Projet de recherche

Louis IOOS

1 Cadre

La quantification géométrique est un procédé qui à un espace de phases classique, ici une variété symplectique (X, ω), associe une suite d'espaces de Hilbert d'états quantiques $\{\mathscr{H}_p\}_{p\in\mathbb{N}}$. Dans ce contexte, un résultat asymptotique lorsque p tend vers l'infini décrit la *limite semi-classique*, lorsque l'échelle devient si grande que l'on récupère les lois de la mécanique classique à partir des lois de la mécanique quantique. Nous allons décrire ici une version de ce procédé connue sous le nom de *quantification holomorphe*.

Soit (X, ω) une variété symplectique compacte de dimension $2n$, et soit (L, h^L) un fibré hermitien au-dessus de X, muni d'une connection hermitienne ∇^L dont la courbure R^L satisfait la *condition de préquantification*:

$$\omega = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} R^L. \tag{1.1}$$

Supposons (X, ω) munie d'une structure complexe J compatible avec ω, faisant de (X, J, ω) une variété de Kähler et de (L, h^L) un fibré holomorphe Hermitien dont ∇^L est la *connexion de Chern*, c'est à dire l'unique connexion compatible avec les structures complexes et holomorphes. On munit X de la métrique riemannienne g^{TX} induite par ω et J, et pour $p \in \mathbb{N}$, on note L^p la p-ième puissance tensorielle de L. La *quantification holomorphe* de (X, J, ω) est la donnée de la famille d'espaces hermitiens $\{\mathscr{H}_p\}_{p\in\mathbb{N}^*}$, où pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{H}_p$ l'espace des sections holomorphes de L^p, muni du produit hermitien L^2 induit par h^L et g^{TX}.

2 Variation de structure complexe et théorème de l'indice équivariant

La quantification holomorphe décrite en Section 1 dépend du choix d'une structure presque complexe J sur X, et il est naturel de se demander en quelle mesure cette construction dépend de J. Un moyen d'étudier cette dépendance est de voir $\mathscr{H}_p$ comme un fibré hermitien au dessus d'un espace B paramétrant des structures complexes de X compatibles avec ω. Dans la suite, on notera encore $\mathscr{H}_p$ les espaces de sections holomorphes de L^p pour tout $p \in \mathbb{N}$ vu comme fibré au dessus de B et muni du produit hermitien L^2 induit par h^L et ω. On supposera de plus que toutes les données sont holomorphes, ce qui induit une stucture de fibré holomorphe sur $\mathscr{H}_p$.

Supposons X munie d'une structure complexe J compatible avec ω, et soit G un groupe de Lie compact agissant holomorphiquement et isométriquement sur (X, J, ω), dont l'action se relève à (L, h^L, ∇^L). Pour tout $g \in G$, le théorème de l'indice équivariant d'Atiyah-Segal-Singer donne une formule pour la somme alternée de la trace de g sur les groupes de cohomologie de L^p, en fonction d'une intégrale sur les points fixes de g (voir [3, Chap.6]). En particulier, pour p grand, la cohomologie se concentre en degré 0, et l'action de g est simplement l'action induite sur les sections holomorphes de L^p.

Supposons maintenant que G ne préserve pas de structure complexe sur X. En choisissant $B = \mathscr{J}_\omega$, l'espace des structures complexes sur X compatibles avec ω, on peut utiliser la connexion de Chern de $\mathscr{H}_p$ pour comparer les deux espaces de sections holomorphes respectivement associés à la structure complexe initiale J et à la structure complexe g^*J induite par l'action de g.

Mon premier projet est l'établissement d'une formule de l'indice équivariant dans ce cas, qui redonne asymptotiquement la formule usuelle dans le cas complexe. Il faut pour cela trouver un modèle local pour l'opérateur de transport parallèle, analogue au noyau de Bergman $P_p(\cdot, \cdot)$. Dans [5], Laurent Charles établit une telle formule dans le cas où les points fixes sont discrets, et je compte ainsi généraliser ce résultat au cas où les points fixes forment une variété de dimension quelconque.

3 Conjecture d'expansion asymptotique de Witten

Dans [14], Witten introduit un invariant topologique d'une variété compacte M de dimension 3 généralisant le polynôme de Jones des entrelacs, et propose un programe pour le calculer effectivement. En particulier, via des méthodes de théorie quantique des champs, Witten donne dans [14, § 2] une formule d'expansion asymptotique à la limite semi-classique de cet invariant, connue sous le nom de *conjecture d'expansion asymptotique de Witten*. Cet invariant est construit à partir d'un espace de module $\mathscr{M}_M$ de connexions plates au dessus de M, et Witten propose de ramener le problème à l'espace correspondant $\mathscr{M}_\Sigma$ d'une surface compacte Σ, dont la géométrie est beaucoup mieux connue.

