8

Ex 1)

$T_1 = \bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad T_2 = \frac{1}{2}(2X_1 - X_6 + X_4)$

1 1) • $E(T_1) = E(\frac{1}{n}\sum_i X_i) = \frac{1}{n}\sum_i E(X_i)$

$= \frac{1}{n}\sum_i \mu = \frac{1}{n}.n.\mu = \mu.$

1 • $V(T_1) = V(\frac{1}{n}\sum X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_i V(X_i)$ (les X_i sont indép)

$= \frac{1}{n^2}\sum_i \sigma^2 = \frac{1}{n^2}.n.\sigma^2 = \sigma^2/n.$

1 Selon T.C.L $T_1 = \bar{X}_n \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n).$

1 2) • $E(T_1) = \mu$ donc T_1 est un est. sans biais de μ.

1 • $E(T_2) = E(\frac{1}{2}(2X_1 - X_6 + X_4))$

$= \frac{1}{2}(2E(X_1) - E(X_6) + E(X_4))$

$= \frac{1}{2}(2\mu - \mu + \mu) = \mu$ donc T_2 est ....

3) Les deux estimateurs sont sans biais. On compare leurs risques quadratiques.

1 • $r(T_1) = V(T_1) + \underbrace{b^2(T_1)}_{=0} = \sigma^2/n.$

1 • $r(T_2) = V(T_2) + \underbrace{b^2(T_2)}_{=0}$ X_1, X_4 et X_6 sont indép

$= V(\frac{1}{2}(2X_1 - X_4 + X_6)) = \frac{1}{4}(4V(X_1) + V(X_4) + V(X_6)$

$= \frac{1}{4}(4\sigma^2 + \sigma^2 + \sigma^2) = \frac{6}{4}\sigma^2 = \frac{3}{2}\sigma^2.$

1 • $r(T_1) < r(T_2)\ \forall n$ car $\frac{1}{n} < 3/2$

Donc T_1 est le meilleur estimateur parmi les deux.

6 Exercice 2 (~~6~~ points)

$$f(x) = \frac{1}{2}(1+\theta x) \quad \text{si } -1 \le x \le 1$$

1) ~~θ_m~~ $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x).dx = \int_{-1}^{1} x \frac{1}{2}(1+\theta x)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x+\theta x^2)dx$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}+\theta\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{\theta}{3}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{\theta}{3}\right)\right] = \frac{1}{2}\cdot\frac{2\theta}{3} = \frac{\theta}{3}$$

4

On estime $E(X)$ par $\overline{X_n}$ donc $\overline{X_n} = \theta/3$

l'estimation de θ par EMM est $\hat{\theta}_m = 3\overline{X_n}$.

2) $\hat{\theta}_m$ est sans biais ?

$$E(\hat{\theta}_m) - \theta = E(3\overline{X_n}) - \theta = 3E(\overline{X_n}) - \theta = 3.\frac{\theta}{3} - \theta = 0$$

2

$\Rightarrow \hat{\theta}_m$ est sans biais

ou $E(\hat{\theta}) = \ldots = \theta$

6 Exercice 3

X suit une loi de Rayleigh

$$f(x) = \frac{x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{2\theta}} \qquad x>0,\ \theta>0$$

EMV

les $(X_i)_{i=1,\ldots,n}$ toutes de même loi et ind et suivant la loi de Rayleigh. La réalisation d'1 expérience conduit à un résultat $x_1, \ldots, x_n$ t.q :

$$f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n;\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i)$$

2 ~~4~~

Fct de vraissemblance : $\mathcal{L}(x_1,\ldots,x_n;\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i)$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(x_1,\ldots,x_n;\theta) = \prod_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\theta}.e^{-\frac{x_i^2}{2\theta}} = \frac{1}{\theta^n}\prod_{i=1}^{n} x_i e^{-\frac{x_i^2}{2\theta}}$$

2 ~~4~~

$$\ln \mathcal{L}(x_1,\ldots,x_n,\theta) = \ln\left(\frac{1}{\theta^n}.\prod x_i e^{-\frac{x_i^2}{2\theta}}\right) = \ln\left(\frac{1}{\theta^n}\right) + \ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i e^{-\frac{x_i^2}{2\theta}}\right)$$

$$= -n\ln\theta + \ln\left(\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right).e^{-\frac{1}{2\theta}\sum x_i^2}\right)$$

$$= -n\ln\theta + \sum \ln x_i - \frac{1}{2\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

2

$$\frac{\partial \ln \mathcal{L}(x_1,\ldots,x_n;\theta)}{\partial\theta} = 0 \Leftrightarrow -\frac{n}{\theta} + \frac{2\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{4\theta^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow -2n\hat{\theta} + \sum x_i^2 = 0 \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{2n}$$

$\Rightarrow$ l'estimateur de θ pour les variables $X_1, \ldots, X_n$ est

$$\boxed{\hat{\theta}_m = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{2n}}$$