

# Intégration - Résumé

October 25, 2023

THEVENET Louis

## Table des matières

1. Définitions et motivations .....	1
2. Théorie de la mesure .....	2
2.1. Applications mesurables .....	2
2.2. Mesure et espaces mesurés .....	3
2.3. La mesure de Lebesgue .....	5
3. Intégral de Lebesgue des fonctions mesurables positives .....	5
3.1. Fonctions étagées positives .....	6
3.2. Fonctions mesurables positives .....	6
4. Intégration .....	7
5. Théorèmes limites et applications .....	8
6. Intégrales multiples $\int_{E_1 \times E_2} f d(\mu_1 \otimes \mu_2)$ .....	9
6.1. Tribu et mesure produit .....	9
6.2. Théorèmes de Fubini .....	9
6.3. Changement de variables .....	10
7. Liens entre dérivée et intégrale .....	11
8. Au partiel (d'après le prof) .....	11

## 1. Définitions et motivations

On veut étendre l'ensemble des fonctions intégrables

### Définition 1.1: Tribu

$E$  un ensemble et  $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(E)$  une famille de parties de  $E$ .  $\mathcal{A}$  est une **tribu** si :

1.  $E \in \mathcal{A}$
2.  $\mathcal{A}$  est stable par passage au complémentaire
3.  $\mathcal{A}$  est stable par réunion dénombrable

### Définition 1.2:

$E$  un ensemble,  $\mathcal{A}$  une tribu sur  $E$ .  $(E, \mathcal{A})$  est appelé **espace mesurable**

**Définition 1.3:** Tribu engendrée

Soit  $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$ , on appelle **tribu engendrée** par  $\mathcal{C}$ , notée  $\sigma(\mathcal{C})$ , l'intersection des toutes les tribus contenant  $\mathcal{C}$

Si  $(E, \mathcal{O})$  est un espace topologique,  $\sigma(\mathcal{O}) = \sigma(\mathcal{F}) := \mathcal{B}(E)$ , avec  $\mathcal{F}$  ensemble des fermés de  $E$

On appelle  $\mathcal{B}(E)$  la **tribu de Borel** de  $E$

**Définition 1.4:**

- Tribu image :  $f(\mathcal{A}_1) = \{B \in E_2 \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1\}$
- Tribu réciproque :  $f^{-1}(\mathcal{A}_2) = \{f^{-1}(B) \subset E_1 \mid B \in \mathcal{A}_2\}$

**Théorème 1.1:** Lemme de transport

Soit  $f : E_1 \rightarrow E_2$  et une classe de parties  $E_2$ , notée  $\mathcal{C}$ . Alors

$$\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$$

**Définition 1.5:** Tribu trace

La tribu trace de  $\mathcal{B}(E)$  sur  $X$  définie par  $\text{tr}(\mathcal{B}) = \{B \cap X \mid B \in \mathcal{B}(E)\}$  est la tribu engendrée par la topologie trace de  $\mathcal{O}$  sur  $X$ , i.e. par  $\sigma(\text{tr}(\mathcal{O}))$

## 2. Théorie de la mesure

### 2.1. Applications mesurables

**Définition 2.1.1:**

$f$  est mesurable de  $(E_1, \mathcal{A}_1)$  dans  $(E_2, \mathcal{A}_2) \iff f^{-1}(\mathcal{A}_2) \subset \mathcal{A}_1$  i.e.

$$\forall B \in \mathcal{A}_2, f^{-1}(B) = \{x \in E_1 \mid f(x) \in B\} \in \mathcal{A}_1$$

- Si  $E_1$  et  $E_2$  sont des espaces topologiques et  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$  des tribus de Borel correspondantes, alors  $f$  est **borélienne**
- Si  $(E_2, \mathcal{A}_2) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ , on parle de fonctions **mesurables**

**Méthode 2.1.1:**  $f$  est mesurable de  $(E_1, \mathcal{A}_1)$  dans  $(E_2, \mathcal{A}_2)$  ssi

$$\forall B \in \mathcal{A}_2, f^{-1}(B) = \{x \in E_1 \mid f(x) \in B\} \in \mathcal{A}_1$$

**Théorème 2.1.1:** Critères de mesurabilité

- $\mathcal{C}$  une classe de parties d'un ensemble  $F$ , i.e.  $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(F)$ ,  $\mathcal{B} := \sigma(\mathcal{C})$

$$f : (E, \mathcal{A}) \rightarrow (F, \mathcal{B}) \text{ mesurable} \iff f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}$$

- $f_1, f_2$  mesurables  $\Rightarrow f_1 \circ f_2$  mesurable
- Si  $\mathcal{A} = \mathcal{B}(E)$  et  $\mathcal{B} = \mathcal{B}(F)$  tribus de Borel,  $f$  continue  $\Rightarrow f$  mesurable
- $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  cpm ( $a < b \in \mathbb{R}$ ), alors  $f$  mesurable de  $([a, b], \mathcal{B}([a, b]))$  dans  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

