Résumé - Traitement du Signal

22 Janvier, 2024

Louis Thevenet

Table des matières

Remarque : Cours en ligne

1. Corrélations et Spectres

1.1. Transformée de Fourier

1.2. Classes de signaux déterministes et aléatoires

Théorème 1.2.1 : Classes de signaux

1. Déterministes à **énergie finie**
2. Déterministes **périodiques à puissance finie**
3. Déterministes **non périodique à puissance finie**
4. Aléatoires **stationnaires**

1.2.1. Déterministes à énergie finie

Théorème 1.2.1.1 : Signaux à énergie finie

Définition $E = \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} |X(f)|^2 \mathrm{d}f < \infty$

Fonction d'autocorrélation $R_x(\tau) = \int_{\mathbb{R}} x(t) x^*(t-\tau) \mathrm{d}t = \langle x(t), x(t-\tau) \rangle$

Fonction d'intercorrélation $R_{\{xy\}}(\tau) = \int_{\mathbb{R}} x(t) y^*(t-\tau) \mathrm{d}t = \langle x(t), y(t-\tau) \rangle$

Produit scalaire $\langle x, y \rangle = \int_{\mathbb{R}} x(t) y^*(t) \mathrm{d}t$

Remarque :

- La fonction d'autocorrélation mesure la similarité entre $x(t)$ et $x(t-\tau)$ (similarité entre un singal et sa version décalée dans le temps)
- La fonction d'intercorrélation (corrélation croisée) mesure la similarité entre $x(t)$ et $y(t-\tau)$ (similarité entre deux signaux décalés dans le temps)

Définition 1.2.1.1 : On définit la densité spectrale d'énergie par

$$s_x(f) = \mathrm{TF}\, R_x(\tau)$$

Remarque :

- La densité spectrale d'énergie mesure la répartition de l'énergie du signal dans le domaine fréquentiel

Proposition 1.2.1.1 : $s_x(f) = |X(f)|^2$

Exemple : $x(t) = \Pi_T(t)$ avec T la largeur de la fenêtre

On cherche la **fonction d'autocorrélation** et **la densité spectrale d'énergie** de $x(t)$.

- Méthode 1
  - Calcul de $R_x(\tau)$ $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(\tau) x(t-\tau) \mathrm{d}t$
    - Premier cas : $\tau - \frac{T}{2} > \frac{T}{2} \Leftrightarrow \tau > T$ $R_x(\tau) = \int 0 \mathrm{d}t = 0$
    - Deuxième cas : $\begin{cases} \tau - \frac{T}{2} < \frac{T}{2} \\ \tau + \frac{T}{2} > \frac{T}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \tau \in]0, T[$ $R_x(\tau) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\tau - \frac{T}{2}} 1 \times 1 \mathrm{d}t = T - \tau$

    Comme R_x est paire, il suffit de la connaître entre 0 et ∞. Ainsi $R_x(\tau) = T \Lambda_T(\tau)$
  - Calcul de s_x (f) $s_x(f) = \mathrm{TF}(R_x(\tau)) = T \times T \operatorname{sinc}^2(\pi \tau f) = T^2 \operatorname{sinc}^2(\pi \tau f)$
- Méthode 2
  - Calcul de $s_x(f) = |x(f)|^2$

  $$x(\tau) \xrightarrow{\mathrm{TF}} X(f) = T \operatorname{sinc}(\pi \tau f)$$
  $$\xrightarrow{|\ |^2} s_{x(f)} = |X(f)|^2 = T^2 \operatorname{sinc}^2(\pi \tau f)$$

  - Calcul de $R_x(\tau)$

  $$\begin{aligned} R_x(\tau) &= \mathrm{TF}^{-1}\, s_x(f) \\ &= T^{-1}(\operatorname{sinc}(\pi \tau f)) \\ &= T \Lambda_T(\tau) \end{aligned}$$

1.2.2. Déterministes périodiques

Définition 1.2.2.1 :

Definition $P = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 \mathrm{d}t < \infty$

Fonction d'autocorrélation $R_x(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) x^*(t-\tau) \mathrm{d}t = \langle x(t), x(t-\tau) \rangle$

Fonction d'intercorrélation $R_{xy}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) y^*(t-\tau) \mathrm{d}t = \langle x(t), y(t-\tau) \rangle$

Produit scalaire $\langle x, y \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) y^*(t) \mathrm{d}t$

Définition 1.2.2.2 : On définit la densité spectrale de puissance par

$$s_x(f) = \mathrm{TF}\, R_x(\tau)$$

Proposition 1.2.2.1 :

$$s_x(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 \delta(f - k f_0)$$

avec $x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \exp(j 2\pi k f_0 t)$

