Compte-rendu de recherche

Louis IOOS

Mon domaine de recherche est la géométrie différentielle, en particulier Kählerienne et symplectique. Plus précisément, je travaille sur la quantification géométrique et ses aspects semi-classiques. L'objectif de la quantification est d'associer à un espace de phases classique, ici une variété symplectique (X, ω), un espace de Hilbert d'états quantiques H. Cette association est supposée envoyer l'algèbre des observables classiques, ici l'espace $\mathscr{C}^\infty(X)$ muni de sa structure de Poisson canonique, vers l'algèbre des opérateurs bornés de H. En *quantification de Berezin-Toeplitz*, on munit (X, ω) de certaines structures supplémentaires, et l'espace de Hilbert associé est de la forme $H = \oplus_{p\in\mathbb{N}}\mathscr{H}_p$. Dans ce contexte, un résulat asymptotique lorsque p tend vers l'infini décrit la *limite semi-classique*, lorsque l'échelle devient si grande que l'on récupère les lois de la mécanique classique à partir des lois de la mécanique quantique.

Mon travail porte sur une version géométrique de la théorie de Berezin-Toeplitz, développée par Ma et Marinescu, qui marche pour toute variété symplectique préquantifiée.

1 Cadre

Soit (X, ω) une variété symplectique compacte de dimension $2n$, et soit (L, h^L) un fibré en droites hermitien au-dessus de X, muni d'une connection hermitienne ∇^L dont la courbure R^L satisfait la *condition de préquantification*:

$$\omega = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} R^L. \tag{1.1}$$

On munit X de la métrique riemannienne g^{TX} induite par ω, et pour $p \in \mathbb{N}$, on note L^p la p-ième puissance tensorielle de L. On considère aussi un fibré hermitien (E, h^E) auxiliaire au-dessus de X, muni d'une connection hermitienne ∇^E.

Considérons le cas où J provient d'une structure complexe, c'est à dire que (X, J, ω) est une variété de Kähler munie d'un fibré holomorphe hermitien (L, h^L) tel que sa connexion de Chern ∇^L satisfait (1.1), et (E, h^E) un fibré holomorphe hermitien muni de sa connexion de Chern. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{H}_p$ l'espace des sections holomorphes de $L^p \otimes E$, muni du produit hermitien L^2 induit par h^L, h^E et g^{TX}. La *quantification holomorphe* de X est la donnée de la famille d'espaces hermitiens $\{\mathscr{H}_p\}_{p\in\mathbb{N}^*}$.

Soit $T^{(1,0)}X$ l'espace propre de J correspondant à la valeur propre $\sqrt{-1}$ à l'intérieur du complexifié $TX \otimes_R \mathbb{C}$ du fibré tangent de X, et soit $\Lambda(T^{*,(1,0)}X)$ l'algèbre extérieure totale de son dual, vue comme fibré au dessus de X. On s'intéressera ici aux deux façons suivantes de généraliser le cas Kählerien:

- [8] La première, la plus naturelle du point de vue du théorème de l'indice d'Atiyah-Singer et de la théorie des représentations, est de remplacer l'espace des sections holomorphes par le noyau de *l'opérateur de Dirac spin*^{c} agissant sur $\mathscr{C}^\infty(X, L^p \otimes E \otimes \Lambda(T^{*,(1,0)}X))$. Dans le cas Kählerien, ce noyau est précisément l'espace des formes harmoniques pour le Laplacien de Kodaira, et il est concentré en degré 0 pour p suffisament grand. On retrouve donc bien l'espace des sections holomorphes de $L^p \otimes E$.

- [7] La deuxième, plus naturelle du point de vue de la géométrie complexe, est de remplacer l'espace des sections holomorphes par les espaces propres associés aux petites valeurs propres d'un *Laplacien de Bochner renormalisé* agissant sur $\mathscr{C}^\infty(X, L^p \otimes E)$. Dans le cas Kählerien, les petites valeurs propres sont toutes nulles, et on est ramené au noyau du Laplacien de Bochner renormalisé, qui coïncide avec le Laplacien de Kodaira restreint à $\mathscr{C}^\infty(X, L^p \otimes E)$.

