

**Année universitaire** 2023 – 2024

**Unité de recherche :** G-Scop

**Encadrante :** Siao-Leu



---

# Étude de cas sur l'implantation de dépôts de livraison postale par cyclo-logistique à Bordeaux

---

Louis TRIOULEYRE-ROBERJOT

27 juillet 2024

## Abstract

Ce rapport de stage présente une étude de cas sur l'implantation de centres de livraison postale utilisant des vélos-cargos à Bordeaux. Dans un contexte de croissance du e-commerce et de préoccupations environnementales croissantes, la cyclo-logistique offre une alternative prometteuse pour la livraison du dernier kilomètre. L'objectif est d'aider à la conception de réseaux logistiques urbains plus durables et plus économiques, et d'informer les décideurs sur le potentiel de la cyclo-logistique.

**Mots clés :** cyclo-logistique, logistique urbaine, Facility Location, optimisation, vélos-cargos, Bordeaux

# Table des matières

1. Introduction .....	3
1.1. Contexte .....	3
1.2. Problématique .....	3
1.3. Objectifs du stage .....	3
2. Facility Location .....	3
2.1. Définition de notre problème .....	3
2.2. Les données .....	4
2.3. Le modèle .....	5
2.4. Résultats .....	5
3. Amélioration du modèle de Facility Location .....	6
3.1. Modèle .....	7
3.2. Résultats .....	9
4. Modèles de Facility Location avec dépôt mobile .....	9
4.1. Modélisation avec une camionnette comme dépôt mobile .....	10
4.1.1. Modèle .....	10
4.1.2. Résultats .....	12
4.2. Modélisation avec des relais postaux comme dépôts mobiles .....	13
4.2.1. Modèle .....	14
4.2.2. Résultats .....	17
5. Résultats généraux .....	18
5.1. Points d'amélioration .....	21
Bibliographie .....	22

# 1. Introduction

## 1.1. Contexte

Sous l'influence des nouveaux modes de vie et des préoccupations environnementales, les villes sont en pleine mutation, notamment Bordeaux. La croissance démographique et l'essor du e-commerce accroissent les flux de marchandises, avec un impact environnemental significatif, notamment en termes d'émissions de gaz à effet de serre (GES). La cyclo-logistique, recourant à des vélos-cargos, constitue une alternative durable pour la livraison du dernier kilomètre, offrant des gains de productivité et réduisant l'empreinte environnementale.

## 1.2. Problématique

Cependant, la mise en œuvre de la cyclo-logistique présente des défis. L'infrastructure existante, optimisée pour les véhicules motorisés, se caractérise par des entrepôts éloignés des zones de livraison. Cette distance, négligeable avec des véhicules motorisés, devient un facteur limitant avec l'adoption de vélos-cargos. L'implantation stratégique de nouveaux entrepôts, plus proches des zones de livraison, permettrait d'optimiser les opérations.

## 1.3. Objectifs du stage

L'objectif est de proposer un modèle d'optimisation basé sur un problème de localisation (Facility Location Problem) et de le tester sur des scénarios à définir. Cette étude est menée de la manière suivante :

- Analyse des données de livraison en vélos-cargos fournies par La Poste ;
- Prise en main du problème de localisation par la lecture d'articles scientifiques ;
- Définition d'un modèle d'optimisation pour répondre à la problématique de La Poste ;
- Programmation d'un modèle d'optimisation sur différents scénarios en utilisant un solveur de programmation linéaire en nombres entiers.

# 2. Facility Location

## 2.1. Définition de notre problème

Nous modélisons notre cas par un problème de localisation, ou **Facility Location** en anglais.  
[1]

Pour simplifier notre problème, nous ne modélisons pas les tournées en elles-mêmes ; nous représentons simplement une tournée par un point qui correspond au centre de toutes les adresses de livraison de cette tournée.

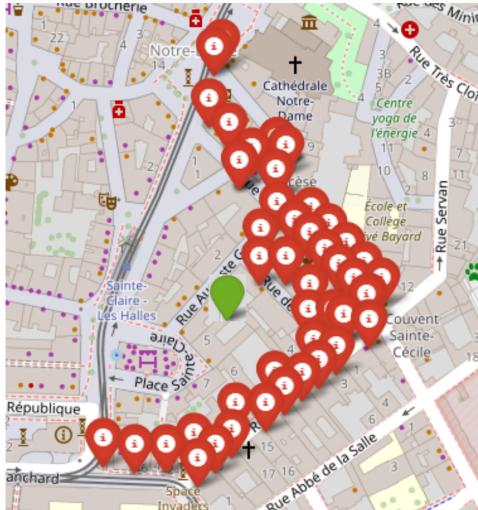


Fig. 1. – Illustration de la modélisation d'une tournée

Sur Fig. 1, le point vert représente le centre de la zone de tournée ; il sera notre « client » dans le problème de Facility Location [1].

Nos installations seront les dépôts postaux (emplacements où un agent peut se recharger en colis).

Pour résumer, l'objectif est de minimiser la distance parcourue par les agents pour aller de leur dépôt jusqu'à leur zone de tournée (point vert dans Fig. 1).

## 2.2. Les données

Un certain nombre de données ont été transmises par La Poste, comme le montre Fig. 2.

Événement	Signature	CRBT	District	Numéro	Rue	Code postal	Ville	Ordre	Heure de passage
Livré adresse Destinataire	NON	NON	773	4 A	833-133-000 000-000 000-000	33000	BORDEAUX	2	09:33:58
Livré adresse Destinataire	OUI	NON	774	2	833-133-000 000-000 000-000	33000	BORDEAUX	1	09:30:28
PRE LIV ADR	NON	NON	774	10 TER	833-133-000 000-000 000-000	33000	BORDEAUX		
Avisé Absence / Fermeture	NON	NON	775	4	833-133-000 000-000 000-000	33000	BORDEAUX	3	09:44:24
PRE LIV ADR	OUI	NON	775	4	833-133-000 000-000 000-000	33000	BORDEAUX		
PRE LIV ADR	OUI	NON	776	41	833-133-000 000-000 000-000	33000	BORDEAUX		
Avisé Absence / Fermeture	OUI	NON	777	10	833-133-000 000-000 000-000	33000	BORDEAUX	4	10:06:46
Avisé Absence / Fermeture	OUI	NON	777	3	833-133-000 000-000 000-000	33000	BORDEAUX	5	10:15:32
Avisé Absence / Fermeture	OUI	NON	777	3	833-133-000 000-000 000-000	33000	BORDEAUX	6	10:15:43
Avisé Absence / Fermeture	NON	NON	777	29	833-133-000 000-000 000-000	33000	BORDEAUX	7	10:20:47

Fig. 2. – Données fournies par La Poste

Ce qui nous intéresse, ce sont les tournées effectuées par chaque agent, c'est-à-dire les adresses, ainsi que l'ordre et l'heure de passage.

