Émissions radioactive

Author : ℓouis tomczyk
Date : 15 septembre 2024
Version : v1.0.0

1 Objectifs

On étudie les statistiques des émissions radioactives d'un ensemble de particules identiques régies par des une même et unique loi de désintégration.

Ce document reprend un exercice de TD dans le Mooc Mécanique Quantique de l'École Polytechnique[1].

2 Cas d'une particule

2.1 Loi de désintégration

On note t le temps et $S(t)$ la variable aléatoire (v.a.) désignant la « Survie » de la particule jusqu'au temps t et $D(t)$ la v.a. désignant sa « Désintégration ».

On considère la désintégration spontanée d'une particule comme étant un phénomène **« sans mémoire »**, ainsi les évènements $\bullet(T_1)$ et $\bullet(T_2)$ pour $T_1 \cup T_2 = \emptyset$ où $\bullet \in \{S, D\}$, sont indépendants.

Après un temps t, la probabilité de désintégration de la particule au bout d'une durée dt est donnée par :

(1) $$\mathbb{P}_D(t+dt) = \int_t^{t+dt} p_D(x)\ dx = \gamma dt$$

La probabilité de survie au bout de $t + dt$ peut s'écrire avec les évènements suivants :

(2) $$S(t+dt) = S(t) \cap S(dt)$$

Ainsi en termes de probabilités nous avons :

(3) $$\mathbb{P}_S(t+dt) = \mathbb{P}_S(t) \cdot \mathbb{P}_S(dt) = \mathbb{P}_S(t) \cdot [1 - \mathbb{P}_D(dt)] = \mathbb{P}_S(t) \cdot (1 - \gamma dt)$$

En passant à la limite $dt \to 0$, nous avons donc une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants :

(4) $$\boxed{\mathbb{P}_S(t) = e^{-\gamma t}}$$

On peut en déduire la fonction densité :

(5) $$\mathbb{P}_S(t) = \int_0^t p_S(x)dx = e^{-\gamma t} \iff \boxed{p_S(x) = -\gamma \cdot e^{-\gamma x}}$$

Immédiatement on peut en déduire la densité de D puisque :

(6) $$\forall t \in \mathbb{R}^+, \mathbb{P}_D(t) + \mathbb{P}_S(t) = 1 \iff \boxed{\mathbb{P}_D(t) = 1 - e^{-\gamma t}}$$

Ce qui n'est pas en contradiction avec l'écriture au dessus puisque la loi est sans mémoire :

(7) $$\mathbb{P}_D(t+dt) = \int_t^{t+dt} p_D(x)dx = \int_0^{dt} p_D(x)dx = 1 - e^{-\gamma dt} \underset{dt\to 0}{\to} \gamma dt$$

Quant à la densité p_D nous avons :

(8) $$\mathbb{P}'_D(t) = \left(\int_0^t p_D(x)dx\right)' = \boxed{p_D(t) = \gamma \cdot e^{\gamma t}}$$

2.2 Moments

Pour la durée moyenne avant désintégration nous utilisons la définition de l'espérance avec une Intégration Par Parties (IPP) :

(9) $$\langle D \rangle = \int_t x \cdot p_D(x)dx = \gamma \cdot \left\{ \left[\frac{x}{-\gamma} \cdot e^{-\gamma x}\right]_{\mathbb{R}^+} - \frac{1}{-\gamma}\int_{\mathbb{R}^+} e^{-\gamma x} dx \right\} = \frac{1}{\gamma}$$

Ainsi nous avons : $\boxed{\langle D \rangle = \gamma^{-1}}$.

