

Étude de cas sur l'implantation de dépôts de livraison postale par cyclo-logistique à Bordeaux

Louis TRIOULEYRE-ROBERJOT

27 juillet 2024

Abstract

Ce rapport de stage présente une étude de cas sur l'implantation de centres de livraison postale utilisant des vélos cargos à Bordeaux. Dans un contexte de croissance du e-commerce et de préoccupations environnementales croissantes, la cyclo-logistique offre une alternative prometteuse pour la livraison du dernier kilomètre. L'objectif est d'aider à la conception de réseaux logistiques urbains plus durables et plus économiques, et d'informer les décideurs sur le potentiel de la cyclo-logistique.

Mots clés : cyclo-logistique, logistique urbaine, Facility Location, optimisation, vélos cargos, Bordeaux

Table des matières

1. Introduction	3
1.1. Contexte	3
1.2. Problématique	3
1.3. Objectifs du stage	3
2. Facility Location	3
2.1. Définition de notre problème	3
2.2. Les données	4
2.3. Le modèle	5
2.4. Résultats	6
3. Amélioration du modèle de Facility Location	6
3.1. Modèle	7
3.2. Résultats	9
4. Modèles de Facility Location avec dépôt mobile	9
4.1. Modélisation avec une camionnette comme dépôt mobile	10
4.1.1. Modèle	10
4.1.2. Résultats	12
4.2. Modélisation avec des relais postaux comme dépôt mobile	13
4.2.1. Modèle	14
4.2.2. Résultats	17
5. Résultats généraux	18
5.1. Points d'améliorations	21
Bibliographie	22

1. Introduction

1.1. Contexte

Sous l'influence des nouveaux modes de vie et des préoccupations environnementales, les villes sont en pleine mutation, et précisément la ville de Bordeaux. La croissance démographique et l'essor du e-commerce augmentent le flux de marchandises, avec un impact environnemental significatif, notamment en termes d'émissions de gaz à effet de serre (GES). La cyclo-logistique, utilisant des vélos cargos, se présente comme une alternative durable pour la livraison du dernier kilomètre, offrant des gains de productivité et réduisant l'impact environnemental.

1.2. Problématique

Cependant, la mise en œuvre de la cyclo-logistique présente des défis. L'infrastructure existante, optimisée pour les véhicules motorisés, se caractérise par des entrepôts éloignés des zones de livraison. Cette distance, négligeable avec l'utilisation de véhicules motorisés, devient un facteur limitant avec l'adoption de vélos. L'implantation stratégique de nouveaux entrepôts, plus proches des zones de livraison, permettrait d'optimiser les opérations.

1.3. Objectifs du stage

L'objectif sera de proposer un modèle d'optimisation basé sur un problème de localisation (Facility Location Problem) et de le tester sur des scénarios à définir. Cette étude sera menée de la manière suivante :

- Analyse des données de livraison en vélos-cargos fournies par La Poste,
- Prise en main du problème de localisation par la lecture d'articles scientifiques,
- Définition d'un modèle d'optimisation pour répondre à la problématique de La Poste,
- Programmation d'un modèle d'optimisation sur différents scénarios en utilisant un solveur de programmation linéaire en nombres entiers.

2. Facility Location

2.1. Définition de notre problème

Nous allons modéliser notre problème par un problème de localisation ou Facility Location en anglais. [1]

Pour simplifier notre problème, nous ne voulons pas modéliser les tournées en elles mêmes, nous allons simplement modéliser une tournée par un point qui représente le centre de tout les adresses de livraison de cette tournées.

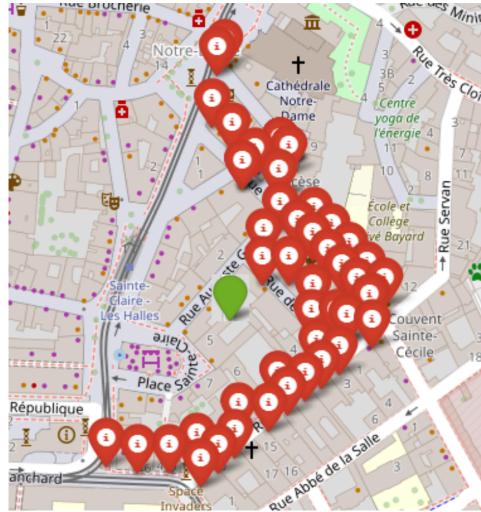


Fig. 1. – Illustration de la modélisation d'une tournée

Sur Fig. 1, le point vert représente le centre de la zone de tournée et celui-ci sera notre « client » dans le problème de Facility Location [1].

Nos installations serons les dépôts postaux (emplacement où un agent peut se recharger en colis).

Pour résumer, l'objectif est de minimiser la distance parcourue par les agents pour aller de leur dépôt jusqu'à leur zone de tournée (point vert dans Fig. 1)

2.2. Les données

Un certain nombre de données ont été transmises par La Poste, comme nous pouvons le voir sur Fig. 2.

Événement	Signature	CRBT	District	Numéro	Rue	Code postal	Ville	Ordre	Heure de passage
Livré adresse Destinataire	NON	NON	773	4 A	855-ЛХЛХ855 855-ЛХЛХ855 855-ЛХЛХ855	33000	BORDEAUX	2	09:33:58
Livré adresse Destinataire	OUI	NON	774	2	855-ЛХЛХ855 855-ЛХЛХ855 855-ЛХЛХ855	33000	BORDEAUX	1	09:30:28
PRE LIV ADR	NON	NON	774	10 TER	855-ЛХЛХ855 855-ЛХЛХ855 855-ЛХЛХ855	33000	BORDEAUX		
Avisé Absence / Fermeture	NON	NON	775	4	855-ЛХЛХ855 855-ЛХЛХ855 855-ЛХЛХ855	33000	BORDEAUX	3	09:44:24
PRE LIV ADR	OUI	NON	775	4	855-ЛХЛХ855 855-ЛХЛХ855 855-ЛХЛХ855	33000	BORDEAUX		
PRE LIV ADR	OUI	NON	776	41	855-ЛХЛХ855 855-ЛХЛХ855 855-ЛХЛХ855	33000	BORDEAUX		
Avisé Absence / Fermeture	OUI	NON	777	10	855-ЛХЛХ855 855-ЛХЛХ855 855-ЛХЛХ855	33000	BORDEAUX	4	10:06:46
Avisé Absence / Fermeture	OUI	NON	777	3	855-ЛХЛХ855 855-ЛХЛХ855 855-ЛХЛХ855	33000	BORDEAUX	5	10:15:32
Avisé Absence / Fermeture	OUI	NON	777	3	855-ЛХЛХ855 855-ЛХЛХ855 855-ЛХЛХ855	33000	BORDEAUX	6	10:15:43
Avisé Absence / Fermeture	NON	NON	777	29	855-ЛХЛХ855 855-ЛХЛХ855 855-ЛХЛХ855	33000	BORDEAUX	7	10:20:47

Fig. 2. – Données fournis par La Poste

Ce qui nous intéresse sont les tournées effectuées par chaque agent, c'est-à-dire l'adresse ainsi que l'ordre et l'heure de passage.

