

Résumé - Traitement du Signal

22 Janvier, 2024

Louis Thevenet

Table des matières

1. Corrélations et Spectres	2
1.1. Transformée de Fourier	2
1.2. Classes de signaux déterministes et aléatoires	2
1.3. Propriétés de $R_x(\tau)$ et de $s_x(f)$	2
2. Filtrage Linéaire	2
3. Traitements non linéaires	2
4. Partiel	2

1. Corrélations et Spectres

1.1. Transformée de Fourier

1.2. Classes de signaux déterministes et aléatoires

Théorème 1.2.1: Classes de signaux

1. Déterministes à **énergie finie**

2. Déterministes **périodiques à puissance finie**

3. Déterministes **non périodique à puissance finie**

4. Aléatoires **stationnaires**

1.2.1. Déterministes à énergie finie

Théorème 1.2.1.1: Signaux à énergie finie

Définition $E = \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |X(f)|^2 df < \infty$

Fonction d'autocorrélation $R_x(\tau) = \int_{\mathbb{R}} x(t)x^*(t-\tau)dt = \langle x(t), x(t-\tau) \rangle$

Fonction d'intercorrrelation $R_{\{xy\}}(\tau) = \int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t-\tau)dt = \langle x(t), y(t-\tau) \rangle$

Produit scalaire $\langle x, y \rangle = \int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t)dt$

Définition 1.2.1.1: On définit la densité spectrale d'énergie par

$$s_x(f) = \text{TF } R_x(\tau)$$

Proposition 1.2.1.1: $s_x(f) = |X(f)|^2$

Exemple : $x(t) = \Pi_T(t)$ avec T la largeur de la fenêtre

On cherche la **fonction d'autocorrélation** et la **densité spectrale d'énergie** de $x(t)$.

• Méthode 1

- Calcul de $R_x(\tau) \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(\tau)x(t-\tau)dt$
 - Premier cas : $\tau - \frac{T}{2} > \frac{T}{2} \Leftrightarrow \tau > T \quad R_x(\tau) = \int 0dt = 0$
 - Deuxième cas : $\begin{cases} \tau - \frac{T}{2} < \frac{T}{2} \\ \tau + \frac{T}{2} > \frac{T}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \tau \in]0, T[\quad R_x(\tau) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\tau - \frac{T}{2}} 1 \times 1dt = T - \tau$

Comme R_x est paire, il suffit de la connaître entre 0 et ∞ . Ainsi $R_x(\tau) = T\Lambda_T(\tau)$

• Calcul de $s_{-x}(f) \quad s_x(f) = \text{TF}(R_x(\tau)) = T \times T \text{sinc}^2(\pi\tau f) = T^2 \text{sinc}^2(\pi\tau f)$

• Méthode 2

- Calcul de $s_x(f) = |x(f)|^2$

$$x(\tau) \xrightarrow{\text{TF}} X(f) = T \text{sinc}(\pi\tau f)$$
$$\begin{matrix} | \cdot |^2 \\ \longrightarrow \end{matrix} s_{x(f)} = |X(f)|^2 = T^2 \text{sinc}^2(\pi\tau f)$$

• Calcul de $R_x(\tau)$

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= \text{TF}^{-1} s_x(f) \\ &= T^{-1}(\text{sinc}(\pi\tau f)) \\ &= T\Lambda_T(\tau) \end{aligned}$$

1.2.2. Déterministes périodiques

Définition 1.2.2.1:

Definition $P = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 dt < \infty$

Fonction d'autocorrélation $R_x(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)x^*(t-\tau)dt = \langle x(t), x(t-\tau) \rangle$

Fonction d'intercorrrelation $R_{xy}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)y^*(t-\tau)dt = \langle x(t), y(t-\tau) \rangle$

Produit scalaire $\langle x, y \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)y^*(t)dt$

Définition 1.2.2.2: On définit la densité spectrale de puissance par

$$s_x(f) = \text{TF } R_x(\tau)$$

Proposition 1.2.2.1:

$$s_x(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 \delta(f - kf_0)$$

avec $x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \exp(j2\pi kf_0 t)$

Exemple : $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} A \cos(2\pi f_0 t) A \cos(2\pi f_0 (t-\tau)) dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \frac{A^2}{2} \underbrace{\cos(4\pi f_0 t - 2\pi f_0 \tau) + \cos(2\pi f_0 \tau)}_{\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b)) + \cos(a-b)} dt \\ &= 0 + \frac{1}{T_0} \frac{A^2}{2} \left(\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} dt \right) \cos(2\pi f_0 \tau) \\ &= \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau) \end{aligned}$$

