TD - Intégration

November 22, 2023

THEVENET Louis

Table des matières

1. TD2

1.1. Points importants

Proposition 1.1.1:

$$f : (E, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)) \text{ étagée} \Longleftrightarrow \exists (A_n)_{i=1}^N \subset E \mid (a_i)_{i=0}^N \in \mathbb{R}^+ \text{ tels que } f = \sum_{i=1}^N a_i \mathbb{1}_{A_i}$$

Et on a $\int_E f \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^N a_i \mu(A_i)$

Théorème 1.1.1: Bépo-Lévy

(f_n) suite de fonctions mesurables positives (f_n) croissantes telles que $f_n \underset{n\to\infty}{\to} f$

Alors $\int_E f \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} f \mathrm{d}\mu$

1.2. Exercices

1.2.1. Exercice 1

Soit f mesurable de $(E, \mathcal{A})$ dans $\left(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right)$ et positive

Montrons que

$$\forall a > 0 : \mu(\{f > a\}) \leq \frac{1}{a} \int_E f \mathrm{d}\mu$$

On a

$$\forall x, f(x) \geq a\mathbb{1}_{\{f>a\}}$$

Donc

$$\begin{aligned}\int_E f \mathrm{d}\mu &\geq \int_E a\mathbb{1}_{\{f>a\}} \mathrm{d}\mu \\ &\geq a \int_E \mathbb{1}_{\{f>a\}} \mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{1}{a} \int_E f \mathrm{d}\mu \geq \mu(\{f > a\})$$

1.2.2. Exercice 2

1)

- $\mu(\emptyset) = \int_E f \mathbb{1}_\emptyset \mathrm{d}\mu = \int_E 0 \mathrm{d}\mu = 0$
- Soient $A_1, ..., A_N \subset E$ disjoints

$$\mu_f\left(\bigsqcup_{i=1}^N A_i\right) = \int_E f \mathbb{1}_{\bigsqcup_{i=1}^N} A_i \mathrm{d}\mu = \int_E f \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{A_i} \mathrm{d}\mu \underset{\text{th.3.2.15}}{=} \sum_{i=1}^N \mu_f(A_i)$$

μ_f est bien une mesure sur $(E, \mathcal{A})$

2)

Ici on a $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$

$$\int_A f \mathrm{d}\mu = \int_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_i} f \mathrm{d}\mu = \int_E f \mathbb{1}_{\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i} \mathrm{d}\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_E f \mathbb{1}_{A_n} \mathrm{d}\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{A_n} f \mathrm{d}\mu$$

1.2.3. Exercice 3

Soit g étagée positive.

$\exists (A_i)$ partition de $\mathbb{R}, (a_i) \in \mathbb{R}^N \mid g = \sum_{i=0}^{N} a_i \mathbb{1}_{\Delta_i}$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} g \mathrm{d}\delta_0 &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{i=0}^{N} a_i \mathbb{1}_{A_i} \mathrm{d}\delta_0 \\ &= \sum_{i=0}^{N} a_i \delta_0(A_i)\end{aligned}$$

On a

$$\delta_0(\Delta_i) = \begin{cases} 1 \text{ si } 0 \in A_i = \mathbb{1}_{A_i}(0) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Et

$$\int_{\mathbb{R}} g \mathrm{d}\delta_0 = \sum_{i=0}^{N} a_i \mathbb{1}_{A_i}(0) = g(0)$$

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fontions étagées positives telles que $f_n \underset{\text{CVS}}{\to} f$ croissante On a ainsi :

$$\int_E f \mathrm{d}\delta_0 \underset{\text{BL}}{=} \lim_{n \to +\infty} \int_E f_n \mathrm{d}\delta_0 = \lim_{n \to \infty} f_n(0) \underset{\text{CVS}}{=} f(0)$$

1.2.4. Exercice 4

- $\forall (k, l) \in \mathbb{N}^2 A_k \cap A_l = \emptyset$

$$\begin{aligned}\int_A f \mathrm{d}\mu &= \int_{\bigcup A_i} f \mathrm{d}\mu \\ &= \int_E f \mathbb{1}_A \mathrm{d}\mu \\ &= \int f \mathbb{1}_{\bigcup A_i} \mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

