

22 août 2023



Le nombre d'or

louis tomczyk

SUBLIMATHS



Table des matières

1	Introduction	3
1.1	Sublimaths	3
1.2	Structure du document	3
2	Fibonacci et concept de suite	4
2.1	Invasion de lapins en Australie! 🐰, 🇦🇺, 🌍	4
2.2	Approche historique du problème 🏛️	4
2.3	Suite de Fibonacci	5
2.4	Conclusion	6
2.5	Annexe : explication de la suite 🤖, 🧠	7
3	Géométrie, architecture et nature.	8
3.1	Définition géométrique 📐, 📏	8
3.2	Nombre d'or dans l'architecture et dans la nature 🏛️, 🍷, 🌻, 🦋, 🌌	9
3.3	Constructions géométriques exactes 🛠️	9
3.4	Construction géométrique approchée : la spirale d'or 🛠️	13
3.5	Conclusion	15
3.6	Annexe : obtention des coordonnées des points de contrôle 🤖, 🧠	15
4	Pavage de Penrose	16
4.1	Vous avez dit "crayon rose"? 🖋️	16
4.2	Les pavages 🔲, 🛠️	16
4.3	Annexe : tracé du cerf-volant 🦋, 🤖, 🧠	20

1 Introduction

1.1 Sublimaths

1.1.1 Objectifs

SUBLIMATHS

Le club sublimaths propose des ateliers mathématiques dont l'objectif est d'exposer de beaux et élégants arguments mathématiques, d'entraîner la réflexion claire, et d'informer sur comment aller plus loin (lectures, vidéos, concours, etc.). Le club est animé par des étudiants de Télécom Paris [1].

1.1.2 Pour qui et quand ?

Les sublis sont prévus pour des collégiens/lycéens dès la 5ème (parents bienvenus). Ils ont lieu le samedi après-midi de 14h à 16h30. Le format est de trois périodes de 45/45/30 minutes, avec deux pauses de 15 minutes entre périodes pendant lesquelles nous goûtons. Chaque atelier aura un mix d'apprentissage et de mise en pratique à travers des exercices ludiques [1].

1.2 Structure du document

La philosophie du présent document est la suivante. Étant donné qu'il est destiné à des collégiens le niveau mathématique est donc adapté. En envisageant l'enrichissement des connaissances mathématiques au fil des années, nous espérons que la relecture de ce document continuera d'apporter de nouveaux éléments aux lecteurs. Ainsi, vous trouverez des définitions succinctes et accessibles au niveau collège, présentées dans des encadrés verts :

Un exemple de boîte à **définition**.

Étant donné que nous abordons des concepts mathématiques, des démonstrations seront également exposées. Si certaines de ces démonstrations dépassent le niveau collège, elles seront fournies dans des encadrés gris. Le cas échéant les notions nécessaires ne seront pas définies et de temps en temps des étapes de calcul peuvent être omises. Considérez alors cela comme un exercice !

Un exemple de boîte à **démonstration**

Évidemment toutes remarques de quelque nature qu'elles soient sont les bienvenues pour la mise à jour de ce travail.

En vous souhaitant une agréable lecture 😊.

2 Fibonacci et concept de suite

2.1 Invasion de lapins en Australie ! 🐰🇦🇺🌐

En 1859, le britannique Thomas Austin 🇬🇧 introduit une dizaine de lapins en Australie. 50 ans après on en dénombra 600 millions car le lapin n'a pas de prédateur naturel. Cependant les lapins étant herbivores ils entraînent une baisse de la végétation. Ceci impacte ainsi directement le régime alimentaire des kangourous 🦘 et donc les prédateurs associés. Une solution serait alors de contenir cette population mais ni l'introduction de prédateurs ou de virus spécifiques n'ont montré leur efficacité sans remettre en danger l'équilibre de l'écosystème [2].

2.2 Approche historique du problème 🏛️

Cette question d'évolution des population d'une espèce animale a été traité par l'Italien Léonardo Pisano Fibonacci 🇮🇹 dans son ouvrage Liber Abaci, [3]. Ce dernier propose une estimation de la population de lapins après un nombre de mois donnés avec les hypothèses suivantes :

1. La population initiale est de deux lapins matures sexuellement, un mâle et une femelle.
2. À chaque mois, chaque couple donne naissance à deux nouveaux lapins : un mâle et une femelle
3. chaque portée de lapereaux formera un couple sexuel (consanguinité) pouvant reproduire *uniquement* au bout d'une durée de un mois.
4. Les lapins n'ont qu'un(e) seul(e) partenaire sexuel tout au long de leur vie
5. Chaque lapin est immortel
6. Les lapins n'ont aucun prédateur
7. Malgré la consanguinité, aucun problème de santé ou de fertilité n'est manifesté

mois	$C(n)$	$C^+(n)$	$T(n)$
0	1	0	1
1	$1+0=1$	1	2
2	$1+1=2$	1	3
3	$2+1=3$	2	5
4	$3+2=5$	3	8
5	$5+3=8$	5	13
6	$8+5=13$	8	21

TABLE 1 – Dénombrement au fil des mois de la population

Ainsi, partant de ces (très fortes) hypothèses, on peut compter le nombre de lapins mois après mois. On note n le numéro du mois (qui commence à 0) et $C(n)$ le nombre de **C**ouples de lapins au début du mois n . On note finalement $C^+(n)$ le nombre de couples **s**upplémentaires à la fin du mois n . On note alors finalement $T(n)$ le nombre **T**otal de couples à la fin du mois n qui s'écrit donc¹ :

$$\forall n \in \mathbb{N}, T(n) = C(n) + C^+(n) \quad (1)$$

Le tableau 1 donne l'évolution pour les premiers mois du nombre de lapins.

Au mois $n = 0$ le premier couple de lapins est introduit, il ne se reproduit alors pas donc $C(0) = 1$ et $C^+(0) = 0$. Le nombre total de couples de lapins est alors $T(0) = 1$

Au mois $n = 1$ le couple s'est reproduit donc $C^+(1) = 1$, mais le mois précédent il n'y avait aucune portée. Donc le nombre de couples au début du premier mois est $C(1) = 1 + 0 = 1$. Le nombre total de couples de lapins à la fin du mois est alors $T(1) = 2$.

Au mois $n = 2$ au début du mois il y a alors $C(2) = 2$. Mais un seul couple est fertile, donc le nombre de couples supplémentaires au bout du mois n'est encore que $C^+(2) = 1$. Le nombre total de couples est alors $T(2) = 3$

Au mois $n = 3$ au début du mois il y a donc $C(3) = 3$ couples, mais deux parmi eux sont fertiles. Donc il y a 2 nouveaux couples : $C^+(3) = 2$. Le nombre total de couple est ainsi $T(3) = 5$.

1. Le symbole « \forall » se lit « pour tout » et « \mathbb{N} » désigne tous les entiers naturels, donc 0, 1, 2, 3, 4, L'équation se lit alors : « Pour tous n entier naturel, $T(n)$ est la somme de $C(n)$ et de $C^+(n)$ »

On peut donc en déduire les relations suivantes. Le nombre de couples supplémentaires (ou fertiles) à la fin du mois, est le nombre de couples au début du mois précédent, sauf pour le mois zéro puisque un nombre de mois négatif n'existe pas. Il est alors nécessaire d'introduire un premier terme $C^+(n=0) = 0$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, C^+(n) = C(n-1) \quad \& \quad C^+(0) = 0 \quad (2)$$

2

Mais ce qui nous importe ici, et c'est la première relation de récurrence de l'histoire³ qui porte non pas sur le nombre de lapins total ou nouveaux à chaque mois, mais sur le nombre de couples de lapins au début du mois : $C(n)$. C'est la fameuse suite de Fibonacci :

$$C(0) = 1, \quad C(1) = 1, \quad C(2) = 2, \quad C(3) = 3, \quad C(4) = 5, \quad C(5) = 8, \quad C(6) = 13 \quad (3)$$

2.3 Suite de Fibonacci

On remarque alors que chaque terme suivant dans la liste est la somme des deux termes précédents :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, C(n) = C(n-1) + C(n-2) \quad \& \quad C(0) = C(1) = 1} \quad (4)$$

4

Une **suite numérique** est ainsi d'abord un ensemble de nombres que l'on peut compter. Techniquement on dit que ces nombres sont **indexés sur les entiers naturels**. Les nombres en question ici sont $C(0), C(1), C(2), C(3), \dots$. Les indexes en question ici sont les **entiers naturels** : $0, 1, 2, 3, \dots$.