**Théorème 2.1.2:** Limite d'une suite de fonction

$(f_n)_n$  une suite de fonctions **mesurables** sur  $(E, \mathcal{A})$  à valeurs dans  $|\mathbb{R}|$

1.  $\sup_n f_n$  et  $\inf_n f_n$  sont **mesurables**
2.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup f_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{k \geq n} f_k$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \inf f_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf_{k \geq n} f_k$  sont **mesurables**
3. Si  $(f_n)_n \xrightarrow{\text{c.s.}} f$ , alors  $f$  est **mesurable**

**2.2. Mesure et espaces mesurés**

**Définition 2.2.1:** Mesure

Soit  $(E, \mathcal{A})$  un espace mesurable. on appelle **mesure** sur  $(E, \mathcal{A})$  une application  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ := \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$  telle que

1.  $\mu(\emptyset) = 0$
2.  $\forall A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$  2 à 2 disjoints :  $\mu\left(\bigsqcup_n A_n\right) = \sum_n \mu(A_n)$  ( $\sigma$ -additivité)

**Méthode 2.2.1:** Montrer que  $\mu$  est une mesure

- existence
- $\mu(\emptyset) = 0$
- $\sigma$ -additivité

**Définition 2.2.2:** Espace mesuré

Soit  $(E, \mathcal{A})$  un espace mesurable et  $\mu$  une mesure dessus.

On appelle Soit  $(E, \mathcal{A}, \mu)$  **espace mesuré**.

**Définition 2.2.3:** Soit  $(E, \mathcal{A})$  un espace mesurable. Une mesure  $\mu$  est dite :

1. **finie** si  $\mu(E) < +\infty$
2. **de probabilité** si  $\mu(E) = 1$
3.  **$\sigma$ -finie** si

$$\exists (A_n)_n \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \mid E = \bigcup_n A_n$$

et  $\mu(A_n) < +\infty \forall n$

**Exemple :** Exercice 2.3.3. du cours que je laisse pour Nouloun

- $\mu(\emptyset) = 1$  car  $\emptyset$  est dénombrable
- Soient  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$  2 à 2 disjoints  
On a  $A_i$  et  $A_j$  dénombrables et disjoints donc  $A_i \cup A_j$  dénombrable  
Donc  $\mu(A_i \cup A_j) = 0 = 0 + 0 = \mu(A_i) + \mu(A_j)$   
Donc  $\mu\left(\bigcup_n (A_n)\right) = \sum_n (\mu(A_n))$

Donc  $\mu$  est une mesure

**Définition 2.2.4:** Pour  $(E, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré.

$A \in \mathcal{A}$  est négligeable si  $\mu(A) = 0$

**Théorème 2.2.1:** Mesure image

Soient  $(E_1, \mathcal{A}_1), (E_2, \mathcal{A}_2)$  deux espaces mesurables.  $\mu : \mathcal{A}_1 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$  une mesure sur  $(E_1, \mathcal{A}_1)$  et  $f$  mesurable de  $(E_1, \mathcal{A}_1)$  dans  $(E_2, \mathcal{A}_2)$

On pose

$$\mu_f : \begin{cases} \mathcal{A}_2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ \\ B \mapsto \mu_f(B) := \mu(f^{-1}(B)) \end{cases}$$

$\mu_f$  est une mesure sur  $(E_2, \mathcal{A}_2)$  appelée **mesure image** de  $\mu$  par  $f$ .

## 2.3. La mesure de Lebesgue

**Théorème 2.3.1:** Mesure de Lebesgue (ou mesure de Borel-Lebesgue)

Il existe une **unique** mesure  $\mu_d$  sur les boréliens de  $\mathbb{R}^d$  telle que la mesure de tout pavé  $\prod_{i=1}^d ]a_i, b_i[$  est :

$$\mu_d\left(\bigcap_{i=1}^d ]a_i, b_i[ \right) = \prod_{i=1}^d (b_i - a_i)$$

Elle est appelée **mesure de Lebesgue** et notée  $\mu$  si il n'y a pas d'ambiguïté sur la dimension.

