

TD - Intégration

November 22, 2023

THEVENET Louis

Table des matières

1. TD2	1
1.1. Points importants	1
1.2. Exercices	2
1.2.1. Exercice 1	2
1.2.2. Exercice 2	2
1.2.3. Exercice 3	2
1.2.4. Exercice 4	3
1.2.5. Exercice 5	4
2. TD3	4
2.1. Exercice 5.1.1	4
2.1.1. Version convergence dominée	4
2.1.2. Version convergence monotone	4
2.2. Exercice 5.2.1	5
2.2.1. 2. $e^{-x} \cos(x)$ sur \mathbb{R}_+	5
2.2.2. 3. $\frac{1}{1+x^2}$ sur \mathbb{R}_+	6
2.2.3. 4. $\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathbb{1}_{[0,4]} + \frac{1}{x^2}\mathbb{1}_{(4,+\infty)}(x)$ sur \mathbb{R}_+^*	6
2.3. Exercice 5.2.2	6
2.3.1. $f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \mathbb{1}_{[0,n]}(x)$	6
3. TD4	7
3.1. Exercice 1	7
3.2. Exercice 2	7
3.3. Exercice 3	9
3.4. Exercice 4	9

1. TD2

1.1. Points importants

Proposition 1.1.1:

$f : (E, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$ étagée $\iff \exists (A_n)_{n=1}^N \subset E \mid (a_i)_{i=1}^N \in \mathbb{R}^+$ tels que $f = \sum_{i=1}^N a_i \mathbb{1}_{A_i}$

Et on a $\int_E f d\mu = \sum_{i=1}^N a_i \mu(A_i)$

Théorème 1.1.1: Béro-Lévy

(f_n) suite de fonctions mesurables positives (f_n) croissantes telles que $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$

Alors $\int_E f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu$

1.2. Exercices**1.2.1. Exercice 1**

Soit f mesurable de (E, \mathcal{A}) dans $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ et positive

Montrons que

$$\forall a > 0 : \mu(\{f > a\}) \leq \frac{1}{a} \int_E f d\mu$$

On a

$$\forall x, f(x) \geq a \mathbb{1}_{\{f > a\}}$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_E f d\mu &\geq \int_E a \mathbb{1}_{\{f > a\}} d\mu \\ &\geq a \int_E \mathbb{1}_{\{f > a\}} d\mu \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{1}{a} \int_E f d\mu \geq \mu(\{f > a\})$$

1.2.2. Exercice 2

1)

- $\mu(\emptyset) = \int_E f \mathbb{1}_{\emptyset} d\mu = \int_E 0 d\mu = 0$
- Soient $A_1, \dots, A_N \subset E$ disjoints

$$\mu_f \left(\bigsqcup_{i=1}^N A_i \right) = \int_E f \mathbb{1}_{\bigsqcup_{i=1}^N A_i} d\mu = \int_E f \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{A_i} d\mu \stackrel{\text{th.3.2.15}}{=} \sum_{i=1}^N \int_E f \mathbb{1}_{A_i} d\mu = \sum_{i=1}^N \mu_f(A_i)$$

μ_f est bien une mesure sur (E, \mathcal{A})

2)

Ici on a $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$

$$\int_A f d\mu = \int_{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n} f d\mu = \int_E f \mathbb{1}_{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n} d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_E f \mathbb{1}_{A_n} d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{A_n} f d\mu$$

1.2.3. Exercice 3

Soit g étagée positive.

$\exists(A_i)$ partition de \mathbb{R} , $(a_i) \in \mathbb{R}^N \mid g = \sum_{i=0}^N a_i \mathbb{1}_{\Delta_i}$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} g d\delta_0 &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{i=0}^N a_i \mathbb{1}_{\Delta_i} d\delta_0 \\ &= \sum_{i=0}^N a_i \delta_0(\Delta_i) \end{aligned}$$

On a

$$\delta_0(\Delta_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \in \Delta_i = \mathbb{1}_{\Delta_i}(0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Et

$$\int_{\mathbb{R}} g d\delta_0 = \sum_{i=0}^N a_i \mathbb{1}_{\Delta_i}(0) = g(0)$$

