

# DM Calcul stochastique

louis DE JUAN

Avril 2021

## 1 Exercice 1

### 1.1 Question 1

Soit l'équation différentielle stochastique suivante:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (1)$$

avec  $r, \sigma$  réels. On prend  $(S_t)_{t \geq 0}$  un processus adapté pour que les intégrales  $\int_0^t S_s ds$  et  $\int_0^t S_s dW_s$  existent  $\forall t$ . On peut donc écrire:

$$S_t = S_0 + \int_0^t rS_s ds + \int_0^t \sigma S_s dW_s \quad (2)$$

On a  $S_t$  un processus d'Itô. Soit  $Y_t = \log(S_t)$ , en supposant que  $S_t$  est positif, on applique la formule d'Itô à  $f(x) = \log(x)$  on obtient :

$$\log(S_t) = \log(S_0) + \int_0^t \frac{dS_s}{S_s} + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{-1}{S_s^2} \sigma^2 S_s^2 ds \quad (3)$$

et par la formule (1) on obtient:

$$\begin{aligned} Y_t &= Y_0 + \int_0^t \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \int_0^t \sigma dW_t \\ Y_t &= \log(S_t) = \log(S_0) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t \end{aligned}$$

et donc:

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right) \quad (4)$$

Réciproquement, soit  $S_t = f(t, W_t)$  avec  $f(t, x) = x_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma x\right)$ . En appliquant la formule d'Ito :

$$\begin{aligned} S_t &= f(t, W_t) \\ &= f(0, W_0) + \int_0^t f'_s(s, W_s) ds + \int_0^t f'_x(s, W_s) dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''_{xx}(s, W_s) ds \\ &= x_0 + \int_0^t S_s \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) ds + \int_0^t S_s \sigma dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t S_s \sigma^2 ds \end{aligned}$$

car  $\langle W, W \rangle_t = t$ . On conclut que :

$$S_t = S_0 + \int_0^t r S_s ds + \int_0^t \sigma S_s dW_s \quad (5)$$

On a montré l'existence de la solution (4) de l'EDS (1), montrons son unicité pour  $\sigma$ ,  $r$  et  $S_0$  fixé : soit  $b(t, x) = rx$  et  $\sigma(t, x) = \sigma x$  deux fonctions mesurables avec  $\sigma = 0.2$  et  $r = 0.05$  avec  $t$  appartient à  $[0, T]$  et  $x$  appartient à  $R^d$ . On a :

$$|b(t, x)| + |\sigma(t, x)| = |rx| + |\sigma x| \leq C(1 + |x|), \forall x \in R^d, 0 < t < T \quad (6)$$

et

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq (r + \sigma) |x - y| \quad (7)$$

donc par lipschitz, il existe une (unique) solution forte au problème (2)

## 1.2 Méthode d'implémentation

Le code est écrit en langage Python. Une utilisation des calculs vectoriels disponibles dans la librairie `numpy` est effectuée lorsque c'est possible (pour la question 2 et une partie de la question 3). Ainsi par exemple, l'implémentation de  $W_i = \sum_{j=0}^{i-1} \Delta W_j$  est faite au moyen de la fonction `numpy.cumsum(w)` où  $w$  est un vecteur.

Cette méthode permet de réaliser les calculs plus rapidement au détriment d'une utilisation plus importante de la mémoire.

## 1.3 Question 2

Les valeurs numériques utilisées pour cet exercice sont :  $T = 5$ ,  $r = 0.05$ ,  $\sigma = 20\%$ ,  $S_0 = 100$ ,  $K = 95$ ,  $B = 105$ . La valeur de  $\sigma = 2$  est très grande. Les résultats pour  $\sigma = 2$  sont présentés en fin de section. La convergence du modèle de Montécarlo est très lente. Nous décidons de changer à une valeur plus proche de celle observée dans les marchés financiers d'actions.

### 1.3.1 2.a

Pour construire un Brownien, on fait d'abord une discrétisation en temps :

$$h = T/N \text{ avec } t_i = ih, \forall i \in [0, N]$$

avec  $N$  le nombre de pas de discrétisation.

Soit  $W_t$  un mouvement brownien, alors la loi suivie par  $W_{t_{i+1}} - W_{t_i} \sim \sqrt{h} \mathcal{N}(0, 1)$  où  $\mathcal{N}(0, 1)$  est une loi normale centrée réduite.

Alors  $W_{t_i} = \sum_{j=1}^i W_{t_j} - W_{t_{j-1}}$  avec  $W_0 = 0$ . Cette fonction est implémentée par la fonction `numpy.cumsum()`

Cette méthode est implémentée par la fonction `Simulerbrownien` par le code en pièces jointes. Le graphique 1 suivant montre 10 trajectoires d'un mouvement brownien discrétisé, pour  $N = 50$

### 1.3.2 2.b)

Dans l'implémentation de la fonction barrière par la méthode de Montécarlo, on calcule pour chaque trajectoire le "payoff"  $P(T)$  à maturité  $T$  actualisé au temps  $t = 0$  défini par la formule suivante :

$$P(T) = e^{-rT} (S_T - K)_+ 1_{\max_{t \in [0, T]} S_t > B}$$

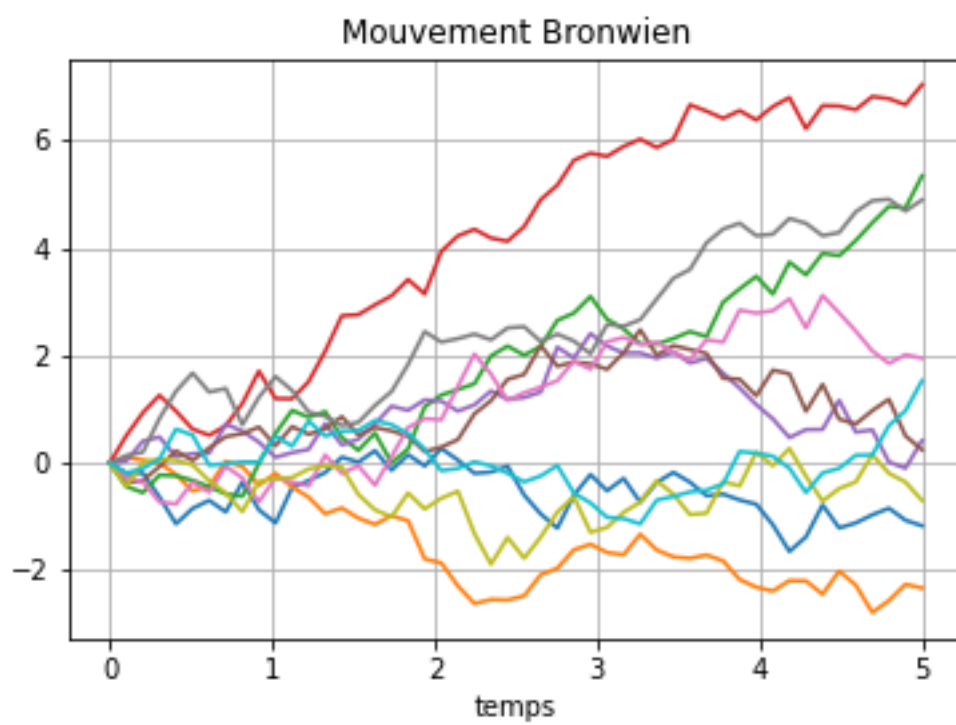


Figure 1: Simulation de 10 mouvements bronwiens pour une discrétisation de 50.

