



Théorie des modes couplés

Author: *Łouis tomczyk*

Date: September 25, 2024

Version: v1.1.0

License: Creative Commons 4: CC - by - nc - sa
Attribution - NonCommercial - ShareAlike



Contents

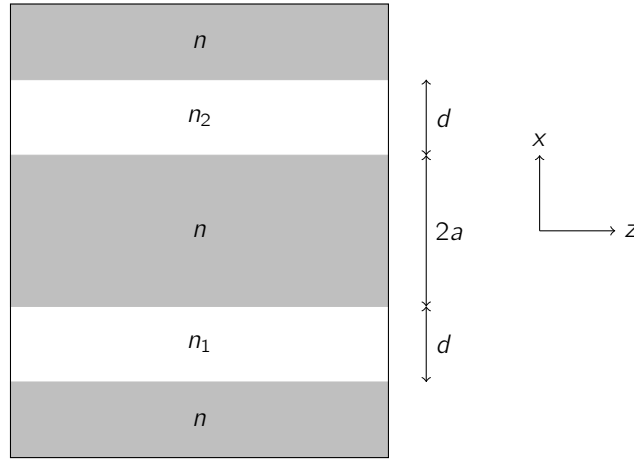
Chapter 1. Cas monomode	3
1 Position du problème	3
1.1 Géométrie	3
1.2 Hypothèses	3
2 Équations de propagation	4
2.1 Équation générale de propagation du champ électrique	4
2.2 Attentes portant sur la régularité des solutions	4
2.3 Expression du D'Alembertien	4
2.4 Hypothèses supplémentaires	5
2.5 Équations d'évolution du couplage	5
3 Résolution	5
3.1 Accord de phase	6
3.2 Non accord de phase	6
Chapter 2. Cas multimode	8
1 Position du problème	8
2 Équation de propagation du champ électrique	8
3 Équation d'évolution du couplage	8

Cas monomode

1 Position du problème

1.1 Géométrie

On considère deux guides parallèles distants de $2a$ et de largeur d et d'indices $n_{1/2}$ dans un substrat d'indice n_s .



1.2 Hypothèses

L'ensemble des hypothèses est le suivant:

H0: Les guides sont monomodes

H1: Les champs sont transverses et indépendants de z . Seul le couplage dépend de la distance de propagation, qui est lui-même supposé constant ce qui revient à considérer une géométrie parfaitement maîtrisée sur la longueur du guide. Les champs s'écrivent alors:

$$(1) \quad E_{1/2}(x, z, t) = a_{1/2}(z) \cdot u_{1/2}(x) \cdot f_{1/2}(z, t) \quad \setminus \quad f_{1/2}(z, t) = \exp[-i(\omega t - \beta_{1/2}z)] \quad \& \quad u \equiv [V/m]$$

H2: les constantes de propagation sont indépendant de la distance de propagation

H3: l'espacement $2a$ est suffisamment faible pour que le champ évanescent de l'un des guides soit non nul dans le second

H4: absence de rayonnement induit par l'excitation (régime linéaire) le régime forcé est de type perturbatif et le champ de polarisation associé s'écrit:

$$(2) \quad P_{p,1/2}(x, z, t) = \epsilon_0 \cdot \chi_p \cdot E_{1/2}(x, z, t)$$

De fait les champs s'écrivent en séries:

$$(3) \quad E_{1/2}(x, z, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \chi_p^k \cdot \tilde{E}_{1/2}^{(k)}(x, z, t)$$

H5: les milieux sont sans mémoire, neutre et isotrope

H6: conservation de la polarisation des champs

2 Équations de propagation

2.1 Équation générale de propagation du champ électrique

Rappelons les équations de Maxwell:

$$(4) \quad \text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \& \quad \text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Avec, en notant \vec{P}_0 le champ de polarisation induit par \vec{E} , le vecteur déplacement qui s'écrit:

$$(5) \quad \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}_0 + \vec{P}_p \quad \setminus \quad \text{div}(\vec{D}) \underset{H_6}{=} 0$$

En prenant le rotationnel de l'équation de Faraday nous avons:

$$(6) \quad \vec{\Delta}(\vec{E}) = \frac{1}{v_g^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \frac{\chi_p}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}_p}{\partial t^2} \quad \setminus \quad \forall m \in \{x, y, z\}, \quad \langle \vec{\Delta}(\vec{\bullet}) | \vec{m} \rangle = \frac{\partial^2 \bullet_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bullet_m}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bullet_m}{\partial z^2}$$

Ici la perturbation provient du champ du guide adjacent, nous avons donc:

$$(7) \quad \boxed{\vec{\square}(\vec{E}_{1/2}) = \frac{\chi_p}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}_{2,1}}{\partial t^2} \quad \setminus \quad \vec{\square}(\bullet) = \vec{\Delta}(\bullet) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \bullet}{\partial t^2}}$$

Où l'opérateur $\vec{\square}(\bullet)$ est appelé *D'Alembertien*.