J'ai complété ces données en ajoutant les coordonnées GPS des adresses. Pour cela, j'ai d'abord utilisé les services d'OpenStreetMap ; cependant, il arrive qu'OSM fournit de mauvais résultats. Dans un premier temps, nous éliminerons toutes les coordonnées GPS qui ne se situent pas dans le centre de Bordeaux ; ces limites ont été déterminées à la main de manière approchée. On pourra alors constituer un dictionnaire des adresses vers leurs coordonnées GPS afin d'éviter de répéter les mêmes requêtes.

J'ai également calculé la distance parcourue entre chaque point GPS. Pour cela, on considère que la distance est égale à la distance à vol d'oiseau si celle-ci n'est pas trop grande. Sinon, il est judicieux de calculer le plus court chemin dans le graphe représentant le réseau des routes accessibles aux vélos dans la ville de Bordeaux.

À partir des heures de passage, j'ai déduit le temps de trajet entre chaque point d'arrêt.

Ainsi, on obtient la longueur et la durée d'une tournée.

## 2.3. Le modèle

### Paramètres

- $M$  nombre de tournées
- $K$  nombre de dépôts fixes
- $C_{i\hat{i}}$  distance entre la zone de tournée  $i \in \{1, \dots, M\}$  et la zone de tournée  $\hat{i} \in \{1, \dots, M\}$

### Définition

- $I = \{1, \dots, M\}$  : indices des zones de tournée

### Hypothèses

- Les emplacements disponibles pour les dépôts fixes sont toutes les zones de tournée.

### Variables

- $x_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I$  = 1 s'il y a un dépôt fixe en zone de tournée  $i$
- $y_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I$  = 1 si la zone de tournée  $i$  est desservie par le dépôt  $j$

### Modèle

$$\min \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} y_{ij} \cdot C_{ij} \quad (\text{O1})$$

$$\text{s.t } y_{ij} \leq x_j \quad \forall i, j \in I \quad (\text{E1})$$

$$\sum_{j \in I} y_{ij} = 1 \quad \forall i \in I \quad (\text{E2})$$

$$\sum_{j \in I} x_j = K \quad (\text{E3})$$

(E1) : Une zone de tournée  $i$  est desservie uniquement par des dépôts  $j$ .

(E2) : Une zone de tournée  $i$  doit être desservie par un unique dépôt.

(E3) : On a  $K$  dépôts.

## 2.4. Résultats

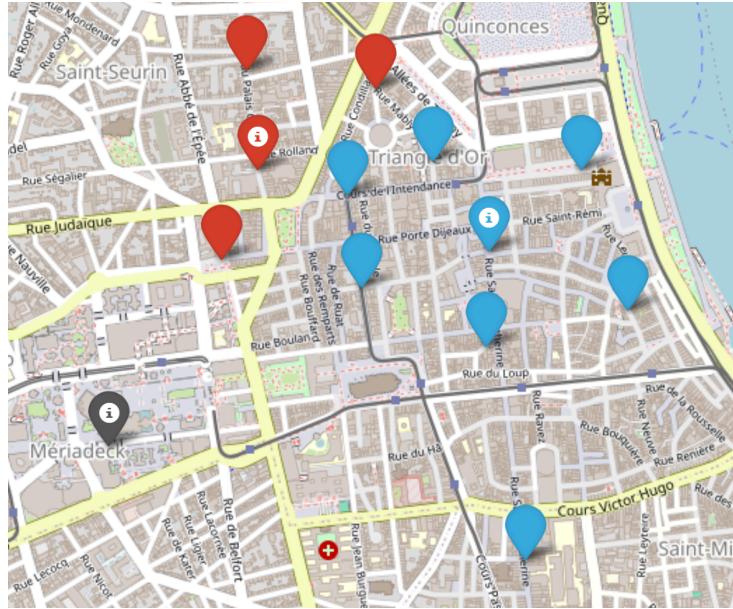


Fig. 3. – Résultats avec N=13 K=3

- **Légende :**

- Centre d'une zone de tournée
- Dépôt

Dans Fig. 3, les zones de tournée d'une même couleur sont desservies par la zone avec l'icône « information ». On voit se détacher une zone bleue assez éloignée du dépôt, alors que les autres sont plus proches. Cela peut engendrer de la jalousie au sein des agents qui doivent desservir les zones de tournée ; c'est pourquoi on aimerait disposer d'un contrôle sur l'égalité des distances parcourues par les agents.

### 3. Amélioration du modèle de Facility Location

On s'intéresse maintenant à un modèle qui améliore l'équité entre les agents. L'article [N. Boland, P. Domínguez-Marín, S. Nickel, et J. Puerto](#) propose le problème discret de la médiane ordonnée (DOMP), qui permet notamment de minimiser la plus grande distance entre un dépôt et une zone de livraison associée.

Soit  $A$  l'ensemble des zones de tournée. Une solution au problème de localisation est donnée par un ensemble de  $M$  dépôts ; on utilise  $X \subseteq A$  avec  $|X| = K$  pour désigner une solution. On suppose que chaque zone de tournée est servie par le dépôt le plus proche, c'est-à-dire qu' étant donné une solution  $X$ , chaque zone de tournée  $i$  est approvisionnée à partir d'un dépôt  $j \in X$  tel que :

$$C_i(X) := \min_{k \in X} C_{ik} \quad (1)$$

On définit  $\sigma_X$  comme une permutation sur  $\{1, \dots, M\}$  vérifiant les inégalités suivantes :

$$C_{\sigma_X(1)}(X) \leq C_{\sigma_X(2)}(X) \leq \dots \leq C_{\sigma_X(M)}(X) \quad (2)$$

Soit  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_M)$  avec  $\lambda_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, M$ . Le problème discret de la médiane ordonnée (DOMP) est défini comme suit :

$$\min \sum_{i=1}^M \lambda_i C_{\sigma_X(i)}(X) \quad (3)$$

Ce problème est équivalent à celui explicité à la [section 2.3](#) si l'on a  $\lambda = (1, 1, \dots, 1)$ .

En appliquant ce modèle avec  $\lambda = (0, \dots, 0, 1)$ , la fonction à minimiser devient :

$$\min C_{\sigma_X(M)}(X) = \min \left( \max_i C_{\sigma_X(i)}(X) \right) \quad (4)$$

Ainsi, la solution minimise le coût de l'agent le plus éloigné de son dépôt, ce qui peut réduire les inégalités de coût entre agents.

### 3.1. Modèle

#### Paramètres

- $M$  nombre de zones de tournée
- $K$  nombre de dépôts
- $\lambda_i$  paramètres du problème
- $C_{ij}$  coût pour desservir la zone de tournée  $i$  depuis le dépôt de la zone de tournée  $j$

#### Définition

- $I = \{1, \dots, M\}$  : indices des zones de tournée

#### Hypothèses

- Les emplacements disponibles pour les dépôts fixes sont toutes les zones de tournée.