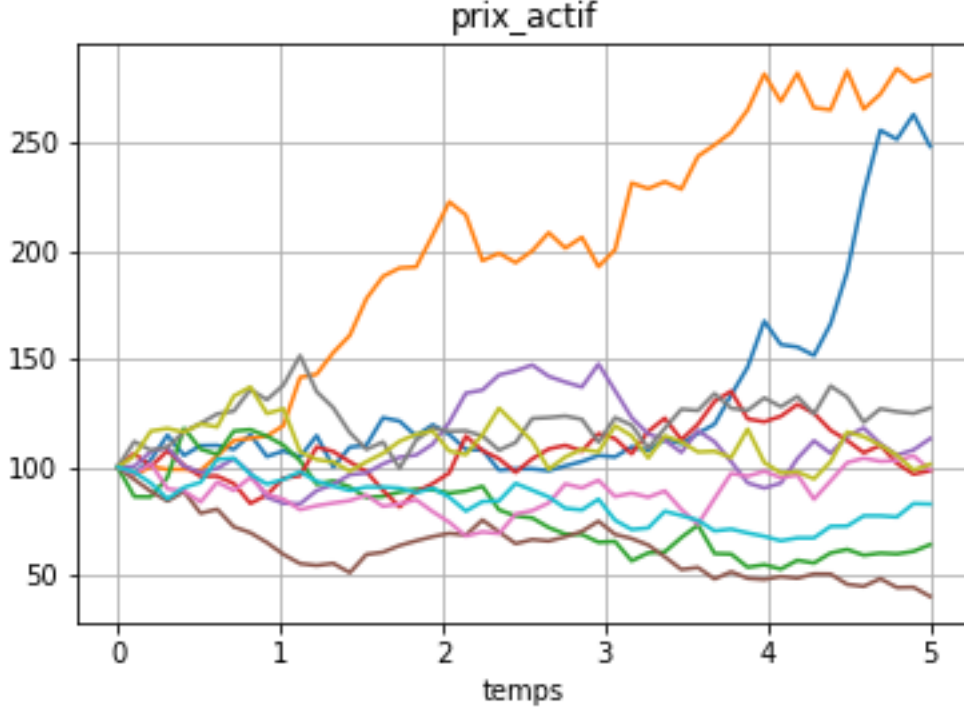


Figure 2: Simulation de 10 trajectoires d'actifs pour une discrétisation de 50.

Le calcul du payoff est fait sur une trajectoire de l'actif discrétisée :  $S_{t_i}$  où

$$S_{t_i} = S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})t_i + \sigma W_{t_i}} \quad (8)$$

avec  $W_{t_i}$  le mouvement brownien décrit par le paragraphe 1.3.1. Cette fonction est implémentée par la méthode `trajectoire actif montecarlo`. Le graphique 2 illustre des trajectoires de l'actif.

Lorsque la trajectoire de l'actif n'est pas intégrable analytiquement, il faut utiliser une intégration numérique de l'équation stochastique par des méthodes de Euler ou autres.

La partie  $1_{\max_{t \in [0, T]} S_t > B}$  est implémentée dans la méthode `prix_barriere` avec des fonctions vectorielles de python.

Le prix de l'option barrière  $p$  est estimée par la méthode de Montécarlo:

$$\pi_T = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{i=M} P_i(T)$$

où  $P_i(T)$  (resp.  $M$ ) est le payoff actualisé pour une simulation (resp.  $M$  est le nombre de simulations de Montécarlo). L'intervall de confiance (IC) à 95% est estimé par:

$$IC = [\pi_T - 1.96 \frac{e}{\sqrt{M}}, \pi_T + 1.96 \frac{e}{\sqrt{M}}]$$

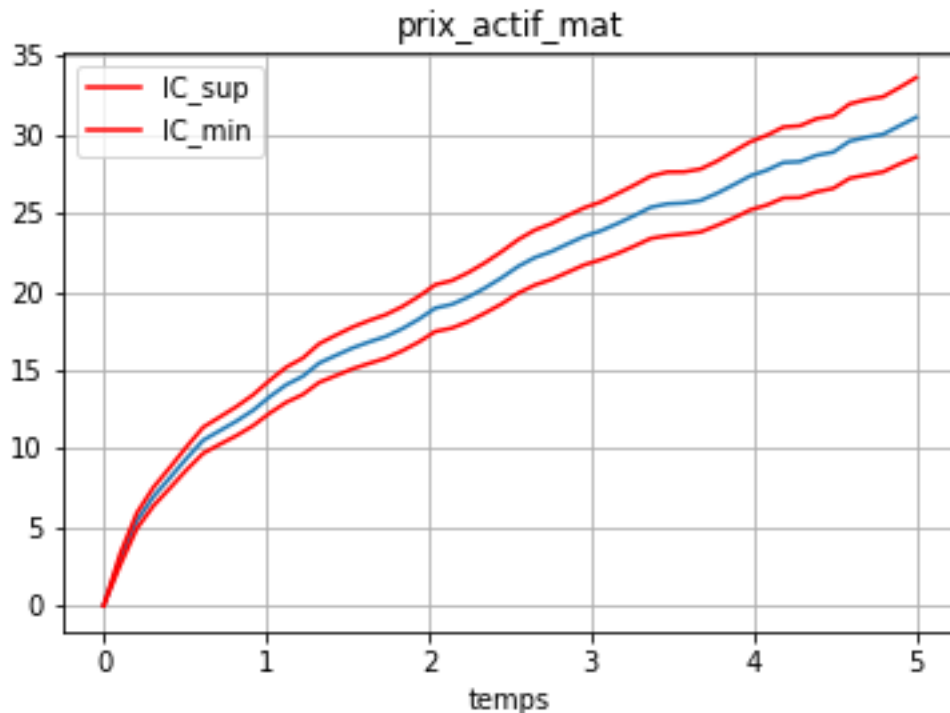


Figure 3: Simulation des prix des options et intervalles de confiance en fonction de la maturité

où  $e$  est l'écart type du prix de l'option obtenu par les simulations.

**Résultat:**

Pour  $N = 50$  et  $M = 10000$ , on obtient (arrondi au millièm):  $\pi_T = 31.324$ ,  $IC$  à 95% =  $[30.520, 32.129]$

### 1.3.3 2.c)

L'actif sous-jacent suit le même processus d'Itô, mais le prix  $\pi_{t_i}$  et l'estimation de l'intervalle de confiance  $IC_{t_i}$  des options est calculé à chaque pas de discrétisation  $t_i$ .

La méthode `prix_barriere_maturite` implémente ce résultat. Toutes les trajectoires de l'actif sont précalculées. La méthode prend en entrée les paramètres de simulation et de l'option ( $K$  strike,  $B$  barrière,  $r$  taux d'actualisation,  $T$  maturité,  $St$  trajectoires des actifs pour toutes les simulations).

Les résultats des prix  $\pi_{t_i}$  et des intervalles de confiance  $IC_{t_i}$  estimés sont représentés dans la figure 3

### 1.3.4 2.d)

L'estimation du prix de l'option à maturité ( $T=5$ ) par la méthode de réduction de variance des variables antithétiques est faite dans la fonction `prix_barriere_antithetique`. Les trajectoires de l'actif est simuler pour le mouvement

brownien  $W_t$  et pour  $-W_t$  sur les mêmes valeurs. L'estimation du prix de l'option est donnée par la formule:

$$\pi_T = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{j=M} \left( \frac{p(W^j) + p(-W^j)}{2} \right)$$

où  $p(W^j)$  (resp.  $p(-W^j)$ ) est le payoff actualisé pour le brownien  $W^j = W_{i,i \in [0,N]}^j$  (resp.  $W^j = -W_{i,i \in [0,N]}^j$ ) correspondant à la simulation  $j$

**Résultat** Le prix de l'option est 32.188, à IC à 95% = [30.924, 33.452]

L'intervalle de confiance est plus réduit que pour le cas de la simulation standard. En effet cette méthode de réduction de variance est performante lorsqu'il existe une corrélation négative entre les deux trajectoires simulées. Dans notre cas, le coefficient de corrélation entre  $p(-W)$  et  $p(W)$  est de -0.54.

