PROJET S8

Louis De Juan et Haris Medjahed

mai 2021

Contents

1 Objectifs

L'objectif du projet est d'optimiser le chauffage dans une pièce Il s'agit donc de définir une pièce carré et plane dans un premier temps d'y ajouter un radiateur et une fenêtre qui possèdent tout deux des conditions aux bords de température et d'en suite trouver la meilleure configuration possible pour que la température dans la pièce soit maximale, donc de changer la position du radiateur, il existe plusieurs suites aux projet comme prendre une pièce en 3 dimensions ou même prendre un plan d'un appartement avec plusieurs radiateurs que nous aborderons peut être en fin de partie. Notre professeur accompagnant est EMMANUEL AUDUSSE

2 Définition du problème

Dimensions: On considère une pièce 2D carré de longueur 5m , une fenêtre de longueur 1m et un radiateur de longueur 1m, tout deux placés sur les murs de la fenêtre, On note le domaine représenté par le radiateur Γ_r, le domaine représenté par la fenêtre Γ_f, le domaine représenté par les murs Γ_m et enfin l'intérieur de la pièce par Ω, comme sur le schéma de la page suivante :

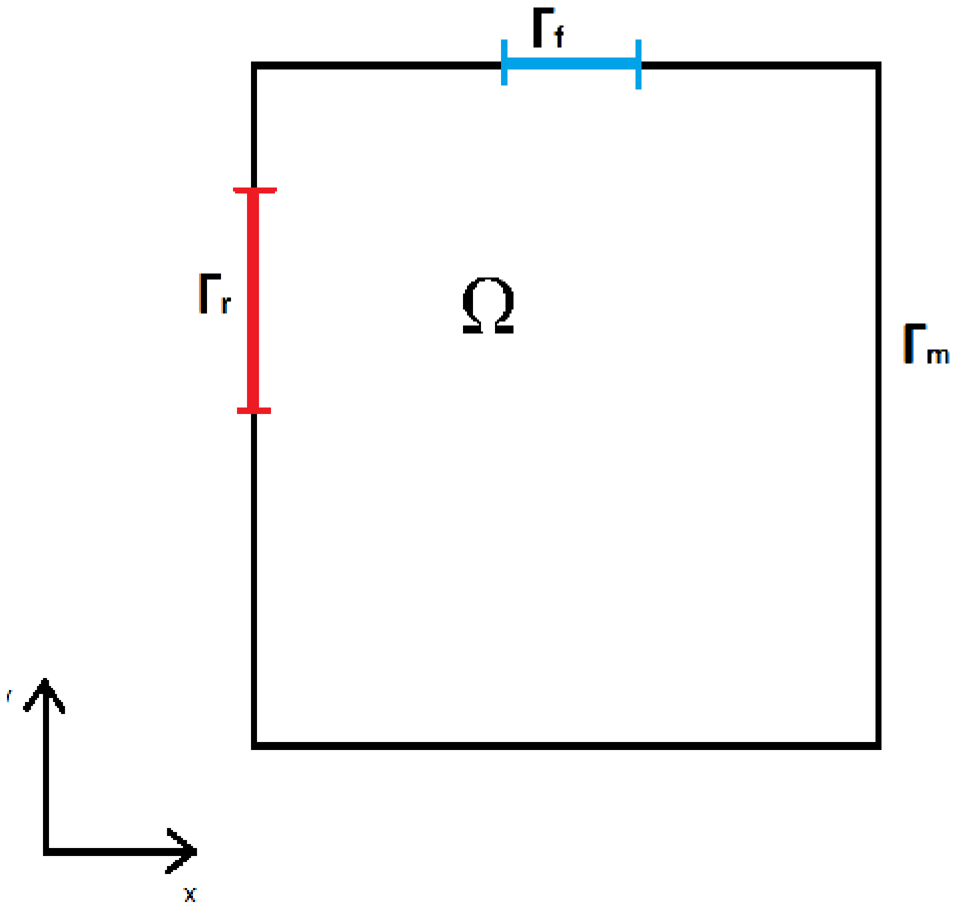

Figure 1: schéma d'une pièce

Équation de la chaleur: La température à l'intérieur de cette pièce est régie par l'équation de la chaleur:

$$\partial_t T + D\Delta T = f \tag{1}$$

Avec $D = \frac{\lambda}{\rho C_p}$ où λ est la conductivité thermique du matériaux, ρ est la masse volumique de l'air et C_p est la capacité thermique massique.

On se place en régime **stationnaire**, donc le terme $\partial_t T = 0$

Le terme f provient des sources de chaleur ç l'intérieur du domaine Ω, on suppose que ce terme est nul.

L'équation devient:

$$\Delta T = 0 \; dans \; \Omega \tag{2}$$

Les termes de bord: Sur la fenêtre et le radiateur, nous avons des conditions de Dirichlet :

$$T = T_f \; sur \; \Gamma_f \; et \; T = T_r \; sur \; \Gamma_r \tag{3}$$

On considère le mur **adiabatique**, c'est à dire qu'il n'y a pas d'échange de chaleur entre l'extérieur et l'intérieur. Le flux, par la loi de fourier :

$$q = k\nabla T.n = 0 \; sur \; \Gamma_m \tag{4}$$

Système d'équation: On obtient donc pour notre problème un système d'équation: $\begin{cases} \Delta T = 0 \text{ sur } \Omega \\ T = T_f \text{ sur } \Gamma_f \\ T = T_r \text{ sur } \Gamma_r \\ \nabla T.n = 0 \text{ sur } \Gamma_m \end{cases}$ avec $\partial\Omega = \Gamma_f \cup \Gamma_f \cup \Gamma_m$

