Théorie des modes couplés

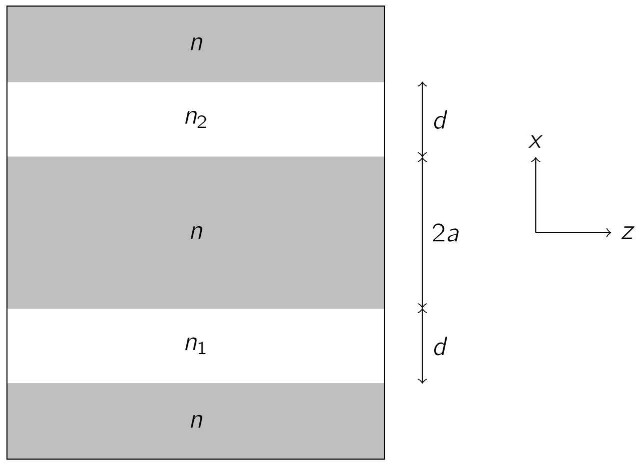
Author: ℓouis tomczyk
Date: September 22, 2024
Version: v2.0.0

Contents

1 Position du problème

1.1 Géométrie

On considère deux guides parallèles distants de $2a$ et de largeur d et d'indices $n_{1/2}$ dans un substrat d'indice n_s.



1.2 Hypothèses

L'ensemble des hypothèses est le suivant:

(1) Les guides sont monomodes

(2) Les champs sont transverses et indépendants de z. Les champs s'écrivent alors:

$$E_{1/2}(x,z,t) = a_{1/2}(z)\cdot u_{1/2}(x)\cdot f_{1/2}(z,t) \quad \backslash \quad f_{1/2}(z,t) = \exp\left[-i(\omega t - \beta_{1/2} z\right] \tag{1}$$

(3) les constantes de propagation sont indépendant de la distance de propagation

(4) l'espacement $2a$ est suffisamment faible pour que le champ évanescent de l'un des guides soit non nul dans le second

(5) absence de rayonnement induit par l'excitation (régime linéaire) le régime forcé est de type perturbatif et le champ de polarisation associé s'écrit:

$$P_{p,1/2}(x,z,t) = \epsilon_0 \cdot \chi_p \cdot E_{1/2}(x,z,t) \tag{2}$$

De fait les champs s'écrivent en séries:

$$E_{1/2}(x,z,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \chi_p^k \cdot \tilde{E}_{1/2}^{(k)}(x,z,t) \tag{3}$$

(6) les milieux sont sans mémoire, neutre et isotrope

(7) conservation de la polarisation des champs

2 Équations de propagation

2.1 Équation générale

Rappelons les équations de Maxwell:

$$\vec{\text{rot}}\left(\vec{E}\right) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \& \quad \vec{\text{rot}}\left(\vec{B}\right) = \mu_0 \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{4}$$

Avec, en notant $\vec{P}_0$ le champ de polarisation induit par $\vec{E}$, le vecteur déplacement qui s'écrit:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}_0 + \vec{P}_p \quad \backslash \quad \text{div}\left(\vec{D}\right) \underset{H6}{=} 0 \tag{5}$$

En prenant le rotationnel de l'équation de Faraday nous avons:

$$\vec{\Delta}\left(\vec{E}\right) = \frac{1}{v_g^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \frac{\chi_p}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}_p}{\partial t^2} \tag{6}$$

Ici la perturbation provient du champ du guide adjacent, nous avons donc:

(7) $$\boxed{\vec{\square}(\vec{E}_{1/2}) = \frac{\chi_p}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}_{2,1}}{\partial t^2} \quad \backslash \quad \vec{\square}(\bullet) = \vec{\Delta}(\bullet) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \bullet}{\partial t^2}}$$

Où l'opérateur $\vec{\square}(\bullet)$ est appelé *D'Alembertien*.

2.2 Attentes portant sur la régularité des solutions

Afin de limiter l'étude du système nous cherchons les solutions sous la formulation de Von Neumann de cette équation. Plus précisément les solutions doivent satisfaire aux interfaces:

(1) la continuité

(2) la continuité de leur dérivée

De plus en tous temps, les solutions doivent être de puissance finie donc dans $L^2(\mathbb{R})$.

2.3 Expression du D'Alembertien

En exprimant le laplacien et se limitant à une description scalaire:

(8) $$\Delta(E)_{1/2} = \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2}$$

(9) $$= u''_{1/2}a_{1/2}f_{1/2} + u_{1/2} \cdot \left[a''_{1/2}f_{1/2} + 2a'_{1/2}\frac{\partial f_{1/2}}{\partial z} + a_{1/2}\frac{\partial^2 f_{1/2}}{\partial z^2}\right]$$

Or:

(10) $$f_{1/2} = e^{-i(\omega t - \beta_{1/2}z)} \implies \frac{\partial f_{1/2}}{\partial z} = i\beta_{1/2}f_{1/2} \quad \& \quad \frac{\partial^2 f_{1/2}}{\partial z^2} - \beta^2_{1/2}f_{1/2}$$

Le laplacien s'écrit alors:

(11) $$\Delta\left(E_{1/2}\right) = u_{1/2}a_{1/2}f_{1/2} + [a''_{1/2} + 2i\beta_{1/2}a'_{1/2} - \beta^2_{1/2}] \cdot u_{1/2}f_{1/2}$$

La dériviée temporelle étant directe, nous avons donc:

(12) $$\square(E_{1/2}) = u''_{1/2}a_{1/2}f_{1/2} + (a''_{1/2} + 2i\beta_{1/2}a'_{1/2})u_{1/2}f_{1/2} + \left[\frac{\omega^2}{v^2_{g,1/2}} - \beta^2_{1/2}\right]u_{1/2}a_{1/2}f_{1/2}$$

Enfin $\frac{\omega^2}{v^2_{g,1/2}} - \beta^2_{1/2} = 0$ par la définition même du vecteur d'onde.

2.4 Hypothèses supplémentaires

Afin de simplifier l'étude nous posons les hypothèses supplémentaires suivantes[**Saleh**]:

Formulation de Heisenberg: On ne considère pas l'évolution des champs eux-mêmes directement mais plutôt l'évolution du couplage[1]. Ainsi on considère:

(13) $$\forall z, u'_{1/2} = 0$$

Enveloppes lentement variables: Ce qui permet de négliger les variations rapides de l'amplitude devant les variations lentes, autrement dit:

(14) $$\forall z, |a''_{1/2}| \ll |\beta_{1/2}a'_{1/2}|$$

Guides identiques: Ce qui permet d'avoir les mêmes évolutions transversale des champs:

(15) $$\forall x, u_{1/2} = u_{2/1}$$

Ce qui permet de simplifier le D'Alembertien en:

(16) $$\square(E_{1/2}) \approx 2i\beta_{1/2}a'_{1/2}u_{1/2}f_{1/2}$$

[1]Rigoureusement en mécanique quantique la formulation de Heisenberg, contrairement à la formulation de Schrödinger, s'intéresse à l'évolution des opérateurs, là où la seconde s'intéresse à l'évolution de la fonction d'onde.

2.5 Équations couplées

Repartons de l'équation simplifiée

$$2i\beta_{1/2}a'_{1/2} \approx -\chi_p \frac{\omega^2}{c^2} u_{2/1} a_{2/1} f_{2/1} \tag{17}$$

On peut remarquer que:

$$f_{2/1}/f_{1/2} = \exp(-i\Delta\beta z) \quad \backslash \quad \Delta\beta = \beta_{2/1} - \beta_{1/2} \tag{18}$$

En posant $k_0 = \omega/c$, l'équation de propagation devient:

$$2i\beta_{1/2} \cdot a'_{1/2} \approx -\chi_p k_0^2 e^{-i\Delta\beta z} \cdot a_{2/1} \tag{19}$$

Et donc:

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} a'_1(z) \approx i \cdot c_{1/2} e^{-i\Delta\beta z} \cdot a_2 \\ a'_2(z) \approx i \cdot c_{2/1} e^{-i\Delta\beta z} \cdot a_1 \end{array} \right. \quad \backslash \quad c_{1/2} = \frac{\chi_p k_0^2}{2\beta_{1/2}}} \tag{20}$$

On remarque alors que c'est bien χ_p qui est responsable du couplage des deux modes. Le terme $e^{-i\Delta\beta z}$ représente lui un accord de phase qui sera responsable de l'efficacité du processus.

3 Résolution

En dérivant chaque équation couplée une fois nous obtenons:

$$\boxed{a''_{1/2} - i\Delta\beta \cdot a'_{1/2} + C^2 \cdot a_{1/2} = 0 \quad \backslash \quad C^2 = c_{1/2}c_{2/1} = \frac{k_0^4 \chi_p^2}{4\beta_1\beta_2}} \tag{21}$$

Considérons l'entrée d'une impulsion dans un seul des guides, par exemple:

$$a_1(z=0) \neq 0 \quad \& \quad a_2(z=0) = 0 \tag{22}$$

3.1 Accord de phase

Ici $\Delta\beta = 0$ on doit alors résoudre:

$$a''_{1/2} + C^2 a_{1/2} = 0 \tag{23}$$

Trois cas sont à distinguer:

$C^2 = 0$: impossible l'amplitude des deux champs ne ferait que augmenter avec la distance de propagation. La conservation de l'énergie serait alors violée.

$C^2 > 0$: c'est le cas de l'oscillateur harmonique. Il s'agit d'un échange périodique d'énergie entre les deux guides. Donc $a_{1/2}(z) = A_{1/2}\cos(Cz) + B_{1/2}\sin(Cz)$

$C^2 < 0$: ici on a: $a_{1/2}(z) = A_{1/2}e^{-\kappa_{1/2}z} \cdot \cos(\mu_{1/2}z + B_{1/2})$

Ici il s'agit bien sûr, au vu de l'expression de C^2 qu'il s'agit de l'équation de l'oscillateur harmonique. Nous avons alors, avec les conditions aux limites, les expressions suivantes:

$$a_1(0) = A_1 \quad \& \quad a_1(z=L) = A_1\cos(C\cdot L) + B_1\sin(C\cdot L) \tag{24}$$