2.2 Attentes portant sur la régularité des solutions

Afin de limiter l'étude du système nous cherchons les solutions sous la formulation de Von Neumann de cette équation. Plus précisément les solutions doivent satisfaire aux interfaces:

H7: la continuité

H8: la continuité de leur dérivée

De plus en tous temps, les solutions doivent être de puissance finie donc dans $L^2(\mathbb{R})$.

2.3 Expression du D'Alembertien

En exprimant le laplacien et se limitant à une description scalaire:

$$(8) \quad \Delta(E)_{1/2} = \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2}$$

$$(9) \quad = u_{1/2}'' a_{1/2} f_{1/2} + u_{1/2} \cdot \left[a_{1/2}'' f_{1/2} + 2a_{1/2}' \frac{\partial f_{1/2}}{\partial z} + a_{1/2} \frac{\partial^2 f_{1/2}}{\partial z^2} \right]$$

Or:

$$(10) \quad f_{1/2} = e^{-i(\omega t - \beta_{1/2} z)} \implies \frac{\partial f_{1/2}}{\partial z} = i\beta_{1/2} f_{1/2} \quad \& \quad \frac{\partial^2 f_{1/2}}{\partial z^2} = -\beta_{1/2}^2 f_{1/2}$$

Le laplacien s'écrit alors:

$$(11) \quad \Delta(E_{1/2}) = u_{1/2} a_{1/2} f_{1/2} + [a_{1/2}'' + 2i\beta_{1/2} a_{1/2}' - \beta_{1/2}^2] \cdot u_{1/2} f_{1/2}$$

La dérivée temporelle étant directe, nous avons donc:

$$(12) \quad \square(E_{1/2}) = u_{1/2}'' a_{1/2} f_{1/2} + (a_{1/2}'' + 2i\beta_{1/2} a_{1/2}') u_{1/2} f_{1/2} + \left[\frac{\omega^2}{v_{g,1/2}^2} - \beta_{1/2}^2 \right] u_{1/2} a_{1/2} f_{1/2}$$

Enfin $\frac{\omega^2}{v_{g,1/2}^2} - \beta_{1/2}^2 = 0$ par la définition même du vecteur d'onde.

2.4 Hypothèses supplémentaires

Afin de simplifier l'étude nous posons les hypothèses supplémentaires suivantes[Saleh]:

H9: "Formulation de Heisenber": On ne considère pas l'évolution des champs eux-mêmes directement mais plutôt l'évolution du couplage¹. Ainsi on considère:

$$(13) \quad \forall z, u_{1/2}(x) = \text{constant}$$

H10: Enveloppes lentement variables: Ce qui permet de négliger les variations rapides de l'amplitude devant les variations lentes, autrement dit:

$$(14) \quad \forall z, |a_{1/2}''| \ll |\beta_{1/2} a_{1/2}'|$$

H11: Guides identiques: Ce qui permet d'avoir les mêmes évolutions transversale des champs:

$$(15) \quad \forall x, u_{1/2} = u_{2/1}$$

Ce qui permet de simplifier le D'Alembertien en:

$$(16) \quad \square(E_{1/2}) \approx 2i\beta_{1/2}a_{1/2}'u_{1/2}f_{1/2}$$

2.5 Équations d'évolution du couplage

Repardons de l'équation simplifiée

$$(17) \quad 2i\beta_{1/2}a_{1/2}' \approx -\chi_p \frac{\omega^2}{c^2} u_{2/1} a_{2/1} f_{2/1}$$

On peut remarquer que:

$$(18) \quad f_{2/1}/f_{1/2} = \exp(-i\Delta\beta z) \quad \backslash \quad \Delta\beta = \beta_{2/1} - \beta_{1/2}$$

En posant $k_0 = \omega/c$, l'équation de propagation devient:

$$(19) \quad 2i\beta_{1/2} \cdot a_{1/2}' \approx -\chi_p k_0^2 e^{-i\Delta\beta z} \cdot a_{2/1}$$

Et donc:

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1'(z) \approx i \cdot c_{1/2} e^{-i\Delta\beta z} \cdot a_2 \\ a_2'(z) \approx i \cdot c_{2/1} e^{-i\Delta\beta z} \cdot a_1 \end{array} \right. \quad \backslash \quad c_{1/2} = \frac{\chi_p k_0^2}{2\beta_{1/2}}$$

On remarque alors que c'est bien χ_p qui est responsable du couplage des deux modes. Le terme $e^{-i\Delta\beta z}$ représente lui un accord de phase qui sera responsable de l'efficacité du processus.

