Cours - Graphes

Louis Thevenet

Table des matières

Notes 70% Exam, 30% TP
CM émargés

x

1. Degré

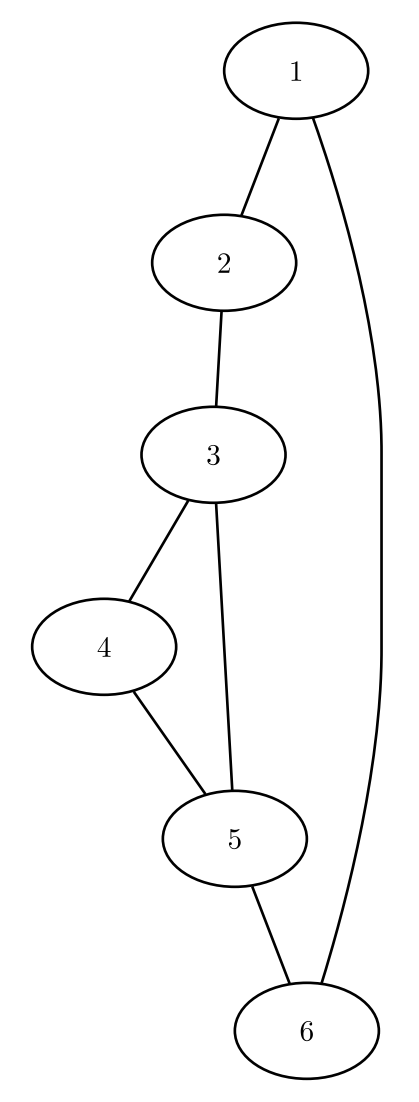
1.1. Corollaire 1.2.3

Soit N la somme des degrés de tous les sommets et n le nombdre d'arêtes du graphe. Supposons que le nombre de sommets de degré impair soit pair. D'après le lemme,

$$N = 2n = \underbrace{\sum_{v_k \text{ de degré pair}} \delta(v_k)}_{\text{pair}} + \sum_{v_k \text{ de degré impair}} \delta(v_k)$$

2. Sous graphes, graphes partiels, cliques

2.1. Exercice 1.4.4



3. Connexité

3.1. Exmeple 2.2.9

- $v = s_1$
  - CFC $= \{\{s_1, s_2, s_7, s_6, s_{10}, s_9, s_5, s_4, s_3\}, \{s_8\}\}$

3.2. Exemple 2.2.3

1. Sommets : espions de chaque pays. Une arrête relie deux sommets si les espions s'espionnent

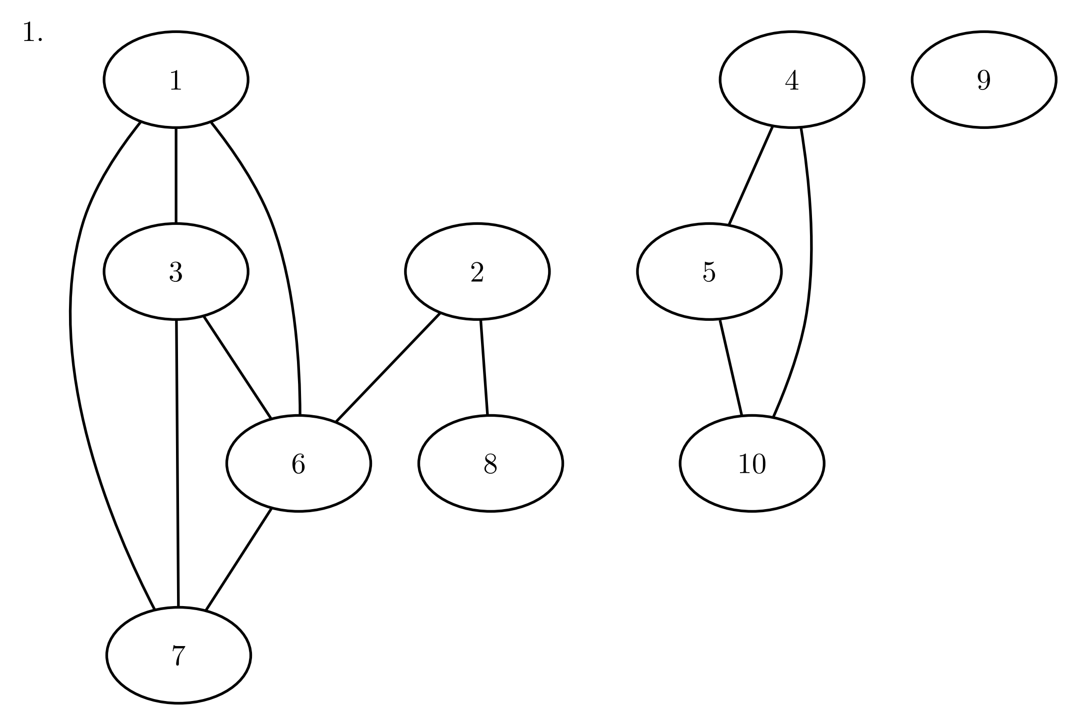
$$\begin{pmatrix} & s_{11} & s_{12} & s_{21} & s_{22} & s_{31} & s_{32} \\ s_{11} & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ s_{12} & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ s_{21} & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ s_{22} & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ s_{31} & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ s_{32} & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Le graphe n'est pas complet car deux espions d'un même pays ne sont pas reliés.
3. $\forall v \in S, \deg(v) = 4$