Pour la variance il faut faire une seconde IPP :

(10) $$\langle D^2 \rangle = \int_t x^2 \cdot p_D(x)dx = \gamma \cdot \left\{ \left[\frac{x^2}{-\gamma} \cdot e^{-\gamma x}\right]_{\mathbb{R}^+} - \frac{2}{-\gamma}\int_{\mathbb{R}^+} x \cdot e^{-\gamma x} dx \right\} = \frac{2}{\gamma^2}$$

et donc la variancen en utilisant Köenig-Huygens :

$$\boxed{\sigma_D^2 = \langle D^2 \rangle - \langle D \rangle^2 = \langle D \rangle^2} \tag{11}$$

3 Cas d'un ensemble de particules

3.1 Loi Binomiale du nombre de particules désintégrées

Ici on considère plusieurs particules identiques suivant la même loi de désintégration. Notons X_k la v.a. représentant la désintégration de la k-ième particule au bout d'un temps Δt. Cette v.a. suit donc une loi de Bernoulli de paramètre $p = \gamma \Delta t$.

Notons $n = \cap_{m=1}^{k} X_m$ le nombre de particules s'étant désintégrées au bout du temps Δt. Nous cherchons la loi de la v.a. n. Il est clair qu'il s'agit d'une loi Binomiale de paramètre k et de probabilité $p = \gamma \Delta t$ car les v.a. $\{X_k\}$ sont Indépendantes et Identiquement Distribuées (iid). Ainsi la probabilité $n = k$ est donnée par :

$$\mathbb{P}(n = k) = C_n^k \cdot [1 - \mathbb{P}_S(\Delta t)]^k \cdot \mathbb{P}_S(\Delta t)^{n-k} = C_n^k \cdot e^{-(n-k)\cdot\gamma\Delta t} \cdot [\gamma \Delta t]^k \tag{12}$$

3.2 Loi de Poisson du nombre de particules désintégrées

On peut ici faire des approximations comme considérer $n \gg k$ et simplifier le coefficient binomial :

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n^k \cdot \prod_{m=0}^{k-1}[1-(m/n)]}{k!} \underset{k/n\to 0}{\sim} \frac{n^k}{k!} \tag{13}$$

Ce qui permet de ré-écrire la probabilité selon :

$$\boxed{\mathbb{P}(n = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \quad \backslash \quad \lambda = n\gamma\Delta t} \tag{14}$$

Pour les moments on a en découpant la factorielle du dénominateur, et par un changement d'indice la moyenne et la variance directement valant $\boxed{\langle n \rangle = \sigma_n^2 = \lambda = n\gamma\Delta t}$.

3.3 Loi Normale du nombre de particules désintégrées

Si l'on augmente encore n devant k et que l'on regarde au niveau du mode tel que l'on s'en écarte d'une valeur x et en utilisant la formule de Stirling :

$$k = (1+x)\cdot\lambda \quad \& \quad n! \underset{n\uparrow+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\cdot n^n \cdot e^{-n} \tag{15}$$

Alors on peut réécrire la probabilité selon :

$$\mathbb{P}(n = k) \underset{n\uparrow+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \exp[-\lambda + k + k\cdot\ln(\lambda) - k\cdot\ln(k)] \tag{16}$$

$$\underset{n\uparrow+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \exp[\lambda x - \lambda(1+x)\cdot\ln(1+x)] \tag{17}$$

$$\underset{n\uparrow+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \exp[-\lambda x^2/2)] \tag{18}$$

Où un développement limité au second ordre du logarithme a été effectué : $\ln(1+x) = x - x^2/2 + \circ(x^2)$. En remplaçant x nous avons :

$$\boxed{\mathbb{P}(n = k) \underset{n\uparrow+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot\lambda}} \exp\left[-\frac{(k-\lambda)^2}{2\lambda}\right]} \tag{19}$$

Pour les moments nous avons alors :

$$\boxed{\langle n \rangle = \sigma_n^2 = \lambda = n\cdot\gamma\Delta t} \tag{20}$$

Bibliographie

[1] École Polytechnique. « TD 1.2 : Processus de Markov ». In : *Mécanique quantique 1* (). url : https://www.coursera.org/learn/mecanique-quantique/home/info.