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions étagées positives telles que $f_n \xrightarrow{\text{CVS}} f$ croissante On a ainsi :

$$\int_E f d\delta_0 \stackrel{\text{BL}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n d\delta_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) \stackrel{\text{CVS}}{=} f(0)$$

1.2.4. Exercice 4

- $\forall (k, l) \in \mathbb{N}^2 A_k \cap A_l = \emptyset$

$$\begin{aligned} \int_A f d\mu &= \int_{\bigcup A_i} f d\mu \\ &= \int_E f \mathbb{1}_A d\mu \\ &= \int f \mathbb{1}_{\bigcup A_i} d\mu \end{aligned}$$

Soit $f_n = f \mathbb{1}_{\bigcup A_i} \xrightarrow{\text{CVS}} f \mathbb{1}_A$

$$\begin{aligned} \int f d\mu &\stackrel{\text{BL}}{=} \lim_{(n \rightarrow \infty)} \int_E f_n d\mu \\ &= \int_E f(\mathbb{1}_{\bigcup A_i}) d\mu \\ &= \int_{\bigcup A_i} f d\mu \end{aligned}$$

Chasles : $\int_E f_n d\mu = \sum_{i=0}^n \int_{A_i} f d\mu$

$$\begin{aligned} \int_A f d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \int_{A_i} f d\mu \\ &= \sum_{i=0}^n \int_{A_n} f d\mu \end{aligned}$$

1.2.5. Exercice 5

1)

$$\forall x, f(x) = 1 < +\infty$$

$$\text{Avec } (\mu(f^{-1}(\{+\infty\}))) = 0$$

$$\int_{\mathbb{R}} f d\mu = 1 \times \mu(\mathbb{R}) = +\infty$$

Donc g non intégrable

2. TD3

2.1. Exercice 5.1.1

2.1.1. Version convergence dominée

Soit (E, \mathcal{A}, μ) et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de fonctions mesurables positives. Soit $f = \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n$

Montrer que

$$\exists N \in \mathbb{N} \mid \int_E f_N d\mu < +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$$

Supposons que $\exists N \in \mathbb{N} \mid \int_E f_N d\mu < +\infty$

La suite $(f_n)_n$ décroissante donc $\forall n \geq N : |f_n| < f_N$

Puis $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{PP} f = \inf_n f_n$ mesurable

Par **convergence dominée**,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$$

2.1.2. Version convergence monotone

Soit (E, \mathcal{A}, μ) et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de fonctions mesurables positives. Soit $f = \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n$

Montrer que

$$\exists N \in \mathbb{N} \mid \int_E f_N d\mu < +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$$

Supposons que $\exists N \in \mathbb{N} \mid \int_E f_N d\mu < +\infty$

On pose $g_n := f_N - f_n, \forall n \geq N$

$g_n \nearrow, \in \mathcal{I}$ car $f_n \in \mathcal{I}, \forall n$ et positive car $f_n \searrow$

$g_n \longrightarrow f_N - f = \sup_n g_n = g$ mesurable

Donc par **convergence monotone**,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E g_n d\lambda = \int_E g d\lambda$$

Puis

$$\begin{aligned} \int_E g_n d\lambda &\stackrel{(*)}{\underset{\text{Chasles}}{=}} \int_E f_N d\lambda - \int_E f d\lambda \\ \Rightarrow \int_E f_N d\lambda &= \int_E g_n d\lambda + \int_E f d\lambda \end{aligned}$$

En passant à la limite

$$\int_E f_N d\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E g_n d\lambda + \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f d\lambda = \int_E g d\lambda$$

(*) De l'autre côté, on obtient

$$\int_E f_N d\lambda = \int_E g d\lambda + \int_E f d\lambda$$

2.2. Exercice 5.2.1

Méthode 2.2.1: Equivalence Riemann-Lebesgue

impropre $\rightarrow f$ mesurable

$\rightarrow f$ absolument intégrable au sens de Riemann

$\rightarrow \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t |f(x)| dx < +\infty$