En effet :

$$Var\left(\frac{P(W) + P(-W)}{2}\right) = \frac{1}{4}(V(P(W)) + V(P(-W)) + 2 * cov(P(W), P(-W))) \quad (9)$$

$$= \frac{1}{2}(V(P(W))(1 + \rho)) \quad (10)$$

où  $\rho$  est la corrélation entre  $P(W)$  et  $P(-W)$ . Dans notre cas, les payoff  $P(-W)$  correspondent à des trajectoire plus éloignées de la barrière et donc un prix plus bas. Au contraire les payoff  $P(W)$  correspondent à des trajectoires plus proches de la barrière et donc un prix plus élevés.

### 1.4 3: Option barrière Asiatique

Le prix de l'option barrière Asiatique est définie par l'équation suivante:

$$\pi_T = e^{-rT} E \left( \left( \frac{1}{T} \int_0^T S_u du - K \right)_+ 1_{\{max_{t \in [0,T]} S_t > B\}} \right)$$

Il faut simuler par la méthode de Monté-Carlo à la fois le processus  $S_t$  et  $A_T = \frac{1}{T} \int_0^T S_u du$ . De la même façon que l'exercice précédent, l'intervalle  $[0, T]$  est discrétisé en  $N$  pas et taille  $h = T/N$  avec  $t_i = ih, i \in [0, N]$ . Le processus  $S_{t_i}$  (noté  $S_i$  par la suite) est simulé exactement par l'équation 8.

Ainsi, le processus

$$\begin{aligned} A_T &= \frac{1}{T} \int_0^T S_u du \\ &= \frac{1}{T} \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} S_u du \end{aligned}$$

En suivant l'article [2] On peut approcher l'intégrale avec plusieurs schéma :

**Riemann**

$$A_T^r = \frac{1}{T} \sum_{i=0}^{N-1} h S_i = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} S_i \quad (11)$$

où avec la méthode des **Trapèzes**

$$A_T^p = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{S_i + S_{i+1}}{2} \quad (12)$$

On peut utiliser l'équation stochastique de  $S_t$  pour calculer l'**intégrale**:

$$\begin{aligned} A_T^e &= \frac{1}{T} \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} S_u du \\ &= \frac{1}{T} \sum_{i=0}^{N-1} S_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{\sigma(W_u - W_{t_i}) - \frac{\sigma^2}{2}(u - t_i) + r(u - t_i)} du \end{aligned}$$

En appliquant un développement de Taylor en  $t = 0$  à la fonction

$$f(t, W_t) = e^{\sigma(W_t - W_{t_i}) - \frac{\sigma^2}{2}(t - t_i) + r(t - t_i)}$$

on obtient par le calcul d'Itô :

$$f(u, W_u) = 1 + r(u - t_k) + \sigma(W_u - W_{t_i})$$

et donc

$$A_T^e = \frac{1}{T} \sum_{i=0}^{N-1} S_i \left( h + r \frac{h^2}{2} + \sigma \int_{t_i}^{t_{i+1}} (W_u - W_{t_i}) du \right) \quad (13)$$

Si on approche l'intégrale dans  $A_T^e$  par la méthode des **trapèzes**, donc :

$$\begin{aligned} \tilde{A}_T^e &= \frac{1}{T} \sum_{i=0}^{N-1} S_i \left( h + r \frac{h^2}{2} + \sigma h \left( \frac{W_{t_i} + W_{t_{i+1}}}{2} - W_{t_i} \right) \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} S_i \left( 1 + r \frac{h}{2} + \sigma \frac{W_{t_{i+1}} - W_{t_i}}{2} \right) \end{aligned}$$

Les auteurs de l'article [2] montrent que la formulation  $\tilde{A}_T^e$  est équivalente à celle des trapèzes  $\tilde{A}_T^p$  à une erreur quadratique de l'ordre de  $O(\frac{1}{N^3})$  plus précisément:

$$E \left( \tilde{A}_T^e - \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{S_i + S_{i+1}}{2} \right)^2 = O\left(\frac{1}{N^3}\right)$$

#### 1.4.1 simulation

Les méthodes d'Euler et des trapèzes ont été implémentées pour simuler la trajectoire de  $A_t$ . Les fonctions **trajectoire\_moyenne** et **trajectoire\_moyenne\_trapèze** implémentent les simulations des trajectoires avec une méthode d'Euler et des Trapèzes. Afin de prendre la simulation depuis  $t = 0$ , l'élément  $A_0 = S_0$  a été rajouté à la trajectoire.

Les figures 4 et 5 représentent 10 simulations pour les 2 cas avec  $\sigma = 0, 2$  et  $N = 50$ . On remarque que la volatilité du processus  $A_t$  est plus faible que celle du processus de l'actif  $S_t$ , donc le prix de l'option sera plus faible.

#### 1.4.2 prix de l'option barrière

Deux simulations de prix pour les deux schémas de discrétisation ont été effectuées avec les paramètres suivant:  $N = 10000$ ,  $nb_{montecarlo} = 1000$ . Les prix des options sont calculés à chaque pas de discrétisation et les intervalles de confiance aussi.

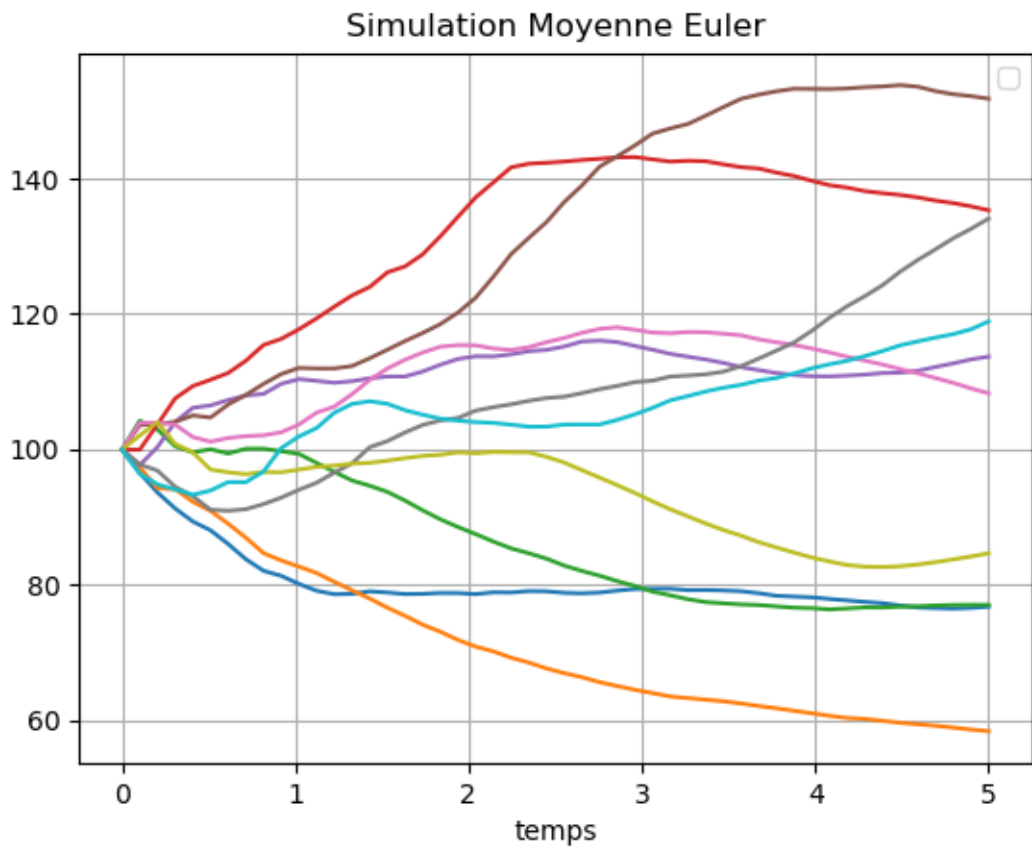


Figure 4: Simulation des  $\frac{1}{t} \int_0^t S_u du$  avec la méthode d'Euler pour  $\sigma = 0,2$  et  $N = 50$ ,  $T = 5$