• Méthode 1

$$\begin{aligned} s_x(f) &= \text{TF}(R_x(\tau)) \\ &= \underbrace{\frac{A^2}{4}(\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0))}_{\text{Deux fréquences pures}} \end{aligned}$$

• Méthode 2

On a

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t) = \underbrace{\frac{A}{2}}_{c_1} e^{j2\pi f_0 t} + \underbrace{\frac{A}{2}}_{c_{-1}} e^{-j2\pi f_0 t}$$
$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= \frac{A^2}{4} \underbrace{\text{TF}^{-1}[\delta(f-f_0)]}_{e^{j2\pi f_0 \tau}} + \frac{A^2}{4} \underbrace{\text{TF}^{-1}[\delta(f+f_0)]}_{e^{-j2\pi f_0 \tau}} \\ &= \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau) \end{aligned}$$

Remarque : $R_x(0)$ = puissance = $\frac{A^2}{2}$

1.2.3. Déterministes à puissance finie

Théorème 1.2.3.1:

Définition $P = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 dt < \infty$

Produit scalaire $\langle x, y \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)y^*(t)dt$

Fonction d'autocorrélation $R_x(\tau) = \langle x(t), x(t-\tau) \rangle$

Fonction d'intercorrrelation $R_{xy}(\tau) = \langle x(t), y(t-\tau) \rangle$

Définition 1.2.3.1: On définit la densité spectrale de puissance par

$$s_x(f) = \text{TF } R_x(\tau)$$

Proposition 1.2.3.1:

$$s_x(f) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |X_{T(f)}|^2 df$$

avec

$$X_T(f) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)e^{-j2\pi ft} dt$$

1.2.4. Aléatoires stationnaires

Théorème 1.2.4.1:

Moyenne $E[x(t)]$ indépendant de t

Moment d'ordre 2 $E[x(t)x^*(t-\tau)]$ indépendant de t

Produit scalaire $\langle x, y \rangle = E[x(t)y^*(t)]$

Fonction d'autocorrélation $R_x(\tau) = \langle x(t), x(t-\tau) \rangle = E[x(t)x^*(t-\tau)]$

Fonction d'intercorrrelation $R_{xy}(\tau) = \langle x(t), y(t-\tau) \rangle = E[x(t)y^*(t-\tau)]$

Définition 1.2.4.1:

Puissance moyenne $P = R_x(0) = E[|x(t)|^2] = \int_{\mathbb{R}} s_x(f)df$

Densité spectrale de puissance $s_x(f) = \text{TF } R_x(\tau) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E[|X_T(f)|^2]$

Remarque : En général $X(f)$ n'existe pas !

Exemple : $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta)$ avec $\theta \sim \mathcal{U}([0, 2\pi])$

$$m_x(t) = E_{\theta}(x(t)) = 0$$

1.3. Propriétés de $R_x(\tau)$ et de $s_x(f)$

Théorème 1.3.1: Propriétés de $R_x(\tau)$

Symétrie hermitienne $R_x(\tau) = R_x^*(-\tau)$

Valeur maximale $|R_x(\tau)| \leq R_x(0)$

Distance entre $x(t)$ et $x(t-\tau)$ Si $x(t)$ est un signal réel :
$$d^2[x(t), x(t-\tau)] = 2[R_x(0) - R_x(\tau)]$$

Donc $R_x(\tau)$ mesure le lien entre $x(t)$ et $x(t-\tau)$

Décomposition de Lebesgue on a
$$R_x(\tau) = R_1(\tau) + R_2(\tau)$$

où

- $R_1(\tau)$ est une somme de fonctions périodiques
- $R_2(\tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow +\infty} 0$

Théorème 1.3.2: Propriétés de $s_x(f)$

DSP réelle $s_x(f) \in \mathbb{R}$

Si $x(t)$ est un signal réel $s_x(f)$ est paire

Positivité $s_x(f) \geq 0$

Lien entre DSP et puissance/énergie P ou $E = \int_{\mathbb{R}} s_x(f)df$

Décomposition $s_x(f) = s_1(f) + s_2(f)$ où

- $s_1(f)$ est un spectre de raies
- $s_2(f)$ est un spectre continu

2. Filtrage Linéaire

3. Traitements non linéaires

4. Partiel

1. stationarité à l'ordre 1

2. vérifier à l'ordre 2 et démontrer que ça dépend que de τ

2