Résumé - Traitement du Signal

22 Janvier, 2024

Louis Thevenet

Table des matières

1. Corrélations et Spectres

1.1. Transformée de Fourier

1.2. Classes de signaux déterministes et aléatoires

Théorème 1.2.1 : Classes de signaux

1. Déterministes à **énergie finie**
2. Déterministes **périodiques à puissance finie**
3. Déterministes **non périodique à puissance finie**
4. Aléatoires **stationnaires**

1.3. Déterministes à énergie finie

Théorème 1.3.1 : Signaux à énergie finie

Définition $E = \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} |X(f)|^2 \mathrm{d}f < \infty$

Fonction d'autocorrélation $R_x(\tau) = \int_{\mathbb{R}} x(t)x^*(t-\tau)\mathrm{d}t = \langle x(t), x(t-\tau)\rangle$

Fonction d'intercorrélation $R_{\{xy\}}(\tau) = \int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t-\tau)\mathrm{d}t = \langle x(t), y(t-\tau)\rangle$

Produit scalaire $\langle x, y\rangle = \int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t)\mathrm{d}t$

Définition 1.3.1 : On définit la densité spectrale d'énergie par

$$s_x(f) = \mathrm{TF}\, R_x(\tau)$$

Proposition 1.3.1 : $s_x(f) = |X(f)|^2$

Exemple : $x(t) = \Pi_T(t)$ avec T la largeur de la fenêtre

On cherche la **fonction d'autocorrélation** et **la densité spectrale d'énergie** de $x(t)$.

- Méthode 1
  - Calcul de $R_x(\tau)$ $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(\tau)x(t-\tau)\mathrm{d}t$
    - Premier cas : $\tau - \frac{T}{2} > \frac{T}{2} \Leftrightarrow \tau > T$ $R_x(\tau) = \int 0\mathrm{d}t = 0$
    - Deuxième cas : $\begin{cases} \tau - \frac{T}{2} < \frac{T}{2} \\ \tau + \frac{T}{2} > \frac{T}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \tau \in]0, T[$ $R_x(\tau) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\tau - \frac{T}{2}} 1 \times 1\mathrm{d}t = T - \tau$

    Comme R_x est paire, il suffit de la connaître entre 0 et ∞. Ainsi $R_x(\tau) = T\Lambda_T(\tau)$
  - Calcul de s_x (f) $s_x(f) = \mathrm{TF}(R_x(\tau)) = T \times T\,\mathrm{sinc}^2(\pi\tau f) = T^2\,\mathrm{sinc}^2(\pi\tau f)$

- Méthode 2
  - Calcul de $s_x(f) = |x(f)|^2$

  $$x(\tau) \xrightarrow{\mathrm{TF}} X(f) = T\,\mathrm{sinc}(\pi\tau f)$$
  $$\xrightarrow{|\,|^2} s_{x(f)} = |X(f)|^2 = T^2\,\mathrm{sinc}^2(\pi\tau f)$$

  - Calcul de $R_x(\tau)$

  $$\begin{aligned} R_x(\tau) &= \mathrm{TF}^{-1}\, s_x(f) \\ &= T^{-1}(\mathrm{sinc}(\pi\tau f)) \\ &= T\Lambda_T(\tau) \end{aligned}$$

1.4. Déterministes périodiques

Définition 1.4.1:

Definition $P = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 \mathrm{d}t < \infty$

Fonction d'autocorrélation $R_x(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)x^*(t-\tau)\mathrm{d}t = \langle x(t), x(t-\tau)\rangle$

Fonction d'intercorrélation $R_{xy}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)y^*(t-\tau)\mathrm{d}t = \langle x(t), y(t-\tau)\rangle$

Produit scalaire $\langle x, y\rangle = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)y^*(t)\mathrm{d}t$

Définition 1.4.2: On définit la densité spectrale de puissance par

$$s_x(f) = \mathrm{TF}\, R_x(\tau)$$

Proposition 1.4.1:

$$s_x(f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 \delta(f - kf_0)$$

avec $x(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \exp(j2\pi k f_0 t)$

Exemple : $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} A\cos(2\pi f_0 t) A\cos(2\pi f_0 (t-\tau))\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \frac{A^2}{2}\underbrace{\cos(4\pi f_0 t - 2\pi f_0\tau) + \cos(2\pi f_0\tau)}_{\cos(a)\cos(b)=\frac{1}{2}(\cos(a+b))+\cos(a-b)}\mathrm{d}t \\ &= 0 + \frac{1}{T_0}\frac{A^2}{2}\left(\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}\mathrm{d}t\right)\cos(2\pi f_0\tau) \\ &= \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0\tau) \end{aligned}$$

- Méthode 1

$$\begin{aligned} s_x(f) &= \mathrm{TF}(R_x(\tau)) \\ &= \underbrace{\frac{A^2}{4}(\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0))}_{\text{Deux fréquences pures}} \end{aligned}$$

- Méthode 2

  On a

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t) = \underbrace{\frac{A}{2}}_{c_1}e^{j2\pi f_0 t} + \underbrace{\frac{A}{2}}_{c_{-1}}e^{-j2\pi f_0 t}$$

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= \frac{A^2}{4}\underbrace{\mathrm{TF}^{-1}[\delta(f-f_0)]}_{e^{j2\pi f_0\tau}} + \frac{A^2}{4}\underbrace{\mathrm{TF}^{-1}[\delta(f+f_0)]}_{e^{-j2\pi f_0\tau}} \\ &= \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0\tau) \end{aligned}$$

Remarque : $R_x(0) = \text{puissance} = \frac{A^2}{2}$

2. Filtrage Linéaire

3. Traitements non linéaires