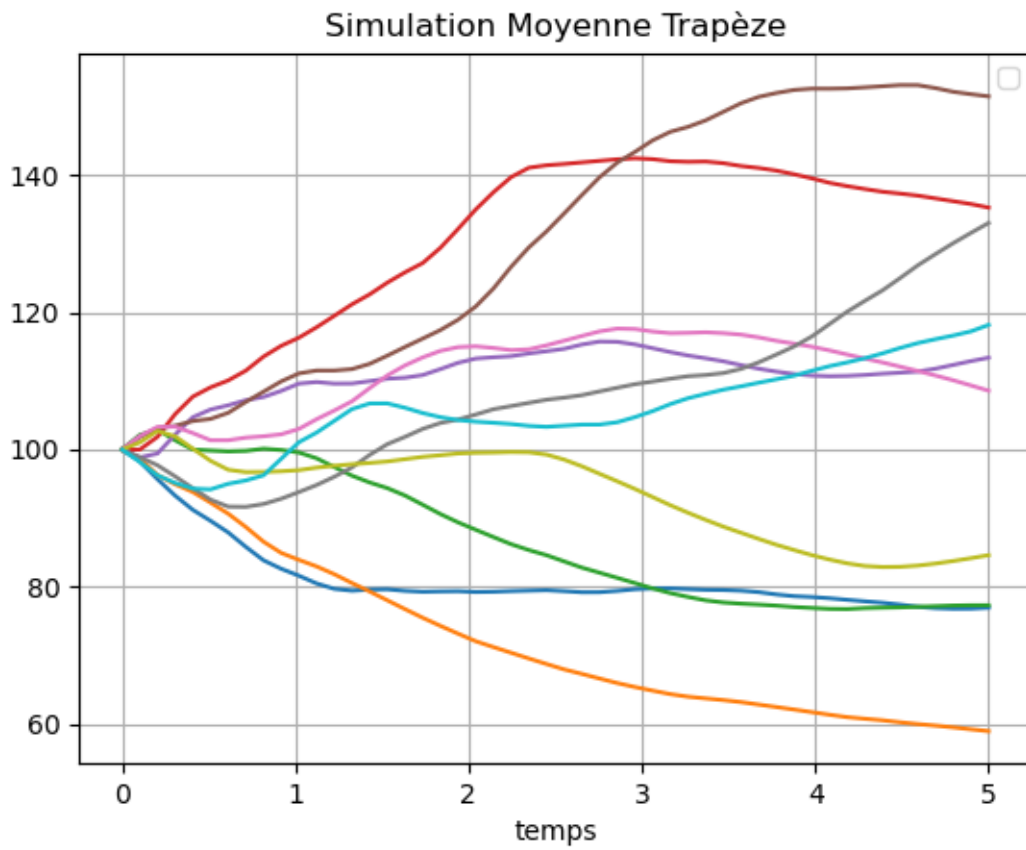


Figure 5: Simulation des trajectoires  $\frac{1}{t} \int_0^t S_u du$  avec la méthode des trapèzes pour  $\sigma = 0,2$  et  $N = 50$ ,  $T = 5$

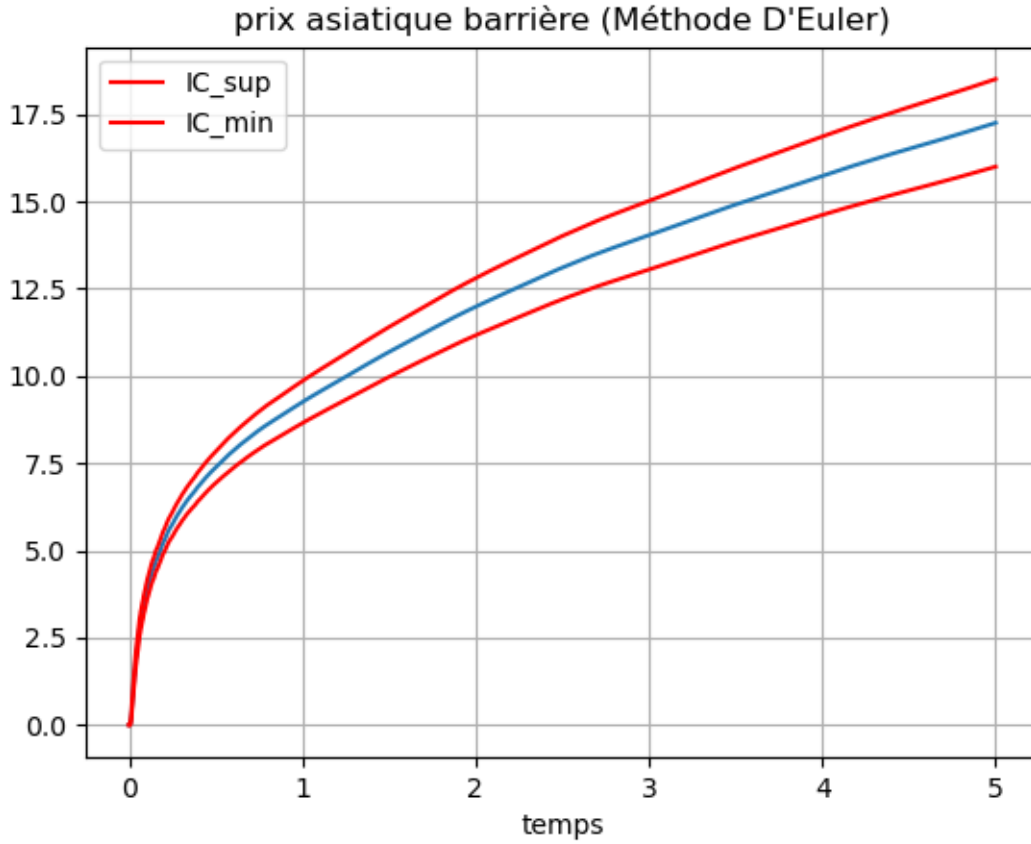


Figure 6: Simulation du prix  $\pi_t$  à maturité d'une option barrière asiatique avec la méthode d'Euler pour  $\sigma = 0,2$  et  $N = 10000$ ,  $T = 5$ ,  $Nb\_simul=1000$

La fonction `prix_asiatique_maturite` implémente le prix barrière à maturité  $\pi_t$  pour tous les  $t_i$ . Le paramètre `type` contrôle le type de processus moyenne à simuler (Euler ou Trapeze)

Les figures 6 et 7 représentent le prix des options barrières asiatiques en fonction de la maturité avec les paramètres suivants :  $\sigma = 0,2$ ,  $T = 5$ ,  $N = 10000$  et nombre de simulation de Montécarlo :  $Nb\_simul = 1000$ .