   Il y a $\frac{4*6}{2} = 12$ arêtes.

3.3. Exercice 2.2.4

1.



2. Il n'est pas complet
3. Il n'est pas connexe
4. Il serait connexe

3.4. Preuve 2.2.11

- Vrai pour $n = 1$ car il y a $0 \leq 1 - 1 = 0$ arête.

Supposons que $\forall n \geq 1$, un graphe sans cycle contient au plus $n - 1$ arêtes. Soit G un graphe sans cycle à $n + 1$ sommets. Soit $v \in S$

$G\{v\}$ est un graphe sans cycle à n sommets, donc il y a au plus $n - 1$ arêtes (noté $|A|$).

On ajoute v et ça ne crée pas de cycle. Forcément, $\deg(v) = 1$, donc il y a $|A| + 1 \leq (n - 1) + 1$

Propriété vraie pour $n + 1$

4. Graphes eulériens et hamiltoniens

4.1. Exercice 3.1.2

1. Non car 4 sommets de degrés impairs
2. Oui car il y a 2 sommets de degrés impairs, par théorème il existe une chaîne eulérienne
3. Oui car il y a 0 sommets de degrés impairs, par théorème il existe un cycle eulérienn
4. Oui car 2 sommets de degrés impairs

4.2. Théorème 3.1.2

[⇒] Supposons qu'un graphe G non orienté connexe admette une chaîne eulérienne

Soit n_i le nombre de sommets de degré impair

Soit $v_1, ..., v_n$ les sommets de la chaîne eulérienne

On reconstruit le graphe en suivant la chaîne, le degré de v_1 est 1 car c'est le début de la chaîne.

Puis, $\deg(v_2) = 2$ car adjaccent à v_1 et v_3

Pour $k \in [\![1, n]\!]$,

- Si $v_k = v_1$, puisque la chaîne est eulérienne, elle est simple, on ajoute ainsi deux arêtes et la parité du degré reste la même (impaire)
- Sinon, on ajoute le sommet v_k et deux arrêtes

Finalement, par récurrence, $\deg(v_n) \equiv 0[2]$, on ajoute une arête finale et il devient impair.

Dans le cas du cycle eulérien, $v_1 = v_n$ et on fusionne les deux arêtes, le degré devient pair. Ainsi tous les degrés sont pairs.

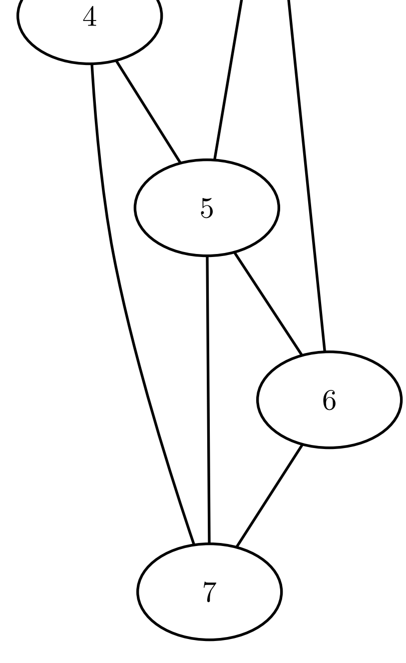
[⇒] Supposons que tous les degrés soient pairs

Supposons que c'est vrai pour un graphe à n arêtes. Soit un graphe à $n + 1$ arêtes.

