ponto $(2, 2)$.
  - Se (a, b) pode ser escrito como $\alpha(-1, 2) + \beta(0, 1)$ com $\alpha, \beta > 0$ temos que a solução ótima será o ponto $(-2, 0)$.