### 1.4.3 Etude de la convergence

Il existe deux paramètres qui prédomine la convergence des méthodes : Le nombre de pas de discrétisation  $N$  et ceux de Monté-Carlo  $Nb\_simul$ . Nous nous plaçons à  $T = 5$  et on varie  $N$  et  $Nb\_simul$  sur le tableau 1.4.3. Cet étude est implémenté par la fonction `etude_convergence_asiatique`

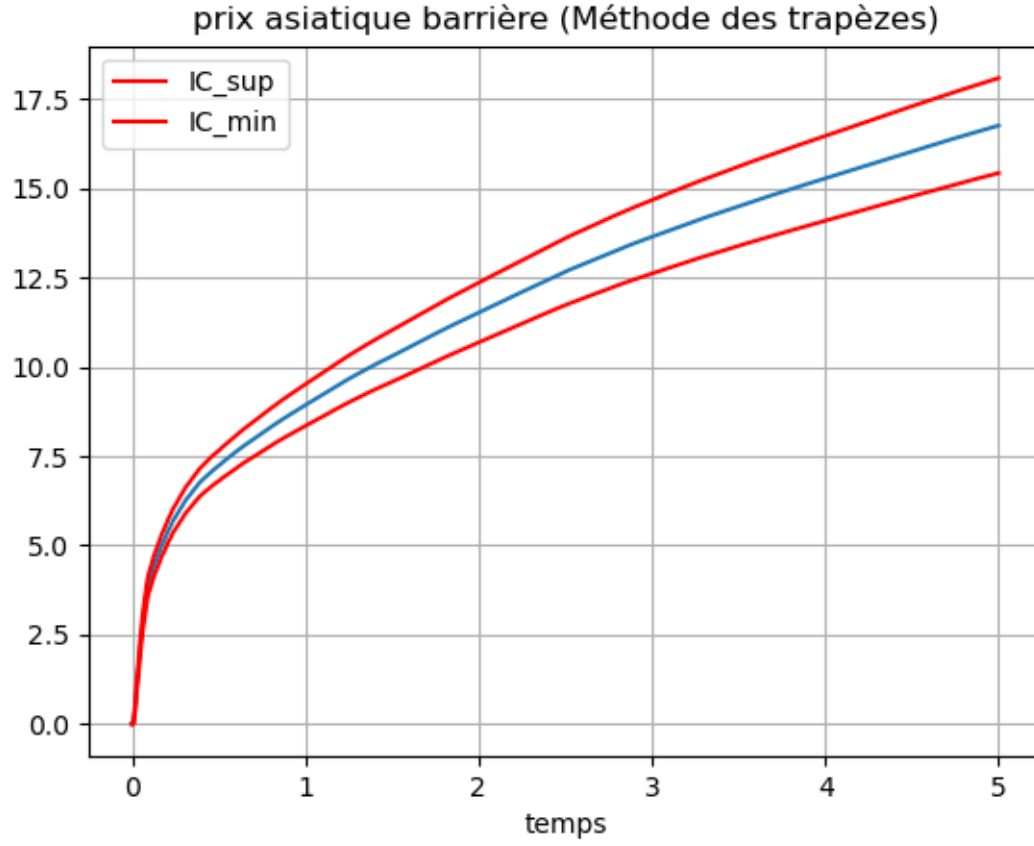


Figure 7: Simulation du prix  $\pi_t$  à maturité d'une option barrière asiatique avec la méthode des trapèzes pour  $\sigma = 0,2$  et  $N = 10000$ ,  $T = 5$ ,  $Nb.simul=1000$

n	m		
	100	1000	10000
10	19.42	17.69	16.11
100	23.36	18.34	17.90
1000	23.15	18.8	17.41
10000	20.64	19.04	17.95

Table 1: Valeur des prix de options barrière asiatique avec la méthode de discrétisation de Trapèze pour  $T=5$  et  $\sigma = 20\%$  en fonction du nombre de simulation de montécarlo et de la discrétisation temporelle

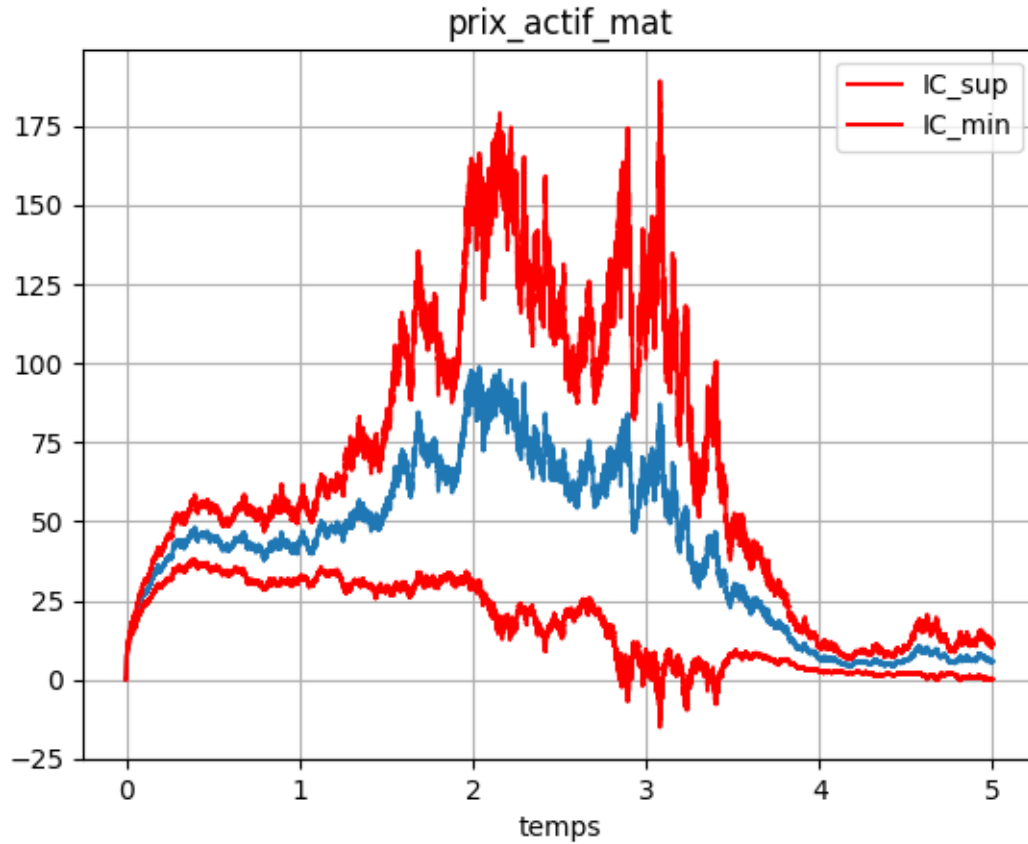


Figure 8: Evolution du prix  $\pi_t$  à maturité pour l'option à barrière avec  $\sigma = 2$ ,  $N = 50000$ ,  $M = 1000$

### 1.5 Etude pour $\sigma = 2$

Les graphiques 8 et 9 montrent l'évolution du prix de l'option à maturité  $\pi_t$  pour une volatilité du sous-jacent de 200%. Les intervalles de confiance suggèrent que la méthode de Montécarlo choisie ne converge pas suffisamment vite. Le nombre de pas de discrétisation est de 50000 et le nombre de simulation de Montécarlo de 1000.