3 Résolution du système

Formulation varationnelle: soit $T \in V = \{v \in H_1,\ v = T_f \text{ sur } \Gamma_f\ et\ v = T_r\ sur\ \Gamma_r\}$ et ϕ fonction test dans l'espace $\phi \in V_0 = \{v \in H_1,\ v = 0 \text{ sur } \Gamma_f\ et\ v = 0\ sur\ \Gamma_r\}$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Delta T\phi \ \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= -\int_\Omega \nabla T\nabla\phi \ \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial T}{\partial n}.\phi \ \mathrm{d}\mathcal{S} \text{ par la formule de Green} \\
&= -\int_\Omega \nabla T\nabla\phi \ \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{\partial\Gamma_r} \frac{\partial T}{\partial n}.\phi \ \mathrm{d}\mathcal{S} + \int_{\partial\Gamma_f} \frac{\partial T}{\partial n}.\phi \ \mathrm{d}\mathcal{S} + \int_{\partial\Gamma_m} \frac{\partial T}{\partial n}.\phi \ \mathrm{d}\mathcal{S} \\
&= -\int_\Omega \nabla T\nabla\phi \ \mathrm{d}x\mathrm{d}y \text{ car } \phi = 0 \text{ sur } \Gamma_f\ et\ \phi = 0\ sur\ \Gamma_r \text{et d'après l'équation}
\end{aligned}$$

de flux $\dfrac{\partial T}{\partial n} = 0$ sur Γ_m

$$= 0$$

On pose $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u\nabla v \ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ et $L(v) = 0$

$L(v)$ est linéaire continue sur V, $a(u,v)$ est bilinéaire continue dans V par Cauchy Schwarz et V est un espace de Hilbert car c'est un sev de H_1 lui même Hilbertien donc par le théorème de Lax Millgram, il existe une unique solution u, solution du problème variationnel $a(u,v) = L(v)$ et donc solution du problème précédent.

Réciproquement, par la formule de green, avec dans un premier temps, pour $u \in H_2$ et pour $v \in V_0$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla u\nabla v \ \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= -\int_\Omega \Delta uv \ \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= 0
\end{aligned}$$

Supposons maintenant que $\Delta u \neq 0$

On sait que pour tout v dans V_0, on a :

$\int_\Omega \Delta uv \ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$

Sachant que Δu est continue, pour tout z dans ω tel que $\Delta u(z) \neq 0$, il existe un voisinage V_z,tel que $\forall y \in V_x$, $\Delta u(y) \neq 0$ et Δu est toujours du même signe sur V_z.

Ainsi en prenant v dans H_1 strictement du même signe que $\Delta u(z)$ sur V_z et nulle sur $\Omega\backslash V_z$, on aura $\int_\Omega \Delta uv \ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$

donc $\int_z \Delta uv \ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$

car v est nulle sur $\Omega\backslash V_z$

or $\forall y \in V_z$, $\Delta u(y)v(y) > 0$ donc $\int_z \Delta uv \ \mathrm{d}x\mathrm{d}y > 0$

Ce qui est absurde.

Donc on en déduit que Δu est nulle sur Ω.

De plus comme $u \in V$, $u = T_f$ sur $\Gamma_f\ et\ u = T_r$ sur Γ_f

Avec en plus l'équation de flux on retrouve bien le problème posé

Un minimum de l'énergie: Soit $J(v)$ l'énergie définie pour $v \in V$, sous les hypothèses de Lax Millgram, avec la forme bilinéaire symétrique $a(u,v)$ définie précédemment, on défini:

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} \mid \nabla v \mid^2 \ \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{5}$$

Soit $u \in V$ la solution unique de (FV), alors u et aussi l'unique point de minimum de l'énergie :

$$J(u) = min_{v \in V} J(v) \tag{6}$$

et réciproquement, si $u \in V$ est un point de minimum de l'énergie $J(v)$, alors u est la solution unique du problème variationnel.

démonstration:

Si u est solution de (FV), on développe grâce à la symétrie de $a(u,v)$:

$$\begin{aligned} J(u+v) &= \frac{1}{2}\int_{\Omega} \mid \nabla u + \nabla v \mid^2 \ \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= J(u) + \frac{1}{2}a(v,v) + a(u,v) \\ &= J(u) + \frac{1}{2}a(v,v) \\ &\geq J(u) \end{aligned}$$

Comme u+v est quelconque dans V, u minimise bien J dans V

Réciproquement, soit $u \in V$ tel que $J(u) = min_{v \in V} J(v)$, pour $v \in V$, on définit $j(t) = J(u+tv)$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$
Comme $t = 0$ est un minimum de j, on en déduit que $j'(0) = 0$,qui est exactement la formulation variationnelle.

4 Résolution numérique

Résolution numérique de l'équation de la chaleur dans notre pièce:
On utilise le logiciel freefem++ pour créer le maillage et pour résoudre le problème variationnel.
On utilise la méthode d'éléments finis $\mathbf{P}_1$
On définit le maillage ci dessous:
et dans la page suivante la solution du problème de chaleur pour $T_f = 20$ et $T_r = 40$