J'ai complété ces données en ajoutant les coordonnées GPS des adresses. Pour cela j'ai d'abord utilisé les services de OpenStreetMap, cependant ils arrivent que OSM me donne de mauvais résultats. Dans un premier temps nous éliminerons tous les coordonnées GPS qui ne sont pas dans le centre de Bordeaux qui ont été déterminés à la main de façon approchée. On pourra alors constituer un dictionnaire des adresses vers les coordonnées GPS pour éviter de faire plusieurs fois la même requête.

J'ai également récupéré la distance parcourue entre chaque point GPS. Pour cela on dira que la distance est égale à la distance à vol d'oiseau si celle ci n'est pas trop grande. Sinon il est judicieux de calculer le plus court chemin dans le graphe représentant le réseau des routes accessibles aux vélos dans la ville de Bordeaux.

En ayant les heures de passages, j'ai ajouté le temps de parcours entre chaque point d'arrêt.

Ainsi, on pourra avoir la longueur et le temps d'une tournée.

2.3. Le modèle

Paramètre

- M nombre de tournées
- K nombre de dépôts fixes
- $C_{i\hat{i}}$ distance entre la zone de tournée $i \in \{1, \dots, M\}$ et la zone de tournée $\hat{i} \in \{1, \dots, M\}$

Définition

- $I = \{1, \dots, M\}$ les indices des zones de tournée

Hypothèse

- Les emplacements disponibles pour les dépôts fixes sont toutes les zones de tournée

Variables

- $x_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I$ =1 s'il y a un dépôt fixe en zone de tournée i
- $y_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I$ =1 si la zone de tournée i est desservie par le dépôt j

Modèle

$$\min \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} y_{ij} \cdot C_{ij} \quad (\text{O1})$$

$$\text{s.t } y_{ij} \leq x_j \quad \forall i, j \in I \quad (\text{E1})$$

$$\sum_{j \in I} y_{ij} = 1 \quad \forall i \in I \quad (\text{E2})$$

$$\sum_{j \in I} x_j = K \quad (\text{E3})$$

(E1) : Une zone de tournée i est desservie seulement par des dépôts j

(E2) : Une zone de tournée i doit être desservie par un unique dépôt

(E3) : On a K dépôts

2.4. Résultats

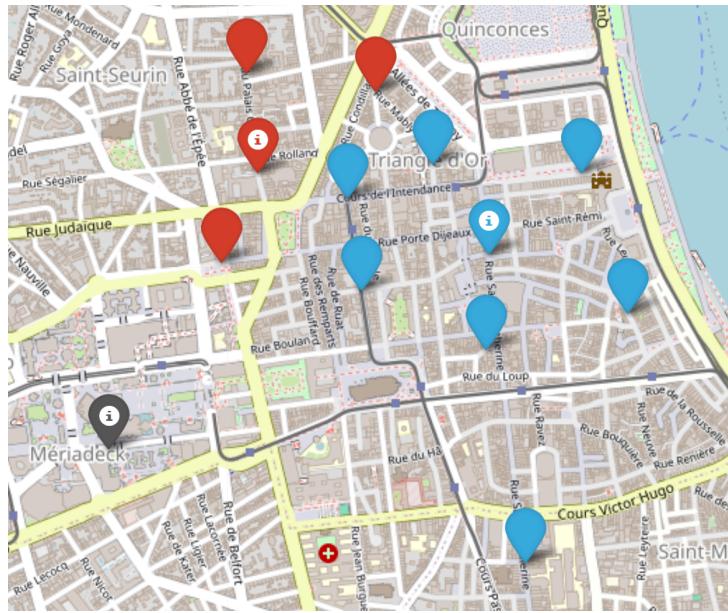


Fig. 3. – Résultats avec N=13 K=3

- **Légende :**

- Centre d'une zone de tournée
- Dépôt

Dans Fig. 3, les zones de tournée d'une même couleur sont desservis par la zone avec l'icône information. On peut voir se détacher une zone bleue qui est assez loin du dépôt, alors que les autres sont plus proches. Cela peut engendrer de la jalousie au sein des agents qui doivent desservir les zones de tournée, c'est pourquoi, on aimeraient avoir un contrôle sur l'égalité des distances parcourus par les agents.

3. Amélioration du modèle de Facility Location

On s'intéresse maintenant à un modèle qui semble améliorer l'égalité entre les agents. Le papier de [N. Boland, P. Domínguez-Marín, S. Nickel, et J. Puerto](#) propose un modèle : le problème discret de la médiane ordonnée (DOMP), qui permet de minimiser en outre la plus grande distance entre un dépôt et une zone de livraison associée.

Soit A l'ensemble des zones de tournée. Une solution au problème de localisation est donnée par un ensemble de M dépôt ; on utilise $X \subseteq A$ avec $|X| = K$ pour désigner une solution. On suppose que chaque zone de tournée sera servi par le dépôt le plus proche, c'est-à-dire qu' étant donné une solution X , on suppose que chaque zone de tournée i sera approvisionnée à partir d'un dépôt $j \in X$ tel que :

$$C_i(X) := \min_{k \in X} C_{ik} \quad (1)$$

On définit σ_X comme une permutation sur $\{1, \dots, M\}$ pour laquelle les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$C_{\sigma_X(1)}(X) \leq C_{\sigma_X(2)}(X) \leq \dots \leq C_{\sigma_X(M)}(X) \quad (2)$$

Soit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_M)$ avec $\lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, M$. Le problème discret de la médiane ordonnée (DOMP) est défini comme suit :

$$\min \sum_{i=1}^M \lambda_i C_{\sigma_X(i)}(X) \quad (3)$$

Ce problème est équivalent à celui expliciter [section 2.3](#) si l'on a $\lambda = (1, 1, \dots, 1)$.

En appliquant ce modèle avec $\lambda = (0, \dots, 0, 1)$, la fonction à minimiser devient :

$$\min C_{\sigma_X(M)}(X) = \min \left(\max_i C_{\sigma_X(i)}(X) \right) \quad (4)$$

Ainsi la solution fait en sorte de minimiser le coût de l'agent qui est le plus éloigné de son dépôt, cela peut alors diminuer les inégalités de coût entre agents.