Mais ce n'est pas suffisant. Chaque nombre doit pouvoir se déduire des nombres précédents de façon logique qui se traduit par une formule mathématique. Dans l'exemple, la formule mathématique est l'équation 4. Finalement, toute suite numérique a un (ou plusieurs) point(s) de départ, ce sont les **termes initiaux de la suite**. Ici il y en a deux : $C(0)$ et $C(1)$. Ces termes initiaux permettent d'assurer **l'unicité de la suite**, autrement dit, avec la formule mathématique et ces termes initiaux il ne pourra pas y avoir deux valeurs différentes pour le même terme de la suite. Par exemple ici si l'on avait pris $C(0) = 1$ et $C(1) = 2$ alors $C(3) = C(2) + C(1) = 2 + 1 = 3$ ce qui est différent de la valeur obtenue dans le tableau 1 qui donnait $C(2) = 2$.

La donnée de la formule *seule* est alors appelée **l'expression générale de la suite**.

La donnée de la formule avec les termes initiaux définit complètement *la suite*. Il y a plusieurs façons de définir une suite. L'**écriture récurrente** est une formule mathématique qui donne le n -ième terme d'une suite en fonction des termes précédents. C'est le cas de l'équation 4. On a écrit $C(n)$ en fonction des termes précédents $C(n-1)$ et $C(n-2)$. On est alors obligé, pour connaître le terme pour $C(n=2)$ de calculer $C(n=1)$ et $C(n=0)$. Pour le terme $C(n=10)$ on doit connaître $C(9), C(8)$.

Le calcul peut être long et fastidieux de cette façon. Il existe alors **l'écriture explicite** dans laquelle on peut calculer *directement* un terme voulu *explicitement*, en fonction de n . On a plus alors besoin de connaître les termes précédents. Dans l'exemple précédent on peut alors calculer $C(10)$ sans connaître $C(9)$ ni $C(8)$ et ainsi de suite.

L'obtention de l'écriture explicite de la suite de Fibonacci demande un bagage mathématique dépassant le cadre du collège, il est donné dans l'encadré gris, voir annexe pour les curieux. On peut alors admettre ici que *l'écriture explicite* de la suite de Fibonacci est alors⁵ :

2. L'équation se lit : « Pour tous n entiers naturels différents de zéro (*), $C^+(n)$ est égal à $C(n-1)$ avec $C^+(0)$ égal à zéro. »

3. Dans les écrits occidentaux tout du moins

4. L'équation se lit : « Pour tous n entiers naturels différent de 0 et 1, $C(n)$ est égal à la somme de $C(n-1)$ et de $C(n-2)$ avec $C(0)$ égal à $C(1)$ tous deux égaux à 1. »

5. L'équation se lit : « Pour tous n entiers naturels différents de 0 et 1, $C(n)$ est égal à 'phi' puissance n moins 'psi' puissance n , le tout divisé par 'racine de 5' avec 'phi' égal à \dots et 'psi' égal à \dots »

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, C(n) = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}} \quad \& \quad \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.61828, \quad \psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \approx 0.61828 \quad (5)$$

Le nombre en bleu φ est le fameux **nombre d'or**.

Une première définition du nombre d'or est alors *une* solution de l'équation caractéristique associée à la suite de Fibonacci qui est donnée par ^a :

$$x^2 = x + 1 \quad (6)$$

a. Voir les détails dans l'annexe.

On peut obtenir un **équivalent en l'infini**⁶, c'est à dire quand n est "très très" grand et obtenir :

$$C(n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \varphi^n / \sqrt{5} \quad (7)$$

7

On peut alors, grâce à cette formule voir au bout de combien de mois après l'introduction du lapin en Australie, on obtient les 600 millions de lapins. On compte alors :

$$n = \frac{2 \cdot \ln(600 \cdot 10^6)}{\ln(\varphi)} \approx 43 \text{ mois} \approx 4 \text{ ans.} \quad (8)$$

2.4 Conclusion

Donc en moins de cinq ans la population de lapins serait passée de 2 à 600 millions d'individus ! Or Thomas Austin en a introduit 12, on s'attend donc à un nombre encore plus fou ! Les calculs sont-ils faux ? Non. Le raisonnement est-il faux ? Peut-être !

🐰 En effet, sept hypothèses dont certaines très fortes et irréalistes ont été posées. Un lapin éternel ? Aucun problème de santé, de fertilité ? Chaque portée de lapin comporte uniquement 2 lapins ? Non ! En effet une femelle a environ deux portées de cinq lapins par an. La période de gestation (grossesse) n'a pas été prise en compte et qui dure environ un mois. Puis vient la maturité sexuelle des nouveaux-nés qui vient après environ six mois. Finalement la fertilité d'un lapin est d'environ cinq ans et la monogamie n'est pas assurée.

Si pour essayer, à gros grains, d'approcher les chiffres expérimentaux on change légèrement les hypothèses pour prendre en compte les points précédents et la mortalité on annonce la chose suivante. *Chaque année*, chaque couple donne deux nouveaux lapins, alors cette fois-ci n n'est plus le nombre de mois mais d'années et on obtient ainsi environ 43 ans. Ce qui est déjà plus réaliste...

Le message est alors le suivant, faire des calculs est inutile si les hypothèses sont « simplistes ». Autrement dit, si les hypothèses mènent à des résultats de calculs ne concordant ni de près ni de loin avec les observations. Toutefois, il convient de reconnaître que l'élaboration d'hypothèses demeure, dans la plupart des cas, incontournable. Elle forme la trame même de la science, dévoilant ainsi un volet essentiel : la formulation, la vérification et la robustesse des hypothèses. Mais ce qui compte par dessus tout ce sont les méthodologies employées dans ces buts.

6. Cette écriture veut dire que si l'on prend un n suffisamment grand, alors l'équation 7 permet d'obtenir une valeur *approchée* de $C(n)$. Par exemple pour $n = 15$ on a :

$$\frac{\varphi^{15} - \psi^{15}}{\sqrt{5}} = 610 \quad \frac{\varphi^{15}}{\sqrt{5}} = 609,9997$$

7. L'équation se lit « Lorsque n tends vers l'infini, $C(n)$ est équivalent à φ^n à la puissance n , le tout divisé par racine de 5 ».

2.5 Annexe : explicitation de la suite 🤔, 🧐

Pour les curieux, afin d'expliciter la suite de Fibonacci, on peut chercher un type de solution spécifique. En effet si l'on calcule les termes suivants de la suite on a : $\{1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; 89; 144; 233; 377\}$. On remarque alors que la croissance est rapide et manifestement pas arithmétique (ajout de la même constante à chaque itération). On peut donc chercher une solution de type géométrique et donc chercher $C(n) = x^n$ où x est à déterminer. On peut réécrire l'expression récurrente selon :

$$C(n+2) = C(n+1) + C(n) \iff x^{n+2} = x^{n+1} + x^n \iff x^2 = x + 1$$

On obtient donc une équation du second degré que l'on résout en cherchant le discriminant $\Delta = 1^2 - 4 \cdot (-1) = 5 > 0$ les solutions sont alors : $x_{\pm} = (1 \pm \sqrt{5})/2$. Traditionnellement on note $\varphi = x_+$ et $\psi = x_-$. Puisqu'il y a deux racines réelles, il existe deux constantes réelles (λ, μ) telles que :

$$C(n) = \lambda \cdot \varphi^n + \mu \cdot \psi^n$$

En utilisant $C(0) = C(1) = 1$ on a le système :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda \cdot \varphi + \mu \cdot \psi = 1 \end{cases}$$

Que l'on peut résoudre à la main ou avec la formule de Cramer. On pourra remarquer que $\varphi - \psi = 1$ pour simplifier les calculs. Ce qui permet d'obtenir que $\lambda = -\mu = \sqrt{5}^{-1}$.