3 Résolution

En dérivant chaque équation couplée une fois nous obtenons:

$$(21) \quad a_{1/2}'' - i\Delta\beta \cdot a_{1/2}' + C^2 \cdot a_{1/2} \approx 0 \quad \backslash \quad C^2 = c_{1/2}c_{2/1} = \frac{k_0^4 \chi_p^2}{4\beta_1\beta_2}$$

Considérons l'entrée d'une impulsion dans un seul des guides, par exemple:

$$(22) \quad a_1(z=0) \neq 0 \quad \& \quad a_2(z=0) = 0$$

¹Rigoureusement en mécanique quantique la formulation de Heisenberg, contrairement à la formulation de Schrödinger, s'intéresse à l'évolution des opérateurs, là où la seconde s'intéresse à l'évolution de la fonction d'onde.

3.1 Accord de phase

Ici $\Delta\beta = 0$ on doit alors résoudre:

$$(23) \quad a_{1/2}'' + C^2 a_{1/2} \approx 0$$

Trois cas sont à distinguer:

$C^2 = 0$: impossible l'amplitude des deux champs ne ferait que augmenter avec la distance de propagation. La conservation de l'énergie serait alors violée.

$C^2 > 0$: c'est le cas de l'oscillateur harmonique. Il s'agit d'un échange périodique d'énergie entre les deux guides.
Donc $a_{1/2}(z) \approx A_{1/2} \cos(Cz) + B_{1/2} \sin(Cz)$

$C^2 < 0$: ici on a: $a_{1/2}(z) \approx A_{1/2} e^{-\kappa_{1/2} z} \cdot \cos(\mu_{1/2} z + B_{1/2})$

Ici il s'agit bien sûr, au vu de l'expression de C^2 qu'il s'agit de l'équation de l'oscillateur harmonique. Nous avons alors, avec les conditions aux limites, les expressions suivantes:

$$(24) \quad a_1(0) \approx A_1 \quad \& \quad a_1(z = L) \approx A_1 \cos(C \cdot L) + B_1 \sin(C \cdot L)$$

Ce qui permet d'écrire:

$$(25) \quad B_1 \approx \frac{a_1(L) - a_1(0) \cos(C \cdot L)}{\sin(C \cdot L)}$$

Pour le second guide nous avons:

$$(26) \quad a_2(z = 0) = 0 \approx A_2 \quad \& \quad a_2(z = L) \approx B_2 \sin(C \cdot L)$$

Et donc:

$$(27) \quad \forall z, \left\{ \begin{array}{l} a_1(z) \approx a_1(0) \cdot \left[\cos(C \cdot z) - \frac{\cos(C \cdot L)}{\sin(C \cdot L)} \sin(C \cdot z) \right] + \frac{a_1(L)}{\sin(C \cdot L)} \cdot \sin(C \cdot z) \\ a_2(z) \approx \frac{a_2(L)}{\sin(C \cdot L)} \cdot \sin(C \cdot z) \end{array} \right.$$

Or $\forall z, a_{1/2}(z) \in [0, 1]$ et le couplage étant parfait (accord de phase) on a fortiori au bout d'une longueur L^* :

$$(28) \quad a_2(L^*) = 1 \iff B_2 \approx (\sin(C \cdot L^*))^{-1} \approx 1$$

Ce qui est possible pour les longueurs suivantes:

$$(29) \quad L_m^* \approx \frac{2m+1}{2} \frac{\pi}{C} \quad \setminus \quad m \in \mathbb{Z}$$

La longueur de couplage L_C est donnée pour $m = 0$:

$$(30) \quad L_C = L_{m=0}^* \approx \frac{\pi}{2 \cdot C}$$

On observe ici donc que plus le couplage est fort, et plus la longueur caractéristique diminue ce qui n'est pas, a priori, contre-intuitif.