3.1. Modèle

Paramètre

- M le nombres de zone de tournée
- K le nombres de dépôts
- λ_i paramètre du problème
- C_{ij} le coût pour desservir la zone de tournée i par le dépôt de la zone de tournée j

Définition

- $I = \{1, \dots, M\}$ les indices des zones de tournée

Hypothèse

- Les emplacements disponibles pour les dépôts fixes sont toutes les zones de tournée

Variables

- $x_i = 1$ si il y un dépôt dans la zone de tournée i
- $y_{ij} = 1$ si la zone de tournée i est desservie par le dépôt j
- $s_{ij} = 1$ si $\sigma_X(i) = j$

Modèle

$$\min \sum_{i \in I} \sum_{k \in I} s_{ik} \lambda_i \left(\sum_{j \in I} y_{kj} C_{kj} \right) \quad (O1)$$

$$\text{s.t. } y_{ij} \leq x_j \quad \forall i, j \in I \quad (E1)$$

$$\sum_{j \in I} y_{ij} = 1 \quad \forall i \in I \quad (\text{E2})$$

$$\sum_{j \in I} x_j = K \quad (\text{E3})$$

$$\sum_{i \in I} s_{ij} = 1 \quad \forall j \in I \quad (\text{E4})$$

$$\sum_{j \in I} s_{ij} = 1 \quad \forall i \in I \quad (\text{E5})$$

$$\sum_{k \in I} s_{ik} \left(\sum_{j \in I} y_{kj} C_{kj} \right) \leq \sum_{k \in I} s_{i+1,k} \left(\sum_{j \in I} y_{kj} C_{kj} \right) \quad \forall i \in \{1, \dots, M-1\} \quad (\text{E6})$$

On a : $\sum_j y_{kj} C_{kj} = C_k(X)$: le coût de desserte de la zone k, qui est alors desservit par le dépôt le plus proche.

$$(\text{O1}) \quad : \quad \text{On a } \sum_{i=1}^N \sum_{k=1} s_{ik} \lambda_i \left(\sum_j y_{kj} C_{kj} \right) = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1} s_{ik} \lambda_i C_k(X) = \sum_{i=1}^N \lambda_i C_{\sigma_X(i)}(X)$$

(E1) : Une zone i doit être desservie par un dépôt actif

(E2) : Une zone i doit être desservie par un unique dépôt

(E3) : On a K dépôts

(E4),(E5) : Pour que σ_X soit bien une permutation

$$(\text{E6}) : \text{On a } \sum_{k=1} s_{ik} \left(\sum_{j=1} y_{kj} C_{kj} \right) = \sum_{k=1} s_{ik} C_k(X) = C_{\sigma_X(i)}(X)$$

Pour linéariser ce modèle, on pose $z_{ikj} = s_{ik} y_{kj}$, on obtient les propriétés suivantes :

$$\sum_i z_{ikj} = y_{kj}; \sum_j z_{ikj} = s_{ik}; \sum_{i,k,j} z_{ikj} = \sum_{i,k} s_{ik} = M$$

En remplaçant et en utilisant ces propriété on obtient :

$$\min \sum_{i \in I} \sum_{k \in I} \sum_{j \in I} \lambda_i C_{kj} z_{ikj} \quad (\text{O1})$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i,j \in I} z_{ikj} = 1 \quad \forall k \in I \quad (\text{E1})$$

$$\sum_{k,j \in I} z_{ikj} = 1 \quad \forall i \in I \quad (\text{E1})$$

$$\sum_{j \in I} x_j = K \quad (\text{E3})$$

$$\sum_{i \in I} z_{ikj} \leq x_j \quad \forall k, j \in I \quad (\text{E4})$$

$$\sum_{k,j \in I} C_{kj} z_{ikj} \leq \sum_{k,j \in I} C_{kj} z_{i+1,k,j} \quad \forall i \in \{1, \dots, M-1\} \quad (\text{E6})$$

De plus, pour améliorer l'efficacité de ce modèle, on peut relâcher certaines variables, c'est-à-dire leur faire prendre des valeurs continues.

On a $z_{ikj} \begin{cases} \in [0,1] & \text{si } i \in \{1, \dots, K\} \text{ et } k,j \in \{1, \dots, M\} \\ \in \{0,1\} & \text{sinon} \end{cases}$

Et $x_j \in \{0, 1\}$

Cependant, il faut rajouter deux contraintes pour garantir l'optimalité de la solution :

- $\sum_{i=1}^K z_{ikk} = x_k$
- $z_{mkj} \leq 0$ si $C_{kj} > \frac{z_{\text{UB}}}{\sum_{i=m}^N \lambda_i}$ avec z_{UB} la valeur de la fonction objectif pour une solution quelconque

On peut ainsi résoudre ce modèle grâce au solveur CPLEX pour des instances allant jusqu'à $M = 130$ en une centaine de secondes.

3.2. Résultats

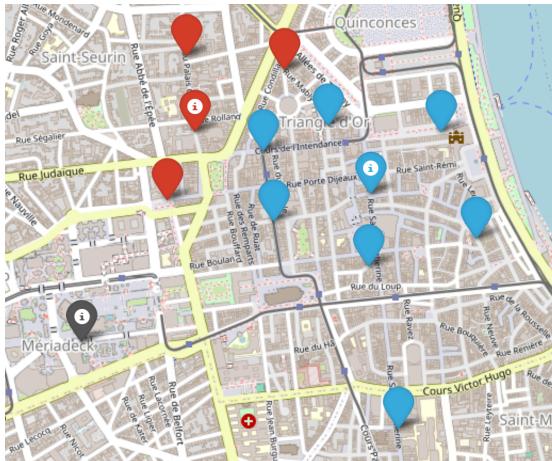


Fig. 4. – Résultats avec $M=13$ $K=3$
 $\lambda = (1111111111111)$

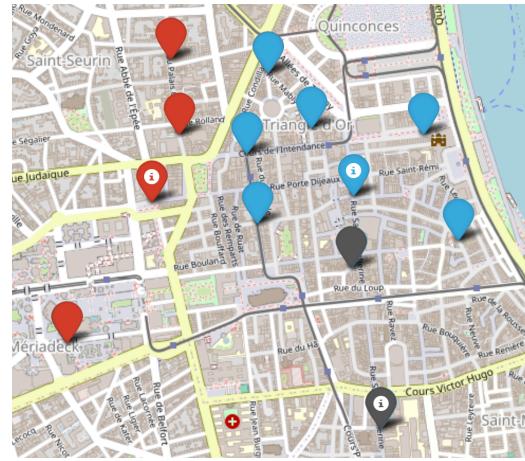


Fig. 5. – Résultats avec $M=13$ $K=3$
 $\lambda = (0000000000001)$

• Légende :

- Centre d'une zone de tournée
- Dépôt

On observe bien le phénomène prévu, c'est à dire que sur Fig. 4, on une zone de desserte bleue qui est assez éloigné par rapport aux autres, alors que sur Fig. 5, chaque zone de desserte à un coût assez proche des autres de la même couleur.