3 Géométrie, architecture et nature.

3.1 Définition géométrique

Une autre approche est souvent utilisée pour introduire le nombre d'or. L'objectif ici est de montrer le lien direct entre ces deux approches. Dans cette approche géométrique, il est alors question de la recherche d'un nombre qui assure l'égalité entre deux ratios/rapports. Plus précisément, prenons la figure ci-contre.

Prenons un segment $[AC]$. Plaçons un point B sur $[AC]$. On note a la longueur du segment $[AC]$ et b la longueur du segment $[BC]$.



Le ratio doré est tel qu'il satisfait l'égalité des ratios entre les deux plus grands segments consécutifs⁸, à savoir :

$$\varphi = \frac{AC = a}{AB = a - b} = \frac{AB = a - b}{BC = b} \quad (10)$$

a. La formulation plus commune est la suivante : « On cherche le point B appartenant à $[AC]$ tel que le rapport de la longueur du segment total par la longueur du plus grand sous-segment est égal au rapport du plus grand des sous-segments par le plus petit. » Avec une formulation plus générale on a :

$$\varphi = \frac{AC}{\max(AB, BC)} = \frac{\max(AB, BC)}{\min(AB, BC)} \quad (9)$$

Car en effet il y a alors trois segments $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$, donc uniquement trois ratios possibles⁸ :

$$\frac{AB}{AC} \quad \frac{AB}{BC} \quad \frac{BC}{AC}$$

Or dans le cadre de la figure ci-dessus on a la **relation d'ordre** suivante :

$$BC \leq AB \leq AC \quad (11)$$

Ainsi la mention des « deux plus grands segments consécutif » signifie que lorsque l'on prend un segment, on considère celui dont la longueur est *directement* inférieure. On peut maintenant chercher à réécrire l'équation 10 en utilisant une astuce commune⁹ :

$$\frac{a}{a-b} = \frac{a-b}{b} = \frac{1}{\frac{b}{a-b} - 1 + 1} = \frac{1}{\frac{a}{a-b} - 1} \quad (12)$$

On remarque alors que l'on a donc :

$$\varphi = \frac{1}{\varphi - 1} \iff \varphi^2 - \varphi = 1 \quad (13)$$

Ce qui n'est rien que moins que l'équation caractéristique associée à la suite de Fibonacci !

8. Les ratios inverses ne satisfaisants par la condition. La permutation des lettres, elle, ne change rien. Par exemple $AB=BA$.

9. Appelée par ma prof de maths en prépa « le Lemme Belge »

3.2 Nombre d'or dans l'architecture et dans la nature 🏛️🍌🌻🔪🌌

Il est connu que les grecs de l'Antiquité étaient des amoureux des sciences et leurs contributions sont parmi les plus majeures de nos sociétés occidentales. Dès le cinquième siècle avant notre ère, un sculpteur grec *Phidias* qui aurait usé de ce ratio pour sculpter la déesse Athéna au Parthénon à Athènes[4] et la lettre grecque 'phi' φ en serait un hommage. On remarquera que dans de nombreuses œuvres architecturales [4] contiennent ce ratio :

Parthénon - Athènes (Grèce) 🇬🇷 la façade rentre approximativement dans un rectangle d'or, dont nous donnons une méthode de construction par la suite

Pyramide de Khéops - Gizeh (Égypte) 🇪🇬 L'apothème (a) divisé par la demi-base (b) donne environ φ , cf. figure 1¹⁰

Doryphore - Naples (Italie) 🇮🇹 Sculpture de Polyclète d'un homme dont les proportions physiques donnent des ratios proches du nombre d'or, voir figure 2. Par exemple, pour faire le lien avec la figure dans l'encadré vert, le point (A) serait les pieds, le point (B) étant le nombril et les cheveux le point (C). Vérifiez-le! Ainsi la hauteur du corps divisé par la hauteur jusqu'au nombril donne environ φ .

Homme de Vitruve - Venise (Italie) œuvre de Léonard De Vinci qui montre que le corps humain comporte, comme dans le Doryphore, de nombreuses fois le nombre d'or. Un autre exemple de présence est le ratio de la longueur du bras entier divisé par la longueur de l'avant bras. Vérifiez-le!

Climat et astrophysique Les dépressions climatiques, vues du ciel, ont une forme de spirale. Mais attention, ce n'est pas une spirale d'or! Il s'agit de **spirales logarithmiques**, tout comme la forme des galaxies spirales. Néanmoins le paramètre principal dans l'écriture mathématique de la spirale¹¹ peut être relié au nombre d'or dans ces cas précis.[6].

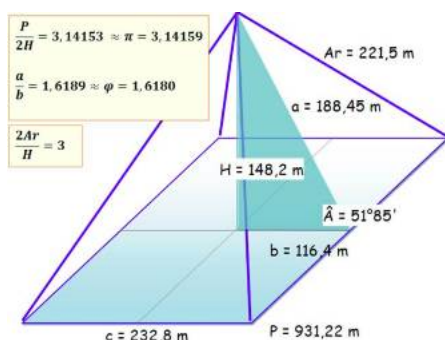


FIGURE 1 – Géométrie de la pyramide de Khéops [5]

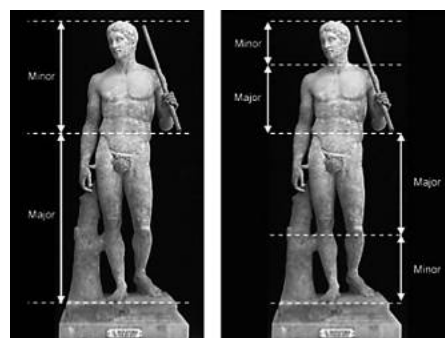


FIGURE 2 – Doryphore [4]



FIGURE 3 – Dépression climatique [6]



FIGURE 4 – Galaxie Messier 51 [6]

3.3 Constructions géométriques exactes 🛠️

Jusqu'ici quelques descriptions mathématiques et manifestations dans la vie de tous les jours du nombre d'or ont été donnés. On va s'intéresser maintenant aux aspects de construction. Il faut tout d'abord savoir qu'historiquement toute construction géométrique dans les *règles de l'art grecques* doivent se faire à la règle *non graduée* et au compas. Les constructions suivantes respecteront donc naturellement cette règle.

10. G. VILLEMEN, *Nombres - Curiosités, théories et usages*, , 03/2021

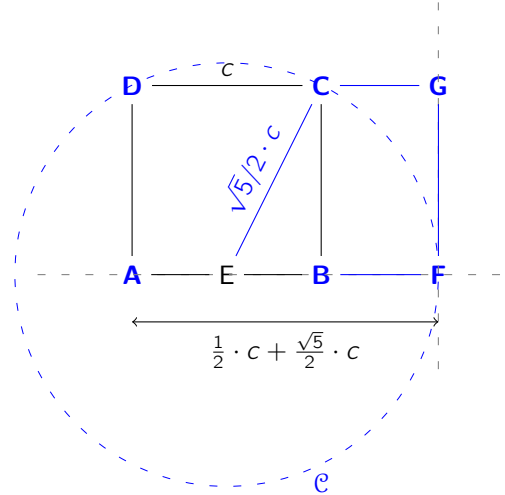
11. $a \cdot \exp(b \cdot \theta)$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}^+$ l'angle

3.3.1 Rectangle d'or

Pour tracer un rectangle d'or il faut suivre les étapes suivantes :

1. construire un carré ABCD de côté de longueur c
2. prendre le milieu (E) de [AB]
3. tracer le cercle \mathcal{C} de rayon EC de centre (E). Le rayon est $\sqrt{(c/2)^2 + c^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot c$. Le point F est alors l'intersection entre (AB) et \mathcal{C}
4. Le point G est l'intersection entre (DC) et la perpendiculaire à AF au point F

Les rectangles AFGD et BFGC sont tous deux rectangles d'or. AFGD l'est par construction évidente. Par contre pour BFGC cela demande légèrement plus de calculs pour le montrer.