Exemple : $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} A \cos(2\pi f_0 t) A \cos(2\pi f_0 (t-\tau)) \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \frac{A^2}{2} \underbrace{\cos(4\pi f_0 t - 2\pi f_0 \tau) + \cos(2\pi f_0 \tau)}_{\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b)) + \cos(a-b)} \mathrm{d}t \\ &= 0 + \frac{1}{T_0} \frac{A^2}{2} \left(\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \mathrm{d}t \right) \cos(2\pi f_0 \tau) \\ &= \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau) \end{aligned}$$

- Méthode 1

$$\begin{aligned} s_x(f) &= \mathrm{TF}(R_x(\tau)) \\ &= \underbrace{\frac{A^2}{4} (\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0))}_{\text{Deux fréquences pures}} \end{aligned}$$

- Méthode 2

  On a

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t) = \underbrace{\frac{A}{2}}_{c_1} e^{j 2\pi f_0 t} + \underbrace{\frac{A}{2}}_{c_{-1}} e^{-j 2\pi f_0 t}$$

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= \frac{A^2}{4} \underbrace{\mathrm{TF}^{-1}[\delta(f - f_0)]}_{e^{j 2\pi f_0 \tau}} + \frac{A^2}{4} \underbrace{\mathrm{TF}^{-1}[\delta(f + f_0)]}_{e^{-j 2\pi f_0 \tau}} \\ &= \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau) \end{aligned}$$

Remarque : $R_x(0) = \text{puissance} = \frac{A^2}{2}$

1.2.3. Déterministes à puissance finie

Théorème 1.2.3.1 :

Définition $P = \lim_{T_0 \to \infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 \mathrm{d}t < \infty$

Produit scalaire $\langle x, y \rangle = \lim_{t \to \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) y^*(t) \mathrm{d}t$

Fonction d'autocorrélation $R_x(\tau) = \langle (x(t), x(t-\tau)) \rangle$

Fonction d'intercorrélation $R_{xy}(\tau) = \langle (x(t), y(t-\tau)) \rangle$

Définition 1.2.3.1 : On définit la densité spectrale de puissance par

$$s_x(f) = \mathrm{TF}\, R_x(\tau)$$

Proposition 1.2.3.1 :

$$s_x(f) = \lim_{t \to \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left| X_{T(f)} \right|^2 \mathrm{d}f$$

avec

$$X_T(f) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-j 2\pi f t} \mathrm{d}t$$

1.2.4. Aléatoires stationnaires

Théorème 1.2.4.1 :
Moyenne $E[x(t)]$ indépendant de t
Moment d'ordre 2 $E[x(t) x^*(t-\tau)]$ indépendant de t

Produit scalaire $\langle x, y \rangle = E[x(t) y^*(t)]$

Fonction d'autocorrélation $R_x(\tau) = \langle x(t), x(t-\tau) \rangle = E[x(t) x^*(t-\tau)]$

Fonction d'intercorrélation $R_{xy}(\tau) = \langle x(t), y(t-\tau) \rangle = E[x(t) y^*(t-\tau)]$

Définition 1.2.4.1 :
Puissance moyenne $P = R_x(0) = E\left[\left|x(t)^2\right|\right] = \int_{\mathbb{R}} s_x(f) \mathrm{d}f$
Densité spectrale de puissance $s_x(f) = \mathrm{TF}\, R_x(\tau) = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{T} E\left[|X_T(f)|^2\right]$

Remarque : En général $X(f)$ n'existe pas !

Exemple : $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta)$ avec $\theta \sim \mathcal{U}([0, 2\pi])$

$$m_x(t) = E_\theta(x(t)) = 0$$

1.3. Propriétés de $R_x(\tau)$ et de $s_x(f)$

Théorème 1.3.1 : Propriétés de $R_x(\tau)$

Symétrie hermitienne $R_x(\tau) = R_x^*(-\tau)$
Valeur maximale $|R_x(\tau)| \leq R_x(0)$
Distance entre $x(t)$ et $x(t-\tau)$ Si $x(t)$ est un signal réel :

$$d^2[x(t), x(t-\tau)] = 2[R_x(0) - R_x](\tau)$$

Donc $R_x(\tau)$ mesure le lien entre $x(t)$ et $x(t-\tau)$
Décomposition de Lebesgue on a

$$R_x(\tau) = R_1(\tau) + R_2(\tau)$$

où

- $R_1(\tau)$ est une somme de fonctions périodiques
- $R_2(\tau) \underset{\tau \to +\infty}{\to} 0$

