Cours - Graphes

Louis Thevenet

Table des matières

Notes 70% Exam, 30% TP
CM émargés

$\boxed{\text{x}}$

1. Degré

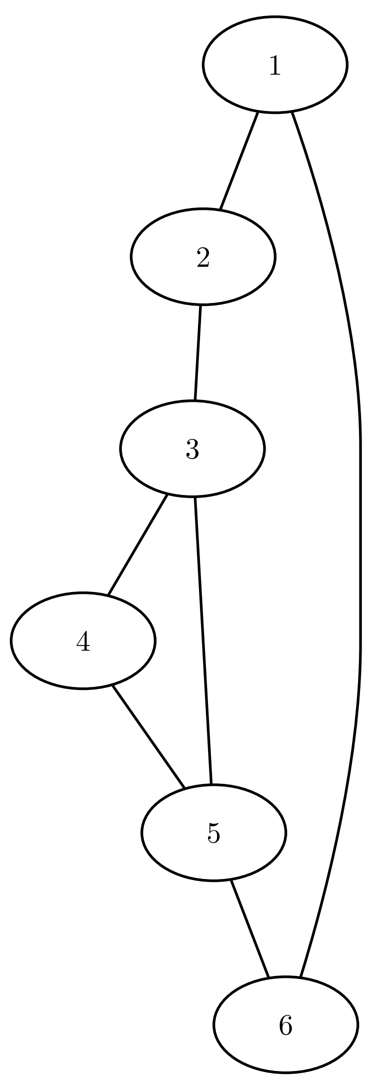
1.1. Corollaire 1.2.3

Soit N la somme des degrés de tous les sommets et n le nombdre d'arêtes du graphe. Supposons que le nombre de sommets de degré impair soit pair. D'après le lemme,

$$N = 2n = \underbrace{\sum_{v_k \text{ de degré pair}} \delta(v_k)}_{\text{pair}} + \sum_{v_k \text{ de degré impair}} \delta(v_k)$$

2. Sous graphes, graphes partiels, cliques

2.1. Exercice 1.4.4



3. Connexité

3.1. Exmeple 2.2.9

- $v = s_1$
  - CFC $= \{\{s_1, s_2, s_7, s_6, s_{10}, s_9, s_5, s_4, s_3\}, \{s_8\}\}$

3.2. Exemple 2.2.3

1. Sommets : espions de chaque pays. Une arrête relie deux sommets si les espions s'espionnent

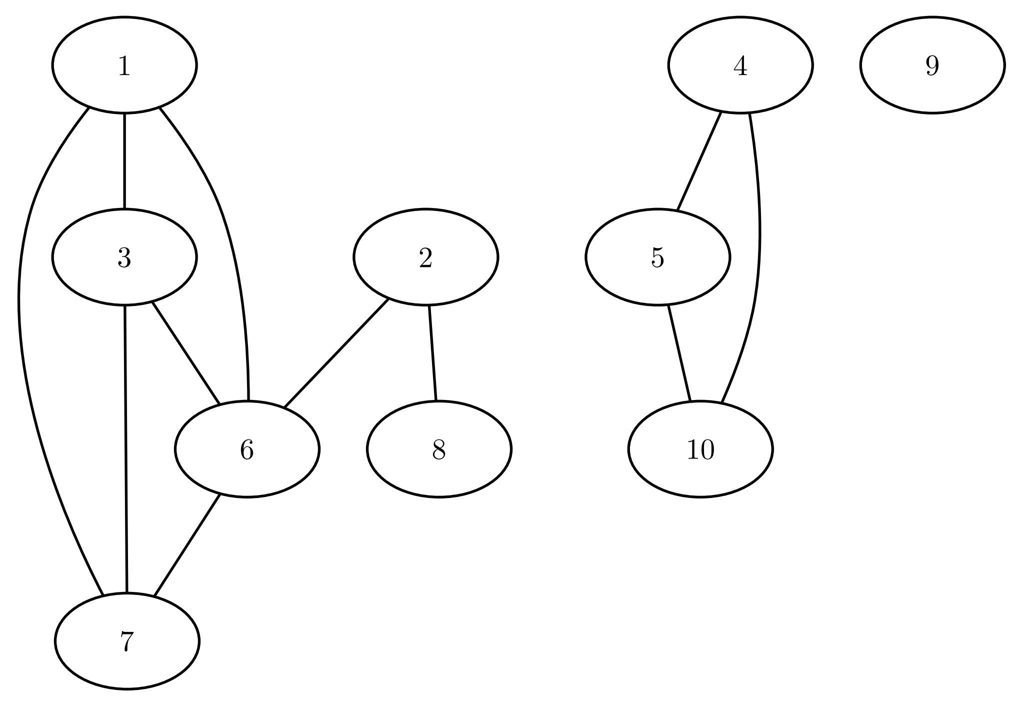
$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} s_{11} & s_{12} & s_{21} & s_{22} & s_{31} & s_{32} \end{array} \\ \begin{array}{c} s_{11} \\ s_{12} \\ s_{21} \\ s_{22} \\ s_{31} \\ s_{32} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

2. Le graphe n'est pas complet car deux espions d'un même pays ne sont pas reliés.
3. $\forall v \in S, \deg(v) = 4$

   Il y a $\frac{4*6}{2} = 12$ arêtes.