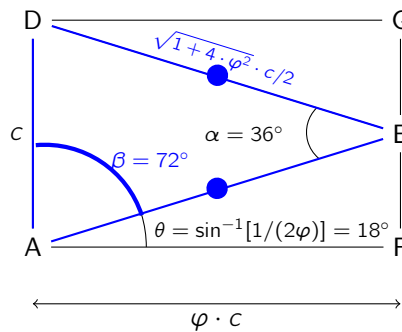


En effet il est évident que $BF = (\varphi - 1) \cdot c$. Mais comme vu plus haut : $\varphi = 1/(\varphi - 1)$ donc $BF = c/\varphi$. Et donc le rapport $FG/BF = \varphi$ qui montre donc que l'on a bien un rectangle d'or. Ainsi le grand rectangle AFGD est un rectangle aux proportions $(1, \varphi)$ et le plus petit BFGC aux proportions $(1, 1/\varphi)$

Un rectangle d'or est donc un rectangle dont le rapport longueur/largeur = φ

3.3.2 Triangle d'or

Sans trop de surprises on se doute bien que le **triangle d'or** et le rectangle d'or sont liés. En se basant sur la construction précédente il suffit de prendre une largeur, prendre son milieu (E) et relier ce point avec les deux sommets opposés (A) et (D).



Un tel triangle est alors isocèle dont les angles à la base sont de $2\pi/5 = 72^\circ$.

En effet, la somme des angles d'un triangle^a est de $\pi = 180^\circ$. On a ainsi, en notant β est angles à la base $\widehat{EDA} = \widehat{DAE}$ et α l'angle au sommet principal \widehat{DEA} , donc :

$$2\beta + \alpha = \pi \quad (14)$$

Pour calculer β on peut s'aider du triangle AEF^b et remarquer que $\theta = \widehat{EAF} + \beta = \pi/2 = 90^\circ$. En prenant le sinus on a :

$$\sin(\theta) = \frac{EF}{AE} = \frac{c/2}{\varphi \cdot c} = \frac{1}{2\varphi} \quad (15)$$

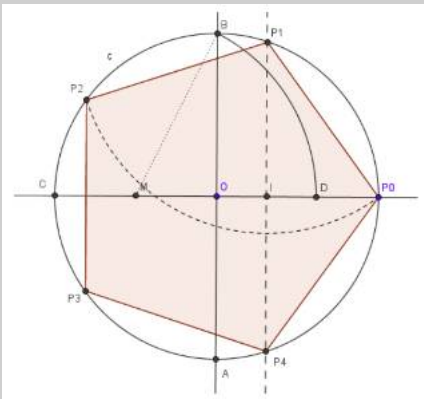
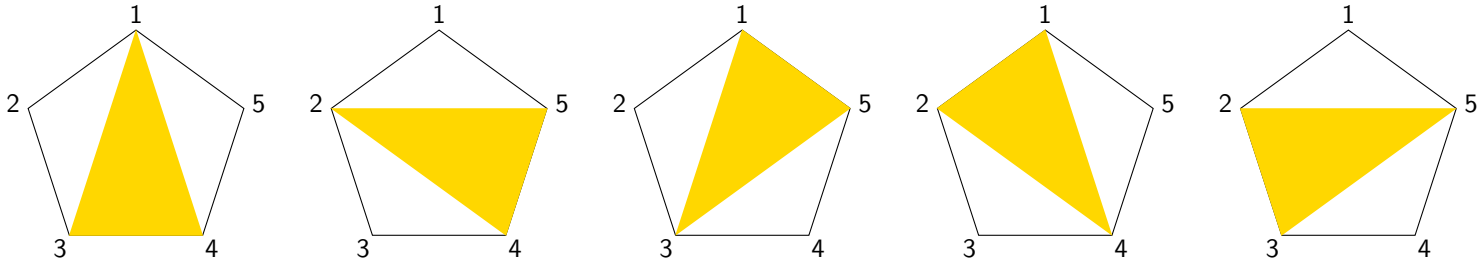
Dont l'arcsinus donne une valeur exacte $\theta = \pi/10 = 18^\circ$. Ceci permet donc d'avoir le résultat annoncé.

a. Dans un espace euclidien.

b. Qui permet d'éviter d'introduire une nouvelle lettre pour le pied de la hauteur issue de E

Un triangle d'or est donc un triangle isocèle dont les deux angles à la base sont égaux à $2\pi/5 = 72^\circ$.

Nous pourrions aussi remarquer que l'écriture en radians permet d'observer que l'angle de 72° s'obtient en dessinant un pentagone régulier ! On remarquera alors que dans la vidéo présentée dans [7] l'auteur part presque de la construction d'un rectangle d'or. En rejoignant alors chaque sommet du pentagone aux deux sommets opposés, on obtient alors de nombreux triangles d'or !



Pour la démonstration on se base sur la figure ci-contre tirée du lien ci-dessus. En effet on veut montrer que les angles à la base sont égaux à 72° . Pour ce faire on doit donc :

1. calculer les longueurs intermédiaires définies pour obtenir les coordonnées de P_1
2. calculer les longueurs des cotés des triangles isocèles : $P_i P_{i+2}$, $P_i P_{i+4}$ etc. Par exemple $P_0 P_2 P_4$.

Plus précisément pour la première étape :

1. calculer les coordonnées de D
2. calculer les coordonnées de I , donc calculer OI
3. calculer IP_1 comme l'intersection du cercle avec la droite issue de I
1. Dans la construction du rectangle d'or on a déjà calculé la longueur $CD = \varphi \cdot R$. Donc :

$$OD = CD - CO = \varphi \cdot R - R = (\varphi - 1) \cdot R \quad (16)$$

2. Puisque I est le milieu de OD on a donc :

$$OI = \frac{\varphi - 1}{2} \cdot R \quad (17)$$

3. L'intersection de la droite d'équation $x = OI$ avec le cercle d'équation $x^2 + y^2 = R^2$ donne :

$$\left(\frac{y = IP_1}{R}\right)^2 = 1^2 - \left(\frac{\varphi - 1}{2}\right)^2 = \frac{(3 - \varphi) \cdot (1 + \varphi)}{4} \quad (18)$$

Or avec $\varphi^2 = \varphi + 1$ on peut réécrire :

$$\left(\frac{y = IP_1}{R}\right)^2 = (3 - \varphi) \cdot \left(\frac{\varphi}{2}\right)^2 = \left(2 - \frac{1}{\varphi}\right) \cdot \left(\frac{\varphi}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{5}}{4} \cdot \varphi \quad (19)$$

On a donc maintenant tout pour pouvoir passer à la deuxième étape de calcul des longueurs. On a la longueur des bases en calculant le rayon du cercle de centre P_1 de rayon $P_0 P_1$:

$$P_0 P_1^2 = (OP_0 - OI)^2 + IP_1^2 = \left(1 - \frac{\varphi - 1}{2}\right)^2 \cdot R^2 + (3 - \varphi) \frac{\varphi^2}{4} \cdot R^2 = \frac{3 - \varphi}{4} \cdot (\varphi^2 - \varphi + 3) \quad (20)$$

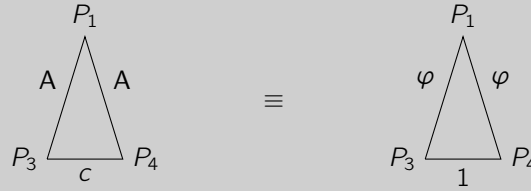
En développant et en utilisant la propriété de φ , on a :

$$\left(\frac{P_0 P_1}{R}\right)^2 = 3 - \varphi = \frac{\sqrt{5}}{\varphi} \quad (21)$$

On a donc un pentagone régulier dont les cotés sont de longueur lié au rayon du cercle circonscrit et au nombre d'or

$$c = \sqrt{3 - \varphi} \cdot R = \sqrt{\frac{\sqrt{5}}{\varphi}} \cdot R \approx 1.175 \cdot R \quad (22)$$

Une fois que l'on a calculé la longueur des côtés des pentagones, on cherche à calculer les angles. Ici le plus naturel, peut-être, c'est de calculer l'angle $\alpha = \widehat{P_3 P_1 P_4}$. Pour se faire on doit donc avoir les longueurs $P_1 P_3$ et $P_1 P_4$. On a égalité entre les deux par construction géométrie, puisque P_4 est sur le même cercle de rayon $P_1 P_0$. Et P_3 est sur le même cercle de centre P_2 de rayon $P_2 P_1 = P_1 P_0$.