4. Modèles de Facility Location avec dépôt mobile

L'ajout de dépôt fixe a un coût très important et il ne vaut pas la peine d'en construire de nouveaux si c'est pour gagner peu de temps à vélo. Pour cette raison nous devons avoir des infrastructures moins coûteuses.

De plus, les dépôts fixes sont essentiels dans l'organisation car c'est le lieu d'où partent tous les postiers à vélo.

Quand il y a beaucoup de demandes, les postiers ayant une capacité de transport limitée, sont obligés de faire des allers-retours au dépôt pour pouvoir se recharger. Je me suis donc demandé s'il était possible d'éviter ces allers-retours.

Je définis **un dépôt mobile** comme un emplacement où un agent peut se recharger en colis, cependant l'agent ne fait que passer, ce dépôt est mobile car il n'existera peut-être plus les jours d'après.

On supposera dans notre modélisation qu'un agent fait deux tournées (on dira que sa première tournée a lieu le matin et sa deuxième l'après-midi mais cela n'a pas d'importance). Ainsi l'agent partira du dépôt fixe, ira sur la zone de tournée du matin, puis se rechargea au dépôt fixe ou mobile, fera sa deuxième tournée et rentrera à son dépôt fixe d'origine. (Pour garer son vélo, ramener les colis non livrés, etc)

On fera en sorte que nos modèles incluent une dimension temporelle pour prendre en compte les variations de demandes qui se traduirait par des zones de tournées différentes (car le centre des demandes ne serait plus le même). On peut imaginer qu'il y a plus de colis à livrer la semaine que le week-end aux commerçants. Et inversement il y a plus de colis à livrer le week-end que la semaine aux habitants. Ainsi l'emplacement des dépôts mobiles sera calculé en fonction de la demande à un instant.

4.1. Modélisation avec une camionnette comme dépôt mobile

Ma première façon d'imaginer un dépôt mobile a été celui d'une camionnette qui partirait du dépôt fixe le matin. Elle irait à des emplacements déterminés par mon modèle afin que d'autres agents puissent se recharger auprès de cette camionnette. Cela permet aux agents d'éviter les allers-retours au dépôt fixe. L'agent qui conduit la camionnette pourra en profiter pour desservir la zone de tournée dans laquelle il se trouve.

4.1.1. Modèle

Paramètres

- K_f nombre de dépôt fixe maximum
- K_m nombre de dépôt mobile (camionnette) maximum
- M nombre de tournée par jour
- N nombre d'emplacement disponible pour les dépôts fixes
- T nombre de jours
- $C_{i\hat{i}t}$ distance entre la zone $i \in \{1, \dots, M + N\}$ et la zone $\hat{i} \in \{1, \dots, M + N\}$ au jour $t \in \{1, \dots, T\}$
- P_A prix d'un agent par mètre parcourus
- P_C prix d'une camionnette par mètre parcourus
- P_{S_i} prix du stationnement d'une camionnette en zone $i \in \{1, \dots, M\}$
- P_{F_j} prix du dépôt fixe à l'emplacement $j \in \{M, \dots, M + N\}$

Définition

- $I = \{1, \dots, M\}$

- $J = \{M + 1, \dots, M + N\}$
- $I \cup J = \{1, \dots, M + N\}$
- $\tau = \{1, \dots, T\}$

Variables

- $x_j^{(f)} \in \{0, 1\} \quad \forall j \in J$ =1 s'il y a un dépôt fixe à l'emplacement j
- $x_{it}^{(m)} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I, t \in \tau$ =1 s'il y a dépôt mobile en zone i au jour t
- $b_{it}^{(1)} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I, t \in \tau$ =1 si la tournée en zone i est desservie lors de la première demi-journée au jour t
- $b_{it}^{(2)} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I, t \in \tau$ =1 si la tournée en zone i est desservie lors de la deuxième demi-journée au jour t
- $y_{ijt}^{(1)} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I, j \in J, t \in \tau$ =1 si la tournée de la zone i est desservie lors de la première demi-journée par le dépôt fixe j au jour t
- $y_{ijt}^{(2)} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I, j \in I \cup J, t \in \tau$ =1 si la tournée de la zone i se recharge au dépôt j au jour t
- $y_{ijt}^{(3)} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I, j \in I \cup J, t \in \tau$ =1 si la zone de tournée i est desservie lors de la deuxième demi-journée par le dépôt j au jour t
- $y_{ijt}^{(4)} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I, j \in J, t \in \tau$ =1 si la tournée de la zone i rentre au dépôt j pour la fin de journée au jour t
- $m_{ijt} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I, j \in J, t \in \tau$ =1 si un dépôt mobile se stationne/dessert la tournée de la zone i en venant du dépôt j au jour t

Modèle

$$\min \sum_{t \in \tau} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \left(y_{ijt}^{(1)} \cdot C_{jit} \text{ PA} + y_{ijt}^{(4)} \cdot C_{ijt} \text{ PA} \right) \quad (\text{O1})$$

$$+ \sum_{t \in \tau} \sum_{i \in I} \sum_{j \in I \cup J} \left(y_{ijt}^{(2)} \cdot C_{ijt} \text{ PA} + y_{ijt}^{(3)} \cdot C_{jxit} \text{ PA} \right)$$

$$+ \sum_{j \in J} \left(x_j^{(f)} \cdot \text{PF}_j \right)$$

$$+ \sum_{t \in \tau} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \left(m_{ijt} \cdot C_{ijt} \cdot \text{PC} \right)$$

$$+ \sum_{t \in \tau} \sum_{i \in I} \left(x_{it}^{(m)} \cdot \text{PS}_i \right)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j \in J} x_j^{(f)} \leq \text{Kf} \quad (\text{E1})$$

$$\sum_{i \in I} x_{it}^{(m)} \leq \text{Km} \quad \forall t \in \tau \quad (\text{E2})$$

$$b_{it}^{(1)} + b_{it}^{(2)} = \left(1 - x_{it}^{(m)} \right) \quad \forall t \in \tau, i \in I \quad (\text{E3})$$

$$\sum_{j \in J} y_{ijt}^{(1)} = b_{it}^{(1)} \quad \forall t \in \tau, i \in I \quad (\text{E4})$$

$$y_{ijt}^{(1)} \leq x_j^{(f)} \quad \forall t \in \tau, i \in I, j \in J \quad (\text{E5})$$

$$\sum_{j \in I \cup J} y_{ijt}^{(2)} = b_{it}^{(1)} \quad \forall t \in \tau, i \in I \quad (\text{E6})$$

$$y_{ijt}^{(2)} \leq x_j^{(f)} \quad \forall t \in \tau, i \in I, j \in J \quad (\text{E7})$$