Soit $f_n = f \mathbb{1}_{\bigcup A_i} \underset{\text{CVS}}{\to} f \mathbb{1}_A$

$$\begin{aligned}\int f \mathrm{d}\mu &\underset{\text{BL}}{=} \lim_{(n \to \infty)} \int_E f_n \mathrm{d}\mu \\ &= \int_E f\left(\mathbb{1}_{\bigcup} A_i\right) \mathrm{d}\mu \\ &= \int_{\bigcup A_i} f \mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

Chasles : $\int_E f_n \mathrm{d}\mu = \sum_{i=0}^{n} \int_{A_i} f \mathrm{d}\mu$

$$\begin{aligned}\int_A f \mathrm{d}\mu &= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n} \int_{A_i} f \mathrm{d}\mu \\ &= \sum_{i=0}^{n} \int_{A_n} f \mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

1.2.5. Exercice 5

1)

$\forall x, f(x) = 1 < +\infty$

Avec $(\mu(f^{-1}(\{+\infty\})) = 0)$

$$\int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\mu = 1 \times \mu(\mathbb{R}) = +\infty$$

Donc g non intégrable

2. TD3

2.1. Exercice 5.1.1

2.1.1. Version convergence dominée

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fonctions mesurables positives. Soit $f = \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$

Montrer que

$$\exists N \in \mathbb{N} \mid \int_E f_N \mathrm{d}\mu < +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \int_E f_n \mathrm{d}\mu = \int_E f \mathrm{d}\mu$$

Supposons que $\exists N \in \mathbb{N} \mid \int_E f_N \mathrm{d}\mu < +\infty$

La suite $(f_n)_n$ décroissante donc $\forall n \geq N : |f_n| < f_N$

Puis $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\text{PP}}{\longrightarrow}} f = \inf_n f_n$ mesurable

Par **convergence dominée**,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n \mathrm{d}\mu = \int_E f \mathrm{d}\mu$$

2.1.2. Version convergence monotone

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fonctions mesurables positives. Soit $f = \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$

Montrer que

$$\exists N \in \mathbb{N} \mid \int_E f_N \mathrm{d}\mu < +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \int_E f_n \mathrm{d}\mu = \int_E f \mathrm{d}\mu$$

Supposons que $\exists N \in \mathbb{N} \mid \int_E f_N \mathrm{d}\mu < +\infty$

On pose $g_n := f_N - f_n, \forall n \geq N$

$g_n \nearrow, \in \mathcal{I}$ car $f_n \in \mathcal{I}, \forall n$ et positive car $f_n \searrow$

$g_n \longrightarrow f_N - f = \sup_n g_n = g$ mesurable

Donc par **convergence monotone**,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E g_n \mathrm{d}\lambda = \int_E g \mathrm{d}\lambda$$

Puis

$$\int_E g_n \mathrm{d}\lambda \underset{\text{chasles}}{\overset{(*)}{=}} \int_E f_N \mathrm{d}\lambda - \int_E f \mathrm{d}\lambda$$

$$\Rightarrow \int_E f_N \mathrm{d}\lambda = \int_E g_n \mathrm{d}\lambda + \int_E f_n \mathrm{d}\lambda$$

En passant à la limite

$$\int_E f_N \mathrm{d}\lambda = \underbrace{\lim_{n\to+\infty} \int_E g_n \mathrm{d}\lambda}_{=\int_E g\mathrm{d}\lambda} + \lim_{n\to+\infty} f_n \mathrm{d}\lambda$$

(*) De l'autre côté, on obtient

$$\int_E f_N \mathrm{d}\lambda = \int_E g\mathrm{d}\lambda + \int_E f\mathrm{d}\lambda$$

2.2. Exercice 5.2.1

Méthode 2.2.1: Equivalence Riemann-Lebesgue
impropre $\rightarrow f$ mesurable
$\rightarrow f$ absolument intégrable au sens de Riemann
$\rightarrow \lim_{t\to b^-} \int_a^t |f(x)| \mathrm{d}x < +\infty$