4.3. Exercice 3.1.2

Soit G un graphe dont les sommets sont les ouvertures. Une arrête relie deux ouvertures si et seulement si ces ouvertures sont adjaccentes

1.

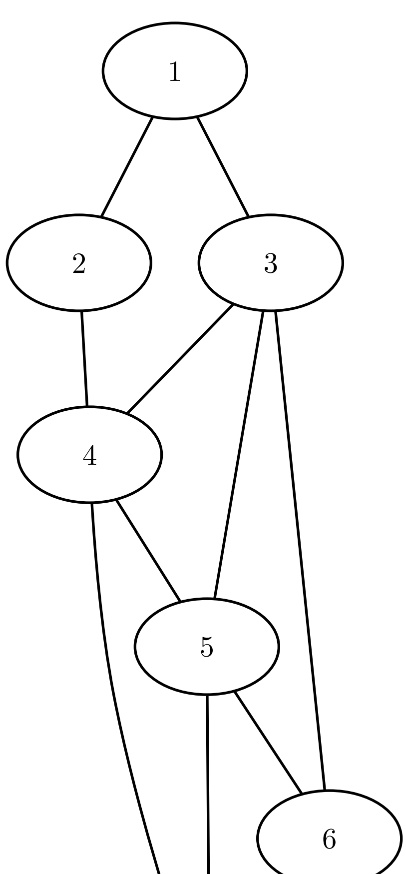


7 et 6 sont les seuls sommets de degré 2, il existe donc un cycle eulérien.

Chemin :

$$7 \to 4 \to 2 \to 1 \to 3 \to 5 \to 6 \to 7$$

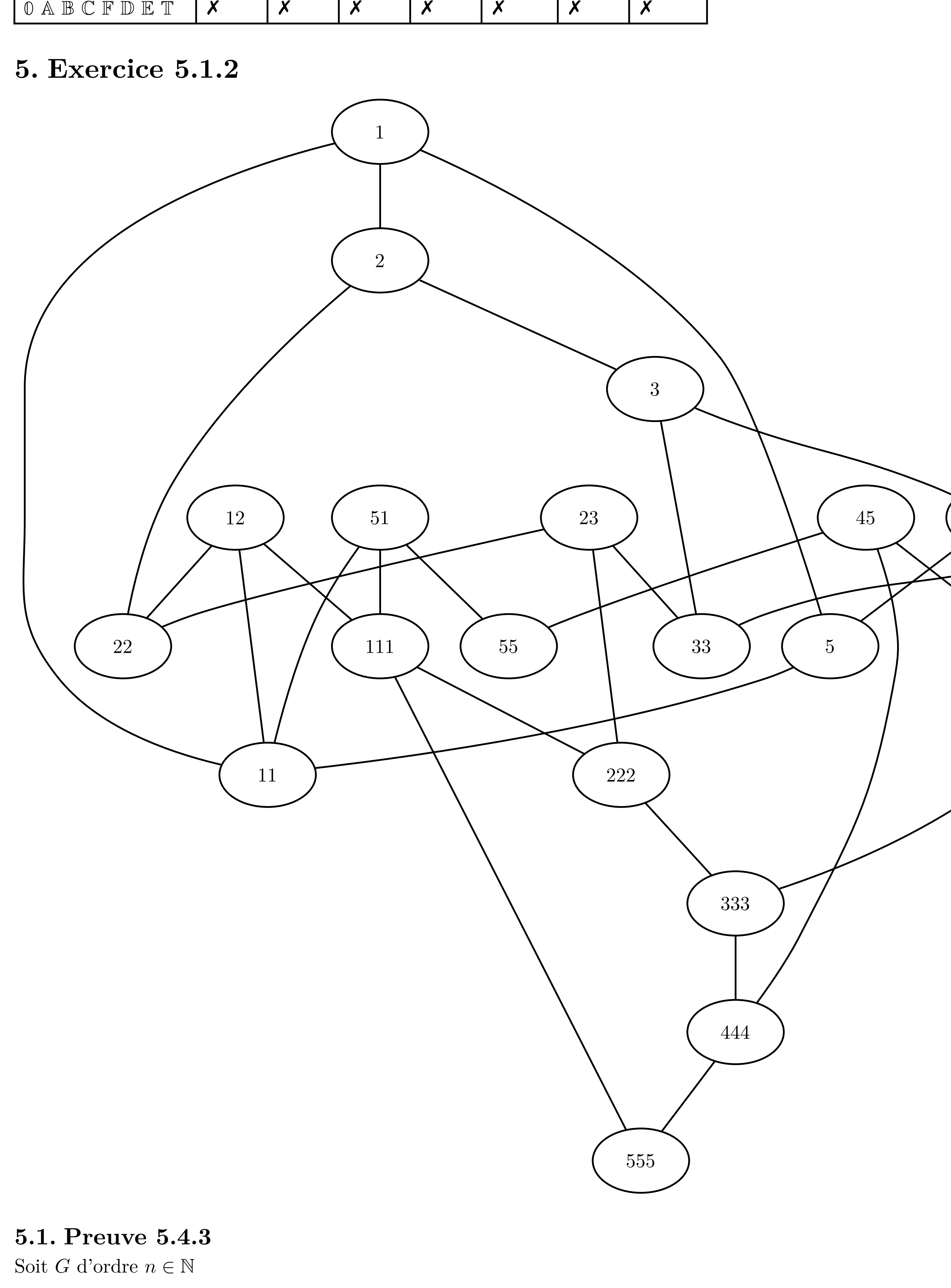
1.



