Probabilités - Résumé

October 18, 2023

THEVENET Louis

Table des matières

1. Notions

1.1. Fonction de répartition

Définition 1.1.1:

$$F : \begin{cases} \mathbb{R} \to [0,1] \\ x \mapsto P[X < x] \end{cases}$$

$$p(x) = F'(x)$$

Pour les VAC : $F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(u) du$

1.2. Fonction caractéristique

Définition 1.2.1: $\Phi_X(t) = E[\exp(itX)]$

1.3. Lois conditionnelles

Définition 1.3.1: Loi conditionnelle VAD

$P[X = x_i \mid Y = y_j] = \frac{p_{ij}}{p_{.j}}$

Définition 1.3.2: Loi conditionnelle VAC

Densité de $X|(Y = y)$: $p(x|y) = \frac{p(x,y)}{p(.,y)}$
Où $p_{i.}$ et $p(x, .)$ sont les lois marginales,
i.e. $p(x, .) = \int_{\mathbb{R}} p(x, y) dy$

1.4. Indépendance

Théorème 1.4.1:

Pour X et Y **indépendantes** et α et β **continues**, on a $\alpha(X)$ et $\beta(Y)$ **indépendantes**. (réciproque vraie si bijectivité)

1.5. Corrélation

Définition 1.5.1:

- $\text{cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$
- $E[VV^T] = \begin{pmatrix} \text{var}(X) & \text{cov}(X,Y) \\ \text{cox(X,Y)} & \text{var}(Y) \end{pmatrix}$
- $r(X, Y) = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$

1.6. Espérance conditionnelle

Théorème 1.6.1: $E[\alpha(X, Y)] = E_X[E_Y[\alpha(X, Y) \mid X]]$

2. Vecteurs Gaussiens

2.1. Transformation affine

Théorème 2.1.1:

Pour $X \sim \mathcal{N}_n(m, \Sigma)$ un vecteur Gaussien et $Y = AX + b$, $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$,
Si $\mathrm{rg}(A) = p$, on a :

$$Y \text{ est un vecteur Gaussien et } Y \sim \mathcal{N}_p\left(Am + b, A\Sigma A^T\right)$$

2.2. Lois marginales

Théorème 2.2.1:

$X = \begin{pmatrix} X' & X'' \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}_n(m, \Sigma)$, $m = \begin{pmatrix} m' & m'' \end{pmatrix}$, $\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma' & M \\ M^T & \Sigma'' \end{pmatrix}$, alors on a :

$$X' \sim \mathcal{N}_p(m', \Sigma')$$

où $\Sigma' \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$

3. Convergence

Définition 3.1:

En loi : $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X \Leftrightarrow F_n[X_n < x] \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{CS}} F(x) = P[X < x]$

En probas : $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{P}} X \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, P[|X_n - X| > \varepsilon] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

En moyenne quadratique : $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{MQ}} X \Leftrightarrow E\left[(X_n - X)^2\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Presque sûrement : $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{PS}} X \Leftrightarrow X_n(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} X(\omega), \forall \omega \in A \mid P(A) = 1$

4. Théorèmes

Théorème 4.1: **Loi faible des grands nombres**

Si $X_1, ..., X_n$ sont des VA *iid* de moyennes $E[X_k] = m < \infty$, alors

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{P}} m$$

Théorème 4.2: Loi forte des grands nombres

Si $X_1, ..., X_n$ sont des VA *iid* de moyennes $E[X_k] = m < \infty$, de variances $\sigma^2 < \infty$ alors

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{MQ}} m$$

Théorème 4.3: Théorème central limite

Si $X_1, ..., X_n$ sont des VA *iid* de moyennes $E[X_k] = m < \infty$, de variances $\sigma^2 < \infty$ alors

$$Y_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - nm}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{L}} X \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

5. Lois qui vont pas te servir mais c'est bien de savoir que ça existe

Les résultats liés aux lois sont donnés sur l'énoncé du partiel

Théorème 5.1: Chi2

$X_1, ..., X_n$ n VA indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$
Alors

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi_n^2$$

Théorème 5.2: Student

$X \sim \mathcal{N}(0, 1), Y \sim \chi_n^2$, X et Y indépendantes, alors $Z = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} \sim t_n$

Théorème 5.3: Fisher

$X \sim \chi^2_n$, $Y \sim \chi^2_m$, X et Y indépendantes, alors

$$Z = \frac{\frac{X}{n}}{\frac{Y}{m}} \sim f_{n,m}$$

6. Méthodes

6.1. Changements de variables

Théorème 6.1.1: VAD

$P(y = y_j) = \sum_{i | y_j = g(x_i)} P[X = x_i]$

Théorème 6.1.2: VAC

Si g est **bijective** et **différentiable**,
alors $Y = g(X)$ est une VAC et

$$p_Y(y) = p_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{dx}{dy} \right|$$

Théorème 6.1.3: Changement de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Si $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, on a : $p_{U,V}(u, v) = p_{X,Y}(g^{-1}(u, v)) |\det(J)|$

7. Astuces

- Changement de variable type $Z = \alpha(X, Y)$, on peut poser $T = Y$ par exemple pour utiliser les théorèmes sur les changements de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$