3.2 Non accord de phase

Reprenons le système couplé:

$$(31) \quad a_{1/2}'' - i\Delta\beta \cdot a_{1/2}' + C^2 \cdot a_{1/2} \approx 0$$

Le discriminant Δ s'écrit:

$$(32) \quad \Delta = -(\Delta\beta^2 + 4C^2) < 0$$

Ainsi les racines sont:

$$(33) \quad r_{1/2,\pm} \approx (1 \pm \sqrt{1+x^2}) \cdot \frac{i\Delta\beta}{2} \quad \setminus \quad x = \frac{2C}{\Delta\beta}$$

La solution s'écrit alors:

$$(34) \quad a_{1/2}(z) \approx Ae^{r_{1/2,+}z} + Be^{r_{1/2,-}z}$$

En remplaçant nous avons:

$$(35) \quad a_{1/2}(z)\varphi^{-1}(z) \approx A_{1/2}\theta^+(z) + B_{1/2}\theta^-(z) \quad \backslash \quad \varphi(z) = e^{i\Delta\beta/2 \cdot z} \quad \& \quad \theta^\pm(z) = \exp\left(\pm i \cdot \sqrt{1+x^2} \frac{\Delta\beta}{2} \cdot z\right)$$

Pour la résolution:

$$(36) \quad a_{1/2}(0) \approx A + B \quad \& \quad (a_{1/2}\varphi^{-1})(L) \approx A_{1/2}\theta^+(L) + B_{1/2}\theta^-(L)$$

Et donc:

$$(37) \quad A_{1/2} \approx i \cdot \frac{a_{1/2}(0)\theta^-(L) - (a_{1/2}\varphi^{-1})(L)}{2 \cdot \sin\left(\sqrt{1+x^2} \frac{\Delta\beta}{2} \cdot L\right)} \quad \& \quad B_{1/2} \approx i \cdot \frac{(a_{1/2}\varphi^{-1})(L) - a_{1/2}(0)\theta^+(L)}{2 \cdot \sin\left(\sqrt{1+x^2} \frac{\Delta\beta}{2} \cdot L\right)}$$

Prenons par exemple $a_1(0) = 1$ et un guide ayant une longueur égale à la longueur de couplage:

$$(38) \quad a_1(0) = 1 \quad \& \quad A_1(L) = 0 \implies A_1 \approx i \cdot \frac{e^{-i\sqrt{1+x^2} \frac{\Delta\beta}{2} \cdot L}}{2 \cdot \sin\left(\sqrt{1+x^2} \frac{\Delta\beta}{2} \cdot L\right)} \quad \& \quad B_1 \approx i \cdot \frac{-e^{i\sqrt{1+x^2} \frac{\Delta\beta}{2} \cdot L}}{2 \cdot \sin\left(\sqrt{1+x^2} \frac{\Delta\beta}{2} \cdot L\right)}$$

Et donc:

$$(39) \quad a_1(z) \approx i \cdot \frac{\theta^+(z-L) - \theta^-(z-L)}{2 \cdot \sin\left(\sqrt{1+x^2} \frac{\Delta\beta}{2} \cdot L\right)} = \frac{\sin\left(\sqrt{1+x^2} \frac{\Delta\beta}{2} \cdot (L-z)\right)}{\sin\left(\sqrt{1+x^2} \frac{\Delta\beta}{2} \cdot L\right)}$$

Cas multimode

1 Position du problème

Ici le problème posé est identique au cas monomode à la différence que le champ électrique est composé de plusieurs fréquences:

$$(40) \quad E(\vec{r}, t) = \sum_k u_k(x, y) \cdot a_k(z, t) e^{i(\omega t - \beta_k z)} \quad \backslash \quad u_k \equiv [V/m]$$

On remarque avec cette écriture du champ qu'une hypothèse importante est posée: la pulsation ω est indépendante du mode, mais pas la constante de propagation. Il existe plusieurs types de "modes".

Les modes "*longitudinaux*", liés à la *longueur* de la cavité jouant ainsi sur la fréquence. Et les modes "*spatiaux*" liés à la géométrie *transverse* qui peut faire résonner plusieurs modes spatiaux pour la même longueur d'onde.

Ici on considère donc le guide monomode longitudinalement avec multimode spatialement.