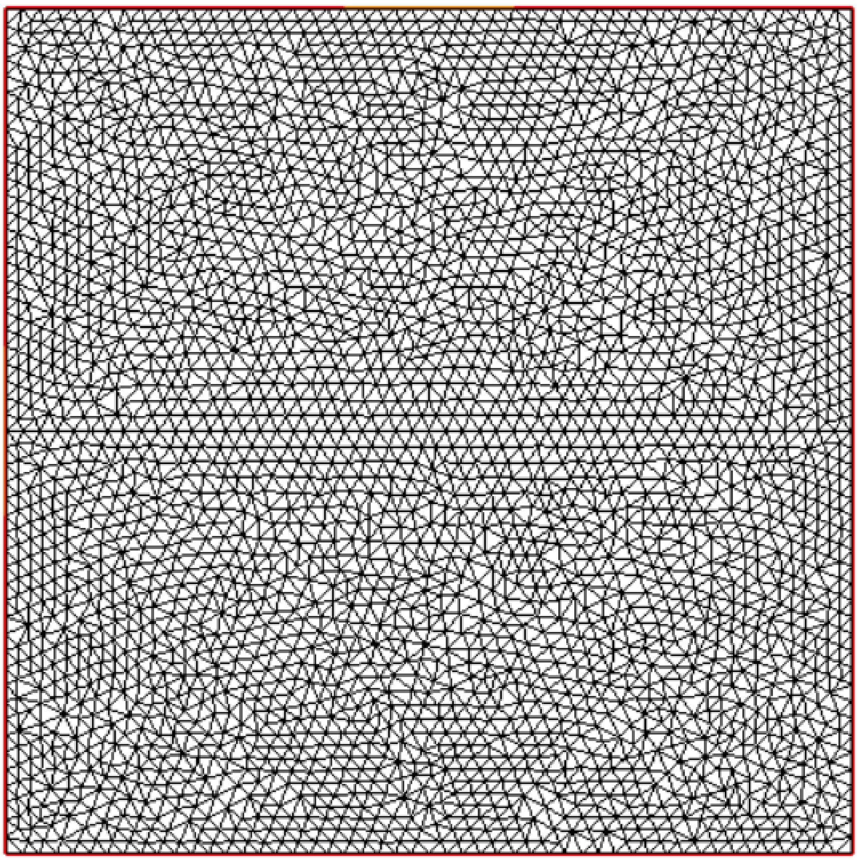

Figure 2: maillage de la pièce

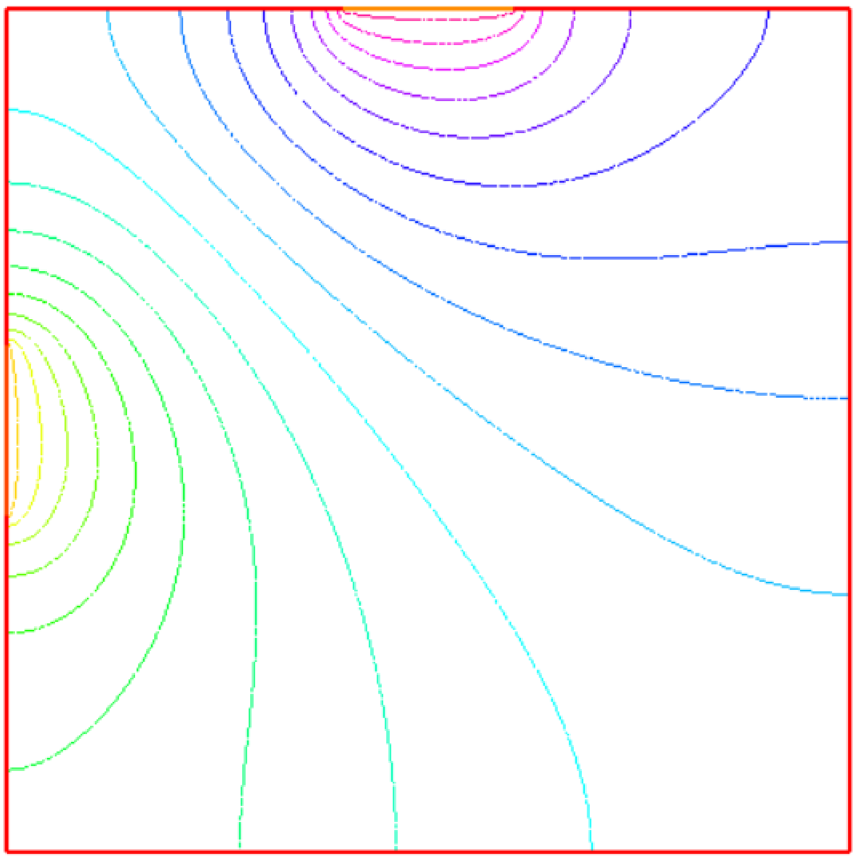

Figure 3: répartition de la température dans la pièce pour $T_f = 20$ et $T_r = 10$

5 Optimisation

La valeur choisie à optimiser est la moyenne de température dans la pièce, c'est à dire que l'on cherche à trouver:

$$M = max\left(\frac{\int_{\Omega} T(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{Aire}\right) \tag{7}$$

Sur la solution précédente on a une moyenne de $m = 30$

Essayons maintenant de changer la position du radiateur dans la pièce.
On fait dans un premier temps une discrétisation bord par bord, içi 10 points pour chaque bord, on obtient les figures présentées à la page suivante. Dans un soucis de représentation plus réelle, on laisse un petit espace entre le début du mur et la position du radiateur (0.5), vu que le radiateur mesure 1m, sur un mur de 5m la dernière valeur de position possible est 3.5m
Pour le bord de gauche par exemple on a cette discrétisation avec x la position du radiateur

$$\begin{aligned} n &= 100 \\ h &= \frac{3}{n} \\ x &= 0.5 + ih \end{aligned}$$

Pour avoir une représentation de la cette fonction pour toutes les positions, on définit une abscisse curviligne sur toutes les positions possible.
x prend ses valeurs dans $]0, 10[$ les valeurs 0 et 10 ne sont pas prises en comptes pour des problèmes de bord dans l'implémentation sur freefem++

radiateur en haut a droite pour $x \in]0, 0.5]$
radiateur a droite pour $x \in]0.5, 3.5]$
radiateur en bas pour $x \in]3.5, 6.5]$
radiateur a gauche pour $x \in]6.5, 9]$
radiateur en haut a gauche pour $x \in]9.5, 10[$

on obtient les figures suivantes :