Ici on peut directement obtenir que :

$$A = P_1 P_4 = 2 \cdot l_{P_1} = 2 \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{5}}{4}} \cdot \varphi = \sqrt{\sqrt{5}} \cdot \varphi = \varphi \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{5}}{\varphi}} = \varphi \cdot c \quad (23)$$

On a alors que dans un triangle d'or on a la relation entre les cotés égaux et la base qu'est le rapport de 1 à φ . Pour calculer l'angle α on a, en utilisant le théorème d'Al-Kashi :

$$P_3 P_4^2 = P_1 P_3^2 + P_1 P_4^2 - 2 \cdot (P_1 P_3) \cdot (P_1 P_4) \cdot \cos(\alpha) \quad (24)$$

Et en remplaçant on a :

$$\left(\sqrt{\sqrt{5}/\varphi}\right)^2 = 2 \cdot \sqrt{\sqrt{5}} \cdot \varphi \cdot [1 - \cos(\alpha)] \iff \cos \alpha = 1 - 1/(2 \cdot \varphi^2) \quad (25)$$

Cette dernière égalité est rassurante car le cosinus est alors bien compris entre -1 et +1. On peut condenser cette écriture en éclatant φ :

$$1 - \frac{1}{2\varphi^2} = 1 - \frac{1}{2(\varphi + 1)} = 1 - \frac{1}{3 + \sqrt{5}} = \frac{2 + \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} \cdot \frac{3 - \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}} = \frac{\varphi}{2} \quad (26)$$

Ainsi on a, en calculant numériquement la valeur de l'arccosinus on a :

$$\alpha = \arccos(\varphi/2) = \pi/5 \quad (27)$$

Et en utilisant que la somme des angles valant π on a alors :

$$\alpha + 2\beta = \pi \iff \beta = (\pi - \alpha)/2 = 2\pi/5 \quad (28)$$

3.4 Construction géométrique approchée : la spirale d'or

3.4.1 Spirale d'or

Une spirale est une courbe dont la distance entre les points et le centre r est une fonction de l'angle θ : $r(\theta)$.

Plusieurs types de spirales existent, voir figures 5,6, et l'une d'elle s'appelle la **Spirale d'or** : figure 7. Les spirales interviennent dans beaucoup de phénomènes physiques, voir les figures 3, 4 et qui sont en général des **spirales logarithmiques**. C'est à dire qu'il y a une relation du type : $r(\theta) = a \cdot \exp(b \cdot \theta)$. La spirale d'or est alors un cas particulier de spirale logarithmique.

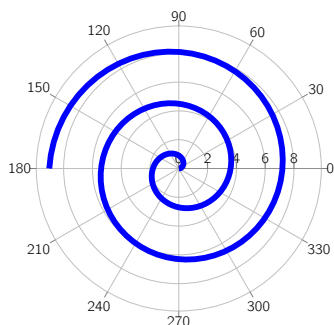


FIGURE 5 – Spirale d'Archimède dont la distance au centre r s'écrit en fonction de l'angle θ selon : $r(\theta) = \theta$

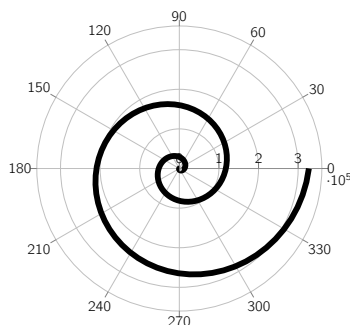


FIGURE 6 – Spirale de Galilée dont la distance au centre s'écrit : $r(\theta) = 1 - \left(\frac{2}{\pi} \cdot \theta - 1\right)^2$

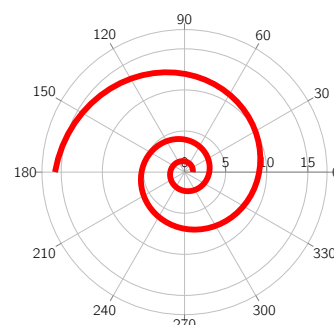


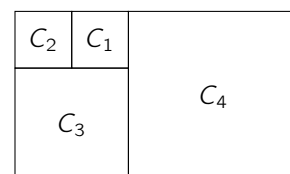
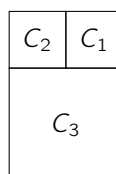
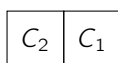
FIGURE 7 – Spirale d'or dont la distance au centre s'écrit : $r(\theta) = \phi^{2 \cdot \theta / \pi}$

La construction géométrique de la spirale d'or peut s'obtenir de façon approchée à l'aide de la suite de Fibonacci de la façon suivante en trois étapes majeures :

1. Constructions d'un **pavage**¹² d'aide
2. Obtention des **points de contrôle** de la spirale. Points appartenant à la spirale sur lesquels on s'appuie pour tracer la figure.
3. Tracé de la spirale

1/ Construction des carrés .

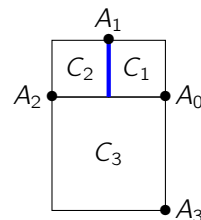
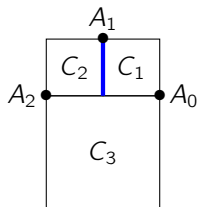
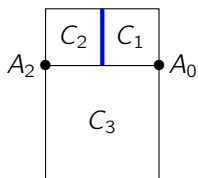
1. Tracer un carré de côté une unité c . On le note C_1 .
2. Tracer un carré partageant un côté en commun avec C_1 . On le note C_2 .
3. Tracer un carré partageant un côté en commun avec C_1 **et** C_2 . On le note C_3 .
4. Répéter le point (3) autant de fois que vous le souhaitez.



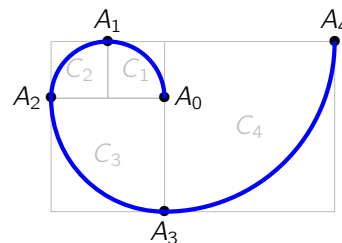
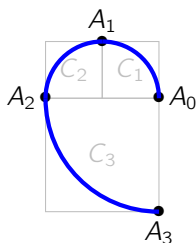
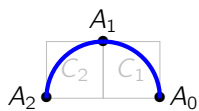
2/ Obtention des points de contrôle de la spirale .

1. Prendre les sommets en commun entre C_3 et le rectangle formé par la jonction C_1 – C_2 . Les noter A_0 et A_2 .
2. Prendre le sommet commun à C_1 et C_2 , noté A_1 , de façon à ce qu'il ne forme pas un triangle plat avec A_0 et A_1 .
3. Prendre le sommet du carré C_n tel qu'il soit dans la continuité du côté auquel appartient le point A_{n-3} .
4. Répéter l'étape précédente autant de fois qu'il y a de carrés.

12. Voir dernière section



3/ Tracé de la spirale Relier les points A_n et A_{n+1} à l'aide d'arcs de cercles de rayons $A_n A_{n+1}$



3.4.2 Annexe : lien avec la suite de Fibonacci 🤖, 🧠

On remarquera alors que la largeur des carrés suit exactement la suite de Fibonacci car on a :

$$C_1 \equiv 1 \cdot c \quad C_2 \equiv 1 \cdot c \quad C_3 \equiv 2 \cdot c \quad C_4 \equiv 3 \cdot c \quad \dots \quad (29)$$

De plus on a, à partir d'un seul carré (C_1), des rectangles successifs :

$$R_1 = C_1 \cup C_2 \quad R_2 = R_1 \cup C_3 = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \quad R_3 = R_2 \cup C_4 = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 \quad \dots \quad (30)$$

Les longueurs successives des rectangles suivent donc aussi la suite de Fibonacci :

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad \dots \quad (31)$$

Or on a vu que la suite de Fibonacci s'écrivait :

$$C(n) = C(n-1) + C(n-2) \quad (32)$$

Si l'on divise la longueur du n ème rectangle par celle du $n-1$ ème on a :

$$\frac{C(n)}{C(n-1)} = 1 + \frac{C(n-2)}{C(n-1)} \quad (33)$$

En utilisant l'équivalent obtenu plus haut on peut écrire :

$$\frac{C(n-2)}{C(n-1)} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\varphi^{n-2}/\sqrt{5}}{\varphi^{n-1}/\sqrt{5}} = \varphi^{-1} \quad (34)$$

Ainsi on a :

$$\frac{C(n)}{C(n-1)} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 1 + \frac{1}{\varphi} = \frac{1+\varphi}{\varphi} = \frac{\varphi^2}{\varphi} = \varphi \quad (35)$$

On a donc que la limite des ratios des longueurs des rectangles successifs donne bien le nombre d'or. Et comme on a vu plus haut, un triangle d'or s'obtient aisément à l'aide d'un rectangle d'or, il est alors largement plus aisé d'obtenir approximativement un triangle d'or de cette façon plutôt que de faire tous les tracés précédents.