Théorème 1.3.2 : Propriétés de $s_x(f)$

DSP réelle $s_x(f) \in \mathbb{R}$
Si $x(t)$ est un signal réel $s_x(f)$ est paire
Positivité $s_x(f) \geq 0$
Lien entre DSP et puissance/énergie P ou $E = \int_{\mathbb{R}} s_x(f) \mathrm{d}f$
Décomposition $s_x(f) = s_1(f) + s_2(f)$ où

- $s_1(f)$ est un spectre de raies
- $s_2(f)$ est un spectre continu

2. Filtrage Linéaire

Méthode 2.1 : [jsp où le mettre] Identifier une relation de filtrage linéaires

1. Signaux déterministes $y(t) = x(t) \times h(t) \Leftrightarrow Y(f) = X(f) H(f)$ (i.e. on a tout identifié)
2. signaux aléatoires Si $x(t) \overset{I}{\leftrightarrow} e^{j 2\pi f t}$, alors $y(t) \leftrightarrow e^{j 2\pi f t} H(f)$ (on va montrer qu'on peut faire une correspondance à l'aide d'une isométrie)

2.1. Introduction

Remarque : Une opération de filtrage est comme une boîte noire qui prend un signal en entrée et qui produit un signal en sortie.

Définition 2.1.1 : On cherche une opération T qui a les propriétés suivantes

Linéarité $T(a x(t) + b y(t)) = a T(x(t)) + b T(y(t))$
Invariance dans le temps Si $y(t) = T(x(t))$, alors $T(x(t - t_0)) = y(t - t_0)$
Stabilité BIBO Si $x(t)$ est borné, alors $T(x(t))$ est borné

Définition 2.1.2 : Système causal

Un système est dit causal si la sortie à l'instant t ne dépend de l'entrée que pour des instants $t' \leq t$ (la sortie ne dépend pas du futur)

Théorème 2.1.1 : Système stable

Un système est stable si et seulement si $x \in \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}) \Rightarrow y = T[x] \in \mathcal{L}_\infty$

Ce qui se signifie que si $|x(t)| \leq M_x$, alors $\exists M_y \mid |y(t)| = |T[x(t)]| \leq M_y$

2.2. Filtrage des signaux déterministes

2.2.1. Définitions

Définition 2.2.1.1 : Réponse impulsionnelle

Par définition, la réponse impulsionnelle d'un système notée est la fonction obtenue en sortie d'un système quand on applique une impulsion de Dirac à l'entrée. Formellement, on a donc la caractérisation suivante :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \; h(t) = T[\delta(t)]$$

Remarque : C'est une définition large qui s'adapte à tout système, on verra que dans le cas des systèmes linéaires invariants par décalage, le système est entièrement caractérisé par sa réponse impulsionnelle.

2.2.2. CNS de stabilité des FLID (Filtres Linéaires Invariants par Décalage)

Théorème 2.2.2.1 : Un FLID est stable si et seulement si $h \in L^1 \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} |h(t)| \mathrm{d}t < \infty$

Théorème 2.2.2.2 : Une opération définit un filtrage linéaire si et seulement

$$y(t) = x(t) \star h(t) \Leftrightarrow Y(f) = X(f) H(f)$$

où $X(f) = \mathrm{TF}[x(t)]$ et $H(f) = \mathrm{TF}[h(t)]$

Définition 2.2.2.1 : On définit la **fonction de transfert** ou **transmittance** (ou **réponse fréquentielle**) par $H(f) = \mathrm{TF}[h(t)] = |H(f)| e^{j \arg(H(f))}$

2.2.3. Relations entrée-sortie de Wiener Lee

Théorème 2.2.3.1 :

Pour les signaux déterministe (ie. à énergie finie, à puissance finie et périodiques), on peut caractériser analytiquement la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de la sortie du système en fonction des caractéristiques de l'entrée. Ainsi, les relations entre les fonctions d'autocorrélation et densités spectrales de et de appelées relations de Wiener-Lee sont données ci-après

Densité spectrale de puissance $s_y(f) = |H(f)|^2 s_x(f)$

Fonction d'intercorrélation $R_{yx}(\tau) = h(\tau) R_x(\tau)$

Fonction d'autocorrélation $R_y(\tau) = h(\tau) h^*(-\tau) R_x(\tau) = R_h(\tau) R_x(\tau)$

2.2.4. Interférences et intercorrélation entrée-sortie

Théorème 2.2.4.1 : On considère $y_1(t) = x(t) \times h_1(t)$ et $y_2(t) = x(t) \times h_2(t)$

(i.e. on a deux signaux obtenus par filtrage linéaire d'un même signal $x(t)$)