4.4. Exercice 4.1.2

current	A	B	C	D	E	F	T
$0\ A\ B\ C\ D\ E\ F\ T$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$
$A\ B\ C\ D\ E\ F\ T\ \mathbb{0}$	$(2, 0)$	$(5, 0)$	$(4, 0)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$
$B\ C\ D\ E\ F\ T\ \mathbb{0}\ \mathbb{A}$	✗	$(4, A)$	$(4, 0)$	$(9, A)$	$(14, A)$	$(\infty, \emptyset)$	$(\infty, \emptyset)$
$C\ D\ E\ F\ T\ \mathbb{0}\ \mathbb{A}\ \mathbb{B}$	✗	✗	$(4, 0)$	$(8, B)$	$(14, A)$	$(7, B)$	$(\infty, \emptyset)$
$D\ E\ F\ T\ \mathbb{0}\ \mathbb{A}\ \mathbb{B}\ \mathbb{C}$	✗	✗	✗	$(8, B)$	$(14, A)$	$(7, B)$	$(\infty, \emptyset)$
$D\ E\ T\ \mathbb{0}\ \mathbb{A}\ \mathbb{B}\ \mathbb{C}\ \mathbb{F}$	✗	✗	✗	$(8, B)$	$(14, A)$	✗	$(14, F)$
$E\ T\ \mathbb{0}\ \mathbb{A}\ \mathbb{B}\ \mathbb{C}\ \mathbb{F}\ \mathbb{D}$	✗	✗	✗	✗	$(14, A)$	✗	$(13, D)$
$T\ \mathbb{0}\ \mathbb{A}\ \mathbb{B}\ \mathbb{C}\ \mathbb{F}\ \mathbb{D}\ \mathbb{E}$	✗	✗	✗	✗	✗	✗	$(13, D)$
$\mathbb{0}\ \mathbb{A}\ \mathbb{B}\ \mathbb{C}\ \mathbb{F}\ \mathbb{D}\ \mathbb{E}\ \mathbb{T}$	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗

5. Exercice 5.1.2



5.1. Preuve 5.4.3

Soit G d'ordre $n \in \mathbb{N}$

- Supposons que $\max_{v \in V} = 0$, les sommets sont tous indépendants, donc $\gamma(G) = 1 \leq 0 + 1$
- Supposons que $r = \max_{v \in V} \delta(v)$ et $\gamma(G) \leq r + 1$. Soit G' tel que $\max_{v \in V'} = r + 1$.

  G et G' sont différents d'une arête.

  Deux cas possibles:

  - l'arête relie deux sommets de même couleur Dans ce cas là, on est obligé d'utiliser une autre couleur et $\gamma(G') = \gamma(G)$ si une couleur déjà utilisée est disponible ou $\gamma(G') = \gamma(G) + 1$ sinon.

    Donc $\gamma(G') \leq (r + 1) + 1$.

  - Sinon, $\gamma(G') = \gamma(G) \leq r + 1 \leq (r + 1) + 1$.

  On a bien $\underline{\gamma(G') \leq (r + 1) + 1}$