Justifier que l'intégrale de Lebesgue et de Riemann coïncident et les calculer. $\sin(x)$ sur $[0, \pi]$ \sin est continue sur $[0, \pi]$ donc Riemann-intégrable et

$$\int_{[0, \pi]} \sin d\lambda = \int_0^\pi \sin(x) dx = [-\cos(x)]_0^\pi = 2$$

2.2.1. 2. $e^{-x} \cos(x)$ sur \mathbb{R}_+

$|f(x)| \underset{f \text{ continue}}{\leq} e^{-x}, \forall x$ et $g : x \mapsto e^{-x}$ intégrable au sens de Riemann

Donc f Riemann absolument intégrable et $\int_{\mathbb{R}_+} f d\lambda = \int_0^{+\infty} e^{-x}$

- Soit on intègre 2 fois par parties
- Soit

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{-x} \cos(x) dx &= \int_0^{+\infty} e^{-x} \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{x+ix} + e^{-x-ix} dx \\
&= \frac{1}{2} \left(\left[\frac{e^{-x+ix}}{-1+i} \right]_0^{+\infty} + \left[\frac{e^{-x-ix}}{-1-i} \right]_0^{+\infty} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{-1+i} + \frac{1}{-1-i} \right) \\
&= \frac{1}{2} \frac{1-(1+i) + (i-1)}{i^2-1} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

2.2.2. 3. $\frac{1}{1+x^2}$ sur \mathbb{R}_+

- En 0 : OK
- en $+\infty$: $|f(x)| = \sim_{+\infty} \frac{1}{x^2}$ qui est R-intégrable

Donc f est R-abs intégrable

$$\int_{\mathbb{R}_+} f d\mu = \int_0^{+\infty} f(x) dx = [\arctan(x)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

2.2.3. 4. $\frac{1}{2\sqrt{x}} \mathbb{1}_{[0,4]} + \frac{1}{x^2} \mathbb{1}_{[4,+\infty[}(x)$ sur \mathbb{R}_+^*

- f cpm sur \mathbb{R}_+
- en 0^+ : $|f(x)| = \frac{1}{2\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ R-intégrable
- en $+\infty$: $|f(x)| = \frac{1}{x^2}$ R-intégrable

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}_+} f d\lambda &= \int_0^{+\infty} f(x) dx \\
&= \int_0^4 \frac{1}{2\sqrt{x}} d\lambda + \int_4^{+\infty} \frac{1}{x^2} d\lambda \\
&= [\sqrt{x}]_0^4 + \left[-\frac{1}{x} \right]_4^{+\infty} \\
&= \sqrt{4} + \frac{1}{4} \\
&= \frac{9}{4}
\end{aligned}$$

2.3. Exercice 5.2.2

$$\begin{aligned}
2.3.1. f_n(x) &= \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \mathbb{1}_{[0,n]}(x) \\
\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n &= e^{n \ln(1 - \frac{x}{n})} \longrightarrow e^{-x}
\end{aligned}$$

$$f_n(x) \rightarrow e^{-x} \cos(x) = f(x)$$

Par convergence dominée,

$$\ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) \leq -\frac{x}{n}$$

Donc $e^{n \ln(1 - \frac{x}{n})} \leq e^{-x}$ par croissance

Donc

$$\begin{aligned} e^{n \ln(1 - \frac{x}{n})} &\leq e^{-x} \\ \lim_n \int_{\mathbb{R}_+} f_n d\lambda &= \int_{\mathbb{R}_+} f d\lambda \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Convergence dominée :

3. TD4

3.1. Exercice 1

$$f : \begin{cases} (E, \mathcal{A}) \times (E, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)) \\ (k, l) \mapsto u_{k,l} \end{cases}$$

Ici :

- $E = \mathbb{N}$
- $\mathcal{A} = \sigma(\mathbb{N})$ ou $\mathcal{P}(\mathbb{N})$
- μ mesure de comptage (associée à la cardinalité)

Ainsi f est mesurable et positive.