#### Variables

- $x_i = 1$  s'il y a un dépôt dans la zone de tournée  $i$
- $y_{ij} = 1$  si la zone de tournée  $i$  est desservie par le dépôt  $j$
- $s_{ij} = 1$  si  $\sigma_X(i) = j$

#### Modèle

$$\min \sum_{i \in I} \sum_{k \in I} s_{ik} \lambda_i \left( \sum_{j \in I} y_{kj} C_{kj} \right) \quad (O1)$$

$$\text{s.t. } y_{ij} \leq x_j \quad \forall i, j \in I \quad (E1)$$

$$\sum_{j \in I} y_{ij} = 1 \quad \forall i \in I \quad (\text{E2})$$

$$\sum_{j \in I} x_j = K \quad (\text{E3})$$

$$\sum_{i \in I} s_{ij} = 1 \quad \forall j \in I \quad (\text{E4})$$

$$\sum_{j \in I} s_{ij} = 1 \quad \forall i \in I \quad (\text{E5})$$

$$\sum_{k \in I} s_{ik} \left( \sum_{j \in I} y_{kj} C_{kj} \right) \leq \sum_{k \in I} s_{i+1,k} \left( \sum_{j \in I} y_{kj} C_{kj} \right) \quad \forall i \in \{1, \dots, M-1\} \quad (\text{E6})$$

On a :  $\sum_j y_{kj} C_{kj} = C_k(X)$  : le coût de desserte de la zone  $k$ , qui est alors desservie par le dépôt le plus proche.

$$(\text{O1}) : \sum_{i=1} \sum_{k=1} s_{ik} \lambda_i \left( \sum_j y_{kj} C_{kj} \right) = \sum_{i=1} \sum_{k=1} s_{ik} \lambda_i C_k(X) = \sum_{i=1}^N \lambda_i C_{\sigma_X(i)}(X).$$

(E1) : Une zone  $i$  doit être desservie par un dépôt actif.

(E2) : Une zone  $i$  doit être desservie par un unique dépôt.

(E3) : On a  $K$  dépôts.

(E4),(E5) : Pour que  $\sigma_X$  soit bien une permutation.

$$(\text{E6}) : \sum_{k=1} s_{ik} \left( \sum_{j=1} y_{kj} C_{kj} \right) = \sum_{k=1} s_{ik} C_k(X) = C_{\sigma_X(i)}(X).$$

Pour linéariser ce modèle, on pose  $z_{ikj} = s_{ik} y_{kj}$  ; on obtient les propriétés suivantes :

$$\sum_i z_{ikj} = y_{kj}; \sum_j z_{ikj} = s_{ik}; \sum_{i,k,j} z_{ikj} = \sum_{i,k} s_{ik} = M$$

En remplaçant et en utilisant ces propriétés, on obtient :

$$\min \sum_{i \in I} \sum_{k \in I} \sum_{j \in I} \lambda_i C_{kj} z_{ikj} \quad (\text{O1})$$

$$\text{s.t } \sum_{i,j \in I} z_{ikj} = 1 \quad \forall k \in I \quad (\text{E1})$$

$$\sum_{k,j \in I} z_{ikj} = 1 \quad \forall i \in I \quad (\text{E1})$$

$$\sum_{j \in I} x_j = K \quad (\text{E3})$$

$$\sum_{i \in I} z_{ikj} \leq x_j \quad \forall k, j \in I \quad (\text{E4})$$

$$\sum_{k,j \in I} C_{kj} z_{ikj} \leq \sum_{k,j \in I} C_{kj} z_{i+1,k,j} \quad \forall i \in \{1, \dots, M-1\} \quad (\text{E6})$$

De plus, pour améliorer l'efficacité de ce modèle, on peut relâcher certaines variables, c'est-à-dire leur faire prendre des valeurs continues.

On a  $z_{ikj} \begin{cases} \in [0,1] & \text{si } i \in \{1, \dots, K\} \text{ et } k,j \in \{1, \dots, M\} \\ \in \{0,1\} & \text{sinon} \end{cases}$

Et  $x_j \in \{0, 1\}$ .

Cependant, il faut ajouter deux contraintes pour garantir l'optimalité de la solution :

- $\sum_{i=1}^K z_{ikk} = x_k$
- $z_{mkj} \leq 0$  si  $C_{kj} > \frac{z_{UB}}{\sum_{i=m}^N \lambda_i}$  avec  $z_{UB}$  la valeur de la fonction objectif pour une solution quelconque

On peut ainsi résoudre ce modèle grâce au solveur CPLEX pour des instances allant jusqu'à  $M = 130$  en une centaine de secondes.

### 3.2. Résultats

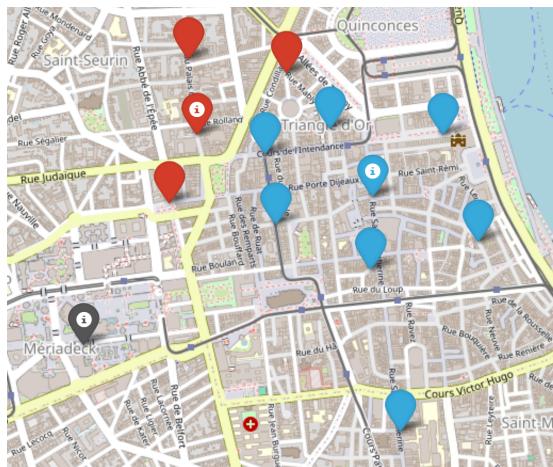


Fig. 4. – Résultats avec  $M=13$   $K=3$   
 $\lambda = (1111111111111)$

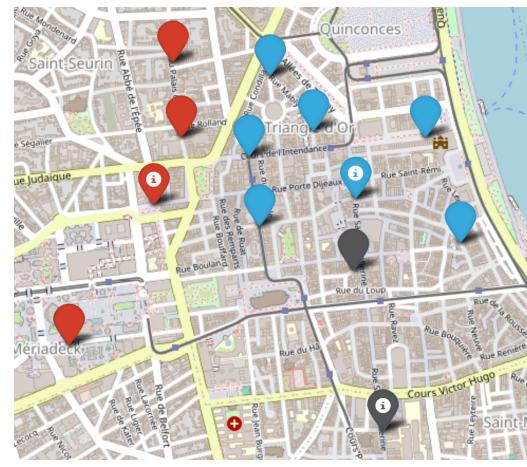


Fig. 5. – Résultats avec  $M=13$   $K=3$   
 $\lambda = (0000000000001)$

#### • Légende :

- ▶ Centre d'une zone de tournée
- ▶ Dépôt

On observe bien le phénomène attendu : sur Fig. 4, on voit une zone de tournée bleue assez éloignée par rapport aux autres, tandis que sur Fig. 5, chaque zone de desserte présente un coût assez proche des autres de la même couleur.

