Résumé - Traitement du Signal

22 Janvier, 2024

Louis Thevenet

Table des matières

Remarque : Cours en ligne

1. Corrélations et Spectres

1.1. Transformée de Fourier

1.2. Classes de signaux déterministes et aléatoires

Théorème 1.2.1 : Classes de signaux

1. Déterministes à **énergie finie**
2. Déterministes **périodiques à puissance finie**
3. Déterministes **non périodique à puissance finie**
4. Aléatoires **stationnaires**

1.2.1. Déterministes à énergie finie

Théorème 1.2.1.1 : Signaux à énergie finie

Définition $E = \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} |X(f)|^2 \mathrm{d}f < \infty$

Fonction d'autocorrélation $R_x(\tau) = \int_{\mathbb{R}} x(t)x^*(t-\tau)\mathrm{d}t = \langle x(t), x(t-\tau)\rangle$

Fonction d'intercorrélation $R_{\{xy\}}(\tau) = \int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t-\tau)\mathrm{d}t = \langle x(t), y(t-\tau)\rangle$

Produit scalaire $\langle x, y\rangle = \int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t)\mathrm{d}t$

Remarque :

- La fonction d'autocorrélation mesure la similarité entre $x(t)$ et $x(t-\tau)$ (similarité entre un singal et sa version décalée dans le temps)
- La fonction d'intercorrélation (corrélation croisée) mesure la similarité entre $x(t)$ et $y(t-\tau)$ (similarité entre deux signaux décalés dans le temps)

Définition 1.2.1.1 : On définit la densité spectrale d'énergie par

$$s_x(f) = \mathrm{TF}\, R_x(\tau)$$

Remarque :
- La densité spectrale d'énergie mesure la répartition de l'énergie du signal dans le domaine fréquentiel

Proposition 1.2.1.1 : $s_x(f) = |X(f)|^2$

Exemple : $x(t) = \Pi_T(t)$ avec T la largeur de la fenêtre

On cherche la **fonction d'autocorrélation** et **la densité spectrale d'énergie** de $x(t)$.

- Méthode 1
  - Calcul de $R_x(\tau)$ $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(\tau)x(t-\tau)\mathrm{d}t$
    - Premier cas : $\tau - \frac{T}{2} > \frac{T}{2} \Leftrightarrow \tau > T$ $R_x(\tau) = \int 0\mathrm{d}t = 0$
    - Deuxième cas : $\begin{cases} \tau - \frac{T}{2} < \frac{T}{2} \\ \tau + \frac{T}{2} > \frac{T}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \tau \in]0, T[$ $R_x(\tau) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\tau - \frac{T}{2}} 1 \times 1\mathrm{d}t = T - \tau$

    Comme R_x est paire, il suffit de la connaître entre 0 et ∞. Ainsi $R_x(\tau) = T\Lambda_T(\tau)$
  - Calcul de s_x (f) $s_x(f) = \mathrm{TF}(R_x(\tau)) = T \times T \operatorname{sinc}^2(\pi\tau f) = T^2 \operatorname{sinc}^2(\pi\tau f)$

- Méthode 2
  - Calcul de $s_x(f) = |x(f)|^2$

  $$\begin{aligned} x(\tau) &\xrightarrow{\mathrm{TF}} X(f) = T\operatorname{sinc}(\pi\tau f) \\ &\xrightarrow{|\,|^2} s_{x(f)} = |X(f)|^2 = T^2 \operatorname{sinc}^2(\pi\tau f) \end{aligned}$$

  - Calcul de $R_x(\tau)$

  $$\begin{aligned} R_x(\tau) &= \mathrm{TF}^{-1}\, s_x(f) \\ &= T^{-1}(\operatorname{sinc}(\pi\tau f)) \\ &= T\Lambda_T(\tau) \end{aligned}$$

1.2.2. Déterministes périodiques

Définition 1.2.2.1 :

Definition $P = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 \mathrm{d}t < \infty$

Fonction d'autocorrélation $R_x(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)x^*(t-\tau)\mathrm{d}t = \langle x(t), x(t-\tau)\rangle$

Fonction d'intercorrélation $R_{xy}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)y^*(t-\tau)\mathrm{d}t = \langle x(t), y(t-\tau)\rangle$

