

SABIN LESSARD

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

Cours de processus stochastiques

©2013 Sabin Lessard

Avant-propos

Ces notes sont utilisées pour un premier cours sur les processus stochastiques (MAT2717) offert aux étudiants du premier cycle en mathématiques et statistique de l'Université de Montréal, ce qui comprend les étudiants en actuariat. Ce cours est également suivi à l'occasion par des étudiants de cycles supérieurs, notamment en finance mathématique et computationnelle ou en recherche opérationnelle. Il s'agit en fait d'un deuxième cours en théorie des probabilités qui a comme préalable la connaissance des notions de probabilité et de variable aléatoire et des principaux résultats sur les suites de variables aléatoires indépendantes, soit la loi des grands nombres et le théorème limite central. Il demande également de la part des étudiants un large éventail de connaissances mathématiques, que ce soit en algèbre linéaire, équations différentielles, calcul avancé ou analyse. En somme, bien qu'il ne fasse pas appel à la théorie de la mesure qui est à la base d'une approche rigoureuse aux processus stochastiques, le cours requiert de la maturité mathématique.

Le contenu du cours porte principalement sur les chaînes de Markov, autant à temps discret (chapitre 1) qu'à temps continu (chapitre 2). Le point culminant en est le théorème ergodique qui permet de décrire le comportement asymptotique de la chaîne à l'aide de probabilités d'absorption et de distributions stationnaires. Suivent les principaux résultats sur les processus semi-markoviens, dont le processus de renouvellement (chapitre 3), pour prendre en compte des temps de séjour aux différents états de loi quelconque. Le tout se termine par une initiation aux martingales, principalement par les jeux de hasard (chapitre 4), et une introduction au mouvement brownien avec des applications à la finance (chapitre 5). Le cours aide à préparer en partie les examens 3L et MLC des sociétés d'actuaire nord-américaines.

Le contenu des notes a été grandement influencé par les intérêts de recherche de l'auteur en génétique des populations, domaine qui a eu et qui continue d'avoir une grande influence sur les probabilités. Ainsi, il ne faut pas se surprendre de trouver en évidence non seulement le processus de branchement de Galton-Watson, le modèle de population de Wright-Fisher et le processus de naissance et de mort linéaire avec immigration, ce qui inclut le processus de Yule, mais aussi le processus de coalescence qui est tant utilisé dans la recherche actuelle. D'autres exemples phares de processus stochastiques ne sont pas en reste, qu'il s'agisse de la ruine du joueur pour

les marches aléatoires sur les entiers, du processus de Poisson pour l'arrivée d'événements au hasard, du système de bonus-malus pour la fixation de primes d'assurance, de modèles de diffusion pour la distribution ou le mouvement de particules, de systèmes d'attente ou de modèles de fiabilité pour l'optimisation en recherche opérationnelle.

L'emphasis est mise sur la modélisation et l'interprétation des résultats. Les preuves de la plupart des affirmations, dont une démonstration complète du théorème ergodique, sont cependant incluses pour satisfaire les plus exigeants, tout en évitant le formalisme de la théorie de la mesure. Les preuves les plus techniques et les sections d'importance secondaire, qui apparaissent souvent en fin de chapitre et qui sont marquées d'un astérisque (*), peuvent être survolées ou laissées de côté lors d'une première lecture. Cela permet de couvrir l'ensemble de la matière à l'intérieur d'un cours de 45 heures.

Les notes ont été fortement inspirées à l'origine du livre *An Introduction to Stochastic Modeling*, par H.M. Taylor et S. Karlin, que Samuel Karlin appelait affectueusement son "baby book". Pour les démonstrations, le livre plus complet des mêmes auteurs, *A First Course in Stochastic Processes*, ainsi que le livre *Probability and Random Processes*, par G.R. Grimmett et D.R. Stirzaker, ont été des sources d'information importantes. Pour la théorie et les applications des martingales et du mouvement brownien, des ouvrages plus récents, principalement *Essentials of Stochastic Processes*, par R. Durrett, et *Processus stochastiques*, par D. Foata et A. Fuchs, ont été particulièrement utiles. Les notes ont subi l'influence de beaucoup d'autres ouvrages du même niveau ou de niveau légèrement inférieur, notamment *Introduction to Probability Models*, par S. Ross, et *Processus stochastiques*, par A. Ruegg, mais aussi d'ouvrages de niveau supérieur, comme *A First Look at Rigorous Probability Theory*, par J.S. Rosenthal, *Probability with Martingales*, par D. Williams, et *Markov Chains*, par D. Freedman.

Le contenu de ces notes a beaucoup évolué au cours des années. Des aspects de nature essentiellement mathématique ont laissé la place à des sujets qui ont un intérêt en biologie, recherche opérationnelle, finance ou actuariat. Des générations d'étudiants, de stagiaires postdoctoraux et de chargés de travaux pratiques sur une période de presque trente ans ont grandement contribué à bonifier ce contenu par leurs questions, commentaires et suggestions. J'aimerais mentionner M. Augustyniak, M. Banville, V. Carrier, A.M. Castilloux, J. Courteau, D. Kroumi, V. Ladret, P. Lahaie, F. Larribe, S. Langevin, D. Lasalle-Ialongo, M. Lemire, S. Mahdi, G. Martin, E. Monga, D. Pouliot, G. Rocheleau, L. Saidi, C. Séguin, C. Soares, Y. Tao, P. Turbis, L. Villandré, sans oublier G. Elgeili qui a rédigé la première version électronique des notes. La plupart continuent d'exercer leur curiosité et leur

passion dans le monde de l'enseignement ou de la recherche. C'est une source de grande satisfaction.