## 2 Exercice 3

### 2.1 Etude du Processus d'Ornstein-Uhlenbeck

Pour  $\lambda = 1$  et  $\mu = 1$  le processus suivi est celui d'Ornstein-Uhlenbeck [1](p358). Nous étudions ces propriétés dans cette section. Soit  $X_t$  un processus d'Ornstein-Uhlenbeck est défini par l'équation stochastique suivante avec  $\lambda > 0$

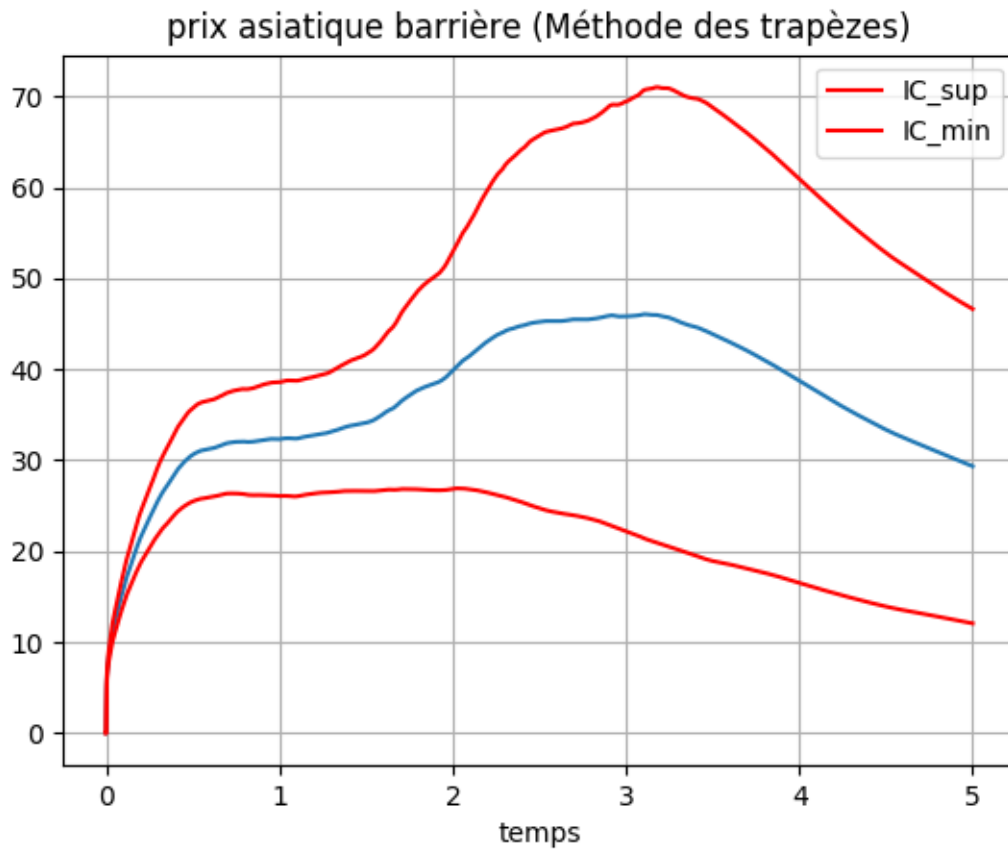


Figure 9: Evolution du prix  $\pi_t$  à maturité pour l'option Asiatique à barrière avec  $\sigma = 2$ ,  $N = 50000$ ,  $M = 1000$

et  $\sigma > 0$ , avec la condition initiale  $X_0 = 0$ :

$$\begin{aligned} dX_t &= -\lambda X_t dt + \sigma dW_t \\ X_0 &= 0 \end{aligned}$$

La solution de cette équation stochastique est:

$$X_t = \sigma \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} dW_s; \quad 0 \leq t < +\infty \quad (14)$$

$(X_t)_{t \geq 0}$  est un processus gaussien de moyenne et variance :

$$\begin{aligned} E[X_t] &= 0 \\ Var(X_t) &= \frac{\sigma^2}{2\lambda} (1 - e^{-2\lambda t}) \end{aligned}$$

car  $(E[\int_0^t e^{(\lambda s)^2} ds] < +\infty$  et  $\int_0^t e^{cs} dW_s$  est une martingale nulle au temps  $t = 0$ , et donc d'espérance nulle). C'est un processus de retour à la moyenne développé par Langevin en 1908. Il simule un processus brownien avec une force de rappel négative.

### 2.1.1 simulation de la trajectoire

Le processus  $(X_t)_{t \geq 0}$ , est simulé par la méthode de Monté-carlo. Le temps est discrétisé dans une grille de  $N$  pas avec  $h = T/N$  avec  $t_i = ih$ ,  $\forall$ . On construit un processus discret  $(X_i)_{i \geq 0}$ ;  $i \in [0, N]$  qui approche le processus  $X_t$  au temps  $t = ih$ .

$$X_{i+h} = \begin{cases} X_i - \lambda h X_i + W_{i+h} - W_i & X_t > 0 \\ X_i - \mu h X_i + W_{i+h} - W_i & X_t < 0 \end{cases}$$

où  $W_{i+h} - W_i$  est simulé par  $g_i \sqrt{h}$  avec  $(g_i)_{i \geq 0}$  est une séquence v.a indépendantes suivant une loi normal standard.

Pour l'implémentation numérique, toutes les trajectoires pour les différentes simulations sont construites dans une matrice  $R(j, i)$  pour  $i \in 0 \dots N$  et  $j \in 1 \dots M$  où  $M$  est le nombre de simulations de montécarlo. La fonction `simul.ornstein_uhlenbeck` simule est trajectoires du processus. Les graphiques 10, 11, 12 montrent les simulations des trajectoires pour  $\lambda = 1$  et  $\mu = 0, 1, 10$  avec  $N = 50$ . Visuellement pour  $\mu = 0$  les trajectoires sont asymétriques vers les valeurs négatives, pour  $\mu = 1$  elles sont symétriques et pour  $\mu = 10$  sont asymétriques vers des valeurs positives.

Pour  $\mu = \lambda = 1$  correspond à un processus Ornstein Uhlenbeck standard. Le processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  suit une loi normale standard qui est symétrique (voir paragraphe précédent).

### 2.1.2 Simulation de la probabilité

La probabilité que  $\sup_{s \leq 5} |X_s|$  de toucher la barrière définie par:

$$-\log P(\sup_{s \leq 5} |X_s| \leq 1)$$

Elle est implémentée par l'approximation numérique suivante :

$$-\log \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M 1_{\max_{\{0 < i \leq N\}} X_i \leq 1}$$

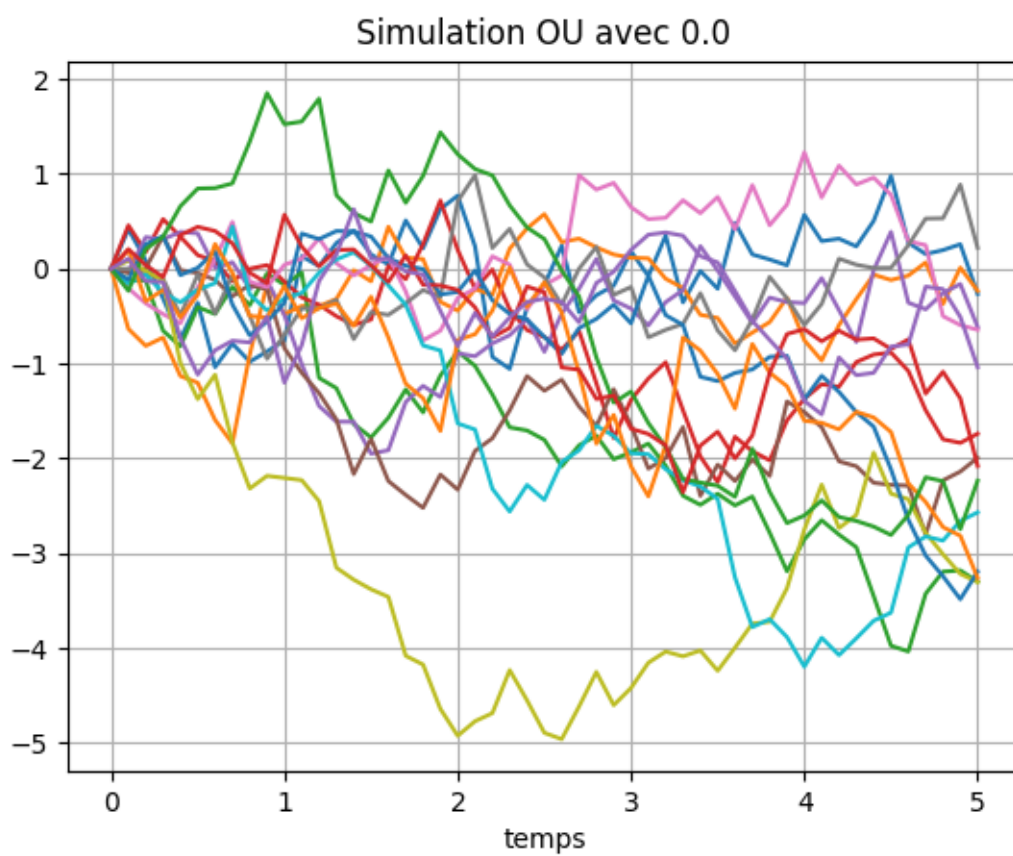


Figure 10: Simulation de la trajectoire d'un processus OU pour  $\lambda = 1$  et  $\mu = 0$