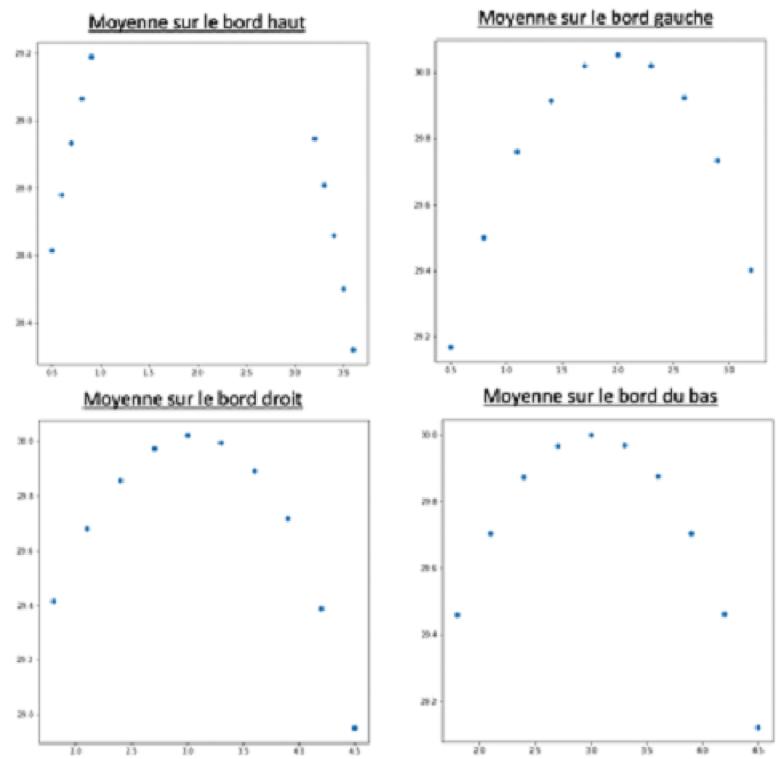

Figure 4: valeurs de la moyenne de température pour tout les bords

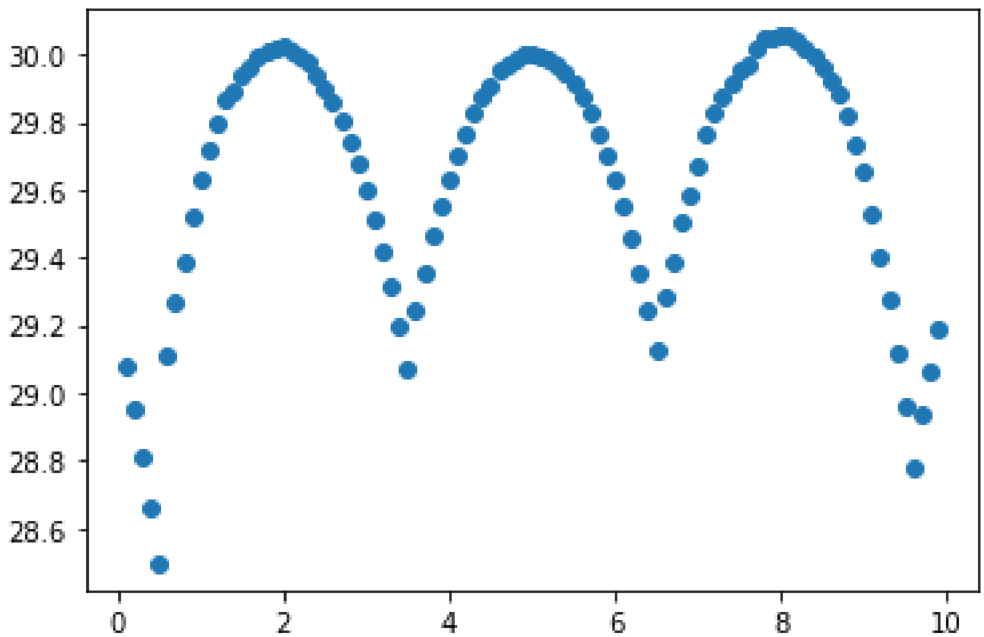

Figure 5: valeur de la moyenne de température avec l'abscisse curviligne avec n=100 , 5 s de temps de calcul

poser $\tau = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$
poser $a_0 = a$
poser $b_0 = b$
pour $i = 0, \ldots, N^{\max}$
    poser $a' = a_i + \dfrac{1}{\tau^2}(b_i - a_i)$
    poser $b' = a_i + \dfrac{1}{\tau}(b_i - a_i)$
    si $(q(a') < q(b'))$ alors
        poser $a_{i+1} = a_i$
        poser $b_{i+1} = b'$
    sinon si $(q(a') > q(b'))$ alors
        poser $a_{i+1} = a'$
        poser $b_{i+1} = b_i$
    sinon si $(q(a') = q(b'))$ alors
        poser $a_{i+1} = a'$
        poser $b_{i+1} = b'$
    fin si
fin pour i

Figure 6: Algorithme du nombre d'or

Méthode du nombre d'or Après avoir obtenu un graphe discret des valeurs moyenne de température dans la pièce, puisque nous n'avons pas de fonction définie de la moyenne de la température en fonction de la position du radiateur, nous allons recourir à la méthode du nombre d'or afin de déterminer le maximum des valeurs moyenne de température de la pièce. Nous cherchons un maximum sur chaque "bosse" du schéma précédent, et dans cette partie la fonction à bien l'air concave. La méthode du nombre d'or est adaptée à notre problème car déjà notre problème est en 1D et elle nécessite uniquement l'évaluation de la fonction en un point.Il n'y pas besoin de calculer le gradient (que l'on ne connaît pas).

La méthode du nombre d'or fonctionne de la même manière qu'une recherche dichotomique, mais le choix des points utilise le nombre d'or au lieu du nombre 2. Elle consiste à évaluer une fonction sur les bords d'un intervalle [a,b] et sur deux points de l'intervalle c et d choisi à l'aide du nombre d'or, et ensuite on prend la plus grande valeur (petite si on cherche un minimum) entre f(c) et f(d) et le ensuite on va reéffectuer ces actions sur l'intervalle [a,d] ([c,b] si f(d) ¿f(c)) pendant un certain nombre de fois et ainsi on va avoir une approximation d'un maximum local de f de manière précise et certaine.