3.5 Conclusion

Nous avons constaté que le nombre d'or est présent dans de nombreuses manifestations naturelles, allant de l'escargot jusqu'à la galaxie ! Cela explique pourquoi il est souvent appelé **Proportion divine**. Sur le plan psychologique, cela nous amène à nous interroger sur notre perception du « beau » et sur la manière dont notre esprit est inconsciemment conditionné, indépendamment des sociétés, des coutumes et des époques. En effet, étant donné que le nombre d'or se trouve involontairement dans ce que nous observons en proportions significatives, comment ne pas éprouver un sentiment de “djà-vu” — et donc de sécurité — lorsqu'il est explicitement présent dans notre environnement ?

Nous avons également vu comment construire géométriquement de plusieurs façons des rectangles et triangles d'or, ainsi que la fameuse spirale logarithmique dans le cas spécifique du ratio doré. Nous verrons dans la suite comment utiliser ces triangles afin d'effectuer un pavage dit de Penrose.

3.6 Annexe : obtention des coordonnées des points de contrôle 🤖, 🧠

Ici on propose une méthode récursive pour obtenir les différents points de contrôle $(A_i)_i$ nécessaires pour pouvoir tracer la spirale. Pour se faire on peut alors noter les abscisses et les ordonnées de chaque sommet $(A_i)_i$:

$$x_0 = 0 \quad y_0 = 0 \quad (36)$$

$$x_1 = 1 = x_0 + 1 \quad y_1 = 1 = y_0 + 1 \quad (37)$$

$$x_2 = 0 = x_1 - 1 \quad y_2 = 2 = y_1 + 1 \quad (38)$$

$$x_3 = -2 = x_2 - 2 \quad y_3 = 0 = y_2 - 2 \quad (39)$$

$$x_4 = 1 = x_3 + 3 \quad y_4 = -3 = y_3 - 3 \quad (40)$$

$$x_5 = 6 = x_4 + 5 \quad y_5 = 2 = y_4 + 5 \quad (41)$$

$$x_6 = -15 = x_5 - 8 \quad y_6 = 10 = y_5 + 8 \quad (42)$$

On remarque alors que l'on a des relations de récurrence de type :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, x(n) = x(n-1) + V_n \cdot C(n-1) \quad x(0) = 0 \quad (43)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, y(n) = y(n-1) + U_n \cdot C(n-1) \quad y(0) = 0 \quad (44)$$

Les suites des $(V(n))_n$, $(U(n))_n$ donnent alors le signe devant le terme de la suite de Fibonacci. On ne peut donner une relation générale pour tous n sans disjonction de cas. On doit distinguer en fonction de la parité de n . On pose alors les deux **suites extraites** suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad U(2n) = (-1)^{n+1} \quad (45)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad U(2n+1) = (-1)^n \quad (46)$$



Et en remarquant que l'on a $V(n) = U(n+1)$ on a donc les coordonnées de tous les points de contrôle à l'aide des relations récursives suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{pmatrix} x(n) \\ y(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(n-1) \\ y(n-1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U(n+1) \\ U(n) \end{pmatrix} \cdot C(n-1) \quad (47)$$

Une méthode différente est suggérée par l'auteur dans [8]. La conclusion est similaire puisque la position du n -ième point de contrôle se déduit du précédent mais avec l'utilisation de fonctions circulaires.

4 Pavage de Penrose

4.1 Vous avez dit “crayon rose” ?

Roger Penrose est un mathématicien et physicien britannique  né en 1931. Il est célèbre pour ses contributions dans les domaines de la relativité générale, et de la physique quantique . Penrose a reçu de nombreuses distinctions, dont le prix Nobel de physique en 2020 pour sa contribution à la compréhension des trous noirs. Il est également connu pour ses travaux sur les structures géométriques dans l'univers, notamment les célèbres « pavages de Penrose » que nous allons brièvement découvrir ici.

4.2 Les pavages

4.2.1 Brève introduction

Différents types de pavages existent. Mais c'est quoi un pavage déjà ?

Un **pavage** est une juxtaposition de formes géométriques — appelés **pavés** — les unes à côté des autres avec les deux contraintes suivantes :

1. il n'y a pas de recouvrement entre les pavés
2. il n'y a pas d'espace non recouvert par un pavé

Autrement dit il n'y a ni chevauchement ni “blancs” dans la figure finale.

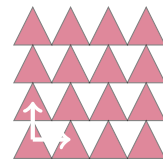
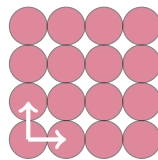
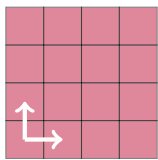


FIGURE 8 – Exemples de pavages périodiques. ► À gauche, un seul pavé : un carré. ► Au milieu, deux pavés : un cercle et un losange “stylisé”. ► À droite, deux triangles équilatéraux renversés. En blanc les flèches montrant les directions selon lesquelles une translation laisse inchangé le pavage.

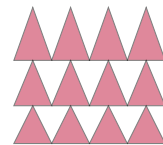
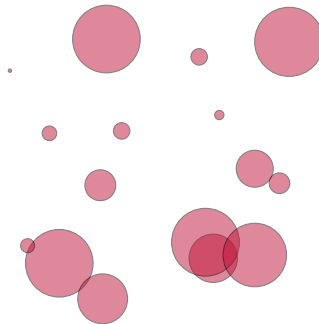
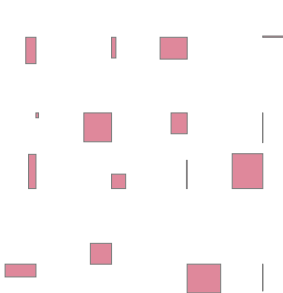


FIGURE 9 – ► À gauche, les carrés laissent des espaces libres donc ce n'est pas un pavage. ► Au milieu, les cercles ont des diamètres aléatoires et sont espacés aléatoirement. Ils laissent aussi des espaces libres en plus des potentiels chevauchement des pavés (En fonction de la compilation du document il peut ne pas être présent à cause de la génération aléatoire), ce n'est donc pas non plus un pavage. ► À droite, des triangles isocèles dont la hauteur principal change par couche. Il n'y a pas d'espace vide mais il n'y a pas les deux directions selon lesquelles les translations laissent inchangés, c'est donc un pavage *apériodique*.

Dans la figure 8 sont montrés des exemples de pavages alors que la figure 9 montre deux figures qui n'en sont pas. Cette juxtaposition de pavés peut être, ou non, contrainte à des règles supplémentaires. comme :

1. l'utilisation d'un nombre fixé de formes géométriques élémentaires fixées.
2. l'utilisation de méthodes de juxtaposition fixées au préalable.

En fonction de la méthode de juxtaposition ainsi que de la forme des pavés on peut alors aboutir à des **pavages périodiques** ou **apériodiques**. La figure 8 et figure 10 en montrent des exemples respectivement.

Un pavage est dit **périodique** s'il existe deux directions dans lesquelles déplacer le motif permet de retomber exactement sur le motif initial. Autrement il est dit **apériodique**.

