Conversion Analogique Numérique

louis tomczyk

11 février 2024

Table des matières

1 Bibliographie

Chadi JABBOUR, Électronique des Systèmes d'Acquisition Traitement et Propagation des Signaux Physiques, 2022, Télécom Paris

2 Conversion d'une valeur analogique

En entrée on a un signal à temps continu (x) que l'on transforme en signal discret $(b_k)_{k\in J\subset\mathbb{N}}$. L'équation de définition du convertisseur est :

$$x[k] = V_{min} + \left(\sum_{j=1}^{N_b+1} \frac{b_j[k]}{2^j}\right) \cdot PE + e \tag{1}$$

où :

- $PE = V_{max} - V_{min}$: la tension de Plein Échelle
- $V_{min/max}$: la tension min/max supportées par le CAN
- e l'erreur de quantification
- N_b : le nombre de bits utilisés par la quantification

On peu poser le pas de quantification :

$$\boxed{q = PE/2^{N_b}} \tag{2}$$

Ainsi on peut réécrire la somme précédente selon :

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{N_b+1} \frac{b_j[k]}{2^j}\right) \cdot PE &= \sum_{j=1}^{N_b+1} \frac{b_j[k]}{2^j} \cdot PE + \frac{PE}{2^{N_b+1}} && (3)\\
&= \sum_{j=1}^{N_b+1} b_j[k] 2^{N_b-j} \frac{PE}{2^{N_b}} + \frac{q}{2} && (4)\\
&= Nq + \frac{q}{2} && (5)
\end{aligned}$$

Ce qui permet de réécrire le signal x à l'échantillon k selon :

$$x[k] = V_{min} + \left(N + \frac{1}{2}\right) \cdot q + e \tag{6}$$

où la sortie numérique du convertisseur N est :

$$\boxed{N = \sum_{j=1}^{N_b+1} b_j[k] 2^{N_b - j}} \tag{7}$$

Remarques On note :

- b_1 : le Most Significant Bit (MSB)
- b_{N_b} : le Least Significant Bit (LSB)
- $+q/2$: ce terme permet de centrer l'erreur : $e \in [-1, 1] \cdot q/2$

Par exemple si on a :

$$\begin{cases} PE & = & 2\ [V] & \backslash & V_{max} = -V_m = 1\ [V] \\ N_b & = & & & 3 \end{cases} \implies q = 2/(2^3) = 1/4 \tag{8}$$

Si $x[k] = -0.41\ [V]$ alors :

$$-0.41 = -1 + (N + 0.5)/4 + e \iff N = \frac{x[k] - e - V_{min}}{q} - \frac{1}{2} = 1.86 - 4 \cdot e \tag{9}$$

Or l'erreur est encadrée :

$$-\frac{q}{2} \quad < e < \quad \frac{q}{2} \tag{10}$$

$$1.86 + 2q \quad > 1.86 - 4e > \quad 1.86 - 2q \tag{11}$$

$$2.36 \quad > 1.86 - 4e > \quad 1.36 \tag{12}$$

D'où $N = 2$.
Le mot binaire s'écrit donc ici :

$$N = 2 \quad = \quad \sum_{j=1}^{N_b+1} b_j[k] 2^{3-j} \tag{13}$$

$$= \quad b_1[k] \cdot 2^2 + b_2[k] \cdot 2^1 + b_3[k] \cdot 2^0 \tag{14}$$

Or $\forall j, b_j \in \{0, 1\}$, donc nécessairement :

$$x[k] = -0.41 \equiv (0\ 1\ 0) \tag{15}$$

L'erreur de quantification quant à elle :

$$x[k] \quad = \quad V_{min} + b_1[k]\frac{PE}{2^1} + b_2[k]\frac{PE}{2^2} + b_3[k]\frac{PE}{2^3} + \frac{PE}{2^4} + e \tag{16}$$

$$= \quad -1 + 0 + 1 \cdot 0.5 + 0 + 0.125 + 0 + e \iff e = -0.035 \tag{17}$$

$$= \quad -1 + \left(2 + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{4} + e \iff e = -0.035 \tag{18}$$

3 Impact sur le bruit

3.1 Densité spectrale du bruit

La variance du bruit est liée à l'erreur de quantification selon :

$$\sigma^2(e) = \frac{1}{q} \cdot \int_{-q/2}^{q/2} e^2 de = \frac{q^2}{12} \tag{19}$$

La Densité Spectrale de Puissance (DSP) du bruit lie la puissance du bruit à la plage de fréquence considérée selon :

$$P_e = \int_{-f_e/2}^{f_e/2} \gamma(f) df \quad \backslash \quad \gamma \equiv [W/Hz] \tag{20}$$

où f_e $[Hz]$ est la fréquence d'échantillonnage.