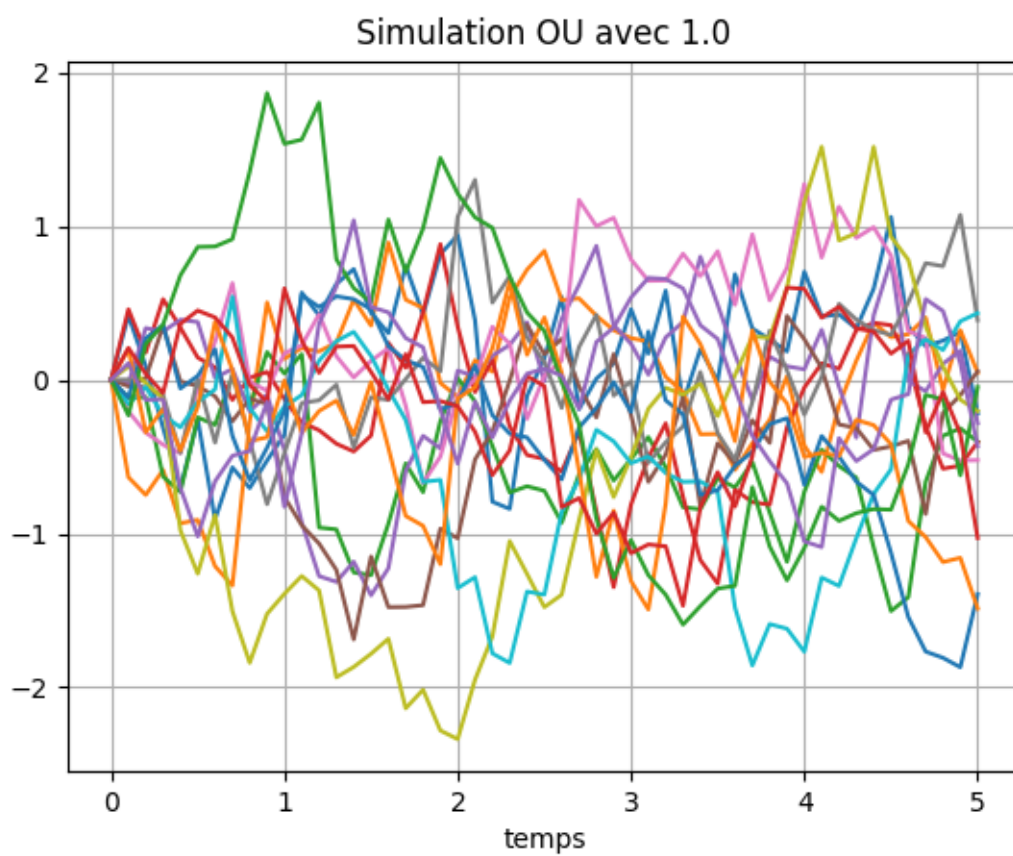


Figure 11: Simulation de la trajectoire d'un processus OU pour  $\lambda = 1$  et  $\mu = 1$



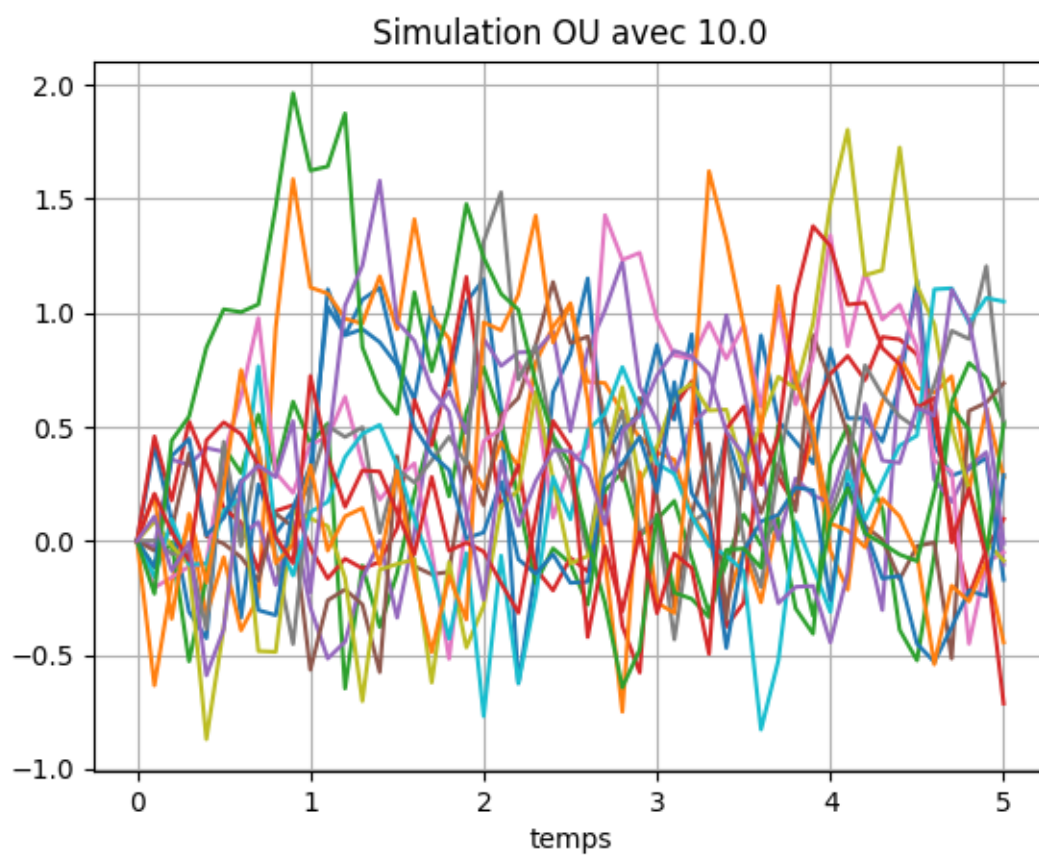


Figure 12: Simulation de la trajectoire d'un processus OU pour  $\lambda = 1$  et  $\mu = 10$