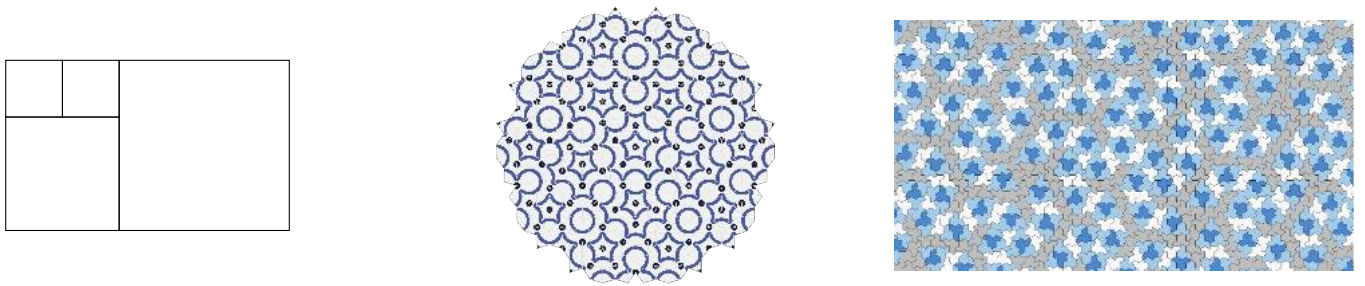


FIGURE 10 – Exemples de pavages apériodiques. ► À gauche, pavage d'aide pour la construction de la spirale d'or. ► Au milieu, Rhombus de Penrose. ► À droite, pavage apériodique mono-pavé.

4.2.2 Pavages de Penrose

Kezako

Les plus observateurs pourront remarquer que deux des pavages montrés dans la figure 10 présentent des points communs : **lesquels** ? Non je ne donne pas immédiatement la réponse. On observe encore un peu. Dernier effort... C'est (évidemment¹³) le premier, l'intru ! En effet si l'on agrandi ces figures, voir figure 11. celui de gauche n'utilise que des carrés. Celui du milieu et de droite utilisent en réalité des combinaisons de losanges pour celle de gauche et de triangles d'or pour celle de droite.



FIGURE 11 – Agrandissement des pavages apériodiques de la figure 10.

Roger Penrose a introduit un type de pavage qui portera son nom. Il est fait à partir de deux forme géométriques simples : une pointe de flèche et un cerf-volant :



FIGURE 12 – ► À gauche, le cerf-volant et la pointe de flèche. Tiré de [9]. ► À droite, obtention du cerf-volant à partir d'un triangle d'or de sommet principal aigü.

Ces deux formes géométriques s'obtiennent donc, en ayant reconnu les proportions inscrites, en juxtaposant deux triangles d'or identiques. On peut alors parler de **meta-pavé**.

On appelle **méta-pavé** un pavé formé par la juxtaposition de deux pavés plus simples.

L'obtention de ces méta-pavés se fait aisément à l'aide d'un compas. En effet une fois un triangle d'or dessiné, le quatrième point D s'obtient comme l'intersection de deux arcs de cercles ($\mathcal{C}^1, \mathcal{C}^2$) respectivement de centres (A, C) . Ou autrement dit, les points (B, D) sont symétriques par rapport à l'axe formé par les points (A, C) , voir figure 12. Une fois cette forme élémentaire obtenue, en courbant légèrement et de façon appropriée on peut alors obtenir les bouts de flèche et cerf-volants du rhombus de Penrose. On comprend d'ailleurs maintenant pourquoi il porte le nom de ce Physicien !

13. "Évident" lorsque l'on connaît la réponse 😊

Dans [9] l'auteur donne une méthodologie afin de créer un pavage de Penrose qui se base sur deux transformations élémentaires (une pour les pics de flèche, une pour les cerf-volants) successivement appliquées aux objets adéquats. Voir figure 13. On imagine aisément que ce n'est pas cette méthode de construction qui a été utilisée pour paver la rue *Keskuskatu* à Helsinki en Finlande, voir figure 15. La figure 16 montre une méthode de construction de tels pavage dont la surface totale augmente plus on augmente le nombre de pavés. Alors que la méthode précédente voit sa surface diminuer ¹⁴.

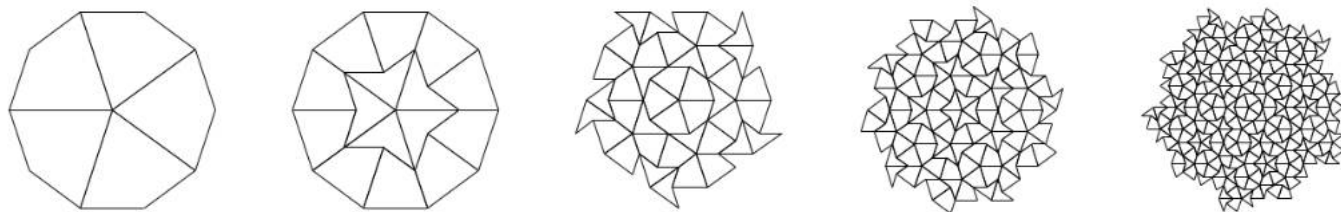


FIGURE 13 – Étapes de construction d'un pavage de Penrose avec une surface fixe. Tiré de [9].

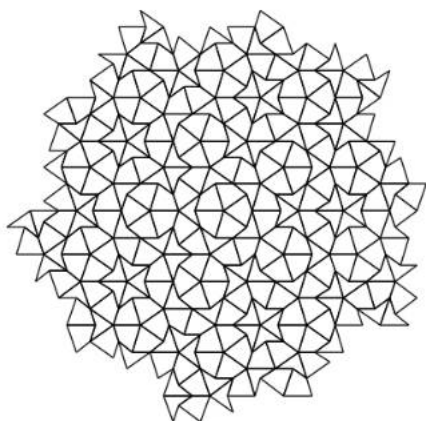


FIGURE 14 – Étape 5 de la construction du pavage de Penrose, agrandi. Tiré de [9].



FIGURE 15 – Photo de la rue Keskutaku à Helsinki en Finlande. Tiré de [10].

1. construction **violette** : « disque primaire »
2. constructions **bleues** : ajout de 2 cerf-volants (2a,2b) de façon à ce que l'axe formé par leur jonction soit dans la continuité de deux cerf-volants du disque primaire (1a,1b). Répétition de l'opération pour faire le tour entier du disque primaire pour obtenir la « couronne primaire ».
3. constructions **vertes** : ajout des disques primaires (3a,3b,...) et (3'a,3'b,...) dans les creux formés par deux constructions bleues consécutives
4. constructions **orange**s : « disques secondaires » de façon à ce que son axe de symétrie ; qu'est la jonction (4a,4b) ; coïncide avec les jonctions (1a,1b) et (2a,2b)
5. Répétition des points 1-4 de façon à construire les disques primaires à partir des disques secondaires là où c'est possible (revenir à la définition d'un pavage).

Un objet géométrique possède une **symétrie d'ordre** $n \in \mathbb{N}$ si la rotation d'un angle $2\pi/n$ radians (ou $360^\circ/n$) laisse inchangée la figure.

Remarque 1 : La figure 14 est la dernière étape de la figure 13 agrandie. On observe aisément la non périodicité du pavage par translation. On observe, et heureusement, la même propriété pour la figure 16. Néanmoins nous pouvons observer la périodicité du pavage par **rotation** d'angle ... $72^\circ = 2\pi/5$, spécificité des divers pavages de Penrose. On parle alors de **symétrie d'ordre 5**.

Remarque 2 : On peut aussi remarquer que les « pointes de flèches » mentionnées dans figure 12 n'ont pas été explicitement utilisées dans la méthode de construction proposée, mais elles se devinent aisément et sont cachés dans les méta-pavés blancs. Elles sont d'ailleurs explicites entre les disques et les couronnes primaires !