Or la puissance d'un signal aléatoire centré est exactement sa variance :

$$\boxed{P_e = \langle |e|^2 \rangle = \sigma^2(e)} \tag{21}$$

On peut donc en déduire la DSP :

$$\gamma(f) = \frac{\sigma^2(e)}{f_e} = \frac{q^2}{12 \cdot f_e} \tag{22}$$

Remarque Ce qui n'est rien d'autre que la variance d'une variable aléatoire uniforme sur le segment $[-1, 1] \cdot q/2$.

Pour un signal purement sinusoïdal :

$$x(t) = A \cdot cos(\omega t) \implies P_x = \frac{1}{T} \cdot \int_T |x^2(t)| dt = \frac{A^2}{2} \tag{23}$$

Le Rapport Signal à Bruit (RSB) s'écrit alors :

$$\begin{cases} RSB & = & \frac{P_x}{P_e} = 6 \cdot \frac{A^2}{q^2} \\ q & = & \frac{PE}{2^{N_b}} \end{cases} \implies RSB = \frac{3}{2} \cdot 2^{2N_b} \cdot \left(\frac{2A}{PE}\right)^2 \tag{24}$$

Ou encore en échelle log :

$$\boxed{RSB_{dB} = 10 \cdot \log_{10}(RSB) \approx 1.76 + 6.02 \cdot N_b + 20 \log_{10}\left(\frac{2A}{PE}\right)} \tag{25}$$

On remarque donc que pour une entrée sinusoïdale, chaque bit de quantification supplémentaire réduit par 4 le niveau de bruit (6 $[dB]$) !

3.2 Étalement du bruit

Dans le cas d'un bruit blanc dans la bande spectrale considérée B nous avons tout simplement la puissance du bruit P_b qui s'écrit en fonction de la densité spectrale de bruit $f \mapsto \gamma(f)$ qui est constante à γ :

$$P_b = B \cdot \gamma_0 \tag{26}$$

Sur-échantillonner n'ajoute dans l'idéal pas de bruit car on ne change pas les statistiques du signal que l'on échantillonne. À puissance contante, si le support s'élargit (devient B') sans modifier la nature de γ alors dans ce cas on a une nouvelle densité de bruit γ', illustrée sur la figure 3.2.1 telle que :

$$\boxed{P_b = B' \cdot \gamma' \quad \backslash \quad B' = c_s \cdot B \quad \backslash \quad c_s \geq 2} \tag{27}$$

où l'on introduit le coefficient de Shannon c_s. On peut alors calculer γ' selon :

$$P_b = P_b \iff \gamma' = \gamma_0 / c_s \tag{28}$$

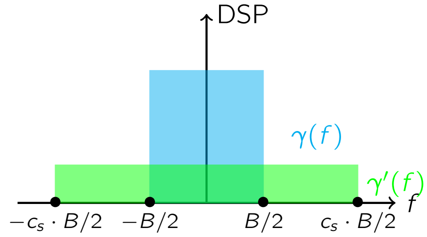

Figure 3.2.1 – Illustration de l'étalement du bruit induit par un sur-échantillonnage de facteur $c_s > 2$.

3.3 Taux de rejet

Dans la bande d'intérêt B la puissance de bruit $P_b^{(B)}$ a diminué :

$$\boxed{P_b^{(B)} = \gamma' \cdot B = P_b / c_s} \tag{29}$$

Et la puissance de bruit transférée dans la bande externe $P_b^{(BB')}$ est :

$$P_b^{(BB')} = P_b - P_b^{(B)} = \left(1 - \frac{1}{c_s}\right) \cdot P_b \tag{30}$$

On peut alors définir un taux de rejet $t_{BB'}$ comme étant le rapport de la puissance de bruit rejetée hors de la bande d'intérêt sur la puissance de bruit initiale :

$$\boxed{t_{BB'} = \frac{P_b^{(BB')}}{P_b} = 1 - \frac{1}{c_s}} \tag{31}$$