2 Équation de propagation du champ électrique

Reprenons l'équation générale dans le cas scalaire:

$$(41) \quad \square_0(E) = \mu_0 \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \quad \backslash \quad \square_0(\bullet) = \Delta(\bullet) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bullet}{\partial t^2}$$

Ici le laplacien donne:

$$(42) \quad \Delta(E) = \sum_k \left[\Delta(u_k) + \left(\frac{\partial^2 a_k}{\partial z^2} - \beta_k^2 a_k - 2i\beta_k \frac{\partial a_k}{\partial z} \right) u_k \right] e^{i(\omega t - \beta_k z)}$$

La dérivée temporelle seconde donne:

$$(43) \quad \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \sum_k \left[\frac{\partial^2 a_k}{\partial t^2} - \omega^2 a_k + 2i\omega \frac{\partial a_k}{\partial t} \right] u_k e^{i(\omega t - \beta_k z)}$$

En regroupant les morceaux nous avons:

$$(44) \quad \sum_k \Delta(u_k) + \left[\square(a_k) - 2i \left(\beta_k \frac{\partial a_k}{\partial z} + \frac{\omega}{v_g} \frac{\partial a_k}{\partial t} \right) \right] u_k e^{i(\omega t - \beta_k z)} = \mu_0 \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}$$

En prenant les mêmes hypothèses d'enveloppes lentement variables (H10) ajouté au fait que nous nous intéressons uniquement au couplage (H9) indépendant dans le temps (H1), nous avons:

$$(45) \quad \boxed{\sum_k -2i\beta_k \frac{\partial a_k}{\partial z} \cdot u_k e^{i(\omega t - \beta_k z)} \approx \mu_0 \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}}$$

3 Équation d'évolution du couplage

Ici l'idée est d'obtenir, comme dans le cas monomode, l'évolution des coefficients de couplage a_k . Il faut donc pouvoir s'affranchir de la somme, ce qui peut se faire en utilisant la décomposition sur une base orthogonale du champ électrique sur ses différents modes spatiaux:

$$(46) \quad -2i \cdot \sum_k u_k u_j^* e^{i(\omega t - \beta_k z)} \beta_k \frac{\partial a_k}{\partial z} \approx \mu_0 u_j^* \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \quad \backslash \quad j \neq k$$

Puis en intégrant sur tout l'espace on effectue alors un produit scalaire sur l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable:

$$(47) \quad -2i \cdot \sum_k e^{i(\omega t - \beta_k z)} \beta_k \frac{\partial a_k}{\partial z} \cdot \int_{\mathbb{R}^2} u_k u_j^* dx dy \approx \mu_0 \int_{\mathbb{R}^2} u_j^* \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} dx dy \quad \setminus \quad j \neq k$$

Avec le produit scalaire défini par:

$$(48) \quad \langle u_k | u_j \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} u_k u_j^* dx dy = \delta_{kj} \tilde{\mathcal{P}}_k [(V/m)^2]$$

Ce qui permet donc d'évacuer la somme car seul un terme ressort non nul:

$$(49) \quad \boxed{-2i\beta_k \frac{\partial a_k}{\partial z} \cdot \tilde{\mathcal{P}}_k e^{i(\omega t - \beta_k z)} \approx \mu_0 \int_{\mathbb{R}^2} u_j^* \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} dx dy}$$

On doit donc maintenant exprimer le terme de la perturbation. Il est important de noter qu'ici, contrairement au cas monomode, la susceptibilité du milieu est fonction de la position:

$$(50) \quad \chi_p = \chi_p(x, y)$$

Ainsi en développant la perturbation en précisant les dépendances:

$$(51) \quad \mu_0 \int_{\mathbb{R}^2} u_j^* \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}(x, y) dx dy = \mu_0 \int_{\mathbb{R}^2} u_j^*(x, y) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\sum_m \epsilon_0 \chi_p(x, y) \cdot u_m(x, y) a_m(z) e^{i(\omega t - \beta_m z)} dx dy \right)$$

$$(52) \quad = -\frac{\omega^2}{c^2} e^{i\omega t} \sum_m e^{-i\beta_m z} a_m(z) \int_{\mathbb{R}^2} u_j^*(x, y) \chi_p(x, y) u_m(x, y) dx dy$$

$$(53) \quad = -k_0^2 e^{i\omega t} \sum_m \langle u_j | \chi_p | u_m \rangle \cdot e^{-i\beta_m z} a_m(z)$$

En raccrochant les wagons nous avons donc:

$$(54) \quad \boxed{\frac{\partial a_k}{\partial z} \approx -\frac{ik_0^2}{2\beta_k \tilde{\mathcal{P}}_k} \cdot \sum_m \langle u_j | \chi_p | u_m \rangle \cdot e^{-i\Delta\beta_{mk} z} a_m(z) \quad \setminus \quad \Delta\beta_{mk} = \beta_m - \beta_k}$$