D'après Fubini,

$$\int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^+} f(k, l) d\mu(k) d\mu(l) = \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^+} f(k, l) d\mu(l) d\mu(k)$$

et avec $(\mathbb{N}, \sigma(\mathbb{N}), \mu)$ tel qu'on l'a choisi

$$\int_{\mathbb{R}^+} f(k, l) d\mu(k) = \sum_k u_{k,l}$$

Donc

$$\sum_k \sum_l u_{k,l} = \sum_l \sum_k u_{k,l}$$

3.2. Exercice 2

1)

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ (x, y) \mapsto \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)} \end{cases}$$

f est bien positive et mesurable.

Le théorème de Fubini s'applique à I

2) $u = x\sqrt{y}$, ainsi $\frac{d\lambda(u)}{d\lambda(x)} = \sqrt{y}$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}_+^*} f(x, y) d\lambda(x) &= \int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{1}{1+u^2} \frac{1}{\sqrt{y}} d\lambda(u) \\
&= \frac{1}{\sqrt{y}} [\arctan(u)]_{\mathbb{R}_+^*} \\
&= \frac{\pi}{2\sqrt{y}}
\end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(x, y) &= \frac{1}{1+x^2y} \\
I &= \int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*} \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)} d\mu(x) d\mu(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^*} \left(\int_{\mathbb{R}_+^*} \tilde{f}(x, y) d\lambda(x) \right) \frac{1}{1+y} d\lambda(y) \\
&= \frac{\pi}{2} \int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{1}{\sqrt{y}(1+y)} d\lambda(y)
\end{aligned}$$

$t = \sqrt{y}$, et ainsi $\frac{d\lambda(t)}{d\lambda(y)} = 18(2\sqrt{y})$

$$\begin{aligned}
I &= \frac{\pi}{2} \int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{2}{1+t^2} d\lambda(t) \\
&= \pi [\arctan(t)]_{\mathbb{R}_+^*} \\
&= \frac{\pi^2}{2}
\end{aligned}$$

4)

$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \\ (v, t) \mapsto (\frac{v}{t}, t^2) \end{cases}$ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$

$$|(\det(J_\varphi)(v, t))| = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & -\frac{v}{t^2} \\ 0 & 2t \end{pmatrix} \right| = 2$$

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*} \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)} d\lambda(x) d\lambda(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*} \frac{1}{(1+t^2)(1+v^2)} |\det J_\varphi(t, v)| \\
&= 2 \int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{1}{1+t^2} d\lambda(t) \int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{1}{1+v^2} d\lambda(v) \\
&= 2 \frac{\pi}{2} \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{\pi^2}{2}
\end{aligned}$$

3.3. Exercice 3

1)

- Domaine de définition $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, t) \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+x^2} \end{cases}$ intégrable $\Leftrightarrow t \geq 0$

En effet, si $t \geq 0$, $\frac{e^{-xt}}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}$ intégrable

Si $t < 0$, $e^{-xt} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$

F est définie sur $[0, +\infty[$

- Domaine de continuité de F
 1. $x \mapsto f(x, t)$ mesurable
 2. $t \mapsto f(x, t)$ continue sur \mathbb{R}_+
 3. $\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}_+ |f(x, t)| \leq g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ positive intégrable

Donc d'après le théorème de continuité sous le signe intégral, F est continue sur \mathbb{R}_+

2)

$$F(0) = \frac{\pi}{2}$$

On pose $(t_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid t_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$

$$g_n(x) \frac{e^{-xt_n}}{1+x^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

$|g_n(x)| \leq \frac{1}{1+x^2}$ intégrable, mesurable, positive

D'après le th. de CV dominée,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}_+} g_n(x) d\lambda(x)$$

Et puisque

$$\forall x, g_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}_+} g_n(x) d\lambda(x) = 0$$

Comme $(t_n)_n$ est quelconque,

$$F(t)_{t \rightarrow +\infty} = 0$$

3.4. Exercice 4

$\forall n, f_n \in L^2, g_n \in L^2$ D'après l'in de Hölder avec $p = q = 2$, $f_n g_n \in L^2$