## 4. Modèles de Facility Location avec dépôt mobile

L'ajout de dépôts fixes a un coût très important et il ne vaut pas la peine d'en construire de nouveaux si c'est pour gagner peu de temps à vélo. Pour cette raison, nous devons envisager des infrastructures moins coûteuses.

De plus, les dépôts fixes sont essentiels dans l'organisation, car c'est le lieu d'où partent tous les postiers à vélo.

Lorsque la demande est élevée, les postiers, dont la capacité de transport est limitée, sont obligés d'effectuer des allers-retours au dépôt pour se recharger. Je me suis donc demandé s'il était possible d'éviter ces allers-retours.

Je définis **un dépôt mobile** comme un emplacement où un agent peut se recharger en colis ; cependant, l'agent ne fait que passer. Ce dépôt est dit « mobile » car il n'existera peut-être plus les jours suivants.

On supposera dans notre modélisation qu'un agent effectue deux tournées (on dira que sa première tournée a lieu le matin et sa deuxième l'après-midi, mais cela n'a pas d'importance). Ainsi, l'agent part du dépôt fixe, va sur la zone de tournée du matin, puis se recharge au dépôt fixe ou mobile, effectue sa deuxième tournée et rentre à son dépôt fixe d'origine (pour garer son vélo, ramener les colis non livrés, etc.).

Nous ferons en sorte que nos modèles incluent une dimension temporelle pour prendre en compte les variations de la demande, qui se traduisent par des zones de tournées différentes (le centre des demandes n'étant plus le même). On peut imaginer qu'il y a plus de colis à livrer la semaine que le week-end aux commerçants, et l'inverse pour les habitants. Ainsi, l'emplacement des dépôts mobiles sera calculé en fonction de la demande à un instant donné.

## 4.1. Modélisation avec une camionnette comme dépôt mobile

Ma première façon d'imaginer un dépôt mobile a été celui d'une camionnette partant du dépôt fixe le matin. Elle irait à des emplacements déterminés par mon modèle afin que d'autres agents puissent se recharger auprès de cette camionnette. Cela permet aux agents d'éviter les allers-retours au dépôt fixe. L'agent qui conduit la camionnette pourrait en profiter pour desservir la zone de tournée dans laquelle il se trouve.

### 4.1.1. Modèle

#### Paramètres

- $K_f$  nombre de dépôts fixes maximal
- $K_m$  nombre de dépôts mobiles (camionnette) maximal
- $M$  nombre de tournées par jour
- $N$  nombre d'emplacements disponibles pour les dépôts fixes
- $T$  nombre de jours
- $C_{i\hat{i}t}$  distance entre la zone  $i \in \{1, \dots, M + N\}$  et la zone  $\hat{i} \in \{1, \dots, M + N\}$  au jour  $t \in \{1, \dots, T\}$
- $P_A$  prix d'un agent par mètre parcouru
- $P_C$  prix d'une camionnette par mètre parcouru
- $P_{S_i}$  prix du stationnement d'une camionnette en zone  $i \in \{1, \dots, M\}$
- $P_{F_j}$  prix du dépôt fixe à l'emplacement  $j \in \{M, \dots, M + N\}$

#### Définition

- $I = \{1, \dots, M\}$
- $J = \{M + 1, \dots, M + N\}$
- $I \cup J = \{1, \dots, M + N\}$
- $\tau = \{1, \dots, T\}$

## Variables

- $x_j^{(f)} \in \{0, 1\} \quad \forall j \in J$  =1 s'il y a un dépôt fixe à l'emplacement  $j$
- $x_{it}^{(m)} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I, t \in \tau$  =1 s'il y a un dépôt mobile en zone  $i$  au jour  $t$
- $b_{it}^{(1)} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I, t \in \tau$  =1 si la tournée en zone  $i$  est desservie lors de la première demi-journée au jour  $t$
- $b_{it}^{(2)} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I, t \in \tau$  =1 si la tournée en zone  $i$  est desservie lors de la deuxième demi-journée au jour  $t$
- $y_{ijt}^{(1)} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I, j \in J, t \in \tau$  =1 si la tournée de la zone  $i$  est desservie lors de la première demi-journée par le dépôt fixe  $j$  au jour  $t$
- $y_{ijt}^{(2)} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I, j \in I \cup J, t \in \tau$  =1 si la tournée de la zone  $i$  se recharge au dépôt  $j$  au jour  $t$
- $y_{ijt}^{(3)} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I, j \in I \cup J, t \in \tau$  =1 si la zone de tournée  $i$  est desservie lors de la deuxième demi-journée par le dépôt  $j$  au jour  $t$
- $y_{ijt}^{(4)} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I, j \in J, t \in \tau$  =1 si la tournée de la zone  $i$  rentre au dépôt  $j$  en fin de journée au jour  $t$
- $m_{ijt} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I, j \in J, t \in \tau$  =1 si un dépôt mobile se stationne/dessert la tournée de la zone  $i$  en venant du dépôt  $j$  au jour  $t$

## Modèle

$$\min \sum_{t \in \tau} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \left( y_{ijt}^{(1)} \cdot C_{jit} \text{ PA} + y_{ijt}^{(4)} \cdot C_{ijt} \text{ PA} \right) \quad (\text{O1})$$

$$+ \sum_{t \in \tau} \sum_{i \in I} \sum_{j \in I \cup J} \left( y_{ijt}^{(2)} \cdot C_{ijt} \text{ PA} + y_{ijt}^{(3)} \cdot C_{jxit} \text{ PA} \right)$$

$$+ \sum_{j \in J} \left( x_j^{(f)} \cdot \text{PF}_j \right)$$

$$+ \sum_{t \in \tau} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \left( m_{ijt} \cdot C_{ijt} \cdot \text{PC} \right)$$

$$+ \sum_{t \in \tau} \sum_{i \in I} \left( x_{it}^{(m)} \cdot \text{PS}_i \right)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j \in J} x_j^{(f)} \leq \text{Kf} \quad (\text{E1})$$

$$\sum_{i \in I} x_{it}^{(m)} \leq \text{Km} \quad \forall t \in \tau \quad (\text{E2})$$

$$b_{it}^{(1)} + b_{it}^{(2)} = \left( 1 - x_{it}^{(m)} \right) \quad \forall t \in \tau, i \in I \quad (\text{E3})$$

$$\sum_{j \in J} y_{ijt}^{(1)} = b_{it}^{(1)} \quad \forall t \in \tau, i \in I \quad (\text{E4})$$

$$y_{ijt}^{(1)} \leq x_j^{(f)} \quad \forall t \in \tau, i \in I, j \in J \quad (\text{E5})$$

$$\sum_{j \in I \cup J} y_{ijt}^{(2)} = b_{it}^{(1)} \quad \forall t \in \tau, i \in I \quad (\text{E6})$$