En effet, pour un certain nombre de cas, classifiés dans [4, § 5.4], $\mathscr{M}_\Sigma$ est naturellement muni d'une structure d'orbifold symplectique et d'un fibré en droite préquantifiant, comme en Section 1. Une structure complexe sur Σ en induit naturellement une sur $\mathscr{M}_\Sigma$ compatible avec la structure symplectique, qui ne dépend de Σ que modulo l'action d'un difféomorphisme. On peut ainsi étudier la quantification holomorphe de $\mathscr{M}_\Sigma$ comme dans la Section 2 en choisissant pour B l'espace des structures complexes sur Σ à isotopie près.

Dans [9], Hitchin montre que pour $p \in \mathbb{N}$ suffisament grand, le fibré de quantification holomorphe $\mathscr{H}_p$ au dessus de B est naturellement muni d'une connexion projectivement plate, appelée *connexion de Hitchin*. On peut ainsi appliquer la méthode de la Section 2 en remplaçant la connexion de Chern par la connexion de Hitchin, et g par le symplectomorphisme sur $\mathscr{M}_\Sigma$ induit par un difféomorphisme $\phi : \Sigma \to \Sigma$. Comme expliqué dans [1, § 1], cela permettrait de résoudre la conjecture d'expansion asymptotique dans le cas où M est le tore de difféomorphisme associé à ϕ.

Mon deuxième projet est d'appliquer les résultats de Section 2 à ce problème, dans le cas où les points fixes de l'action induite par ϕ sur $\mathscr{M}_\Sigma$ sont non-dégénérés. Parallèlement à la situation de la Section 2, Laurent Charles établit un résultat analogue dans [6] à la suite de [5] dans le cas où les points fixes de l'action induite par ϕ sont isolés, et je compte ainsi généraliser ce résultat au cas où les points fixes forment une variété de dimension quelconque.

Un autre aspect de la stratégie proposée par Witten dans [14, § 3] consiste à calculer des formules de recollement : si M est à bord non vide $\partial M = \Sigma$, alors il y a un morphisme de restriction $r : \mathscr{M}_M \to \mathscr{M}_\Sigma$. Dans [11, Prop. 7.2] et [8, Prop. 3.27], il est montré que l'image de r est un Lagrangien de Bohr-Sommerfeld, et mon résultat dans [10, Th. 4.5] calcule l'expansion aymptotique de l'invariant de Witten du recollement de deux variétés compactes M_1 et M_2 le long de leur bord Σ. Je compte ainsi développer ce programme à partir des résultats de [10].

4 Quantification des variétés Lagrangiennes spéciales

En quantification géométrique associée à une fibration Lagrangienne régulière, les états quantiques de X sont représentés par les fibres $\Lambda \subset X$ de cette fibration satisfaisant une propriété dite de *Bohr-Sommerfeld*, qui demande que la connexion induite par ∇^L sur $L|_\Lambda$ soit triviale. En général, on considère des fibrations singulières, auquel cas il peut arriver que Λ ne soit plus Lagrangienne mais seulement isotrope, c'est à dire que sa dimension n'est plus forcément égale à n. Il est de plus utile de considérer des immersions propres $\iota : \Lambda \to X$ plutôt que des plongements. On pose donc la définition suivante.

Définition 4.1. Une immersion propre $\iota : \Lambda \to X$ telle que $\iota^*\omega = 0$ satisfait la *condition de Bohr-Sommerfeld* s'il existe $\zeta \in \mathscr{C}^\infty(\Lambda, \iota^* L)$ tel que $\nabla^{\iota^* L}\zeta = 0$.

Dans [10], j'étudie les propriétés semi-classiques de ces immersions en quantification holomorphe. Dans ce cadre, la quantification d'une telle immersion est donnée par une suite $\{s_{f,p} \in \mathscr{H}_p\}_{p\in\mathbb{N}}$, appelée *état isotrope* (ou *état Lagrangien* si $\dim \Lambda = n$), définie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ par

$$s_p = \int_\Lambda P_p(x,y)\zeta^p(y)dv_X(y), \tag{4.1}$$

où dv_X est la forme volume Riemannienne sur (X, g^{TX}) et $\zeta^p \in \mathscr{C}^\infty(X, L^p)$ est le p-ième produit tensoriel de la section $\zeta \in \mathscr{C}^\infty(\Lambda, \iota^* L)$ de la Définition 4.1,

Dans le cas où (X, L) est *torique*, c'est à dire munie d'une action Hamiltonienne effective du tore $\mathbb{T}^n = (S^1)^n$ préservant toutes les données de la Section 1, on peut considérer la fibration Lagrangienne singulière induite par l'application moment $\mu : X \to \Delta$ de X vers son *polytope de Delzant* Δ. Les fibres sont alors des tores Lagrangiens en dehors du diviseur $D = \mu^{-1}(\partial\Delta)$ de X, et les fibres de Bohr-Sommerfeld de μ au sens de la Définition 4.1 sont en nombre fini. De plus, les états isotropes associés aux fibres de Bohr-Sommerfeld de cette application forment une base orthogonale de $\mathscr{H}_p$. C'est un cas où la comparaison des procédés de quantification holomorphe et de quantification réelle est particulièrement réussie, mais cela est loin d'être le cas en général.

