Calcul Scientifique - Cours

24 Janvier, 2024

Louis Thevenet

Table des matières

1. Recherche de valeurs propres et vecteurs propres

1.1. Localisation des valeurs propres

Théorème 1.1.1: d'Hadamard-Gershgorin

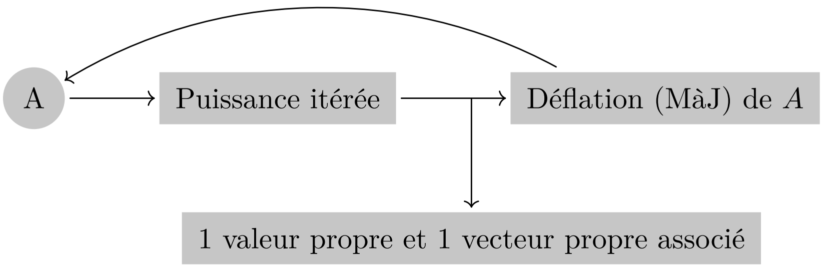
Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, les valeurs propres de A ont des images dans le plan complexe et qui appartiennent à $\bigcup_{i=1}^{n} D_i$ avec $D_i = \left\{ z \in \frac{\mathbb{C}}{|z-a_{i,i}|} \le \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \right\}$

Remarque : si $A \in M_n(\mathbb{R})$ et si toutes les valeurs propres de A sont réelles, alors D_i et $\bigcup_{i=1}^{n} D_i$ sont des intervalles de $\mathbb{R}$.

Corollaire 1.1.1.1:

$$\rho(A) \le \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$$

1.2. Algorithme de la puissance itérée



Input : Matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
Output : (λ_1, v_1) couple propre associé à la plus grande (en module) valeur propre.
$x_0 \in \mathbb{R}^n$ donné et $p = 0$
$\beta_p = {x_p}^T \cdot A \cdot x_p$
repeat
  $y_{p+1} = A \cdot x_p$
  $x_{p+1} = y_{p+1} / \|y_{p+1}\|$
  $\beta_{p+1} = {x_{p+1}}^T \cdot A \cdot x_{p+1}$
  $p = p + 1$
until $|\beta_{p+1} - \beta_p| / |\beta_p| < \varepsilon$
$\lambda_1 = \beta_{p+1}$ et $v_1 = x_{p+1}$

Fig. 1. – Méthode de la puissance itérée

- 1ère application de l'algorithme : on obtient λ_1 et un $\vec{\text{vp}}$ associé
- 2ème application de l'algorithme : on obtient λ_2 et un $\vec{\text{vp}}$ associé
- En n passages, on obtient les vp et une base de $\vec{\text{vp}}$ associés

Exercise I:

- Soit $x \in \mathbb{R}^n$

  Si $A - \alpha I$ n'est pas inversible, alors $A - \alpha I$ singulière et α est valeur propre de A.

  $Au = \lambda u \Rightarrow (A - \alpha I) = (\lambda - \alpha)u$

  $$\underset{\lambda \ne \alpha}{\Rightarrow} \frac{1}{\lambda - \alpha} u = (A - \alpha I)^{-1} u$$

  $$\Rightarrow u \, \vec{\text{vp}} \text{ de } (A - \alpha I)^{-1}$$

  $$\Rightarrow \mu = \frac{1}{\lambda - \alpha} \text{ vp associée}$$

- Résoudre $Ay_{i+1} = x_i \Leftrightarrow y_{i+1} = A^{-1} x_i$ L'algo est *presque* celui de la Fig. 1 appliqué à A^{-1}

  Supposons que $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ vp et $v_1, \dots, v_n$ $\vec{\text{vp}}$ associés à A

  Alors, $\left(\frac{1}{\lambda_1}, v_1\right), \dots, \left(\frac{1}{\lambda_n}, v_n\right)$ sont vp et $\vec{\text{vp}}$ associés à A^{-1}

1.3. Algorythme de Jacobi

Définition 1.3.1:

- Procédé itératif : $\begin{cases} A_1 = A \\ A_{k+1} = \Theta_k^{-1} A_k \Theta_k \end{cases}$
- Jusqu'à congergence : $\lim_{k \to \infty} A_k = D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$
- Choix de Θ_k ? Une matrice orthogonale (donc $\Theta_k^{-1} = \Theta_k^T$) car $\forall$:
  - $A_k \in S_n$
  - A_k a les mêmes vp que A ($\vec{\text{vp}}$ différents)

  Pour obtenir les vp de A, il suffit que A_k converge vers une matrice diagonale.