On trouve avec cet algorithme pour un critère d'arrêt de 0.05:

Pour le radiateur **à droite** : position 1.92 (en partant du coin en haut à droite) **température à 30.03**

Pour le radiateur **en bas** : position 2. (en partant du coin en bas à droite) **température à 30.01**

Pour le radiateur **à gauche** : position 2.06 (en partant du coin en bas à gauche) **température à 30.06**

Le problème avec cette méthode, c'est qu'elle ne permet que de donner un maximum local de f, et donc qu'elle ne peut pas vraiment nous servir ici car on dispose de 3 maximum local et que l'on recherche le maximum global.

Pour cela, nous allons nous servir d'une autre méthode qui s'appelle méthode du recuit simulé.

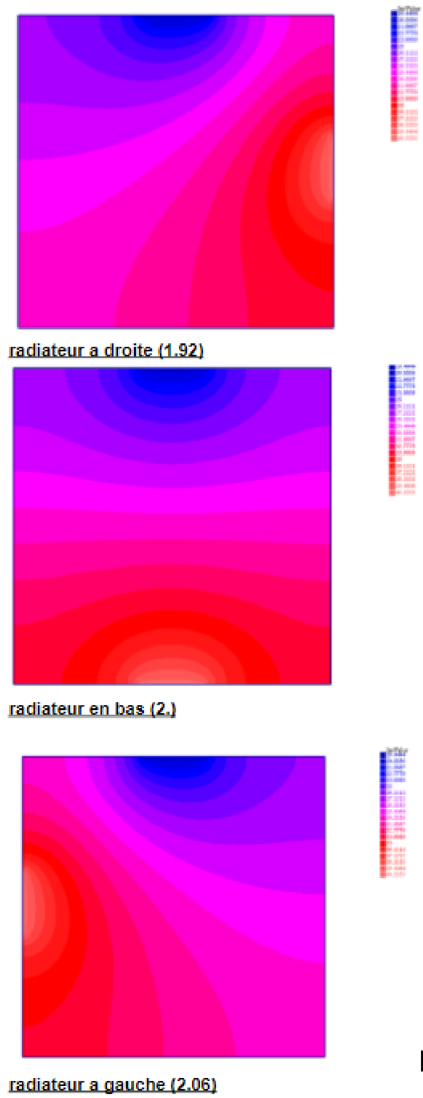

Figure 7: répartition de la température dans la salle avec les 3 positions des maximum locaux, trouvées avec la méthode du nombre d'or

```
s := s0
g := s0
e := E(s)
m := E(g)
k := 0
tant que k < kmax
  sn := voisin(s)
  en := E(sn)
  si en < e ou aléatoire() < P(en - e, temp(k/kmax)) alors
    s := sn; e := en

  si e > m alors
      g := s; m := e;
  k := k + 1
retourne g
```

Figure 8: Pseudo code de l'algorithme recuit simulé

Méthode du recuit simulé La méthode du recuit simulé consiste à partir d'un point s0, de l'évaluer, que l'on va enregistrer dans une variable g de choisir un point s' dans le voisinage de s et de l'évaluer aussi. Si $f(s') > g$, on remplace g par $f(s')$. Ensuite, soit on se déplace de maniere aléatoire vers point s1 avec un probabilité qui décroit au cours du temps ou on vérifie si $f(s') > f(s)$ soit on reste au reste aux alentours de s et on répète toute ces instructions k fois.

Dans notre implémentation, pour définir le voisin s', nous avons pris une valeur aléatoire entre -1 et 1 que nous avons ensuite ajouté à s. Et pour définir la "probabilité de saut", nous avons pris

$$exp(\frac{-|f(s) - f(s')|\sqrt{k}}{20}) \tag{8}$$

L'avantage de cette méthode, c'est qu'elle tend tres souvent vers le maximum global de la fonction, mais elle n'est pas sûre car elle repose sur de l'aléatoire.

Avec la méthode du recuit simulé,en prenant une valeur de départ entre $]0, 10[$ on trouve comme position 8.06 avec comme critère d'arrêt kmax=500, pour une température de 30.06.

Un autre critère : l'écart-type Un deuxième critère d'optimisation peut être le minimum de l'écart-type, si l'on veut que la température dans la pièce soit le plus homogène possible. sur freefem++ il n'y a pas de commande qui renvoie l'écart-type d'un vecteur u du maillage. Pour calculer l'écart-type, on utilise la formule de la variance. ce qui nous donne :

$$Ec = \sqrt{\frac{\int_{\Omega} u^2}{Aire} - Moyenne^2} \tag{9}$$

En utilisant l'abscisse curviligne on obtient la figure ci-dessous

Cependant cette fois ci, c'est le minimum le l'écart-type que l'on cherche qui semble être la première ou la dernière valeur de la du vecteur position, on peut prendre $x = 0.1$ pour avoir un écart-type minimal. Cette position est celle qui donne la température moyenne la plus basse. Donc c'est au choix du propriétaire de choisir si il préfère plus l'homogénéité de température dans sa pièce plutôt qu'une consommation plus faible.