Justifier que l'intégrale de Lebesgue et de Riemann coincident et les calculer=== 1. $\sin(x)$ sur $[0,\pi]$ sin est continue sur $[0,\pi]$ donc Riemann-intégrable et

$$\int_{[0,\pi]} \sin \mathrm{d}\lambda = \int_0^\pi \sin(x)\mathrm{d}x = [-\cos(x)]_0^\pi = 2$$

2.2.1. 2. $e^{-x}\cos(x)$ sur $\mathbb{R}_+$

$|f(x)| \underset{f \text{ continue}}{\leq} e^{-x}, \forall x$ et $g : x \mapsto e^{-x}$ intégrable au sens de Riemann

Donc f Riemann absolument intégrable et $\int_{\mathbb{R}_+} f\mathrm{d}\lambda = \int_0^{+\infty} e^{-x}$

- Soit on intègre 2 fois par parties
- Soit

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos(x)\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} e^{-x}\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{x+ix}+e^{-x-ix}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left(\left[\frac{e^{-x+ix}}{-1+i}\right]_0^{+\infty}+\left[\frac{e^{-x-ix}}{-1-i}\right]_0^{+\infty}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{-1+i}+\frac{1}{1+i}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{-(1+i)+(i-1)}{i^2-1} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

2.2.2. 3. $\frac{1}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}_+$

- En 0 : OK
- en $+\infty$: $|f(x)| \underset{+\infty}{=\sim} \frac{1}{x^2}$ qui est R-intégrable

Donc f est R-abs intégrable

$\int_{\mathbb{R}_+} f\mathrm{d}\mu = \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = [\arctan(x)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$

2.2.3. 4. $\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathbb{1}_{[0,4]} + \frac{1}{x^2}\mathbb{1}_{(]}4, +\infty[)(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$

- f cpm sur $\mathbb{R}_+$
- en 0^+ : $|f(x)| = \frac{1}{2\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ R-intégrable
- en $+\infty$: $|f(x)| = \frac{1}{x^2}$ R-intégrable

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}_+} f\mathrm{d}\lambda &= \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^4 \frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}\lambda + \int_4^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}\lambda \\
&= [\sqrt{x}]_0^4 + \left[-\frac{1}{x}\right]_4^{+\infty} \\
&= \sqrt{4}+\frac{1}{4} \\
&= \frac{9}{4}
\end{aligned}$$

2.3. Exercice 5.2.2

2.3.1. $f_n(x) = \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \mathbb{1}_{[0,n]}(x)$
$\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)} \longrightarrow e^{-x}$

$$f_n(x) \to e^{-x}\cos(x) = f(x)$$

Par convergence dominée,

$$\ln\left(1-\frac{x}{n}\right) \leq -\frac{x}{n}$$

Donc $e^{n\ln(1-\frac{x}{n})} \leq e^{-x}$ par croissance

Donc

$$e^{n\ln(1-\frac{x}{n})} \leq e^{-x}$$

Convergence dominée :

$$\begin{aligned} \lim_n \int_{\mathbb{R}_+} f_n \mathrm{d}\lambda &= \int_{\mathbb{R}_+} f \mathrm{d}\lambda \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-x}\cos(x)\texttt{differential}'x \\ &= \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

3. TD4

3.1. Exercice 1

$$f : \begin{cases} (E,\mathcal{A}) \times (E,\mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)) \\ (k,l) \mapsto u_{k,l} \end{cases}$$

Ici :

- $E = \mathbb{N}$
- $\mathcal{A} = \sigma(\mathbb{N})$ ou $\mathcal{P}(\mathbb{N})$
- μ mesure de comptage (associée à la cardinalité)

Ainsi f est mesurable et positive.

D'après Fubini,

$$\int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^+} f(k,l)\mathrm{d}\mu(k)\mathrm{d}\mu(l) = \int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^+} f(k,l)\mathrm{d}\mu(l)\mathrm{d}\mu(k)$$

et avec $(\mathbb{N}, \sigma(\mathbb{N}), \mu)$ tel qu'on l'a choisi

$$\int_{\mathbb{R}^+} f(k,l)\mathrm{d}\mu(k) = \sum_k u_{k,l}$$

Donc

$$\sum_k \sum_l u_{k,l} = \sum_l \sum_k u_{k,l}$$

3.2. Exercice 2

1)

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^* \\ (x,y) \mapsto \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)} \end{cases}$$

f est bien positive et mesurable.