3.3. Exercice 2.2.4

1.



2. Il n'est pas complet
3. Il n'est pas connexe
4. Il serait connexe

3.4. Preuve 2.2.11

- Vrai pour $n = 1$ car il y a $0 \leq 1 - 1 = 0$ arête.

Supposons que $\forall n \geq 1$, un graphe sans cycle contient au plus $n - 1$ arêtes. Soit G un graphe sans cycle à $n + 1$ sommets. Soit $v \in S$

$G\{v\}$ est un graphe sans cycle à n sommets, donc il y a au plus $n - 1$ arêtes (noté $|A|$).

On ajoute v et ça ne crée pas de cycle. Forcément, $\deg(v) = 1$, donc il y a $|A| + 1 \leq (n - 1) + 1$

Propriété vraie pour $n + 1$

4. Graphes eulériens et hamiltoniens

4.1. Exercice 3.1.2

1. Non car 4 sommets de degrés impairs
2. Oui car il y a 2 sommets de degrés impairs, par théorème il existe une chaîne eulérienne
3. Oui car il y a 0 sommets de degrés impairs, par théorème il existe un cycle eulérienn
4. Oui car 2 sommets de degrés impairs

4.2. Théorème 3.1.2

[⇒] Supposons qu'un graphe G non orienté connexe admette une chaîne eulérienne

Soit n_i le nombre de sommets de degré impair

Soit $v_1, ..., v_n$ les sommets de la chaîne eulérienne

On reconstruit le graphe en suivant la chaîne, le degré de v_1 est 1 car c'est le début de la chaîne.

Puis, $\deg(v_2) = 2$ car adjaccent à v_1 et v_3

Pour $k \in [\![1, n]\!]$,

- Si $v_k = v_1$, puisque la chaîne est eulérienne, elle est simple, on ajoute ainsi deux arêtes et la parité du degré reste la même (impaire)

- Sinon, on ajoute le sommet v_k et deux arrêtes

Finalement, par récurrence, $\deg(v_n) \equiv 0[2]$, on ajoute une arête finale et il devient impair.

Dans le cas du cycle eulérien, $v_1 = v_n$ et on fusionne les deux arêtes, le degré devient pair. Ainsi tous les degrés sont pairs.

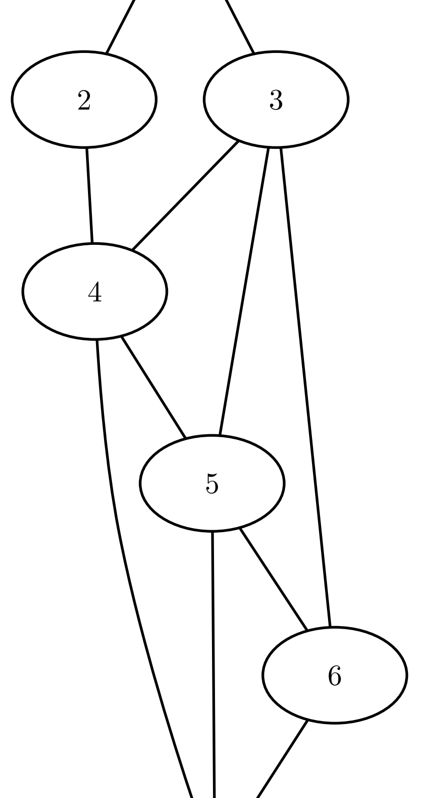
[⇒] Supposons que tous les degrés soient pairs

Supposons que c'est vrai pour un graphe à n arêtes. Soit un graphe à $n + 1$ arêtes.

4.3. Exercice 3.1.2

Soit G un graphe dont les sommets sont les ouvertures. Une arrête relie deux ouvertures si et seulement si ces ouvertures sont adjaccentes

1.



7 et 6 sont les seuls sommets de degré 2, il existe donc un cycle eulérien.

Chemin :

$$7 \to 4 \to 2 \to 1 \to 3 \to 5 \to 6 \to 7$$

1.