## 3. Intégral de Lebesgue des fonctions mesurables positives

### 3.1. Fonctions étagées positives

**Définition 3.1.1:** Fonctions étagée

$f$  est une fonction étagée si elle s'écrit :  $f = \sum_{i \in I} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$   
avec  $A_i = f^{-1}(\{\alpha_i\}) =: \{f = \alpha_i\}$

**Définition 3.1.2:** Intégrale d'une fonction étagée

On appelle intégrale d'une fonction étagée  $f$  **positive** par rapport à la mesure  $\mu$  sur  $(E, \mathcal{A})$  :

$$\int_E f d\mu := \sum_{\alpha \in f(E)} \alpha \mu(f^{-1}(\{\alpha\})) \in [0, +\infty[$$

Si  $\int_E f d\mu < +\infty$ , on dit que  $f$  est **intégrable**

### 3.2. Fonctions mesurables positives

**Théorème 3.2.1:** Toute fonction de  $\mathcal{M}_+$  est limite d'une suite de fonctions de  $\mathcal{E}_+$  (étagées positives)

**Définition 3.2.1:**

On appelle intégrale d'une fonction mesurable **positive**  $f$  par rapport à  $\mu$  sur  $(E, \mathcal{A})$  :

$$\int_E f d\mu = \sup \left\{ \int_E \varphi d\mu \mid \varphi \in \mathcal{E}_+ \text{ et } \varphi \leq f \right\} \in [0, +\infty[$$

Si  $\int_E \varphi d\mu < +\infty$ , on dit que  $f$  est **intégrable**

**Corollaire 3.2.1:**  $\mu(A) = 0 \Rightarrow \int_E f \mathbb{1}_A d\mu = \int_A f d\mu = 0$

**Corollaire 3.2.2:** Si  $f \leq g$  et  $g$  est **intégrable**, alors  $f$  est **intégrable**

**Théorème 3.2.2:** Si  $\mu$  est finie, alors  $\forall f \in \mathcal{M}_+$ , si  $f$  est bornée alors  $f$  est intégrable

**Corollaire 3.2.3:**  $\forall f \in \mathcal{M}_+, \int_E f d\mu < +\infty \Rightarrow \mu(\{f = +\infty\}) = 0$

**Théorème 3.2.3:** Théorème de convergence monotone

Si  $(f_n)_n$  est une suite croissante de  $\mathcal{M}_+(\mathcal{A})$ , alors  $f := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \in \mathcal{M}_+(\mathcal{A})$  et

$$\int_E f d\mu = \int_E \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \right) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu$$

Utilité : On veut calculer l'intégrale de  $f$ , on sait pas faire, on peut faire l'intégrale des  $f_n$  puis passer à la limite.

**Corollaire 3.2.4:** Pour toute suite  $(f_n) \in \mathcal{M}_+ : \sum_n f_n \in \mathcal{M}_+$  et

$$\int_E \left( \sum_n f_n \right) d\mu = \sum_n \left( \int_E f_n d\mu \right)$$

**Proposition 3.2.1:**  $\forall f \in \mathcal{M}_+ : \int_E f d\mu = 0 \Leftrightarrow \mu(\{f \neq 0\}) = 0$

## 4. Intégration

**Définition 4.1:** Intégrale d'une fonction de  $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu + \int_E f^- d\mu$$

**Proposition 4.1:**  $f \in \mathcal{L}^1 \Leftrightarrow \left| \int_E f d\mu \right| \leq \int_E |f| d\mu < +\infty$

## 5. Théorèmes limites et applications

### Théorème 5.1: Convergence monotone

Soit  $(E, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré et  $(f_n) \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$

On suppose que :

- $(f_n)_{\text{p.p.}}$  est une suite croissante de  $\mathcal{M}_+(\mathcal{A})$
- $f_n \xrightarrow{\text{p.p.}} f$ ,  $f$  mesurable

Alors, on a :

$$\int_E f d\mu = \lim_n \int_E f_n d\mu$$

### Théorème 5.2: Convergence dominée

Soit  $(E, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré et  $(f_n) \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$

On suppose que :

- $\exists g \in \mathcal{M}_+$  intégrable sur  $E$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N} : |f_n| \leq g$   $\mu$ -pp
- $f_n \xrightarrow{\text{p.p.}} f$ ,  $f$  mesurable

Alors, on a :

$$\int_E f d\mu = \lim_n \int_E f_n d\mu$$

### Théorème 5.3: Continuité sous le signe intégrale

Soit  $(E, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré et  $(f_n) \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$

On suppose que :

- $\forall u \in \mathcal{I}, x \mapsto f(u, x) \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  (mesurable)
- $\exists u_\infty \in \mathcal{I}$  tel que pour presque tout  $x$ ,  $u \mapsto f(u, x)$  est continue en  $u_\infty$
- $\exists g \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  positive et intégrable telle que pour presque tout  $x$ ,  $\forall u \in \mathcal{I}, |f(u, x)| \leq g(x)$

Alors, on a :

$u \mapsto F(u) = \int_E f(u, x) d\mu(x)$  est définie en tout points de  $\mathcal{I}$  et continue en  $u_\infty$



**Théorème 5.4:** Dérivation sous le signe intégrale

Soit  $(E, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré et  $(f_n) \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$

On suppose que :