$$y_{ijt}^{(2)} \leq x_j^{(f)} \quad \forall t \in \tau, i \in I, j \in J \quad (\text{E7})$$

$$y_{ijt}^{(2)} \leq x_{jt}^{(m)} \quad \forall t \in \tau, i \in I, j \in J \quad (\text{E8})$$

$$\sum_{j \in I \cup J} y_{ijt}^{(3)} = b_{it}^{(2)} \quad \forall t \in \tau, i \in I \quad (\text{E9})$$

$$y_{ijt}^{(3)} \leq x_j^{(f)} \quad \forall t \in \tau, i \in I, j \in J \quad (\text{E10})$$

$$y_{ijt}^{(3)} \leq x_{jt}^{(m)} \quad \forall t \in \tau, i \in I, j \in J \quad (\text{E11})$$

$$\sum_{j \in J} y_{ijt}^{(4)} = b_{it}^{(2)} \quad \forall t \in \tau, i \in I \quad (\text{E12})$$

$$y_{ijt}^{(4)} \leq x_j^{(f)} \quad \forall t \in \tau, i \in I, j \in J \quad (\text{E13})$$

$$\sum_{i \in I} y_{ijt}^{(2)} = \sum_{i \in I} y_{ijt}^{(3)} \quad \forall t \in \tau, j \in I \cup J \quad (\text{E14})$$

$$\sum_{i \in I} y_{ijt}^{(1)} = \sum_{i \in I} y_{ijt}^{(4)} \quad \forall t \in \tau, j \in J \quad (\text{E15})$$

$$\sum_{j \in J} m_{ijt} = x_{it}^{(m)} \quad \forall t \in \tau, i \in I \quad (\text{E16})$$

(E1),(E2) : limite le nombre de dépôts fixes ou mobiles.

(E3) : si la zone de tournée  $i$  n'est pas un dépôt mobile, alors cette zone est desservie soit le matin, soit l'après-midi (exclusif).

(E4),(E6),(E9),(E14) : une zone de tournée  $i$  est desservie par un unique dépôt (ou aucun si  $i$  est un dépôt).

(E5),(E7),(E8),(E10),(E11),(E13) : une zone de tournée  $i$  est desservie uniquement par des dépôts.

(E14) : il y a autant d'agents qui se rechargent au dépôt mobile  $i$  que d'agents qui en partent.

(E15) : il y a autant d'agents qui partent du dépôt fixe  $j$  le matin que d'agents qui y reviennent l'après-midi.

#### 4.1.2. Résultats

Les résultats dépendent fortement de PA, PC, PS et PF. Si l'on considère qu'il faut acheter de nouvelles camionnettes pour qu'elles fassent office de dépôts mobiles, alors le modèle ne propose tout simplement pas de dépôts mobiles, car elles sont trop chères comparé au coût de quelques minutes de travail supplémentaires.

Voici comment j'ai choisi ces paramètres :

**PA** = salaire / vitesse\_agent : prix du mètre d'un agent

**PC** = consommation\_essence\*prix\_essence\*0.00001 + (salaire / vitesse\_agent) : prix du mètre

en camionnette

$\text{PS}_i = (\text{prix\_camionnette\_par\_mois} / 31)$  : prix d'une camionnette en zone  $i$  pour 1 journée

$\text{PF}_i = \frac{\text{prix\_par\_metre\_carre} \cdot \text{rendement\_locatif\_brut}}{100 \cdot 12}$  avec  $\text{prix\_par\_metre\_carre} = \frac{\text{valeurs fongière}}{\text{surface du logement}}$

rendement\_locatif\_brut = 5 : part de ce que gagne par an un investisseur sur son capital

surface\_d1\_depot = 30 : m<sup>2</sup>

vitesse\_agent = 18000 : vitesse d'un agent en m/h

vitesse\_camionnette = 25000 : vitesse d'une camionnette en m/h

salaire = 15 : prix d'un agent à l'heure

prix\_camionnette\_par\_mois = 285 : € / mois (en leasing)

consommation\_essence = 8 : L / 100 km

prix\_essence = 1.9 : € / L

Cependant, dès qu'on met  $\text{PS}_i = 0$ , on observe l'apparition de dépôts mobiles, et donc la diminution moyenne des distances parcourues par les agents.

On peut en conclure que si nous possérons déjà les véhicules, nous obtenons un gain d'efficacité des agents non négligeable. En revanche, s'il faut les acheter, les dépôts mobiles ne sont pas rentables.

## 4.2. Modélisation avec des relais postaux comme dépôts mobiles

En interrogeant un postier croisé dans une rue à Grenoble, celui-ci m'indique qu'ils disposent déjà d'une organisation proche de Chapitre 4.1 ; toutefois, au lieu d'avoir des camionnettes comme dépôts mobiles, ils utilisent des relais postaux dans la rue, c'est-à-dire des boîtes sécurisées où l'on peut déposer des lettres/colis (voir Fig. 6 et Fig. 7).



Fig. 6. – Relais postaux



Fig. 7. – Boîte aux lettres avec un coffre en dessous

Ces boîtes existent déjà et sont utilisées lorsqu'il y a beaucoup de lettres. Cela résout le problème du coût trop élevé des dépôts mobiles.

Ces dépôts mobiles sont alimentés le matin par une camionnette qui part du dépôt fixe.

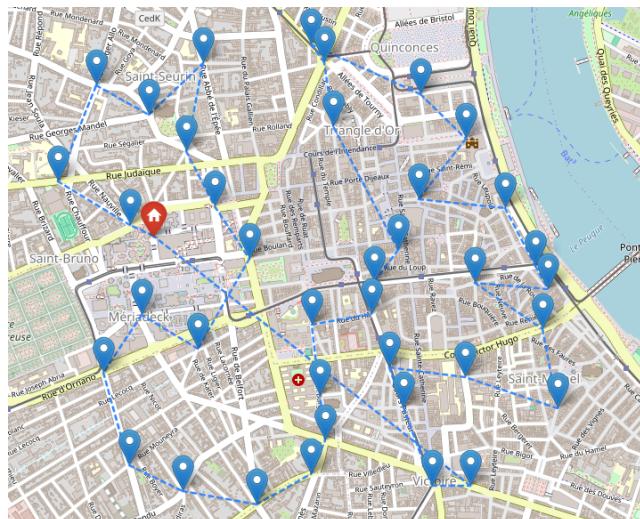


Fig. 8. – Tournée de la camionnette si elle passe par tous les dépôts mobiles (les marqueurs bleus représentent les relais postaux)

### 4.2.1. Modèle

Dans ce modèle, nous avons un seul dépôt fixe ; nous verrons ensuite comment adapter si nécessaire.

Nous avons besoin de calculer la tournée de la camionnette, car sa durée pourrait dépasser la matinée, ce qui poserait problème aux agents qui trouveraient des relais vides. La camionnette n'a pas le temps de recharger tous les dépôts mobiles avant l'arrivée des agents pour la recharge.