Le théorème de Fubini s'applique à I

2) $u = x\sqrt{y}$, ainsi $\frac{\mathrm{d}\lambda(u)}{\mathrm{d}\lambda(x)} = \sqrt{y}$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}_+^*} f(x,y)\mathrm{d}\lambda(x) &= \int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{1}{1+u^2}\frac{1}{\sqrt{y}}\mathrm{d}\lambda(u) \\ &= \frac{1}{\sqrt{y}}[\arctan(u)]_{\mathbb{R}_+^*} \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{y}}\end{aligned}$$

3)

$$\tilde{f}(x,y) = \frac{1}{1+x^2y}$$

$$\begin{aligned}I &= \int_{\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*} \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^*}\left(\int_{\mathbb{R}_+^*}\tilde{f}(x,y)\mathrm{d}\lambda(x)\right)\frac{1}{1+y}\mathrm{d}\lambda(y) \\ &= \frac{\pi}{2}\int_{\mathbb{R}_+^*}\frac{1}{\sqrt{y}(1+y)}\mathrm{d}\lambda(y)\end{aligned}$$

$t = \sqrt{y}$, et ainsi $\frac{\mathrm{d}\lambda(t)}{\mathrm{d}\lambda(y)} = 18(2\sqrt{y})$

$$\begin{aligned}I &= \frac{\pi}{2}\int_{\mathbb{R}_+^*}\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}\lambda(t) \\ &= \pi[\arctan(t)]_{\mathbb{R}_+^*} \\ &= \frac{\pi^2}{2}\end{aligned}$$

4)

$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^* \\ (v,t)\mapsto\left(\frac{v}{t},t^2\right)\end{cases}$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme sur $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*$

$$\left|\left(\det\left(J_\varphi\right)(v,t)\right)\right| = \left|\det\begin{pmatrix}\frac{1}{t} & -\frac{v}{t^2} \\ 0 & 2t\end{pmatrix}\right| = 2$$

$$\begin{aligned}I &= \int_{\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*}\frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}\mathrm{d}\lambda(x)\mathrm{d}\lambda(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*}\frac{1}{(1+t^2)(1+v^2)}\left|\det J_\varphi(t,v)\right| \\ &= 2\int_{\mathbb{R}_+^*}\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}\lambda(t)\int_{\mathbb{R}_+^*}\frac{1}{1+v^2}\mathrm{d}\lambda(v) \\ &= 2\frac{\pi}{2}\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi^2}{2}\end{aligned}$$

3.3. Exercice 3

1)

- Domaine de définition $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \\ (x,t) \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+x^2} \end{cases}$ intégrable $\Leftrightarrow t \geq 0$

  En effet, si $t \geq 0$, $\frac{e^{-xt}}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}$ intégrable

  Si $t < 0$, $e^{-xt} \underset{x \to +\infty}{\to} +\infty$

  F est définie sur $[0, +\infty[$

- Domaine de continuité de F
  1. $x \mapsto f(x,t)$ mesurable
  2. $t \mapsto f(x,t)$ continue sur $\mathbb{R}_+$
  3. $\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}_+ |f(x,t)| \leq g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ positive intégrable

  Donc d'après le théorème de continuité sous le signe intégral, F est continue sur $\mathbb{R}_+$

2)

$$F(0) = \frac{\pi}{2}$$

On pose $(t_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid t_n \underset{n \to +\infty}{\to} +\infty$

$$g_n(x) \frac{e^{-xt_n}}{1+x^2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

$|g_n(x)| \leq \frac{1}{1+x^2}$ intérable, mesurable, positive

D'après le th. de CV dominée,

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}_+} g_{n(x)} \mathrm{d}\lambda(x)$$

Et puisque

$$\forall x, g_n(x) \underset{n \to +\infty}{\to} 0$$

On a

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}_+} g_n(x) \mathrm{d}\lambda(x) = 0$$

Comme $(t_n)_n$ est quelconque,

$$F(t)_{t \to +\infty} = 0$$

3.4. Exercice 4

$\forall n, f_n \in L^2$, $g_n \in L^2$ D'après l'in de Hödler avec $p = q = 2$, $f_n g_n \in L^2$