- $\forall u \in \mathcal{I}, x \mapsto f(u, x) \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  (mesurable)
- $\forall u \in \mathcal{I}, x \mapsto f(u, x)$  est intégrable
- $u_\infty \in \mathcal{I}$  telle que pour presque tout  $x$ ,  $\frac{\partial f}{\partial u}(u_\infty; x)$  existe
- $\exists g \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  positive et intégrable telle que pour presque tout  $x$ ,  $\forall u \in \mathcal{I}, |f(u, x) - f(u_\infty, x)| \leq g(x)|u - u_\infty|$

Alors, on a :

$u \mapsto F(u) = \int_E f(u, x) d\mu(x)$  est définie en tout points de  $\mathcal{I}$  et dérivable en  $u_\infty$

$$F'(u_\infty) = \int_E \frac{\partial f}{\partial u}(u_\infty, x) d\mu(x)$$

## 6. Intégrales multiples $\int_{E_1 \times E_2} f d(\mu_1 \otimes \mu_2)$

### 6.1. Tribu et mesure produit

**Définition 6.1.1:** Mesure produit

Pour  $(E_1, \mathcal{A}_1, \mu_1), (E_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ , on appelle tribu produit sur  $E_1 \times E_2$  notée  $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$  la plus petite tribu contenant les ensembles de la forme  $A_1 \times A_2$  avec  $\forall i \in \{1, 2\} A_i \subset \mathcal{A}_i$

**Théorème 6.1.1:**

Pour  $(E_1, \mathcal{A}_1, \mu_1), (E_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ , il existe une unique mesure  $m$  sur  $(E_1 \times E_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$  vérifiant :

$$\forall (A_1, A_2) \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 : m(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2)$$

Cette mesure est  **$\sigma$ -finie** et est appelée **mesure produit**

On note  $m := \mu_1 \otimes \mu_2$

### 6.2. Théorèmes de Fubini

**Théorème 6.2.1:** Fubini-Tonelli

Pour  $(E_1, \mathcal{A}_1, \mu_1), (E_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ , où les mesures sont  $\sigma$ -finies. Soit  $f : E_1 \times E_2 \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$  **mesurable positive**. On définit :

$$\varphi(x) = \int_{E_2} f(x, y) d\mu_2(y), \psi(y) = \int_{E_1} f(x, y) d\mu_1(x)$$

Elles sont mesurables et positives et on a :

$$\int_{E_1} \varphi d\mu_1 = \int_{E_1 \times E_2} f d(\mu_1 \otimes (\mu_2)) = \int_{E_2} \psi d\mu_2$$

**Théorème 6.2.2:** Fubini-Lebesgue

Pour  $(E_1, \mathcal{A}_1, \mu_1), (E_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ , où les mesures sont  $\sigma$ -finies. Soit  $f : E_1 \times E_2 \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$  **mesurable positive**. On définit :

$$\varphi(x) = \int_{E_2} f(x, y) d\mu_2(y), \psi(y) = \int_{E_1} f(x, y) d\mu_1(x)$$

Si  $f$  est  $\mu_1 \otimes \mu_2$  intégrable alors  $\varphi$  et  $\psi$  sont resp.  $\mu_1$  intégrable et  $\mu_2$ -intégrable et on a :

$$\int_{E_1} \varphi d\mu_1 = \int_{E_1 \times E_2} f d(\mu_1 \otimes (\mu_2)) = \int_{E_2} \psi d\mu_2$$

**6.3. Changement de variables****Théorème 6.3.1:**

$U$  ouvert de  $\mathbb{R}^d$  et  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^d$

$\varphi$  réalise un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de  $U$  sur  $V = \varphi(U)$  ssi

- $\varphi$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$
- $\varphi$  est injective
- $\forall u \in U : \det(J_\varphi(u)) \neq 0$

**Théorème 6.3.2:** Changement de variables Pour  $U, V$  ouverts de  $\mathbb{R}^d$ ,  $\varphi : U \rightarrow V$  un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme et  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  borélienne sur  $V$  intégrable. Alors  $f \circ \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$  est intégrable et

$$\int_V f d\lambda = \int_U (f \circ \varphi) |\det(J_\varphi)| d\lambda$$

Ne pas oublier la valeur absolue !

## 7. Liens entre dérivée et intégrale

**Théorème 7.1:**  $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$  ou  $\mathcal{L}^1(\mu)$  ou  $\mathcal{L}^1$  est l'ensemble des fonctions intégrables  
 $L^1$  est l'ensemble des fonctions mesurables

## 8. Au partiel (d'après le prof)

- à l'examen, est-ce que l'indicatrice est mesurable pour un  $(E, \mathcal{A})$  donné

(voir exemple 2.2.1)

- il peut mettre des exemples du cours mais surtout des exos de TD
- il a déjà mis exemple 5.3.1 par exemple