Pour résoudre ce problème, il faut fixer une contrainte de durée sur cette tournée.

Le calcul de la tournée de la camionnette est un problème connu sous le nom de TSP (**Traveling Salesman Problem** ou problème du voyageur de commerce) : il s'agit de déterminer, pour un ensemble de « villes », le plus court circuit passant une seule fois par chacune. Dans notre cas, il s'agit des dépôts mobiles.

Ce problème est très difficile à résoudre exactement ; cependant, il existe des métaheuristiques, telles que le recuit simulé, qui calculent rapidement une très bonne solution. En revanche, ce type de méthodes ne se modélise pas en programmation linéaire.

**Voici ce que je propose :**

Imaginons que j'ai 6 dépôts mobiles : **a b c d e f**

Et 1 dépôt fixe : D

### Méthode :

- Je calcule, à l'aide du recuit simulé, une très bonne tournée qui passe par tous les dépôts mobiles : **D c d f b a e D**.
  - Dans mon modèle, si je sélectionne 2 dépôts mobiles, disons **a** et **f**, alors l'ordre de passage de la camionnette sera : **D f a D**, car il s'agit de la sous-tournée de **D c d f b a e D** qui contient **a** et **f**.

Cependant, une sous-tournée d'une tournée optimale n'est pas forcément optimale. La solution générée par le modèle n'est donc pas nécessairement la meilleure, mais elle reste suffisamment bonne.

Nous ajoutons dans la fonction objectif un coût de la camionnette par mètre (noté PC), choisi de manière arbitraire. En faisant varier PC, notre modèle retournera des solutions où la camionnette parcourt plus ou moins de distance.

Pour rappel, notre objectif est d'imposer une contrainte de durée sur la tournée.

Deux options :

- Ajouter la contrainte de durée sur la tournée basée sur l'approximation de celle-ci : (durée\_tournée\_approximative < contrainte). Problème : la durée de la tournée générée par notre modèle (durée\_tournée\_approximative) est toujours plus grande que l'optimale. Cette méthode donne des solutions non optimales.
- Ou bien :

```
PC = 0
Contrainte = ... # la contrainte sur la distance parcourue de la camionnette
Solution = Evaluation_du_modele(PC)
Tant que distance_réelle(Solution) > Contrainte: # distance_réelle(Solution) :
    distance calculée plus exactement via recuit simulé
        PC += 0.0001 # valeur choisie de manière arbitraire
    Solution = Evaluation_du_modele(PC)
```

Ainsi, on obtient une solution dont la vraie distance parcourue par la camionnette respecte la contrainte. L'avantage est d'accepter une solution même si durée\_tournée\_approximative > contrainte, ce qui peut conduire à une meilleure solution.

## Paramètres

- $K$  nombre de dépôts mobiles (boîte) maximal
- $M$  nombre de tournées par jour
- $N$  nombre de dépôts mobiles (boîte postale)
- $T$  nombre de jours
- $C_{i\hat{i}t}$  distance entre la zone  $i \in \{0, \dots, N + M\}$  et la zone  $\hat{i} \in \{0, \dots, N + M\}$  au jour  $t \in \{1, \dots, T\}$
- PA prix d'un agent par mètre parcouru
- PC prix d'une camionnette par mètre parcouru
- $PMU_j$  prix du dépôt mobile  $j \in \{1, \dots, N\}$  pour chaque jour d'utilisation
- $PMF_j$  prix du dépôt mobile  $j \in \{1, \dots, N\}$  pour la mise en service (fabrication)

## Définition

$J = \{1, \dots, N\}$  : indices des dépôts mobiles (boîtes postales) fixés dans le temps

l'indice 0 correspond à l'unique dépôt fixe

$I = \{N + 1, \dots, N + M\}$  : indices des zones de tournée au temps  $t$

$\tau = \{1, \dots, T\}$

## Hypothèse

On suppose que les indices  $j$  des dépôts mobiles sont dans l'ordre optimal pour la tournée de la camionnette qui passerait par chaque dépôt  $j$ .

## Variables

- $x_{jt}^{(m)} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in \{0\} \cup J, t \in \tau$  =1 si le dépôt mobile  $i$  est actif au jour  $t$
- $x_j^{(i)} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in \{0\} \cup J$  =1 si le dépôt mobile  $i$  est utilisé au moins un jour
- $y_{ijt}^{(2)} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I, j \in \{0\} \cup J, t \in \tau$  =1 si la tournée de la zone  $i$  se recharge au dépôt  $j$  au jour  $t$
- $y_{ijt}^{(3)} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I, j \in \{0\} \cup J, t \in \tau$  =1 si la zone de tournée  $i$  est desservie lors de la deuxième demi-journée par le dépôt  $j$  au jour  $t$
- $m_{jj't} \in \{0, 1\} \quad \forall j, j' \in \{0\} \cup J, j < j', t \in \tau$  =1 si la camionnette se déplace du dépôt  $j$  vers le dépôt  $j'$  au temps  $t$

## Modèle

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{t \in \tau} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J \cup \{0\}} y_{ijt}^{(2)} \cdot (C_{0it} + C_{ijt}) \cdot \text{PA} + y_{ijt}^{(3)} \cdot (C_{jit} + C_{i0t}) \cdot \text{PA} \\ & + \sum_{t \in \tau} \sum_{j' \in J \cup \{0\}} \sum_{j=0}^{j'-1} (m_{jj't} \cdot C_{jj't} \cdot \text{PC}) \\ & + \sum_{t \in \tau} \sum_{j \in J} (x_{jt}^{(m)} \cdot \text{PMU}_j) \\ & + \sum_{j \in J} x_j^{(i)} \cdot \text{PMF}_j \end{aligned} \quad (\text{O1})$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j \in J} x_{jt}^{(m)} \leq K \quad \forall t \in \tau \quad (\text{E1})$$

$$x_{0t}^{(m)} = 1 \quad \forall t \in \tau \quad (\text{E2})$$

$$\sum_{i \in I} y_{ijt}^{(2)} + \sum_{i \in I} y_{ijt}^{(3)} = 1 \quad \forall t \in \tau, j \in J \cup \{0\} \quad (\text{E3})$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J \cup \{0\}} y_{ijt}^{(2)} = \frac{M}{2} \quad \forall t \in \tau \quad (\text{E4})$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J \cup \{0\}} y_{ijt}^{(3)} = \frac{M}{2} \quad \forall t \in \tau \quad (\text{E5})$$

$$y_{ijt}^{(2)} \leq x_{jt}^{(m)} \quad \forall t \in \tau, i \in I, j \in J \cup \{0\} \quad (\text{E6})$$

$$y_{ijt}^{(3)} \leq x_{jt}^{(m)} \quad \forall t \in \tau, i \in I, j \in J \cup \{0\} \quad (\text{E7})$$

