Automatique - Résumé

October 19, 2023

THEVENET Louis

Table des matières

1. Définitions 1
2. Systèmes dynamiques et stabilité 1
  2.1. Equations différentielles linéaires autonomes 1
  2.2. Equations différentielles linéaires avec second membre 1
  2.3. Stabilité des équilibres 1
3. Stabilisation des systèmes dynamiques contrôlés 2
  3.1. Contrôlabilité 3
  3.2. Stabilisation par retour d'état 3
    3.2.1. Cas linéaire 3
    3.2.2. Cas non linéaire 4

1. Définitions

Définition 1.1: On appelle x_e, u_e point de fonctionnement si $f(x_e, u_e) = 0$. On dit que x_e est un point d'équilibre pour le contrôle u_e

2. Systèmes dynamiques et stabilité

2.1. Equations différentielles linéaires autonomes

Théorème 2.1.1: L'unique solution globale du problème $\begin{cases} \dot{x}(t)=Ax(t) \\ x(t_0)=x_0 \end{cases}$ s'écrit :

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0$$

2.2. Equations différentielles linéaires avec second membre

Théorème 2.2.1: L'unique solution globale du problème $\begin{cases} \dot{x}(t)=Ax(t)+b(t) \\ x(t_0)=x_0 \end{cases}$ s'écrit :

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}b(s)\mathrm{d}s$$

2.3. Stabilité des équilibres

Théorème 2.3.1: Pour le problème $\dot{x}(t) = Ax(t)$:

- Si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \mathbb{R}_-^*$, alors l'origine est un **équilibre asymptotiquement stable**
- Si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \mathbb{R}_-$, et que pour toute vp $\lambda \in \mathbb{R}_-$, les multiplicités algrébriques et géométriques coïncident, alors l'origine est un **équilibre stable**
- Si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \cap \mathbb{R}_+^* \neq \emptyset$, alors l'origine n'est pas un **équilibre stable**

Avec $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{\mathrm{Re}(\lambda) \mid \lambda \in \mathrm{SP}(A)\}$

Théorème 2.3.2: Pour x_e point d'équilibre de $\dot{x}(t) = f(x(t))$
- Si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f'(x_e)) \cap \mathbb{R}_-^*$, alors x_e est **asymptotiquement stable**
- Si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f'(x_e)) \cap \mathbb{R}_+^* \neq \emptyset$, alors x_e n'est pas un **équilibre stable**

Avec $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f'(x_e)) = \{\mathrm{Re}(\lambda) \mid \lambda \in \mathrm{SP}(f'(x_e))\}$
Attention, ce n'est pas parce que toutes les valeurs propres sont à partie réelle négative ou nulle que l'équilibre est stable.

3. Stabilisation des systèmes dynamiques contrôlés

Définition 3.1: On s'intéresse aux systèmes de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Ici, $x(t)$ est l'état du système au temps t et $u(t)$ est le contrôle qui agit sur le système.

Le contrôle par **retour d'état** auquel on s'intéressera est de la forme :

$$u(t) = u_e + K(x(t) - x_e),\ K \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$$

au voisinage d'un point de contionnement (x_e, u_e)

Théorème 3.1: Pour le système contrôlé linéaire

$$(\Sigma_{u,L})\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}) \end{cases}$$

La solution maximale est globale est vaut :

$$x_u(t, x_0) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)\mathrm{d}s$$

3.1. Contrôlabilité

Définition 3.1.1:

L'**ensemble accessible** $\mathcal{A}(t, x_0)$ en temps $t \geq 0$ depuis $x_0 \in \Omega$ pour (Σ_u) est : $\mathcal{A}(t, x_0) := \{x_u(t, x_0) \mid u \in \mathcal{C}^0([0, t], \Pi)\}$

i.e. l'ensemble des solutions au temps t pour tout contrôle u admissible.

Définition 3.1.2:

Pour $t > 0$, (Σ_u) est :

- contrôlable depuis $x_0 \in \Omega$ en t si $\mathcal{A}(t, x_0) = \Omega$
- complètement contrôlable en t si $\mathcal{A}(t, x_0) = \Omega, \forall x_0 \in \Omega$
- localement contrôlable en $x_0 \in \Omega$ en t autour de $x_1 \in \Omega$ si $x_1 \in \mathrm{Int}(\mathcal{A}(t, x_0))$

Théorème 3.1.1: Dans le cas **linéaire**, $(\Sigma_{u,L})$ est **complètement contrôlable** $\forall t > 0 \Leftrightarrow$

$$\mathrm{rg}(B \;\; AB \;\; ... \;\; A^{n-1}B) = n$$

On appelle la matrice $(B \;\; AB \;\; ... \;\; A^{n-1}B)$ matrice de contrôlabilité.

3.2. Stabilisation par retour d'état

3.2.1. Cas linéaire

Définition 3.2.1.1: $\Sigma_{u,L}$ est dit **asymptotiquement stabilisable** si $\exists K \in \mathcal{M}_{m,n}$ telle que

$$u(t) = Kx(t)$$

stabilise asymptotiquement **à l'origine** le système bouclé

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) = (A + BK)x(t)$$

Théorème 3.2.1.1: Si A et B satisfont le critère de contrôlabilité de Kalman, alors le système associé $\left(\Sigma_{u,L}\right)$ est asympotiquement stabilisable.

3.2.2. Cas non linéaire

Ici on considère un système contrôlé non linéaire autonome $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ et on s'intéresse à la stabilisation autour de x_e, u_e par le **retour d'état linéaire** :

$$u(t) = u_e + K(x(t) - x_e)$$

le système bouclé est donc :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u_e + K(x(t) - x_e)) = f(x(t), \overline{u}(x(t))) =: g(x(t))$$

avec $\overline{u}(x) = u_e + K(x - x_e)$

Ainsi, x_e est un point d'équilibre de g, i.e. la stabilité de x_e est liée aux vp de $g'(x_e)$ Or,

$$g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, \overline{u}(x)) + \frac{\partial f}{\partial u}(x, \overline{u}(x))K$$

Par suite, $g'(x_e) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_e, u_e)) + \frac{\partial f}{\partial u}(x_e, u_e)K = A + BK$

Il nous faut trouver $K \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ telle que les vp de $g'(x_e) = A + BK$ soient à parties réelle strictement négative.