$$y_{ijt}^{(2)} \leq x_{jt}^{(m)} \quad \forall t \in \tau, i \in I, j \in I \quad (\text{E8})$$

$$\sum_{j \in I \cup J} y_{ijt}^{(3)} = b_{it}^{(2)} \quad \forall t \in \tau, i \in I \quad (\text{E9})$$

$$y_{ijt}^{(3)} \leq x_j^{(f)} \quad \forall t \in \tau, i \in I, j \in J \quad (\text{E10})$$

$$y_{ijt}^{(3)} \leq x_{jt}^{(m)} \quad \forall t \in \tau, i \in I, j \in I \quad (\text{E11})$$

$$\sum_{j \in J} y_{ijt}^{(4)} = b_{it}^{(2)} \quad \forall t \in \tau, i \in I \quad (\text{E12})$$

$$y_{ijt}^{(4)} \leq x_j^{(f)} \quad \forall t \in \tau, i \in I, j \in J \quad (\text{E13})$$

$$\sum_{i \in I} y_{ijt}^{(2)} = \sum_{i \in I} y_{ijt}^{(3)} \quad \forall t \in \tau, j \in I \cup J \quad (\text{E14})$$

$$\sum_{i \in I} y_{ijt}^{(1)} = \sum_{i \in I} y_{ijt}^{(4)} \quad \forall t \in \tau, j \in J \quad (\text{E15})$$

$$\sum_{j \in J} m_{ijt} = x_{it}^{(m)} \quad \forall t \in \tau, i \in I \quad (\text{E16})$$

(E1),(E2) : Limite le nombre de dépôt fixe ou mobile

(E3) : Si la zone de tournée i n'est pas un dépôt mobile, alors cette zone est desservie soit le matin ou (exclusif) l'après midi.

(E4),(E6),(E9),(E14) : Une zone de tournée i est desservit par un unique dépôt. (ou aucun si i est un dépôt)

(E5),(E7),(E8),(E10),(E11),(E13) : Une zone de tournée i est desservie seulement par des dépôts

(E14) : Il y autant d'agent qui se recharge au dépôt mobile i , que d'agent qui partent de celui-ci.

(E15) : Il y autant d'agent qui partent du dépôt fixe j le matin, que d'agent qui reviennent à celui-ci l'après midi

4.1.2. Résultats

Les résultats dépendent fortement de PA, PC, PS et PF. Si l'on considère qu'on doit acheter de nouvelles camionnettes pour que celles-ci fassent office de dépôt mobile, alors le modèle ne propose tout simplement pas de dépôt mobile car elles sont trop chères comparé au prix de quelques minutes de plus de travail.

Voici comment j'ai choisi ces paramètres :

PA = salaire / vitesse_agent : Prix du mètre d'un agent

PC = consommation_essence*prix_essence*0.00001 + (salaire / vitesse_agent) : prix du mètre en camionnette

PS_i = (prix_camionnette_par_mois / 31) : Prix d'une camionnette en zone i pour 1 journée

PF_i = $\frac{\text{prix_par_metre_carre} \cdot \text{rendement_locatif_brut}}{100 \cdot 12}$ avec $\text{prix_par_metre_carre} = \frac{\text{valeurs foncière}}{\text{surface du logement}}$

rendement_locatif_brut = 5 : part de ce que gagne par an un investisseur sur son capital

surface_d1_depot = 30 : m²

vitesse_agent = 18000 : vitesse d'un agent en m/h

vitesse_camionnette = 25000 : vitesse d'une camionnette en m/h

salaire = 15 : prix d'un agent à l'heure

prix_camionnette_par_mois = 285 : € / mois (en lising)

consommation_essence = 8 : L / 100Km

prix_essence = 1.9 : € / 1L

Cependant dès qu'on met $\mathbf{PS}_i = 0$, on remarque l'apparition de dépôt mobile, et donc la diminution moyenne des distances parcourues par les agents.

On peut en conclure que si nous possédons déjà les véhicules, nous obtenons un gain d'efficacité des agents non négligeable. Cependant, si nous sommes obligés de les acheter, les dépôts mobiles ne sont absolument pas rentables.

4.2. Modélisation avec des relais postaux comme dépôt mobile

En interrogeant un postier que je croise dans une rue à Grenoble, celui-ci me dit qu'ils ont déjà une organisation comme celle du Chapitre 4.1, cependant au lieu d'avoir des camionnettes comme dépôt mobile, ils ont des relais postaux dans la rue, ce sont des boîtes sécurisées où l'on peut mettre des lettres/colis. (Voir Fig. 6 et Fig. 7)



Fig. 6. – Relais postaux



Fig. 7. – Boite aux lettres avec un coffre en dessous

Ces boîtes existent déjà et sont utilisées quand il y a beaucoup de lettres. Cela résout le problème du coût trop important des dépôts mobiles.

Ces dépôts mobiles sont alimentés le matin par une camionnette qui partira du dépôt fixe.

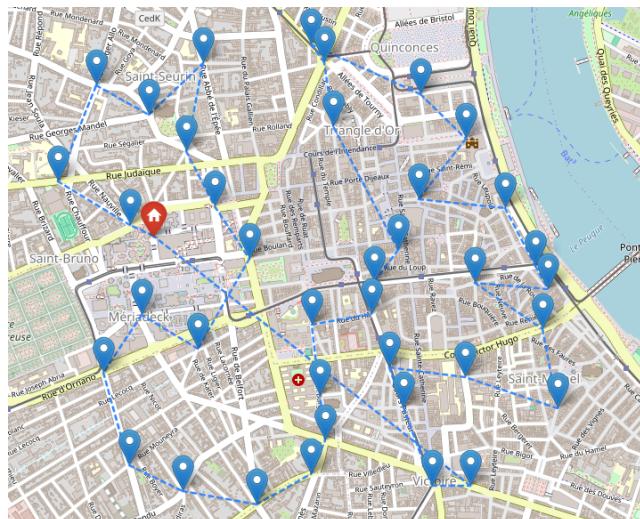


Fig. 8. – tournée de la camionnette si elle passe par tout les dépôts mobiles (marker bleu représente les relais postaux)

4.2.1. Modèle

Dans ce modèle nous avons un seul dépôt fixe, nous verrons après comment changer cela au besoin.

Nous avons besoin de calculer la tournée de la camionnette car la durée de celle-ci pourrait dépasser la matinée, ce qui embêterait les agents qui trouveraient des relais vides ! La camionnette n'a pas le temps de recharger tous les dépôts mobiles avant l'arrivée des agents pour la recharge.

Pour résoudre ce problème il faut fixer une contrainte de durée sur cette tournée.