Ce qui permet d'écrire:

$$B_1 = \frac{a_1(L) - a_1(0)\cos(C\cdot L)}{\sin(C\cdot L)} \tag{25}$$

Pour le second guide nous avons:

$$a_2(z=0) = 0 = A_2 \quad \& \quad a_2(z=L) = B_2\sin(C\cdot L) \tag{26}$$

Et donc:

$$\forall z,\ \begin{cases} a_1(z) = a_1(0)\cdot\left[\cos(C\cdot z) - \dfrac{\cos(C\cdot L)}{\sin(C\cdot L)}\sin(C\cdot z)\right] + \dfrac{a_1(L)}{\sin(C\cdot L)}\cdot\sin(C\cdot z) \\ a_2(z) = \dfrac{a_2(L)}{\sin(C\cdot L)}\cdot\sin(C\cdot z)\end{cases} \tag{27}$$

Or $\forall z,\ a_{1/2}(z)\in[0,1]$ et le couplage étant parfait (accord de phase) on a fortiori au bout d'une longueur $L^\star$:

$$a_2(L^\star) = 1 \iff B_2 = (\sin(C\cdot L^\star))^{-1} = 1 \tag{28}$$

Ce qui est possible pour les longueurs suivantes:

$$L^\star_m = \frac{2m+1}{2}\frac{\pi}{C} \quad \backslash \quad m\in\mathbb{Z} \tag{29}$$

La *longueur de couplage* L_C est donnée pour $m=0$:

$$\boxed{L_C = L^\star_{m=0} = \frac{\pi}{2\cdot C}} \tag{30}$$

On observe ici donc que plus le couplage est fort, et plus la longueur caractéristique diminue ce qui n'est pas, a priori, contre-intuitif.

3.2 Non accord de phase

Reprenons le système couplé:

$$a''_{1/2} - i\Delta\beta\cdot a'_{1/2} + C^2\cdot a_{1/2} = 0 \tag{31}$$

Le discriminant Δ s'écrit:

$$\Delta = -(\Delta\beta^2 + 4C^2) < 0 \tag{32}$$

Ainsi les racines sont:

$$r_{1/2,\pm} = (1\pm\sqrt{1+x^2})\cdot\frac{i\Delta\beta}{2} \quad \backslash \quad x = \frac{2C}{\Delta\beta} \tag{33}$$

La solution s'écrit alors:

$$a_{1/2}(z) = Ae^{r_{1/2,+}z} + Be^{r_{1/2,-}z} \tag{34}$$

En remplaçant nous avons:

$$\boxed{a_{1/2}(z)\varphi^{-1}(z) = A_{1/2}\theta^+(z) + B_{1/2}\theta^-(z) \quad \backslash \quad \varphi(z) = e^{i\cdot\Delta\beta/2\cdot z} \quad \& \quad \theta^\pm(z) = \exp\left(\pm i\cdot\sqrt{1+x^2}\frac{\Delta\beta}{2}\cdot z\right)} \tag{35}$$

Pour la résolution:

$$a_{1/2}(0) = A + B \quad \& \quad (a_{1/2}\varphi^{-1})(L) = A_{1/2}\theta^+(L) + B_{1/2}\theta^-(L) \tag{36}$$

Et donc:

$$\boxed{A_{1/2} = i\cdot\frac{a_{1/2}(0)\theta^-(L) - (a_{1/2}\varphi^{-1})(L)}{2\cdot\sin\left(\sqrt{1+x^2}\frac{\Delta\beta}{2}\cdot L\right)} \quad \& \quad B_{1/2} = i\cdot\frac{(a_{1/2}\varphi^{-1})(L) - a_{1/2}(0)\theta^+(L)}{2\cdot\sin\left(\sqrt{1+x^2}\frac{\Delta\beta}{2}\cdot L\right)}} \tag{37}$$

Prenons par exemple $a_1(0) = 1$ et un guide ayant une longueur égale à la longueur de couplage:

$$a_1(0) = 1 \quad \& \quad A_1(L) = 0 \implies A_1 = i\cdot\frac{e^{-i\sqrt{1+x^2}\frac{\Delta\beta}{2}\cdot L}}{2\cdot\sin\left(\sqrt{1+x^2}\frac{\Delta\beta}{2}\cdot L\right)} \quad \& \quad B_1 = i\cdot\frac{-e^{i\sqrt{1+x^2}\frac{\Delta\beta}{2}\cdot L}}{2\cdot\sin\left(\sqrt{1+x^2}\frac{\Delta\beta}{2}\cdot L\right)} \tag{38}$$

Et donc:

$$a_1(z) = i\cdot\frac{\theta^+(z-L) - \theta^-(z-L)}{2\cdot\sin\left(\sqrt{1+x^2}\frac{\Delta\beta}{2}\cdot L\right)} = \frac{\sin\left(\sqrt{1+x^2}\dfrac{\Delta\beta}{2}\cdot(L-z)\right)}{\sin\left(\sqrt{1+x^2}\frac{\Delta\beta}{2}\cdot L\right)} \tag{39}$$