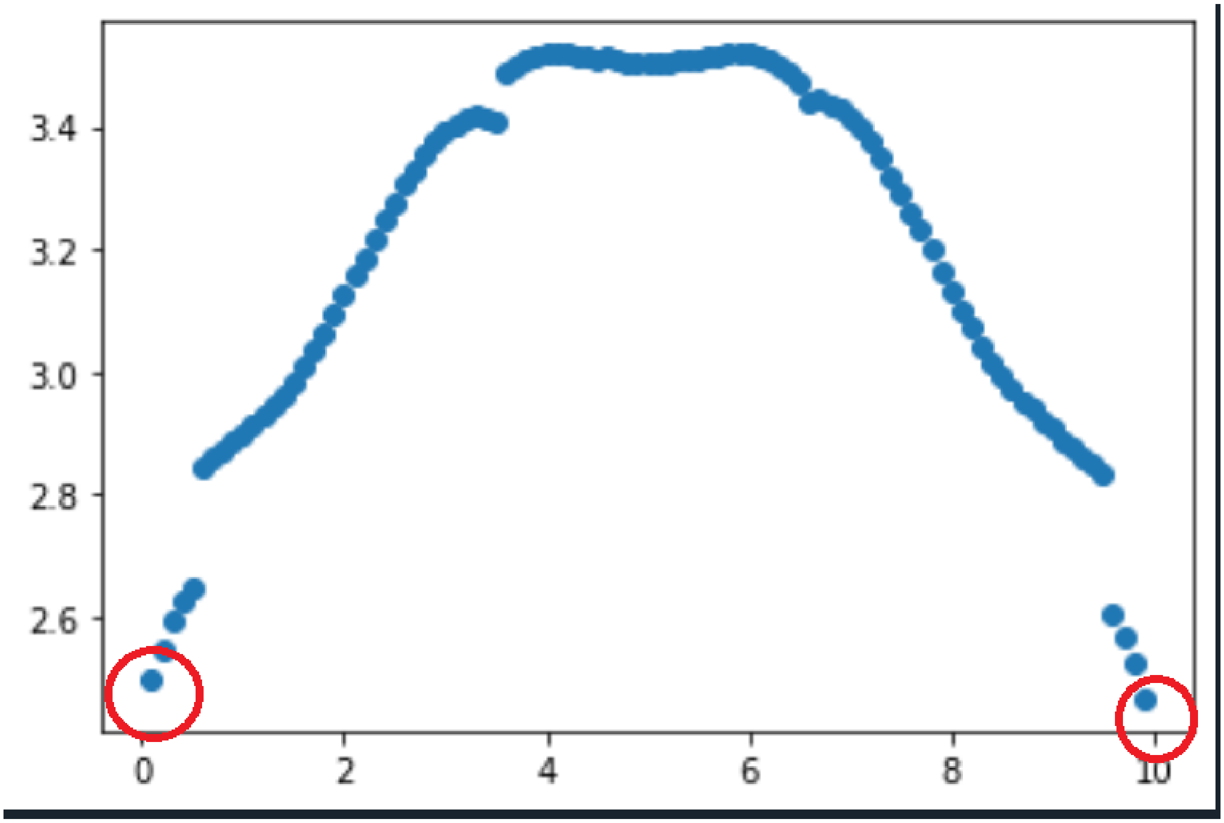

Figure 9: écart-type de température en fonction de la position du radiateur

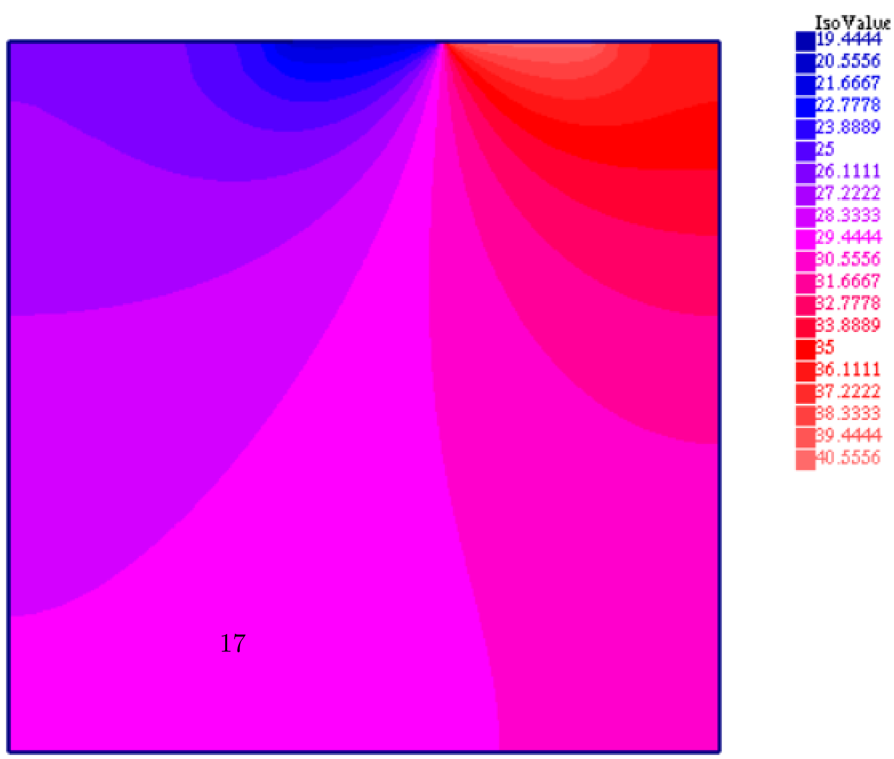

Figure 10: Répartition de la température pour la position ou l'écart-type est minimal

6 Avec deux radiateurs

En faisant toutes les positions possibles pour 2 radiateurs, le maximum de température se trouve lorsque l'on mets un radiateur de chaque coté de la fenêtre pour $xrad1 = 9.8$ et $xrad2 = 0.2$ Pour faire toutes les positions des deux radiateurs: on définit 2 discrétisations: une sur la position du radiateur 1 et une sur la position du radiateur 2.

$$\begin{aligned} n &= 50 \\ h &= \frac{1}{n} \\ xrad1_i &= 10ih \text{ pour } i \in [1, 99] \\ xrad2_j &= 10jh \text{ pour } i \in [1, 99] \end{aligned}$$

vu que les deux radiateurs sont les mêmes et qu'ils ne peuvent pas se superposer, on peut réduire le nombre total d'itérations avec certaines conditions comme $xrad1_i + tailleradiateur < xrad2_j$, finalement après avoir lister toutes les positions possible et la valeur de la moyenne de température, il suffit de rechercher le maximum sur cette liste.