$$\sum_{i \in I} y_{ijt}^{(2)} = \sum_{i \in I} y_{ijt}^{(3)} \quad \forall t \in \tau, j \in J \cup \{0\} \quad (\text{E8})$$

$$m_{jj't} \leq x_{jt}^{(m)} \quad \forall j' \in J \cup \{0\}, j < j', t \in \tau \quad (\text{E9})$$

$$m_{jj't} \leq x_{j't}^{(m)} \quad \forall j' \in I \cup \{0\}, j < j', t \in \tau \quad (\text{E10})$$

$$\sum_{j < j' \leq M} m_{jj't} = x_{jt}^{(m)} \quad \forall j \in \{0, \dots, N-1\}, t \in \tau \quad (\text{E11})$$

$$\sum_{j < j' \leq M} m_{jj't} = x_{j't}^{(m)} \quad \forall j' \in \{1, \dots, N\}, t \in \tau \quad (\text{E12})$$

$$\sum_{t \in \tau} x_{jt}^{(m)} \leq x_j^{(i)} \cdot T \quad \forall j \in \{1, \dots, N\} \quad (\text{E13})$$

(E1)-(E8) : mêmes principes que le modèle de Chapitre 4.1, en remplaçant  $b_{it}^{(1)}$  et  $b_{it}^{(2)}$ . (E9), (E10) : si le dépôt mobile  $j$  n'est pas sélectionné, la camionnette ne peut ni y aller ni en repartir. (E11),(E12) : si  $j \rightarrow j'$  est un trajet de la camionnette, il n'existe pas de  $j''$  tel que la camionnette fasse  $j \rightarrow j''$  ou  $j'' \rightarrow j'$  ; si  $j$  est un dépôt, il existe forcément  $j'$  tel que la camionnette effectue  $j' \rightarrow j$  et  $j \rightarrow j'$ . (E13) :  $x_j^{(i)} = x_{j1}^{(m)} \vee x_{j2}^{(m)} \vee \dots \vee x_{jT}^{(m)}$ .

- Explication détaillée de la variable  $m_{ijt}$

Pour rappel, les indices des dépôts mobiles sont ordonnés selon l'ordre de la tournée.

Reprenons l'exemple précédent : 6 dépôts mobiles a b c d e f et 1 dépôt fixe D. La tournée optimale est : D c d f b a e D. Nous associons donc : 0 : D ; 1 : c ; 2 : d ; ... Notre modèle sélectionne les dépôts aux indices 0,2,3 et 5.

D'après (E11), il existe un unique dépôt  $j$  tel que  $m_{0j} = 1$ .

Imaginons que nous prenions  $j = 3$  : alors  $m_{03} = 1$ . Cependant,  $m_{ij}$  n'est défini que pour  $i < j$ , donc il est impossible d'obtenir  $j'$  tel que  $m_{j'2} = 1$ , car les seuls  $j'$  possibles sont  $j' = 0$ , déjà utilisé par  $m_{03} = 1$  (E11)(E12). Donc  $j$  est forcément le plus petit possible, c'est-à-dire  $j = 2$ .

En itérant, on obtient bien  $m_{02} = m_{23} = m_{35} = 1$ .

#### 4.2.2. Résultats

Voici quelques définitions :



- Emplacement d'un dépôt fixe
- Centre d'une zone de tournée qui a lieu le matin
- Centre d'une zone de tournée qui a lieu l'après-midi
- Emplacement d'un relais postal (dépôt mobile) non utilisé à l'instant  $t$  mais utilisé un jour du mois
- Emplacement d'un relais postal (dépôt mobile) utilisé

Voici les résultats pour le centre-ville de Bordeaux sur le mois de janvier :



Fig. 9. – Résultats du 8 janvier



Fig. 10. – Résultats du 1er janvier

Dans un espace aussi réduit que le centre-ville de Bordeaux, les résultats du modèle sont peu pertinents : la diminution des distances parcourues par les agents grâce aux dépôts mobiles n'est pas significative.

## 5. Résultats généraux

Les données de la ville de Bordeaux sont intéressantes, car elles sont étalées sur plusieurs jours d'un mois, mais elles sont très concentrées dans le centre-ville.

Je dispose également des données de livraison de la ville de Grenoble, plus intéressantes car elles couvrent l'ensemble de la ville.

Il y a 5 dépôts fixes à Grenoble ; nous pouvons partir de ces dépôts, en fixer 4 et calculer le meilleur emplacement pour le dernier, etc.

Ici, le choix a été fait de recalculer l'emplacement de ces dépôts fixes avec un modèle de Facility Location :

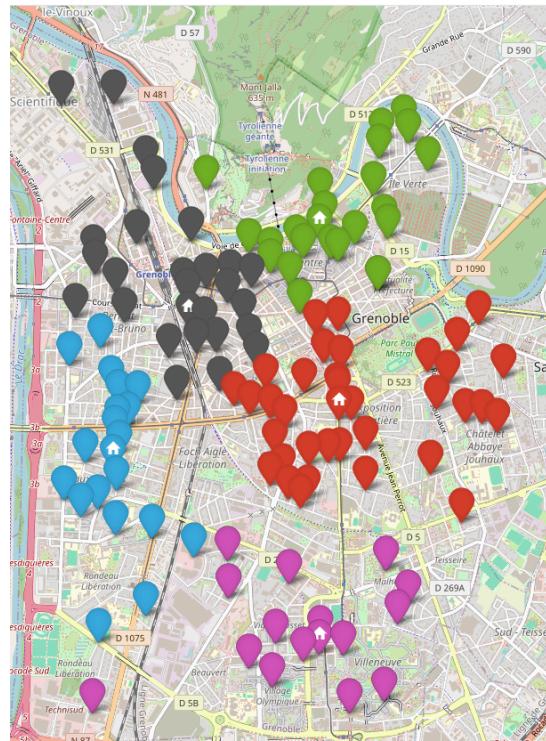


Fig. 11. – Résultats du modèle de Facility Location

Les marqueurs vierges sont desservis par le marqueur « maison » de la même couleur. Si le résultat ne nous plaît pas, nous avons toujours la possibilité d'utiliser le modèle DOMP, qui met plus de temps à s'exécuter ( 10 min).

Nous avons ainsi formé 5 regroupements de zones de tournée associés chacun à un dépôt fixe.