On a alors

$$R_{y_1 y_2}(\tau) = \int_{\mathbb{R}} s_x(t) H_1(f) H_2^*(f) e^{j 2\pi f \tau} \mathrm{d}f = h_1(\tau) \star h_2^*(-\tau) \star R_x(\tau)$$

Dans le domaine fréquentiel : $s_{y_1 y_2} = H_1(f) H_2^*(f) s_x(f)$ (l'**inter-spectre**)

3. Traitements non linéaires

3.1. Cas déterministe

Exemple : Quadrateur $y() = x^2(t)$

On a donc dans le domaine fréquentiel $Y(f) = X(f) \star X(f)$

Il suffira de calculer la transformée de Fourrier de x

3.2. Cas aléatoires

Ici on veut montrer que le signal d'entrée suit une loi de probabilité et que le signal de sortie suit une autre loi de probabilité.

Définition 3.2.1 : Signal aléatoire gaussien

On dit qu'un singal aléatoire $X(t)$ est gaussien si pour tout ensemble d'instants $t_1, ..., t_n$, $\begin{pmatrix} X(t_1) & \dots & X(t_n) \end{pmatrix}^T$ est un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^n$

Définition 3.2.2 : Loi univariée de $X(t)$

La loi de $X(t)$ est alors une loi gaussienne de densité

$$p[X(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t)}} e^{\frac{(X(t) - m(t))^2}{2\sigma^2(t)}}$$

De plus, si $X(t)$ est stationnaire au sens large alors

- $m(t) = E[X(t)]$
- $\sigma^2(t) = E\left[(X(t) - m(t))^2\right] = R_X(0) - m^2$

Définition 3.2.3 : Loi bivariée de $\begin{pmatrix} X(t) & X(t-\tau) \end{pmatrix}$

La loi du vecteur $V(t) = \begin{pmatrix} X(t) & X(t-\tau) \end{pmatrix}$ est une loi gaussienne de densité

$$p[x(t), x(t-\tau)] = \frac{1}{2\pi \sqrt{|\Sigma(t)|}} \exp\left(-\frac{1}{2} [V(t) - m(t)]^T \Sigma^{-1}(t) [V(t) - m(t)] \right)$$

où

$$m(t) = \begin{pmatrix} E[X(t)] & E[X(t-\tau)] \end{pmatrix}$$

$$\Sigma(t) = \begin{pmatrix} \sigma_1^2(t, \tau) & \sigma_{1,2}(t, \tau) \\ \sigma_{1,2}(\tau) & \sigma_2^2(t, \tau) \end{pmatrix} \underset{X(t) \text{ stat. sens large}}{=} \begin{pmatrix} R_X(0) - m^2 & R_X(\tau) - m^2 \\ R_X(\tau) - m^2 & R_X(0) - m^2 \end{pmatrix}$$

Théorème 3.2.1 : Théorème de Price

Pour tout vecteur gaussien centré (X_1, X_2), pour toute fonction **non-linéaire** g, on a

$$\frac{\partial E(Y_1 Y_2)}{\partial E(X_1 X_2)} = E\left(\frac{\partial Y_1}{\partial X_2} \frac{\partial Y_2}{\partial X_2} \right)$$

Avec $Y_1 = g(X_1)$ et $Y_2 = g(X_2)$

Puis avec

- $X_1 = x(t)$
- $X_2 = x(t-\tau)$

On a

- $Y_1 = y(t) = g(x(t))$
- $Y_2 = y(t-\tau) = g(x(t-\tau))$

Et aipnsi

$$\frac{\partial R_y(\tau)}{\partial R_x(\tau)} = E\left[\frac{\partial y(t)}{\partial x(t)} \frac{\partial y(t-\tau)}{\partial x(t-\tau)} \right]$$

4. Quantification

Définition 4.1 : $\star$ Quantification

$$x_Q(t) = i \delta_{q_i} = x_i$$

et

$$x_i - \frac{\Delta_{q_i}}{2} \leq x(t) \leq x_i + \frac{\Delta_{q_i}}{2}$$

Avec
$\boldsymbol{\Delta_{q_i}}$ pas de quantification (si $\Delta_{q_i} = \Delta_q$, on parle de quantification uniforme)
$\boldsymbol{x_i}$ niveau de quantification
$\boldsymbol{N = 2^n}$ nombre de niveaux de quantification

5. Partiel

1. stationarité à l'ordre 1
2. vérifier à l'ordre 2 et démontrer que ça dépend que de τ
3. savoir reprouver $\Sigma(t)$ dans Définition 27
4. savoir faire ça (déterminer DSP et autocorrélation d'un signal non linéaire (carré, cube, exponentielle, etc)