Dans la suite, on écrira $\mathscr{H}_p$ pour l'espace de quantification associé à $p \in \mathbb{N}$ et $\mathscr{C}_p^\infty$ pour l'espace de sections lisses le contenant, quel que soit la généralisation adoptée. Il sera toujours muni du produit hermitien L^2 correspondant, que l'on notera $\langle\cdot,\cdot\rangle_p$.

2 Le premier coefficient de la composition d'opérateurs de Toeplitz

Dans tous les cas décrits en Section 1, on peut définir la projection orthogonale de $\mathscr{C}_p^\infty$ sur $\mathscr{H}_p$ pour le produit scalaire L^2, que l'on notera P_p. L'*opérateur de Berezin-Toeplitz* de $f \in \mathscr{C}^\infty(X, \mathrm{End}(E))$ est la famille d'opérateurs $\{T_{f,p}\}_{p\in\mathbb{N}}$ définie par

$$T_{f,p} = P_p f P_p : \mathscr{C}_p^\infty \to \mathscr{C}_p^\infty, \tag{2.1}$$

où f est l'opérateur de multiplication par la fonction f.

La théorie de Berezin-Toeplitz dans le cas Kähler et pour $E = \mathbb{C}$ a été initialement développée par Bordemann, Meinreken et Schlichenmaier dans [1], où ceux ci établissent la formule asymptotique suivante, pour tout $f, g \in \mathscr{C}^\infty(X, \mathbb{C})$,

$$T_{f,p}T_{g,p} = \sum_{r=0}^{\infty} p^{-r} T_{C_r(f,g),p} + O(p^{-\infty}), \tag{2.2}$$

où les C_r sont des opérateurs bidifférentiels pour tout $r \in \mathbb{N}$, avec $C_0(f,g) = fg$. En particulier, on a

$$T_{f,p}T_{g,p} = T_{fg,p} + O(p^{-1}). \tag{2.3}$$

Cela montre que la composition des quantifications de f et g tendent vers la quantification de fg à la limite semi-classique, lorsque p tend vers l'infini. Dans le cas symplectique et pour un fibré E quelconque, ces résultats ont été montrés dans [8, Th.1.1] et [5, Th.1.2] respectivement pour les deux généralisations ci-dessus.

Soient $\nabla^{1,0}$ et $\nabla^{0,1}$ les composantes holomorphe et anti-holomorphe de la connexion sur $\mathrm{End}(E)$ induite par ∇^E, et soit $\langle.,.\rangle$ l'accouplement induit par g^{TX} sur $T^*X \otimes E$ à valeur dans $\mathrm{End}(E)$. Dans [4] et [5, § 6], j'ai calculé le coefficient $C_1(f,g)$ dans les deux généralisations respectives mentionnées ci dessus. Explicitement, j'ai montré que

Théorème 2.1. *Pour tout $f,\ g \in \mathscr{C}^\infty(X, \mathrm{End}(E))$, on a la formule suivante pour $C_1(f,g)$ dans* (2.2),

$$C_1(f,g) = -\frac{1}{\pi}\langle\nabla^{1,0}f, \nabla^{0,1}g\rangle. \tag{2.4}$$

Dans le cas $f,\ g \in \mathscr{C}^\infty(X,\mathbb{C})$, le Théorème 2.1 implique

$$C_1(f,g) - C_1(g,f) = \sqrt{-1}\{f,g\}, \tag{2.5}$$

où $\{.,.\}$ est le crochet de Poisson associé à la forme symplectique $2\pi\omega$. En retour, par (2.2) et (2.3), cela montre que

$$[T_{f,p}, T_{g,p}] = p^{-1}T_{\{f,g\},p} + O(p^{-2}), \tag{2.6}$$

ce qui montre que la quantification de Berezin-Toeplitz satisfait les propriétés semi-classiques attendues pour une quantification. En particulier, la formule (2.2) définit une déformation-quantification (voir [6, Rem.7.4.2]).

Dans le cas Kählerien, la formule (2.4) a été calculée dans [9, Th.0.3].