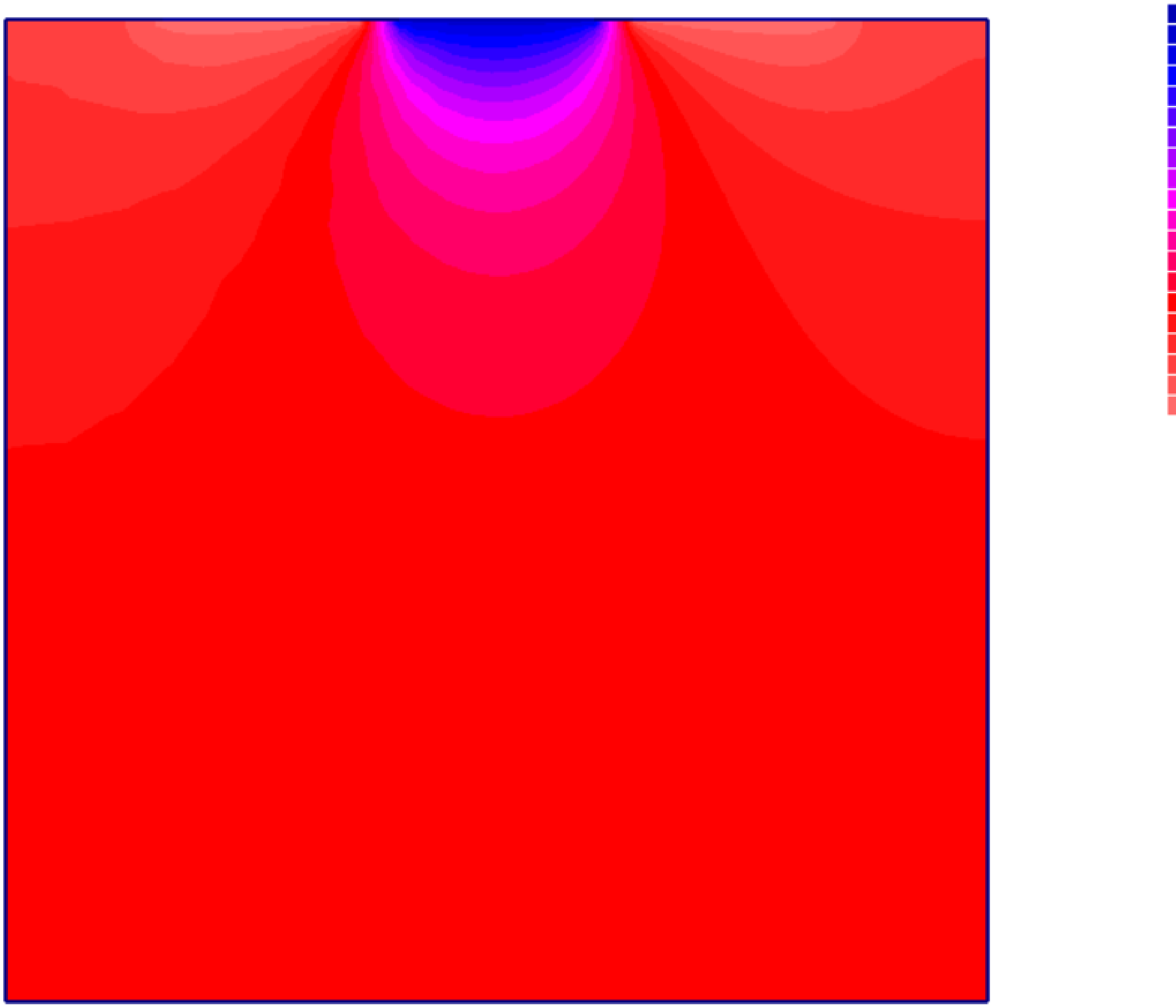

Figure 11: répartition de la température pour la position des 2 radiateurs ou celle ci est maximale

Méthode de relaxation Étant donné que nous ne pouvons qu'évaluer la fonction en un point, et que cette fois-ci nous ne pouvons pas nous servir des méthodes 1D comme la méthode du nombre d'or, ou la méthode du recuit simulé, et que nous n'avons pas accès au gradient de la fonction, nous pourrions nous servir de la méthode de relaxation.

Le principe de la méthode de relaxation est tout simple, il nous suffit juste de prendre un point de départ, de fixer x, et d'effectuer une méthode 1D (méthode du recuit simulé par exemple) selon l'axe y, puis ensuite de récupérer le point trouvé, de fixer y, et d'effectuer une méthode 1D, puis de récupérer le point trouvé, fixer x et ainsi de suite, et au bout de quelque répétitions, on se rapproche d'un maximum global de la fonction f.

7 En prenant un vrai plan d'appartement

Cette fois ci on s'intéresse à un plan d'appartement, Le plus difficile dans un premier c'est de définir le maillage, parce que celui ci doit être fermé, sans superposition, et "continu" (c'est à dire qu'il est possible de retracer les bords sans lever le stylo) pour que l'algorithme de freefem++ puisse le créer. A cette fin on choisit de doubler l'épaisseur des murs pour pouvoir faire "l'aller retour". Ensuite il suffit d'y ajouter des fenêtres et des radiateurs. et de lancer l'algorithme de résolution avec les mêmes paramètres au bords