Le calcul de la tournée de la camionnette est un problème connu sous le nom de TSP (Traveling Salesman Problem ou Problème du Voyageur de Commerce), c'est un problème d'optimisation qui consiste à déterminer, étant donné un ensemble de villes, le plus court circuit passant par chaque ville une seule fois. Seulement dans notre cas ce ne sont pas des villes mais des dépôts mobiles.

Ce problème est très compliqué à résoudre de manière exacte, cependant il existe des méta-heuristiques telles que le recuit simulé qui calcule rapidement une très bonne solution. Cependant ce genre de méthodes ne peut pas se modéliser en programmation linéaire.

Voici ce que je propose :

Imaginons que j'ai 6 dépôts mobiles : **a b c d e f**

Et 1 dépôt fixe : D

Voici la méthode :

- Je calcule à l'aide du recuit simulé une très bonne tournée qui passe par tous les dépôts mobiles, j'obtiens : **D c d f b a e D**
 - Dans mon modèle, si j'ai 2 dépôts mobiles sélectionnées, disons **a** et **f**, alors l'ordre de passage de la camionnette sera : **D f a**, car cela est la sous-tournée de **D c d f b a e D** qui contient **a** et **f**.

Cependant, une sous-tournée d'une tournée optimale n'est pas forcément optimale. Ainsi la solution générée par le modèle n'est pas la meilleure mais reste suffisamment bonne.

Nous rajoutons dans notre fonction objectif un coût de la camionnette par mètre de façon totalement arbitraire, nous le notons PC pour prix de la camionnette. Ainsi en faisant varier PC, notre modèle retournera des solutions où la camionnette effectue plus ou moins de distance.

Pour rappel notre objectif est d'avoir une contrainte de durée sur la tournée.

Maintenant nous avons deux options :

- Rajouter la contrainte de durée sur la tournée basé sur l'approximation de celle-ci : ($\text{durée_tournée_approximative} < \text{contrainte}$). Le problème de cette méthode est que la durée de la tournée générée par notre modèle ($\text{durée_tournée_approximative}$) est toujours plus grande que celle optimale. Cette méthode donnera des solutions non optimales.
- Ou alors cette option :

```
PC = 0
Contrainte = ... # la contrainte sur la distance parcourue de la camionnette
Solution = Evaluation_du_modele(PC)
Tant que distance_réelle(Solution) > Contrainte: # distance_reél(Solution) :
    distance calculé de manière plus exacte à l'aide du recuit simulé
    PC += 0.0001 # cette valeur est prise de manière arbitraire
    Solution = Evaluation_du_modele(PC)
```

Ainsi on obtient une solution dont la vraie distance parcourue par la camionnette respecte la contrainte. L'avantage avec cette méthode est que l'on accepte une solution même si $\text{durée_tournée_approximative} > \text{contrainte}$, on obtient alors une meilleure solution.

Paramètres

- K nombre de dépôts mobiles (boîte) maximum
- M nombre de tournées par jour
- N nombre de dépôts mobiles (boîte postale)
- T nombre de jours
- $C_{i\hat{i}t}$ distance entre la zone $i \in \{0, \dots, N + M\}$ et la zone $\hat{i} \in \{0, \dots, N + M\}$ au jour $t \in \{1, \dots, T\}$
- PA prix d'un agent par mètres parcourus
- PC prix d'une camionnette par mètres parcourus
- PMU_j prix du dépôt mobile $j \in \{1, \dots, N\}$ pour chaque jour d'utilisation
- PMF_j prix du dépôt mobile $j \in \{1, \dots, N\}$ pour la mise en service de celui-ci (fabrication)

Définition

- $J = \{1, \dots, N\}$ les indices des dépôts mobiles (boîte postale) fixent dans le temps
- l'indice 0 correspond à l'unique dépôt fixe
- $I = \{N + 1, \dots, N + M\}$ les indices des zones de tournée au temps t
- $\tau = \{1, \dots, T\}$

Hypothèse

- On suppose que les indices j des dépôts mobiles sont dans l'ordre optimal pour la tournée de la camionnette qui passerait par chaque dépôt j

Variables

- $x_{jt}^{(m)} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in \{0\} \cup J, t \in \tau$ =1 s'il y a le dépôt mobile i au jour t
- $x_j^{(i)} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in \{0\} \cup J$ =1 si le dépôt mobile i est utilisé au moins un jour
- $y_{ijt}^{(2)} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I, j \in \{0\} \cup J, t \in \tau$ =1 si la tournée de la zone i se recharge au dépôt j au jour t
- $y_{ijt}^{(3)} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I, j \in \{0\} \cup J, t \in \tau$ =1 si la zone de tournée i est desservie lors de la deuxième demi-journée par le dépôt j au jour t
- $m_{jj't} \in \{0, 1\} \quad \forall j, j' \in \{0\} \cup J, j < j', t \in \tau$ =1 si la camionnette se déplace du dépôt j vers le dépôt j' au temps t

Modèle

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{t \in \tau} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J \cup \{0\}} y_{ijt}^{(2)} \cdot (C_{0it} + C_{ijt}) \cdot \text{PA} + y_{ijt}^{(3)} \cdot (C_{jxit} + C_{i0t}) \cdot \text{PA} \\ & + \sum_{t \in \tau} \sum_{j' \in J \cup \{0\}} \sum_{j=0}^{j'-1} (m_{jj't} \cdot C_{jj't} \cdot \text{PC}) \\ & + \sum_{t \in \tau} \sum_{j \in J} (x_{jt}^{(m)} \cdot \text{PMU}_j) \\ & + \sum_{j \in J} x_j^{(i)} \cdot \text{PMF}_j \end{aligned} \quad (\text{O1})$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j \in J} x_{jt}^{(m)} \leq K \quad \forall t \in \tau \quad (\text{E1})$$

$$x_{0t}^{(m)} = 1 \quad \forall t \in \tau \quad (\text{E2})$$

$$\sum_{i \in I} y_{ijt}^{(2)} + \sum_{i \in I} y_{ijt}^{(3)} = 1 \quad \forall t \in \tau, j \in J \cup \{0\} \quad (\text{E3})$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J \cup \{0\}} y_{ijt}^{(2)} = \frac{M}{2} \quad \forall t \in \tau \quad (\text{E4})$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J \cup \{0\}} y_{ijt}^{(3)} = \frac{M}{2} \quad \forall t \in \tau \quad (\text{E5})$$

$$y_{ijt}^{(2)} \leq x_{jt}^{(m)} \quad \forall t \in \tau, i \in I, j \in J \cup \{0\} \quad (\text{E6})$$

$$y_{ijt}^{(3)} \leq x_{jt}^{(m)} \quad \forall t \in \tau, i \in I, j \in J \cup \{0\} \quad (\text{E7})$$

$$\sum_{i \in I} y_{ijt}^{(2)} = \sum_{i \in I} y_{ijt}^{(3)} \quad \forall t \in \tau, j \in J \cup \{0\} \quad (\text{E8})$$

$$m_{jj't} \leq x_{jt}^{(m)} \quad \forall j' \in J \cup \{0\}, j < j', t \in \tau \quad (\text{E9})$$

$$m_{jj't} \leq x_{j't}^{(m)} \quad \forall j' \in I \cup \{0\}, j < j', t \in \tau \quad (\text{E10})$$

$$\sum_{j < j' \leq M} m_{jj't} = x_{jt}^{(m)} \quad \forall j \in \{0, \dots, N-1\}, t \in \tau \quad (\text{E11})$$

$$\sum_{j < j' \leq M} m_{jj't} = x_{j't}^{(m)} \quad \forall j' \in \{1, \dots, N\}, t \in \tau \quad (\text{E12})$$

$$\sum_{t \in \tau} x_{jt}^{(m)} \leq x_j^{(i)} \cdot T \quad \forall j \in \{1, \dots, N\} \quad (\text{E13})$$