3 Quantification des variétés isotropes

En quantification géométrique associée à une fibration Lagrangienne régulière, les états quantiques de X sont représentés par des sous-variétés Lagrangiennes $\Lambda \subset X$ satisfaisant une propriété appelée *condition de Bohr-Sommerfeld*, qui demande que la connexion induite par ∇^L sur $L|_\Lambda$ soit triviale. Dans [2], Borthwick, Paul et Uribe étudient les propriétés semi-classiques de ces Lagrangiens de Bohr-Sommerfeld dans le cadre de la théorie de Berezin-Toeplitz, dans le cas compact Kählerien et métaplectique. Ils utilisent ensuite ces résultats afin de démontrer la non-annulation de certaines séries de Poincaré relatives associées à des courbes spéciales sur des surfaces de Riemann hyperboliques compactes.

En général, on considère des fibrations singulières, auquel cas il peut arriver que Λ soit seulement isotrope, c'est à dire que sa dimension ne soit plus forcément égale à n. Il est de plus utile de considérer des immersions propres $\iota : \Lambda \to X$ plutôt que des plongements. On pose donc la définition suivante.

Définition 3.1. Une immersion $\iota : \Lambda \to X$ telle que $\iota^*\omega = 0$ satisfait la *condition de Bohr-Sommerfeld* s'il existe $\zeta \in \mathscr{C}^\infty(\Lambda, \iota^*L)$ tel que $\nabla^{\iota^*L}\zeta = 0$.

Dans [3], j'étudie les propriétés semi-classiques de ces immersions dans le cadre de la quantification associée à la deuxième généralisation mentionnée en Section 1. Dans ce cadre, la quantification d'une telle immersion est donnée par une suite $\{s_p \in \mathscr{H}_p\}_{p\in\mathbb{N}}$, appelée *état isotrope* (ou *état Lagrangien* si $\dim\Lambda = n$), définie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ par

$$s_p = \int_\Lambda P_p(x,y)\zeta^p(y)dv_X(y), \tag{3.1}$$

où dv_X est la forme volume Riemannienne sur (X, g^{TX}), $\zeta^p \in \mathscr{C}^\infty(X, L^p)$ est le p-ième produit tensoriel de la section $s \in \mathscr{C}^\infty(\Lambda, \iota^*L)$ de la Définition 3.1, et $P_p(\cdot,\cdot)$ est le noyau de Bergman défini en Section 2.

Je montre que de telles sections se concentrent rapidement autour de l'image de ι, et que leur norme satisfait l'asymptotique suivante.

Théorème 3.2. *Soit $d = \dim\Lambda$. Il existe $b_r \in \mathbb{C},\ r \in \mathbb{N}$, tels que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et lorsque p tends vers l'infini,*

$$\|s_p\|_p^2 = p^{n-d/2}\sum_{r=0}^{k} p^{-r}b_r + p^{n-d/2}O(p^{-(k+1)}), \tag{3.2}$$

où $b_0 = 2^{d/2}\,\mathrm{Vol}(\Lambda)$.

En particulier, s_p n'est pas identiquement nul pour $p \in \mathbb{N}$ suffisament grand. De plus, j'étudie le produit hermitien L^2 de deux telles sections. Je montre que celui décroit rapidement en $p \to \infty$ si les sous variétés associées ne s'intersectent pas, puis j'établis l'asymptotique suivante, décrite ici dans sa forme la plus simple.

Théorème 3.3. *Soient $\iota_j : \Lambda_j \hookrightarrow X,\ j = 1, 2$, deux sous-variétés satisfaisant la condition de Bohr-Sommerfeld, s'intersectant proprement et d'intersection connexe et soient $\zeta_j \in \mathscr{C}^\infty(\Lambda_j, \iota_j^* L),\ j = 1, 2$, des sections parallèles unitaires associées. Posons $l = \dim \Lambda_1 \cap \Lambda_2$ et $d_j = \dim \Lambda_j,\ j = 1, 2$. Alors il existe $b_r \in \mathbb{C},\ r \in \mathbb{N}$, tels que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et lorsque $p \to \infty$,*

$$\langle s_{f_1,p}, s_{f_2,p}\rangle_p = p^{n-\frac{d_1+d_2+l}{2}} \lambda^p \sum_{r=0}^{k} p^{-r} b_r + O(p^{n-\frac{d_1+d_2+l}{2}-(k+1)}), \tag{3.3}$$

