Loi de probabilité de Maxwell

louis tomczyk
August 4, 2024

TELECOM Paris
IP PARIS
Institut Mines-Télécom

Définition: Loi de Maxwell

Soit une variable aléatoire X suivant une loi Maxwelienne de fonction densité f_X:

(1) $$X \hookrightarrow \mathcal{M}(\mathbb{E}(X)) \iff f_X(x) = a \cdot x^2 \cdot \exp(-b \cdot x^2) \quad \backslash \quad x \in \mathbb{R}^+$$

Avec:

(2) $$a = \frac{32}{\pi^2 \cdot \mathbb{E}(X)^3} \quad \& \quad b = \frac{4}{\pi \cdot \mathbb{E}(X)^2}$$

Démonstration

Cherchons la relation entre $(a, b, \langle X \rangle)$. Tout d'abord a est un facteur de normalisation tel que:

(3) $$\int_{\mathbb{R}^+} f_X(x)\ dx = a \cdot I = 1$$

Posons les fonctions (u, v) de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telles que:

(4) $$u(x) = x \qquad v'(x) = \frac{-1}{2b} \cdot [-2bx \cdot \exp(-bx^2)]$$

(5) $$u'(x) = 1 \qquad v(x) = \frac{-1}{2b} \cdot \exp(-bx^2)$$

Ainsi:

(6) $$I \ = \ \left[\frac{-x}{2b} \exp(-bx^2)\right]_{\mathbb{R}^+} + \frac{1}{2b} \int_{\mathbb{R}^+} \exp(-bx^2)\ dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4b^{3/2}}$$

Ce qui donne donc la première relation:

(7) $$\boxed{\frac{a}{b^{3/2}} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}}$$

Puis pour le calcul de la moyenne:

(8) $$\mathbb{E}(X) \ = \ a \cdot \int_{\mathbb{R}^+} x^3 \cdot \exp(-bx^2)\ dx$$

(9) $$= \ \frac{a}{2} \cdot \int_{\mathbb{R}^+} u \cdot \exp(-b \cdot u)\ du$$

(10) $$= \ \frac{a}{2b} \cdot \int_{\mathbb{R}^+} exp(-b \cdot u)\ du$$

Ce qui donne donc:

(11) $$\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{a}{2b^2}}$$

En rassemblant donc les deux formules encadrées nous avons:

(12) $$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2b^2} \cdot \frac{4 \cdot b^{3/2}}{\sqrt{\pi}} = \frac{2}{\sqrt{\pi \cdot b}} \implies b = \frac{4}{\pi \cdot \mathbb{E}(X)^2}$$

Et a s'obtient alors en remplaçant b par la valeur obtenue. ■

Propriété: Espérance et Variance

Sous les mêmes hypothèses nous avons:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{2}{\sqrt{\pi \cdot b}} \quad \& \quad \mathbb{V}(X) = \frac{3 \cdot \pi - 1}{8} \cdot [\mathbb{E}(X)]^2 = \frac{3 \cdot \pi - 1}{2 \cdot \pi \cdot b} \tag{13}$$

Démonstration

L'espérance a été démontrée dans la démonstration précédente. Passons à la variance en utilisant la théorème de König-Huyghens:

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 \tag{14}$$

Pour le premier terme, utilisons le théorème de transfert que nous rappelons:

$$\boxed{g \in \mathcal{C}^0(I) \quad \& \quad \int_I |g| < \infty, \qquad \mathbb{E}[g(X)] = \int_I g(x) \cdot f_X(x)\ dx} \tag{15}$$

Ici on a donc:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a} \cdot \mathbb{E}(X^2) &= \int_{R^+} x^4 \cdot \exp(-b \cdot x^2)\ dx \qquad (16)\\
&= \left[-\frac{x^3}{2b} \cdot \exp(-bx^2) \right]_{\mathbb{R}^+} + \frac{3}{2b} \cdot \int_{\mathbb{R}^+} x^2 \cdot \exp(-bx^2)\ dx \qquad (17)\\
&= \frac{3}{2b} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{4 \cdot b^{3/2}} = \frac{3\sqrt{\pi}}{8 \cdot b^{5/2}} \qquad (18)
\end{aligned}$$

Ce qui donne donc:

$$\mathbb{V}(X) = \frac{32}{\pi^2 \cdot \mathbb{E}(X)^3} \cdot \frac{3\sqrt{\pi}}{8 \cdot \left(\frac{4}{\pi \cdot [\mathbb{E}(X)]^2} \right)^{5/2}} - [\mathbb{E}(X)]^2 = \frac{3\pi - 1}{8} \cdot [\mathbb{E}(X)]^2 \tag{19}$$

$\blacksquare$