(E1)-(E8) : C'est la même chose que le modèle du Chapitre 4.1, seulement on a remplacé $b_{it}^{(1)}$ et $b_{it}^{(2)}$

(E9),(E10) : Si le dépôt mobile j n'est pas sélectionné, la camionnette ne peut pas y aller, ni en repartir.

(E11),(E12) : Si $j \rightarrow j'$ est le trajet de la camionnette, alors il n'existe pas de j'' tel que la camionnette fait le trajet $j \rightarrow j''$ ou $j'' \rightarrow j'$.

Si j est un dépôt alors il existe forcément j' tel que la camionnette effectue le trajet $j' \rightarrow j$ et $j \rightarrow j'$

$$(\text{E13}) : x_j^{(i)} = x_{j1}^{(m)} \vee x_{j2}^{(m)} \vee \dots \vee x_{jT}^{(m)}$$

Explication détaillée de la variable m_{ijt}

Pour rappel, les indices des dépôts mobiles sont ordonnés dans l'ordre de la tournée.

Reprendons l'exemple précédent : j'ai 6 dépôts mobiles : **a b c d e f** et 1 dépôt fixe : **D**.

La tournée optimale est : **D c d f b a e D**.

Nous associons donc l'indice **0 : D ; 1 : c ; 2 : d ; ...**

Notre modèle sélectionne les dépôts à l'indice **0,2,3 et 5**.

D'après (E11), il existe un unique dépôt j tel que $m_{0j} = 1$.

Imaginons que nous prenons $j = 3$: alors on a $m_{03} = 1$. Cependant m_{ij} n'est défini que pour $i < j$, donc il est impossible d'obtenir j' tel que $m_{j'2} = 1$, car les seuls j' qui fonctionneraient sont $j' = 0$ qui est déjà pris par $m_{03} = 1$ (E11)(E12).

Donc j est forcément le plus petit possible, c'est-à-dire $j = 2$

En itérant, on obtient bien $m_{02} = m_{23} = m_{35} = 1$.

4.2.2. Résultats

Voici quelques définitions :



- Emplacement d'un dépôt fixe
- Centre d'une zone de tournée qui a lieu le matin
- Centre d'une zone de tournée qui a lieu l'après midi
- Emplacement d'un relais postal (dépôt mobile) non utilisé à l'instant t mais utilisé un jour du mois
- Emplacement d'un relais postal (dépôt mobile) utilisé

Voici les résultats pour le centre ville de Bordeaux sur le mois de Janvier :



Fig. 9. – Résultats du 8 Janvier



Fig. 10. – Résultats du 1 Janvier

Les résultats du modèle sont peu pertinents dans un espace aussi réduit que le centre ville de Bordeaux, la diminution des distances parcourues par les agents grâce au dépôt mobile ne sont pas significatifs.

5. Résultats généraux

Les données de la ville de Bordeaux sont intéressantes car elle sont étalées sur plusieurs jours dans un mois, mais elles sont très concentrées dans le centre ville.

J'ai à ma disposition les données de livraison de la ville de Grenoble qui sont plus intéressantes car elles sont étalées sur toute la ville.

Il y a 5 dépôts fixes dans la ville de Grenoble, nous avons le choix de partir de ces dépôts, d'en fixer 4 et de calculer le meilleur emplacement pour le dernier, etc.

Ici le choix a été fait de recalculer l'emplacement de ces dépôts fixes avec un modèle de Facility Location :

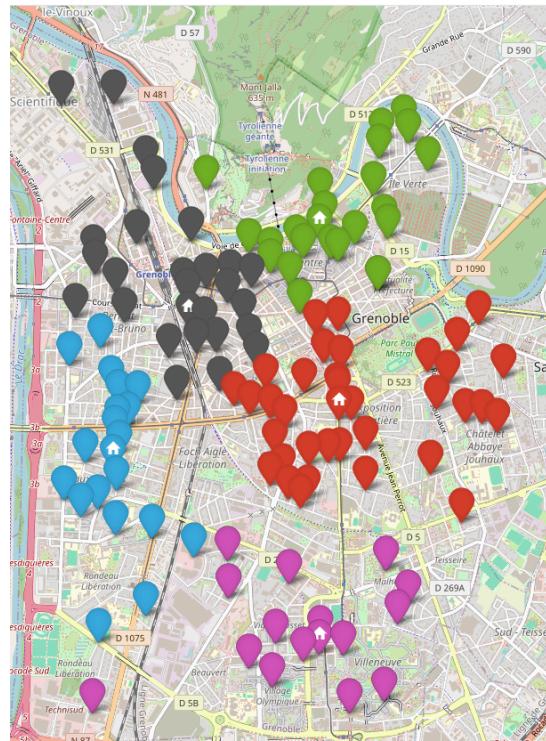


Fig. 11. – Résultats du modèle de Facility Location

Les markers vierges sont desservis par le marker maison de la même couleur.

Si le résultat ne nous plaît pas, nous avons toujours la possibilité d'utiliser le modèle DOMP qui met plus de temps à s'exécuter (~10 min).

Nous avons ainsi formé 5 regroupements de zones de tournée qui sont associés à un dépôt fixe.

