Testes de Hipótese

Lourenço Henrique Moinheiro Martins Sborz Bogo

12/11/2019

Exemplo 1: Suponha que vamos lançar uma moeda 100 vezes e estamos interessados em saber se a moeda é equilibrada ou não

$H_0 : p = \frac{1}{2}$, hipótese nula

$H_1 : p \neq \frac{1}{2}$, hipótese alternativa

1ºErro: Rejeitar H_0 mas H_0 é verdadeira.

2ºErro: Aceitar H_0 mas H_0 é falso.

Vamos considerar que caso nossa amostra tenha um número de caras entre 45% e 55%.

X = Número de caras

Z = Aproximação normal

$\alpha = P(Rejeitar\ H_0|p = \frac{1}{2}) = P(X > L|p = \frac{1}{2}) + P(X < L|p = \frac{1}{2}) = P(Z > \frac{L-50}{5}) + P(Z < \frac{L-50}{5})$ Teoria:

1ºpasso : elaborar as hipóteses nulas(H_0) e alternativa($H_1 ou H_A$).

$H_0 : \theta = \theta_0$, onde θ é um parâmetro:

- μ
- ρ
- σ^2

e θ_0 é uma constante. H_1 : Pode ser simples ou composta

$H_1 : \theta = \theta_1$

$H_1 : \theta > \theta_0$

$H_1 : \theta < \theta_0$

$H_1 : \theta \neq \theta_1$

Def:

Erro tipo I: Rejeitar H_0 mas H_0 é verdadeira

Erro tipo II: Aceitar H_0 mas H_0 é falsa.

2ºpasso : Fixar o nível significância (α) do teste.

$\alpha = P(Rejeitar\ H_0|H_0\ é\ verdadeira)$.

$\alpha =$ 5%, 3%, 2,5%.

3ºpasso : A partir de α construir a Região Crítica, isto é, a região de rejeição de H_0.

4ºpasso : Coletar a amostra e tomar a decisão.

Exemplo:

$H_0 : \mu = 6$

$H_1 : \mu < 6$

$n = 100$ (tamanho da amostra)

$\bar{X}$ estimador de μ.

$\bar{X} \in R.C. \Rightarrow$ rejeito H_0.

$0,05 = P(\bar{X} < L|\mu = 6)$

Supondo que as notas distribuem-se segundo uma $Normal$.

$\frac{\bar{X}-6}{\frac{S}{10}} \sim t_{99}$, g.l.

$0,05 = P(\frac{\bar{X}-6}{\frac{S}{10}} < \frac{L-6}{\frac{S}{10}})$

Lembrando que $\frac{\bar{X}-6}{\frac{S}{10}} = T$

$\frac{L-6}{\frac{S}{10}} = -165$

$L = \frac{-165\times5}{10} + 6$

$R.C.[0, \frac{-165\times5}{10} + 6]$

Exemplo 2: Um fabricante afirma que produz pinos cuja resistência média à ruptura é $60kgf$. Uma indústria adquiriu um grande lote de pinos e deseja verificar se o lote atende as especificações. Para isso testou 16 pinos. Suponha que a avriância da resistência seja $25kgf^2$.

$H_0 : \mu = 60$, hipótese nula

$H_1 : \mu < 60$, hipótese alternativa

$\alpha = P(Rejeitar\ H_0|H_0\ é\ V)$

Nesse caso, como H_0 é verdade, a média μ será 60.

$n = 16$.

Resistência $\sim N(\mu, \sigma^2)$

$\bar{X} \sim N(60, \frac{25}{16})$

$0,05 = P(\frac{\bar{X}-60}{frac54} < \frac{L-60}{\frac{5}{4}})$

Da tabela temos que o lado direito da desigudade deve ser $-1,64$

$\frac{L-60}{\frac{5}{4}} = -1,64 \Rightarrow L = 57,95$

<u>Exemplo 3</u>: Os registros dos últimos anos de um colégio atestam para calouros admitidos uma nota média de 115. Para testar a hipótese de que a média de uma nova turma é a mesma das anteriores, retirou-se uma amostra de 20 notas obtendo-se média 118 e desvio 20.

Use $\alpha = 0,05$.