Produit scalaire $\langle x, y\rangle = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)y^*(t)\mathrm{d}t$

Définition 1.2.2.2 : On définit la densité spectrale de puissance par

$$s_x(f) = \mathrm{TF}\, R_x(\tau)$$

Proposition 1.2.2.1 :

$$s_x(f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 \delta(f - kf_0)$$

avec $x(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \exp(j2\pi k f_0 t)$

Exemple : $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} A\cos(2\pi f_0 t) A\cos(2\pi f_0 (t-\tau))\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \frac{A^2}{2} \underbrace{\cos(4\pi f_0 t - 2\pi f_0 \tau) + \cos(2\pi f_0 \tau)}_{\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b)) + \cos(a-b)} \mathrm{d}t \\ &= 0 + \frac{1}{T_0}\frac{A^2}{2}\left(\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \mathrm{d}t\right)\cos(2\pi f_0 \tau) \\ &= \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0 \tau) \end{aligned}$$

- Méthode 1

$$\begin{aligned} s_x(f) &= \mathrm{TF}(R_x(\tau)) \\ &= \underbrace{\frac{A^2}{4}(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0))}_{\text{Deux fréquences pures}} \end{aligned}$$

- Méthode 2

  On a

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t) = \underbrace{\frac{A}{2}}_{c_1} e^{j2\pi f_0 t} + \underbrace{\frac{A}{2}}_{c_{-1}} e^{-j2\pi f_0 t}$$

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= \frac{A^2}{4}\underbrace{\mathrm{TF}^{-1}[\delta(f - f_0)]}_{e^{j2\pi f_0 \tau}} + \frac{A^2}{4}\underbrace{\mathrm{TF}^{-1}[\delta(f + f_0)]}_{e^{-j2\pi f_0 \tau}} \\ &= \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0 \tau) \end{aligned}$$

Remarque : $R_x(0) = \text{puissance} = \frac{A^2}{2}$

1.2.3. Déterministes à puissance finie

Théorème 1.2.3.1 :

Définition $P = \lim_{T_0 \to \infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 \mathrm{d}t < \infty$

Produit scalaire $\langle x, y\rangle = \lim_{t\to\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)y^*(t)\mathrm{d}t$

Fonction d'autocorrélation $R_x(\tau) = \langle (x(t), x(t-\tau))\rangle$

Fonction d'intercorrélation $R_{xy}(\tau) = \langle (x(t), y(t-\tau))\rangle$

Définition 1.2.3.1 : On définit la densité spectrale de puissance par

$$s_x(f) = \mathrm{TF}\, R_x(\tau)$$

Proposition 1.2.3.1 :

$$s_x(f) = \lim_{t\to\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left|X_{T(f)}\right|^2 \mathrm{d}f$$

avec

$$X_T(f) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)e^{-j2\pi f t}\mathrm{d}t$$

1.2.4. Aléatoires stationnaires

Théorème 1.2.4.1 :
Moyenne $E[x(t)]$ indépendant de t
Moment d'ordre 2 $E[x(t)x^*(t-\tau)]$ indépendant de t

Produit scalaire $\langle x, y\rangle = E[x(t)y^*(t)]$

Fonction d'autocorrélation $R_x(\tau) = \langle x(t), x(t-\tau)\rangle = E[x(t)x^*(t-\tau)]$

Fonction d'intercorrélation $R_{xy}(\tau) = \langle x(t), y(t-\tau)\rangle = E[x(t)y^*(t-\tau)]$

Définition 1.2.4.1 :
Puissance moyenne $P = R_x(0) = E\left[\left|x(t)^2\right|\right] = \int_{\mathbb{R}} s_x(f)\mathrm{d}f$
Densité spectrale de puissance $s_x(f) = \mathrm{TF}\, R_x(\tau) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{T} E\left[|X_T(f)|^2\right]$

Remarque : En général $X(f)$ n'existe pas !

