Analyse de Fourier - Résumé

Janvier 13, 2024

THEVENET Louis

Table des matières

1. Transformée de Fourier

1.1. Espaces de fonctions

Définition 1.1.1: Espaces L^p

Pour $p \geq 1$ et I intervalle borné ou non de $\mathbb{R}$, on pose :

$$L^p(I) = \left\{ x : I \to \mathbb{R} \mid \int_I |x(t)|^p \mathrm{d}t < +\infty \right\}$$

$$L^\infty(I)\{x : I \to \mathbb{R} \text{ est bornée p.p. sur } I\}$$

Définition 1.1.2: Normes

$$\|x\|_p = \left(\int_I |x(t)|^p \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|x\|_\infty = \inf\{\alpha \mid |x(t)| \leq \text{alpha p.p. sur} I\}$$

1.2. Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$

Définition 1.2.1: Transformée de Fourier

Soit une fonction x in $L^1(\mathbb{R})$, on définit sa transformée de Fourier par :

$$\forall f \in \mathbb{R}, \hat{x}(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-2j\pi f t} \mathrm{d}t$$

Notée parfois $X(x)$ ou $\mathrm{TF}(x)(f)$.

Théorème 1.2.1: Propriétés
1. $\hat{x}$ est continue et bornée sur $\mathbb{R}$
2. $\hat{x} \in L^{+\infty}(\mathbb{R})$
3. $x \mapsto \hat{x}$ est linéaire continue de $L^1(\mathbb{R})$ dans $L^{+\infty}(\mathbb{R})$
4. $\lim_{|f \mapsto +\infty} \hat{x}(f) = 0$

Théorème 1.2.2: Théorème du transfert

Soient x et y deux fonctions de $L^1(\mathbb{R})$, alors :

1. $x\hat{y}$ et $\hat{x}y$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$
2. $\int_{\mathbb{R}} x(t)\hat{y}(t)\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \hat{x}(t) y(t) \mathrm{d}t$

Théorème 1.2.3: Dérivation

1. Si $t \mapsto t^k x(t)$ est dans $L^1(\mathbb{R})$ pour $k = 0, ..., n$, alors $\hat{x}$ est n fois dérivable et :

$$\hat{x}^{(k)}(f) = (\widehat{-2j\pi t)^k x(t)}(f)$$

2. Si $x \in C^n(\mathbb{R})$ et $x^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$ pour $k = 0, ..., n$, alors $\hat{x}$ est n fois dérivable et :

$$\hat{x}^{(k)}(f) = (2j\pi f)^k \hat{x}(f)$$

Proposition 1.2.1: Translation

Soit $x \in L^1(\mathbb{R})$

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors

   $x(\widehat{t - t}_0)(f) = e^{-2j\pi f t_0} \hat{x}(f)$

2. Soit $f_0 \in \mathbb{R}$. Alors

   $\hat{x}(f - f_0) = e^{2j\pi t f_0} x(t)(f)$

1.3. Transformée de Fourier inverse

Définition 1.3.1: Transformée de Fourier inverse

Si $x, \hat{x} \in L^1(\mathbb{R})$, on définit sa transformée de Fourier inverse par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, x(t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{x}(f) e^{+2j\pi f t} \mathrm{d}f$$

1.4. Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$ (espace des fonctions à énergie finie)

Définition 1.4.1: Décroissance rapide

Une fonction x est dite à décroissance rapide si :

$$\forall k \in \mathbb{N}, t^k x(t) \underset{|t| \to +\infty}{\to} 0$$

Définition 1.4.2: L'espace $S(\mathbb{R})$

On note $S(\mathbb{R})$ l'espace des x de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

1. $x \in C^+(\infty)$
2. x est à décroissance rapide.

$S(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$

Définition 1.4.3: Transformée de Fourier dans $S(\mathbb{R})$

L'isométrie $x \mapsto \hat{x}$ de $S(\mathbb{R})$ dans $S(\mathbb{R})$ se prolonge de façon unique en une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$.

On la note $\mathcal{F}$ et

$$\forall x \in L^2(\mathbb{R}), \mathcal{F}(x) = \lim_{n \to +\infty} X_n$$

$$\text{où } X_n(f) = \int_{[-n,n]} x(t) e^{-2j\pi f t} \mathrm{d}t$$

1.5. Convolution

1.5.1. Produit de convolution

Définition 1.5.1.1: Produit de convolution

Soient x et y deux fonctions de $L^1(\mathbb{R})$, on définit leur produit de convolution par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, (x * y)(t) = \int_{\mathbb{R}} x(t-u) y(u) \mathrm{d}u$$

Noté parfois xy ou $\mathrm{conv}(x)(y)(t)$.

Proposition 1.5.1.1: Propriétés

1. $x * y = y * x$
2. $x * (y * z) = (x * y) * z$
3. $x * (a y_1 + b y_2) = a(x * y_1) + b(x * y_2)$

1.6. Convolution et Transformée de Fourier

Théorème 1.6.1: Théorème de convolution

Soient x et y deux fonctions de $L^1(\mathbb{R})$, alors :

$$\widehat{x * y}(f) = \hat{x}(f) \hat{y}(f)$$

$$\widehat{xy}(f) = \hat{x} \times \hat{y}(f)$$

Et pour les transformées inverses aussi

Théorème 1.6.2: Théorème de Convolutions

Soient x et y deux fonctions de $S(\mathbb{R})$, alors :

$$\widehat{x * y}(f) = \hat{x}(f)\hat{y}(f)$$

$$\widehat{xy}(f) = \hat{x} \times \hat{y}(f)$$

Et pour les transformées inverses aussi

Théorème 1.6.3: Théorème de Convolution et Dérivation

Soient x et y deux fonctions de $L^2(\mathbb{R})$

$x * y(f) \quad = \mathrm{TF}^{-1}(\mathcal{F}(x)\mathcal{F}(y))(f)$

$\mathrm{TF}^{-1}(xy)(f) = \mathcal{F}^{-1}(x) * \mathcal{F}^{-1}(y)(f)$

2. Distributions