Puis nous allons exécuter notre modèle de dépôt mobile sur chaque regroupement, ce qui donne :

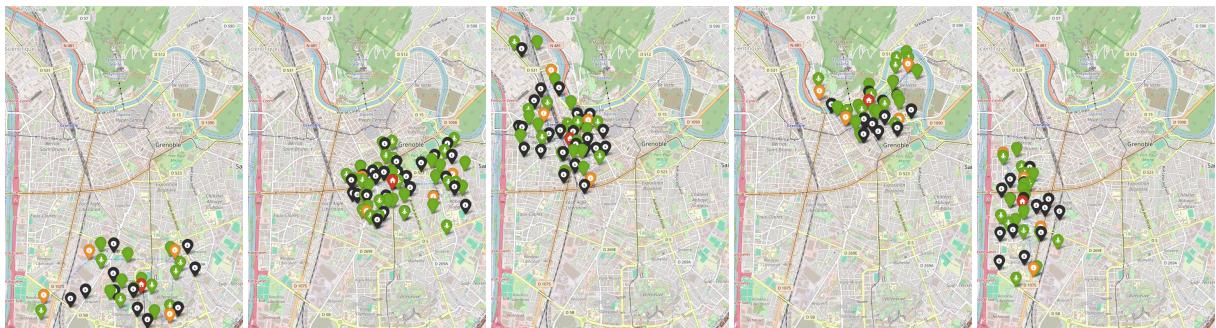


Fig. 14. – Résultats
du modèle de dé-
pots mobile

Nous n'avons pas directement la distance parcourue par chaque agent, nous avons seulement les distances entre les zones de tournées et les dépôts.

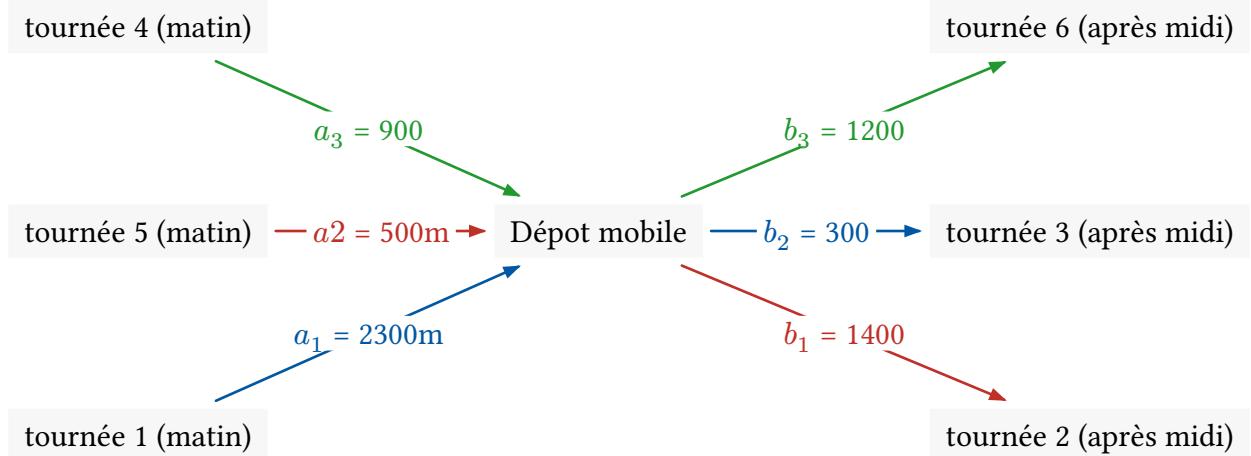


Fig. 17. – Attribution des zones de tournée aux agents

On va identifier un agent par sa zone de tournée du matin et l'associer à une zone de tournée de l'après-midi avec la démarche suivante : Si l'agent parcourt une longue distance le matin pour aller de sa première zone de tournée à son dépôt mobile, il fera peu de distance l'après-midi pour aller de son dépôt mobile à sa deuxième zone de tournée.

Le but étant de minimiser : $\max_{\sigma \text{ permutation}} a_i + b_{\sigma(j)}$

Ce qui se fait facilement via l'algorithme glouton suivant :

```
a = [(1,2300),(2,500),(2,900)]
b = [(1,1400),(2,300),(3,1200)]

as = a.sorted(key = lambda couple => couple[1]) # trie dans l'ordre croissant
bs = b.sorted(key = lambda couple => couple[1], reverse=True) # trie dans l'ordre décroissant

for i in range(len(as)):
    print(f"l'agent qui fera la tournée du matin {as[i][0]}"
          "effectuera la tournée {bs[i][0]} l'après-midi")
```

En utilisant cette méthode, nous pouvons avoir la distance parcourue par agent et donc récolter les données suivantes :

NOMBRE DE RELAIS POSTAUX UTILISÉS	DISTANCE TOTALE PAR COURUE EN MOYENNE PAR UN POSTIER	DISTANCE MAXIMALE PAR COURUE PAR UN POSTIER
0	2,9 Km	5,2 Km
2	2,4 Km	5,8 Km
4	2,1 Km	4,8 Km

Tableau 1. – Résultats des modèles de dépôt mobile

On peut voir sur Tableau 1 que la distance moyenne parcourue par les agents diminue de 27% si l'on met 4 relais postaux au lieu de 0. Plus le regroupement est étalé dans l'espace, plus il sera intéressant de placer des dépôts mobiles. On pourrait même imaginer mettre moins de dépôts fixes et les remplacer par des mobiles pour diminuer les coûts.

5.1. Points d'améliorations

- Les relais postaux déjà existant ont une taille limitée. Un agent peut transporter 70 colis en moyenne avec son vélo cargo. Il y a de très grandes chances qu'une tournée de colis ne rentre pas dans un relais postal. L'idée est alors de regrouper plusieurs relais entre eux et de répartir les colis. Cependant, on mettra plus de temps à les remplir et à les vider, ce qui perd de son intérêt.

Une solution pourrait être d'investir dans des relais plus grands, ou alors de mixer des dépôts mobiles camionnette avec les relais postaux dépendant du nombre de camionnettes que l'on possède déjà.

- L'attribution des zones de tournée aux agents vu Fig. 17 fait en sorte d'équilibrer les distances parcourues, cependant, les agents peuvent se retrouver à aller dans des lieux totalement différents du matin à l'après midi, les agents doivent alors apprendre les tournées d'un nouveau lieu, ce qui prend beaucoup de temps. Une solution est de définir plusieurs zones fixes, pas trop grandes pour qu'un agent puisse connaître une zone dans sa globalité. C'est pourquoi on pourrait appliquer notre modèle de dépôt mobile sur toutes ces zones. Ainsi nous pourrons avoir des dépôts mobiles tout en garantissant des zones fixes pour chaque agent.

Bibliographie

- [1] M. Melo, S. Nickel, et F. Saldanha-da-Gama, « Facility location and supply chain management - A review », *European Journal of Operational Research*, vol. 196, n° 2, p. 401-412, 2009, [En ligne]. Disponible sur: <https://econpapers.repec.org/RePEc:eee:ejores:v:196:y:2009:i:2:p:401-412>°
- [2] N. Boland, P. Domínguez-Marín, S. Nickel, et J. Puerto, « Exact procedures for solving the discrete ordered median problem », *Computers & Operations Research*, vol. 33, n° 11, p. 3270-3300, 2006, doi: <https://doi.org/10.1016/j.cor.2005.03.025>°.