$H_0 : \mu = 115$, hipótese nula

$H_1 : \mu \neq 115$, hipótese alternativa

$\sigma^2 =?$

$n = 20$

$\bar{X}_{OBS} = 118$

$S = 20$

Supondo normalidade das notas:

$t_{OBS} = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{118-115}{\frac{20}{\sqrt{20}}} = 0,67$

$t_{tabela} = 2,09$ (O α foi dado, portanto conseguimos achar esse valor apenas olhando a tabela)

$P(\frac{\bar{X}-115}{\sqrt{20}} < \frac{l-115}{\sqrt{20}}) = 0,025 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{l-115}{\sqrt{20}} = -2,09 \Rightarrow$

$l = -2,09\sqrt{20} + 115$

$L = 2,09\sqrt{20} + 115$

$\bar{X} < l$

$\bar{X} > L$

<u>Exemplo 4</u>: Um estudo é realizado para determinar a relação entre uma certa droga e certa anomalia em embriões de frango. Injetou-se a droga em 50 ovos fertilizados no 4ºdia de incubação. No 20ºdia de incubação os embriões foram examinados e 7 deles apresentaram a anomalia. Suponha que se deseja averiguar se a proporção verdadeira é inferir a 25% a um nível de significância de 5%.

$H_0 : p = 0,25$, Hipótese nula

$H_1 : p < 0,25$, Hipótese alternativa

Rejeitar o H_0, sendo que ele é verdade é um erro grave, diferente do contrário, pois iríamos injetar mais remédio sendo que ele causaria mais anomalias.

$\hat{P}_{OBS} = \frac{7}{50} = 0,14$

$P(\hat{p} < L|p = 0,25) = 0,05$

Pelo **Teorema do Limite Central** temos que $\hat{p} \sim N(p, \frac{p(1-p)}{n})$

Sob H_0:

$\frac{\hat{p}-0,25}{\sqrt{\frac{0,25.0,75}{50}}} \sim N(0,1)$

$P(\frac{\hat{p}-0{,}25}{\sqrt{\frac{0{,}25.0{,}75}{50}}} < \frac{L-0{,}25}{\sqrt{\frac{0{,}25.0{,}75}{50}}}) = 5\% \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{L-0{,}25}{\sqrt{\frac{0{,}25.0{,}75}{50}}}$
$\frac{0{,}14-0{,}25}{\sqrt{\frac{0{,}25.0{,}75}{50}}} = -1,7963 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ Há evidências para rejeitar H_0

Def: Nível Descritivo ($\hat{\alpha}$)

Observada amostra calcula-se a probabilidade de ter sido observado o valor da amostra ou mais extremos do que ele supondo H_0 verdadeira.

Exemplo 5: Uma das maneiras de manter sob controle a qualidade de um produto é controlar sua variabilidade. Uma máquina de encher pacotes de café está regulada para ter $\mu = 500g$ e $\sigma = 10g$. O peso segue uma normal. Colheu-se uma amostra de 16 pacotes e observou-se $S^2 = 169g^2$. Você diria que a máquina está desregulada quanto a variância? $\alpha = 5\%$.

$H_0 : \sigma^2 = 100$, Hipótese nula

$H_1 : \sigma^2 > 100$, Hipótese alternativa

Sabe-se que $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$.

$0,05 = P(S^2 > L|\sigma^2 = 100) = P(\frac{15S^2}{100} > \frac{15L}{100})$

$\frac{15L}{100} = 25 \Rightarrow L = \frac{500}{3} = 166,7 \Rightarrow$

Tenho motivos para rejeitar a hipótese pois $166,7 < 169$.

Testes de Hipótese em Comparando duas Populações: **Exemplo 1**: Uma indústria deseja testar se a produtividade média dos operários do período diurno é igual a do noturno. Para isso foram coletados duas amostras, uma de cada período, observando-se a produção de cada operário. Os resultados foram:

Diurno: $N = 15, \sum_{i=0}^{N} x_i = 180, \sum_{i=0}^{N} x_i^2 = 2660$

Noturno: $N = 15, \sum_{i=0}^{N} x_i = 150, \sum_{i=0}^{N} x_i^2 = 2980$

De acordo com esses resultados, qual é sua conclusão?

Vamos supor que produtividade é uma V.A. $Normal$.

1ºpasso : Verificar se as variâncias são ou não iguais.

$H_0 : \sigma_D^2 = \sigma_N^2$

$H_1 : \sigma_D^2 \neq \sigma_N^2$

Estatística: $\frac{S_D^2}{S_N^2} \sim F(14,14) \Rightarrow \frac{\frac{S_D^2}{\sigma_D^2}}{\frac{S_N^2}{\sigma_N^2}}$

$\alpha = 5\% \Rightarrow 0,05 = P(\frac{S_D^2}{S_N^2} < l) + P(\frac{S_D^2}{S_N^2} > L) \Rightarrow L = 2,98\ l = \frac{1}{2{,}98}$ (Retirado da tabela)

$$S^2 = \frac{\sum_{i=0}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=0}^{n} x_i^2 - 2\sum_{i=0}^{n} x_i\bar{x} + \sum_{i=0}^{n} \bar{x}^2}{n-1}$$