où $\lambda \in \mathbb{C}$ est la valeur de la fonction constante définie pour tout $x \in \Lambda_1 \cap \Lambda_2$ par $\lambda(x) = \langle \zeta_1(x), \zeta_2(x)\rangle_L$. De plus, si $\dim \Lambda_1 = n$ et $g^{TX}(\cdot,\cdot) = \omega(\cdot, J\cdot)$, on a

$$b_0 = 2^{n/2} \int_{\Lambda_1\cap\Lambda_2} \det{}^{-\frac{1}{2}} \Big\{ \sqrt{-1} \sum_{k=1}^{n-l} h^{TX}(e_k, \nu_i)\omega(e_k, \nu_j) \Big\}_{i,j=1}^{d_2-l} |dv|_{\Lambda_1\cap\Lambda_2}, \tag{3.4}$$

où $\langle e_i\rangle_{i=1}^{n-l}, \langle \nu_j\rangle_{j=1}^{d_2-l}$ sont des bases orthonormées du fibré normal à $\Lambda_1 \cap \Lambda_2$ dans Λ_1, Λ_2, et $|dv|_{\Lambda_1\cap\Lambda_2}$ est la densité Riemanniennne sur $\Lambda_1 \cap \Lambda_2$ induite par g^{TX}.

Ainsi, à la limite semi-classique, le produit hermitien de deux états isotropes est intimement relié à la géométrie de l'intersection des sous-variétés correspondantes. On appelle ce produit le *produit d'intersection* des états isotropes.

De plus, je généralise le Théorème 3.2 et le Théorème 3.3 au cas où L^p est tordu par (E, h^E, ∇^E), où l'on compose l'une des deux sections isotropes par un opérateur de Berezin-Toeplitz comme défini dans la Section 2, pour une métrique J-invariante g^{TX} quelconque et pour X éventuellement non-compact et orbifold.

Enfin, comme application du Théorème 3.2, je montre que certaines séries de Poincaré relatives associées à des géodésiques hyperboliques d'une surface hyperbolique générale ne s'annulent pas, ce qui généralise [2, § 4] au cas non-compact et orbifold.

Dans le cas (X, J, ω) compact Kähler métaplectique, avec pour E une racine carrée du fibré canonique de X, le Théorème 3.3 est le résultat principal de [2, Th. 3.2], avec une expansion en $p^{-1/2}$ au lieu de p^{-1}.

References

[1] M. Bordemann, E. Meinrenken, and M. Schlichenmaier, *Toeplitz quantization of Kähler manifolds and* $\mathrm{gl}(N)$*,* $N \to \infty$ *limits*, Comm. Math. Phys. **165** (1994), no. 2, 281–296. MR 1301849

[2] D. Borthwick, T. Paul, and A. Uribe, *Legendrian distributions with applications to relative Poincaré series*, Invent. Math. **122** (1995), no. 2, 359–402. MR 1358981

[3] L. Ioos, *Holomorphic quantization of isotropic submanifolds*, preprint, 2017.

[4] ———, *On the composition of two Berezin-Toeplitz operators on a symplectic manifold*, https://arxiv.org/abs/1703.05688, to appear in Math. Z. (2017).

[5] L. Ioos, W. Lu, X. Ma, and G. Marinescu, *Berezin-Toeplitz quantization for eigenstates of the Bochner-Laplacian on symplectic manifolds*, Journal of Geometric Analysis (2017).

[6] X. Ma and G. Marinescu, *Holomorphic Morse inequalities and Bergman kernels*, Progress in Mathematics, vol. 254, Birkhäuser Verlag, Basel, 2007. MR 2339952

[7] ———, *Generalized Bergman kernels on symplectic manifolds*, Adv. Math. **217** (2008), no. 4, 1756–1815. MR 2382740

[8] ———, *Toeplitz operators on symplectic manifolds*, J. Geom. Anal. **18** (2008), no. 2, 565–611. MR 2393271 (2010f:53161)

[9] ———, *Berezin-Toeplitz quantization on Kähler manifolds*, J. Reine Angew. Math. **662** (2012), 1–56. MR 2876259