Supposons maintenant $L = K_X^*$, où K_X^* désigne le fibré anti-canonique de X. Sur $X\backslash D \simeq (\mathbb{C}^*)^n$, la forme volume holomorphe standard induit une forme volume à valeurs complexes sur les orbites de l'action usuelle de $\mathbb{T}^n$ sur $(\mathbb{C}^*)^n$ dont l'argument est constant. De plus, ces orbites forment une fibration de $X\backslash D$. Plus généralement, si X est une variété de Fano et si $D \subset X$ est un diviseur effectif anti-canonique, alors il existe une forme volume holomorphe Ω sur $X\backslash D$, qui généralise la forme volume holomorphe standard ci-dessus.

Définition 4.2. Une sous-variété Lagrangienne Λ de $X\backslash D$ est dite *spéciale* si l'argument de $\Omega|_\Lambda$ est constant.

On peut alors considérer une fibration en sous variétés-Lagrangiennes spéciales de $X\backslash D$, qui correspond dans le cas toriques aux fibres de l'application moment $\mu : X \to \Delta$ restreinte à $X\backslash D$.

Mon troisième projet est de comparer les quantifications holomorphes et réelles dans ce cas, en considérant les états Lagrangiens associés à des variétés Lagrangiennes spéciales satisfaisant la condition de Bohr-Sommerfeld. Par exemple, mon résultat dans [10, Th. 3.6] montre que de tels états forment une base pour p suffisament grand, qui tend à être orthogonale lorsque p tends vers l'infini, approchant la situation du cas torique. On peut donc espérer comparer la dimension de $\mathscr{H}_p$ avec le nombre de variétés Lagrangiennes spéciales de Bohr-Sommerfeld, de la même manière que dans [13], et cela fournit un outil pour approcher les fibrations Lagrangiennes par des objets de dimension finie, dans l'esprit des travaux de Donaldson [7]. Cela donne ainsi un point de départ pour une formulation du problème via une application moment, comme dans [7].

Suivant [2], on peut commencer considérer l'exemple de $X = \mathbb{CP}^2$ et de D une cubique non-singulière, généralisant le cas de la fibration torique sur $\mathbb{CP}^2$. On peut aussi considérer une variété de Calabi-Yau X, sur laquelle existe une forme volume holomorphe Ω et auquel cas on prend $D = \emptyset$.

Cette approche fait le lien entre quantification géométrique et symmétrie miroir, via la conjecture de Strominger-Yau-Zaslow proposée dans [12]. Dans ce cadre, on peut étudier les états isotropes singuliers de la fibration, c'est à dire correspondant à une sous-variété de D obtenue comme dégénération de variétés Lagrangiennes spéciales, et il est naturel de conjecturer un lien avec les *corrections instanton* de [12].

References

[1] J. E. Andersen, *The Witten-Reshetikhin-Turaev invariants of finite order mapping tori I*, J. Reine Angew. Math. **681** (2013), 1–38. MR 3181488

[2] D. Auroux, *Mirror symmetry and T-duality in the complement of an anticanonical divisor*, J. Gökova Geom. Topol. GGT **1** (2007), 51–91. MR 2386535

[3] N. Berline, E. Getzler, and M. Vergne, *Heat kernels and Dirac operators*, Grundlehren Text Editions, Springer-Verlag, Berlin, 2004, Corrected reprint of the 1992 original. MR 2273508

[4] J.-M. Bismut and F. Labourie, *Symplectic geometry and the Verlinde formulas*, Surveys in differential geometry: differential geometry inspired by string theory, Surv. Differ. Geom., vol. 5, Int. Press, Boston, MA, 1999, pp. 97–311. MR 1772272

[5] L. Charles, *A Lefschetz fixed point formula for symplectomorphisms*, J. Geom. Phys. **60** (2010), no. 12, 1890–1902. MR 2735276

[6] ———, *Asymptotic properties of the quantum representations of the mapping class group*, Trans. Amer. Math. Soc. **368** (2016), no. 10, 7507–7531. MR 3471099

[7] S.K. Donaldson, *Scalar curvature and projective embeddings, i*, J. Differential Geom. **59** (2001), no. 3, 479–522.

[8] D. S. Freed, *Classical Chern-Simons theory. I*, Adv. Math. **113** (1995), no. 2, 237–303. MR 1337109

[9] N. J. Hitchin, *Flat connections and geometric quantization*, Comm. Math. Phys. **131** (1990), no. 2, 347–380.

[10] L. Ioos, *Holomorphic quantization of isotropic submanifolds*, preprint, 2017.

[11] L. C. Jeffrey and J. Weitsman, *Bohr-Sommerfeld orbits in the moduli space of flat connections and the Verlinde dimension formula*, Comm. Math. Phys. **150** (1992), no. 3, 593–630. MR 1204322

[12] A. Strominger, S.-T. Yau, and E. low, *Mirror symmetry is T-duality*, Nuclear Phys. B **479** (1996), no. 1-2, 243–259. MR 1429831

[13] A. N. Tyurin, *On the Bohr-Sommerfeld bases*, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. **64** (2000), no. 5, 163–196. MR 1789190

[14] E. Witten, *Quantum field theory and the Jones polynomial*, Comm. Math. Phys. **121** (1989), no. 3, 351–399. MR 990772