Figure 12: plan d'un appartement

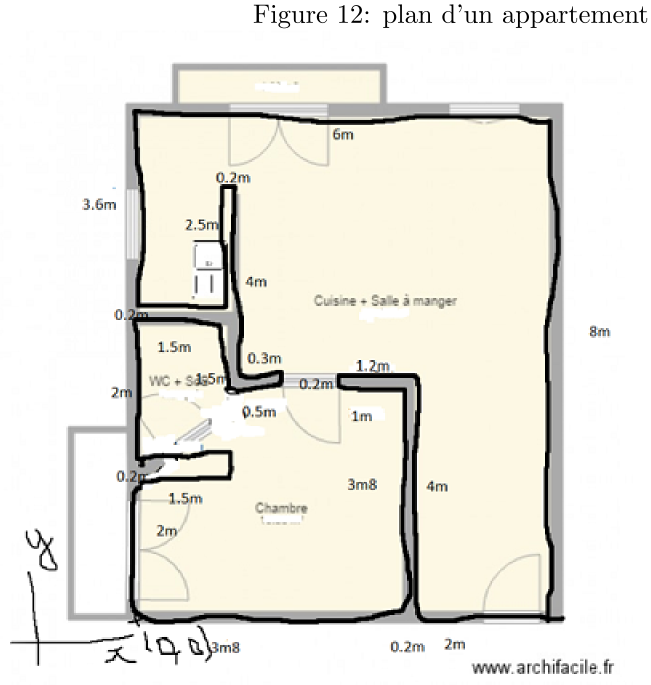

Figure 13: dimensionnement de l'appartement

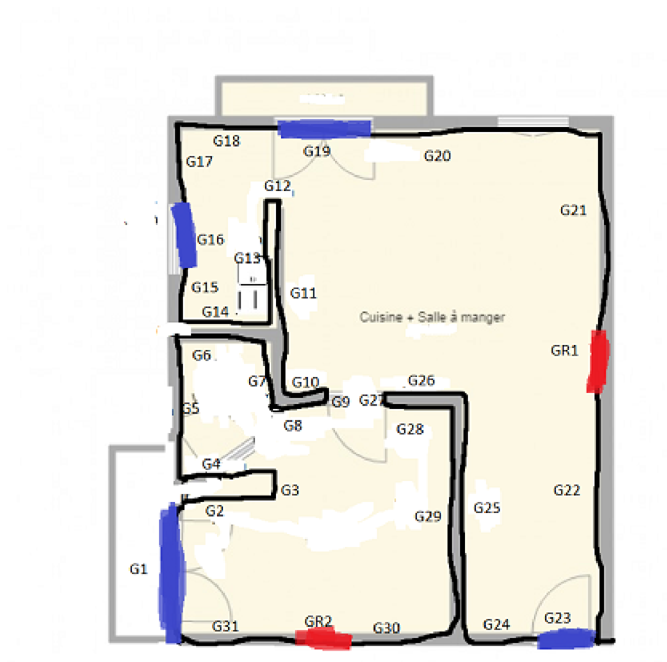

Figure 14: définition des bords de l'appartement

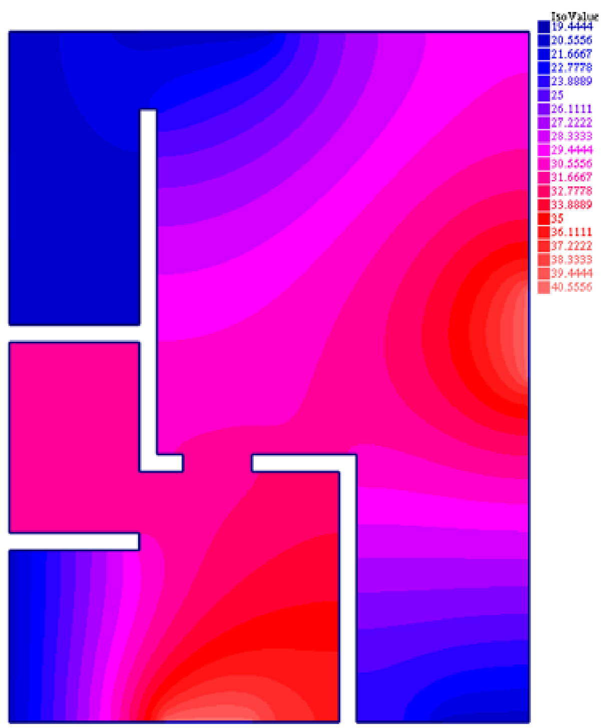

Figure 15: répartition de la chaleur dans la pièce pour une position donnée

Pour des soucis de temps, on ne fera que varier les positions des radiateurs sur leurs bords respectifs.
L'aire de la maison est de $48 - epaisseursdesmurs = 45.5$
la position du radiateur 1 varie de 0.5 à 6.5 la position du radiateur 2 varie de 0.5 à 2.5
Dans l'hypothèse où la fonction qui à rad1,rad2 associe la moyenne de température est α concave. On peut faire un algorithme de relaxation ou la recherche 1D se fera avec une section d'or On a vérifie visuellement la concavité lorsque l'on fixe les valeurs de rad1 ou de rad2 pour les algorithmes de la section dorée.

Pour 15 itérations (on trouve 1.35 en position du radiateur 2 et 2,75 pour le deuxième) d'ailleurs ces valeurs sont trouvées bien avant les 15 itérations pour une température moyenne de 28.6

8 Conclusion

Pour conclure, optimiser la position du radiateur peut permettre un gain de plus ou moins 1 degré sur la température moyenne d'une pièce, ce qui peut sur le long terme permettre une baisse dans la facture. On estime une économie de 7 pourcent par an pour une ba isse de 1 degré de température dans la maison.

9 Sources

http://mduprez.perso.math.cnrs.fr/enseignement/optimisation/tp3.pdf
https://www.ceremade.dauphine.fr/ gontier/Publications/methodesNumeriques.pdf
https://math.unice.fr/ dreyfuss/D4.pdf
Cours de formulation variationnelle de Mr Vauchelet
Cours d'optimisation convexe de Mr Audusse et Mme Halpern
https://fr.wikipedia.org/wiki/Minimisation$_{d}e_{f}onctions_{n}on_{c}onvexes$
$https : //fr.wikipedia.org/wiki/Recuit_{s}imul$

10 Annexe

Nous avons mis en place un git où nous avons déposé nos codes : https://github.com/louisdejuan/projets8.git