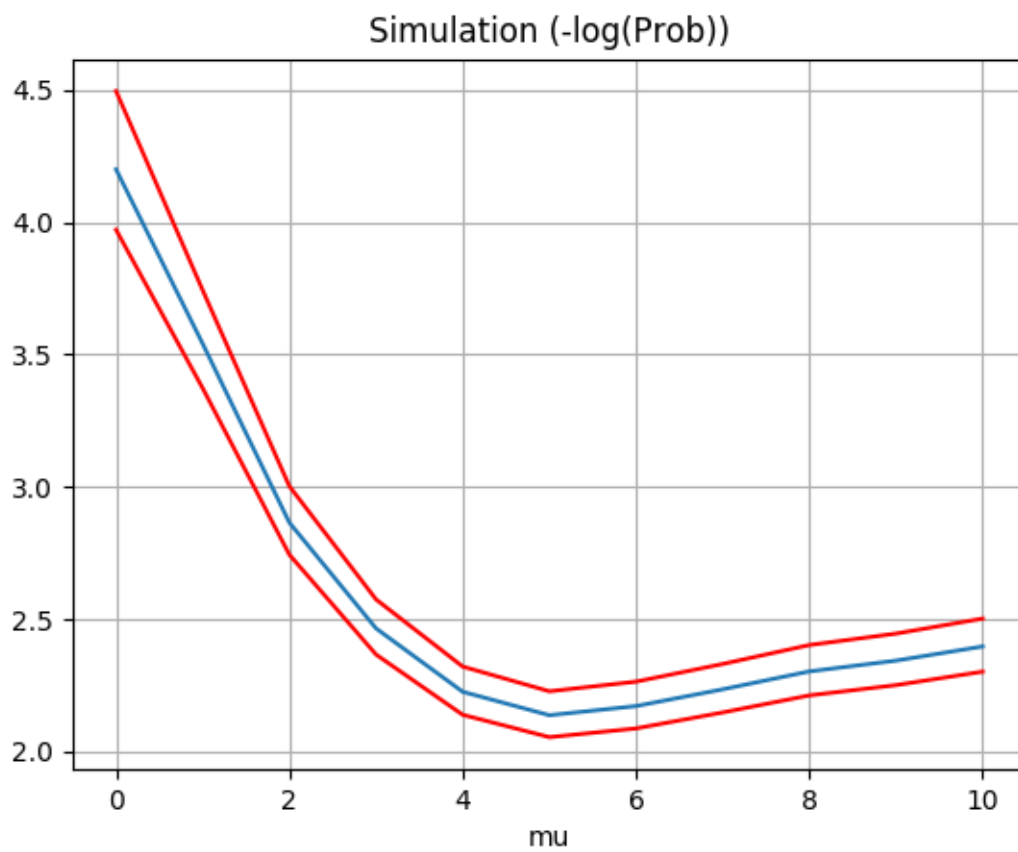


Figure 13: Simulation de  $-\log P(\sup_{s \leq 5} |X_s| \leq 1)$  pour  $\lambda = 1$  en fonction de  $\mu = 10$  pour  $N = 50000$  et  $M = 1000$ .

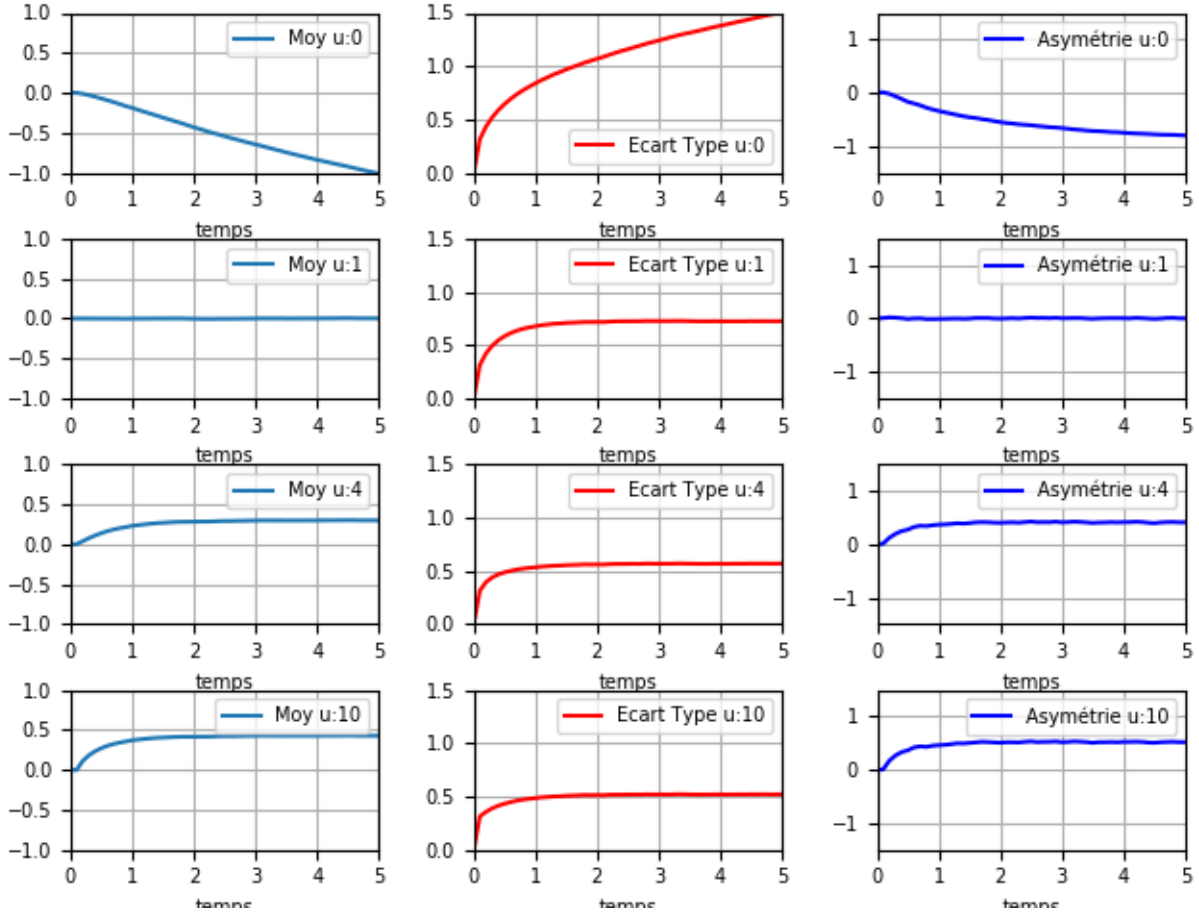


Figure 14: Evolution de  $E(X_i)$  et  $\sqrt{Var(X_i)}$  et coefficient d'asymétrie avec  $M = 10000$  et  $N = 50$  pour différentes valeurs de  $\mu = 0, 1, 4, 10$

La fonction `simul_proba` implémente le résultat. L'intervalle de confiance à 95% est aussi calculé. Le graphique ?? trace  $-\log P(\sup_{s \leq 5} |X_s| \leq 1)$  en fonction de  $\mu$  pour  $N = 50000$  et  $M = 1000$ .

Le résultat est prévisible car pour  $\mu = 0$  il n'y a pas de force de rappel vers le haut et lorsque  $X_t < 0$  le processus suit une loi normale de variance 1, donc la probabilité de franchir la barrière inférieure est grande.

Lorsque  $\mu = 1$ ,  $X_t$  suit un processus d'Ornstein Uhlenbeck standard.  $(X_t)_{t \geq 0}$  est un processus Gaussien de variance décroissante en fonction du temps.

Lorsque  $\mu = 10$ , la force de rappel pour  $X_t$  négatif est très grande, et donc la probabilité de franchir la barrière inférieure est faible, et  $X_t$  est ramené sur de valeurs positives. Les trajectoires sont très asymétriques.

Les graphiques de la figure 14 analysent l'évolution de l'espérance, l'écart type et coefficient d'asymétrie du processus en fonction de différents paramètres  $\mu$ . Les simulations sont faites avec  $M = 100000$  et  $N = 50$ .

## References

- [1] I. Karatzas, J. Karatzas, and S.E. Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Graduate texts in mathematics. World Publishing Company, 1988. ISBN: 9783540965350. URL: <https://books.google.fr/books?id=uxnvAAAAMAAJ>.
- [2] Bernard Lapeyre and Emmanuel Temam. “Competitive Monte Carlo methods for the pricing of Asian options”. In: *The Journal of Computational Finance* 5.1 (2001), pp. 39–57. DOI: 10.21314/JCF.2001.061. URL: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01667057>.