Exemple : $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \theta)$ avec $\theta \sim \mathcal{U}([0, 2\pi])$

$$m_x(t) = E_\theta(x(t)) = 0$$

1.3. Propriétés de $R_x(\tau)$ et de $s_x(f)$

Théorème 1.3.1 : Propriétés de $R_x(\tau)$

Symétrie hermitienne $R_x(\tau) = R_x^*(-\tau)$
Valeur maximale $|R_x(\tau)| \leq R_x(0)$
Distance entre $\boldsymbol{x(t)}$ et $\boldsymbol{x(t-\tau)}$ Si $x(t)$ est un signal réel :

$$d^2[x(t), x(t-\tau)] = 2[R_x(0) - R_x](\tau)$$

Donc $R_x(\tau)$ mesure le lien entre $x(t)$ et $x(t-\tau)$
Décomposition de Lebesgue on a

$$R_x(\tau) = R_1(\tau) + R_2(\tau)$$

où
- $R_1(\tau)$ est une somme de fonctions périodiques
- $R_2(\tau) \underset{\tau\to+\infty}{\to} 0$

Théorème 1.3.2 : Propriétés de $s_x(f)$

DSP réelle $s_x(f) \in \mathbb{R}$
Si $\boldsymbol{x(t)}$ est un signal réel $s_x(f)$ est paire
Positivité $s_x(f) \geq 0$
Lien entre DSP et puissance/énergie P ou $E = \int_{\mathbb{R}} s_x(f)\mathrm{d}f$
Décomposition $s_x(f) = s_1(f) + s_2(f)$ où
- $s_1(f)$ est un spectre de raies
- $s_2(f)$ est un spectre continu

2. Filtrage Linéaire

Remarque : Une opération de filtrage est comme une boîte noire qui prend un signal en entrée et qui produit un signal en sortie.

Définition 2.1 : On cherche une opération T qui a les propriétés suivantes

Linéarité $T(ax(t) + by(t)) = aT(x(t)) + bT(y(t))$
Invariance dans le temps Si $y(t) = T(x(t))$, alors $T(x(t-t_0)) = y(t-t_0)$
Stabilité BIBO Si $x(t)$ est borné, alors $T(x(t))$ est borné

Définition 2.2 : Réponse impulsionnelle On définit la réponse impulsionnelle d'un filtre par

$$H(f) = \mathrm{TF}(h(t)) = \int_{\mathbb{R}} h(t)e^{-j2\pi f t}\mathrm{d}t$$

si $x(t) = \delta(t)$, alors $y(t) = h(t)$, ceci permet d'obtenir la seule réponse impulsionnelle possible.

2.1. Réalisation d'un filtre

Définition 2.1.1 :

- Domaine temporel
  1. $h(t)$ réelle
  2. $h(t) \in L^1$ (stabilité)
  3. $h(t)$ causale (filtre sans mémoiré)
- Domaine spectral
  1. $H^*(-f) = H(f)$ (symétrie hermitienne)
  2. ne peut se traduire
  3. $H(f) = -j\widetilde{H}(f)$, où $\widetilde{H}(f) = H(f)\frac{1}{\pi f}$ est la transformée de Hilbert de H

Méthode 2.1.1 : Identifier une relation de filtrage linéaires

1. Signaux déterministes $y(t) = x(t) \times h(t) \Leftrightarrow Y(f) = X(f)H(f)$ (i.e. on a tout identifié)
2. signaux aléatoires Si $x(t) \overset{I}{\leftrightarrow} e^{j2\pi f t}$, alors $y(t) \leftrightarrow e^{j2\pi f t}H(f)$ (on va montrer qu'on peut faire une correspondance à l'aide d'une isométrie)

2.2. Relations de Wiener Lee

Définition 2.2.1 :
Densité spectrale de puissance $s_y(f) = |H(f)|^2 s_x(f)$
Fonction d'intercorrélation $R_{yx}(\tau) = h(\tau)R_x(\tau)$
Fonction d'autocorrélation $R_y(\tau) = h(\tau)h^*(-\tau)R_x(\tau)$

2.3. Interférences

Théorème 2.3.1 : Formule

- Hypothèses $y_1(t) = x(t) \times h_1(t)$ et $y_2(t) = x(t) \times h_2(t)$
- Formule $R_{y_1 y_2}(\tau) = \int_{\mathbb{R}} s_x(t)H_1(f)H_2^*(f)e^{j2\pi f\tau}\mathrm{d}f$

3. Partiel

1. stationarité à l'ordre 1
2. vérifier à l'ordre 2 et démontrer que ça dépend que de τ