Remarque 3 : On observant attentivement la figure 14, on remarquera que les étapes de constructions sont légèrement différentes. Il n'y a, alors pas unicité de la méthode de construction pour obtenir les mêmes propriétés d'ensembles, contrairement aux pavages périodiques. À méditer 🤔

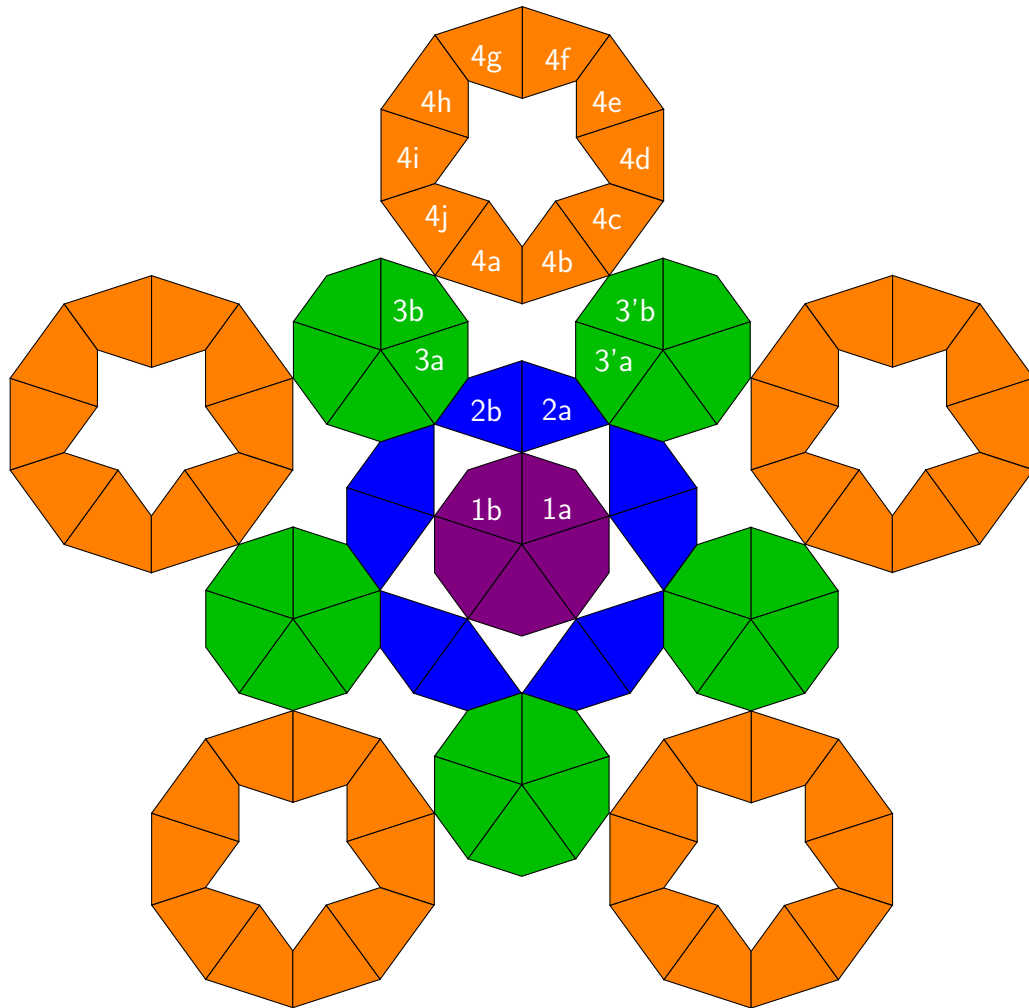
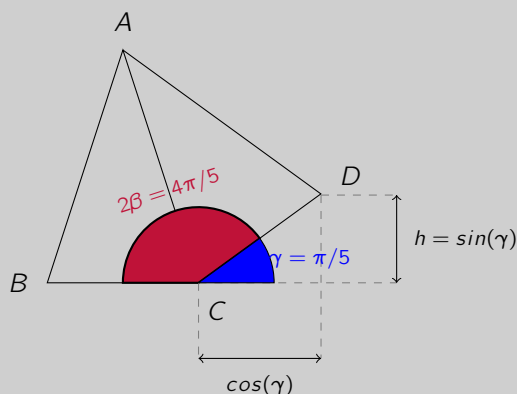


FIGURE 16 – Construction d'un pavage de Penrose

4.3 Annexe : tracé du cerf-volant 🚩🤔🧐



Niveau collège : Pour tracer le “cerf-volant” nous avons dû calculer les coordonnées du point D. Le plus immédiat est de raisonner sur les angles puisque l’on connaît les valeurs des angles à la base d’un triangle d’or qui sont $\beta = 2\pi/5$. En utilisant que $2\beta + \gamma = \pi$ on obtient que $\gamma = \pi/5$. Puis la longueur de la base étant de 1 on peut utiliser le sinus et le cosinus de l’angle pour avoir respectivement l’ordonnée et l’abscisse de D.

Niveau lycée : Une deuxième méthode consiste à remarquer que le point D est obtenu par symétrie orthogonale d’axe (AC). Si l’on considère B comme origine du repère et une base de longueur unité, les coordonnées du point A sont obtenues par utilisation du théorème de Pythagore puisque nous avons vu que le triangle d’or a son long côté de longueur φ . On peut donc calculer les coordonnées du projeté orthogonal H sur (AC) en utilisant que $\langle \vec{BH} | \vec{AC} \rangle = 0$ en plus du fait que H appartienne à (AC). Puis on utilise ensuite que $\vec{BD} = 2 \cdot \vec{BH}$.

Niveau licence/prépa : On peut encore utiliser la symétrie mais en la formulant de façon matricielle en cherchant la matrice de la symétrie d’axe (AC). Dans ce cas on utilise que la symétrie orthogonale s est une **application linéaire** telle que $s^2 = s \circ s = i_d$ où i_d est l’**application identité**. Pour obtenir ensuite les coordonnées de D il faut écrire que $\vec{HD} = s\vec{HB}$. On remarque alors qu’il faut aussi avoir les coordonnées de H. L’obtention de la matrice de symétrie peut s’obtenir en utilisant la projection p sur l’axe (AC) et si l’on note $u = AC/||AC||$ un vecteur unitaire de la droite alors : $p = u \cdot (u \cdot u^T)^{-1} \cdot u^T$. Enfin en utilisant la relation entre la symétrie et la projection on obtient la matrice de la symétrie $s = i_d - 2 \cdot p$.

CONCLUSION :

On remarque alors ici que la méthode la plus expéditive est également celle faisant intervenir les notions les plus élémentaires. Les deux méthodes lycée/licence sont d’une part beaucoup plus longues, donc augmentent la probabilité de présence d’erreurs de raisonnement et de calcul. De plus elles nécessitent beaucoup plus de bagages/connaissances mathématiques. *La conclusion est donc qu’il est inutile de sortir l’artillerie lourde pour tuer une mouche !* Étaler la confiture juste pour impressionner la galerie est d’une part un manque d’humilité, mais aussi et surtout un manque de pragmatisme. Voire parfois même un manque d’élégance !





Bibliographie

1. Sublimaths, <https://sublimath.rezel.net/>, visited on 2023/08/12
2. C. KÖNIG, *L'invasion du lapin en Australie : Oryctolagus cuniculus*, Futura Sciences, <https://www.futura-sciences.com/planete/dossiers/zoologie-especes-animales-invasives-1093/page/2/>, visited on 2023/08/12
3. Leonardo Pisano FIBONACCI, *Liber Abaci*, 1202, ISBN : 978-2-3400-1173-1, Chapitre 1,
4. Marie-Christine de LA SOUCHÈRE, *Les sciences et l'art peinture, musique, architecture, cinéma, littérature et science-fiction*, Ellipses, 05/2016, ISBN : 978-2-3400-1173-1, Chapitre 1,
5. Gérard VILLEMIN, *Nombres - curiosités, théorie et usages*, 03/2021, <http://villemin.gerard.free.fr/Wwwgymm/Esoteris/Keops.htm#kheops>, visited on 2023/05/30
6. Christiane ROUSSEAU, *Nautilaire, nombre dor et spirale dorée*, Accromaths, été-automne 2008, Vol. 3 <https://accromath.uqam.ca/wp-content/uploads/2013/04/nautilaire.pdf>, visited on 2023/05/30
7. Inconnu *Comment tracer un pentagone régulier ?*, Blogdemaths, 11/2010 <https://blogdemaths.wordpress.com/2010/11/20/comment-tracer-un-pentagone-regulier/>, visited on 2023/05/30
8. TD, *Dessignons une spirale de Fibonacci*, Zeste de savoir, <https://zestedesavoir.com/articles/1186/dessignons-une-spirale-de-fibonacci/>, visited on 2023/08/12
9. Vincent PILAUD, *Pavages périodiques*, LIX, Polytechnique <https://www.lix.polytechnique.fr/~pilaud/enseignement/agreg/pavages/pavages.pdf>, visited on 22 août 2023
10. Jean-Pierre LUMINET *Le prix nobel de physique 2020 pour les trous noirs (1/2) ; Roger Penrose.*, Futura-Sciences.com <https://blogs.futura-sciences.com/luminet/2020/10/06/le-prix-nobel-de-physique-2020-pour-les-trous-noirs-1-2-roger-penrose/>, visited on 22 août 2023