Puis nous exécutons notre modèle de dépôt mobile sur chaque regroupement, ce qui donne :

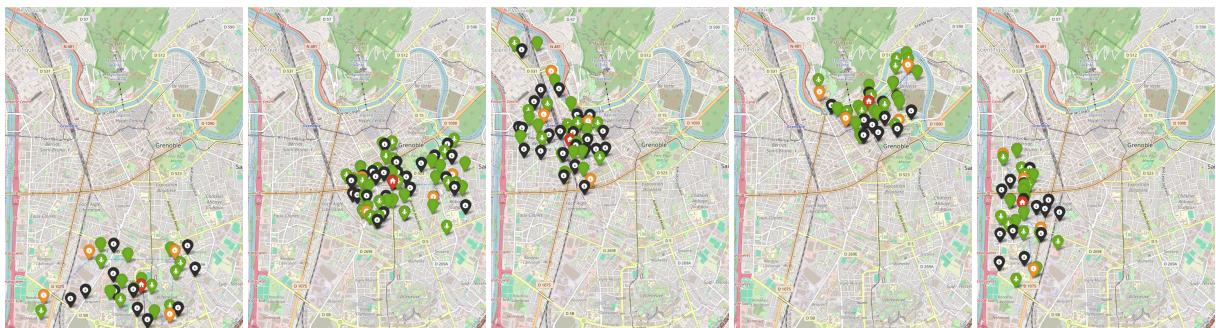


Fig. 14. – Résultats  
du modèle de dé-  
pôts mobiles

Nous n'avons pas directement la distance parcourue par chaque agent ; nous ne connaissons que les distances entre les zones de tournées et les dépôts.

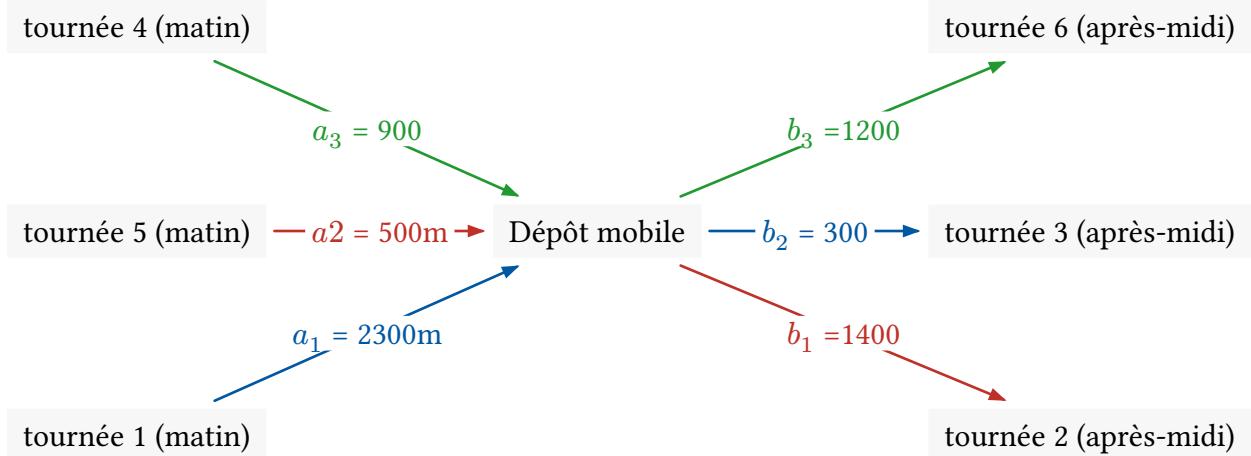


Fig. 17. – Attribution des zones de tournée aux agents

On identifie un agent par sa zone de tournée du matin et on l'associe à une zone de tournée de l'après-midi selon la démarche suivante : si l'agent parcourt une longue distance le matin pour aller de sa première zone de tournée à son dépôt mobile, il fera peu de distance l'après-midi pour aller de son dépôt mobile à sa deuxième zone de tournée. Le but est de minimiser :

$\max_{\sigma \text{ permutation}} a_i + b_{\sigma(j)}$  Ce qui se fait facilement via l'algorithme glouton suivant :

```
a = [(1,2300),(2,500),(2,900)]
b = [(1,1400),(2,300),(3,1200)]

as = a.sorted(key = lambda couple => couple[1]) # tri croissant
bs = b.sorted(key = lambda couple => couple[1], reverse=True) # tri décroissant

for i in range(len(as)):
    print(f"l'agent qui fera la tournée du matin {as[i][0]}"
          " effectuera la tournée {bs[i][0]} l'après-midi")
```

En utilisant cette méthode, nous pouvons obtenir la distance parcourue par agent et donc construire les statistiques suivantes :

NOMBRE DE RELAIS POS-TAUX UTILISÉS	DISTANCE TOTALE PARCOURUE EN MOYENNE PAR UN POSTIER	DISTANCE MAXIMALE PARCOURUE PAR UN POSTIER
0	2,9 km	5,2 km
2	2,4 km	5,8 km
4	2,1 km	4,8 km

Tableau 1. – Résultats des modèles de dépôts mobiles

On voit sur Tableau 1 que la distance moyenne parcourue par les agents diminue de 27 % lorsqu'on met 4 relais postaux au lieu de 0. Plus le regroupement est étalé dans l'espace, plus il devient intéressant de placer des dépôts mobiles. On peut même envisager de réduire le nombre de dépôts fixes et de les remplacer par des mobiles pour diminuer les coûts.

## 5.1. Points d'amélioration

Les relais postaux existants ont une capacité limitée. Un agent peut transporter en moyenne 70 colis avec son vélo-cargo. Il est probable qu'une tournée complète ne tienne pas dans un seul relais postal. L'idée consiste alors à regrouper plusieurs relais et à répartir les colis. Cependant, le temps nécessaire pour les remplir et les vider s'accroît, ce qui en réduit l'intérêt opérationnel. Une option serait d'investir dans des relais de plus grande capacité, ou de combiner des dépôts mobiles opérés par camionnette et des relais postaux, en fonction du parc de véhicules déjà disponible.

L'attribution des zones de tournée aux agents, décrite en Fig. 17, a pour objectif d'équilibrer les distances parcourues. Toutefois, les agents peuvent se retrouver à couvrir des secteurs très différents entre le matin et l'après-midi, ce qui exige un apprentissage de nouvelles tournées et du temps d'adaptation. Une solution consiste à définir plusieurs zones fixes, de taille raisonnable, afin qu'un agent puisse maîtriser une zone dans son intégralité. C'est pourquoi nous proposons d'appliquer notre modèle de dépôt mobile à chacune de ces zones. Ainsi, nous bénéficions de dépôts mobiles tout en garantissant des zones fixes pour chaque agent.

## Bibliographie

- [1] M. Melo, S. Nickel, et F. Saldanha-da-Gama, « Facility location and supply chain management - A review », *European Journal of Operational Research*, vol. 196, n° 2, p. 401-412, 2009, [En ligne]. Disponible sur: <https://econpapers.repec.org/RePEc:eee:ejores:v:196:y:2009:i:2:p:401-412> °
- [2] N. Boland, P. Domínguez-Marín, S. Nickel, et J. Puerto, « Exact procedures for solving the discrete ordered median problem », *Computers & Operations Research*, vol. 33, n° 11, p. 3270-3300, 2006, doi: <https://doi.org/10.1016/j.cor.2005.03.025> °.