Merci également à mes collègues anciens ou actuels du département de mathématiques et de statistique de l'Université de Montréal pour des discussions stimulantes sur la matière du cours, particulièrement M. Goldstein, sans oublier R. Duncan, mon directeur de thèse de doctorat, dont j'ai toujours admiré l'enthousiasme pour l'enseignement.

Enfin, un grand merci à mon superviseur de stage postdoctoral et mentor en génétique mathématique, Samuel Karlin, décédé en 2007, à qui je pense encore très souvent.

Montréal, 7 mai 2013

Sabin Lessard

Table des matières

1	Chaînes de Markov à temps discret	1
1.1	Introduction	1
1.2	*Exemples	2
1.2.1	Modèle de diffusion d'Ehrenfest en mécanique statistique	2
1.2.2	Modèle de Wright-Fisher en génétique des populations	5
1.2.3	Système de bonus-malus en assurance automobile . . .	6
1.2.4	Modèle d'entretien en théorie de la fiabilité	7
1.3	Définitions	8
1.3.1	Chaîne de Markov à temps discret	8
1.3.2	Matrice de transition en n pas	8
1.3.3	Exemple : Le temps d'un jour au suivant	10
1.3.4	Exemple : Le temps sur deux jours consécutifs	12
1.3.5	Chaîne de Markov sur deux états	13
1.4	Méthode de conditionnement sur la première transition	15
1.4.1	Exemple : Promenade aléatoire dans un labyrinthe . .	15
1.4.2	Exemple : Jeu de pile ou face	17
1.4.3	Ruine du joueur	19
1.5	Processus de branchement	22
1.5.1	Probabilité d'extinction éventuelle	22
1.5.2	Distribution asymptotique de la taille de la population	28
1.5.3	Ruine du joueur contre un adversaire infiniment riche	30
1.6	Classification des états	33
1.6.1	Définitions	33
1.6.2	Exemples	34
1.6.3	Critères de classification	36
1.6.4	Partition des états	37
1.6.5	Exemple de partition des états	39
1.7	Théorème ergodique et distribution stationnaire	40
1.7.1	Théorème ergodique	40
1.7.2	Distribution stationnaire	41
1.7.3	Matrice de transition doublement stochastique	42
1.7.4	Théorème sur la distribution stationnaire	42
1.7.5	Chaîne irréductible apériodique à espace d'états fini .	43
1.7.6	Exemple : Retour sur le temps d'un jour au suivant . .	43
1.7.7	Exemple : Modèle de réparation	44
1.7.8	Exemple : Bonus-malus pour l'assurance-automobile .	45
1.7.9	Exemple : Marche aléatoire sur les entiers	47

1.7.10	Exemple : Chaîne avec plusieurs classes d'états	48
1.7.11	Exemple : Déplacement aléatoire sur un échiquier . . .	51
1.8	*Démonstrations	53
1.8.1	Critères de classification	53
1.8.2	Proposition 1 sur la partition des états	55
1.8.3	Proposition 2 sur la partition des états	56
1.8.4	Proposition 3 sur la partition des états	58
1.8.5	Théorème sur la distribution stationnaire	58
1.8.6	Théorème ergodique	61
1.8.7	Chaîne irréductible apériodique à espace d'états fini .	66
1.9	*Appendice	68
1.9.1	Lemme 1 sur la limite d'une moyenne	68
1.9.2	Lemme 2 sur la limite d'une somme	68
1.9.3	Lemme 3 sur la condition d'apériodicité	69
1.10	Exercices	71
1.11	*Exercices supplémentaires	78

2 Chaînes de Markov à temps continu 85

2.1	Description générale	85
2.1.1	Retour sur les chaînes à temps discret	85
2.1.2	Chaînes à temps continu	87
2.1.3	Minimum de variables de loi exponentielle	89
2.1.4	Conditionnement sur le premier changement d'état . .	91
2.1.5	Exemple : Entretien de rampes mobiles	91
2.1.6	Hypothèse sur les changements d'état	93
2.1.7	Probabilités de transition infinitésimales	94
2.2	Chaînes sur un nombre fini d'états	95
2.2.1	Générateur et probabilités de transition	95
2.2.2	Exemple : Retour sur les rampes mobiles	98
2.3	Processus de Poisson comme processus de naissance	101
2.3.1	Description générale	101
2.3.2	Nombre d'arrivées dans un intervalle de temps	101
2.3.3	Distribution des temps d'arrivée	104
2.3.4	Arrivée d'événements d'un type donné	104
2.3.5	Arrivée d'événements de deux types	105
2.3.6	Distribution conditionnelle des temps d'arrivée	106
2.4	Processus de mort	107
2.4.1	Description générale	107
2.4.2	Processus de mort linéaire	107

2.4.3	Processus de naissance de Yule	108
2.4.4	*Processus de coalescence	110
2.5	Processus de naissance et de mort	114
2.5.1	Description générale	114
2.5.2	Processus à temps de vie infini	115
2.5.3	Systèmes d'attente	115
2.5.4	Équation progressive de Kolmogorov	117
2.5.5	Processus linéaire avec immigration	118
2.5.6	*Processus linéaire sans immigration	120
2.5.7	*Équation rétrograde de Kolmogorov	122
2.6	Distribution stationnaire et théorème ergodique	123
2.6.1	Définition de distribution stationnaire	123
2.6.2	Exemple : Sauts aléatoires sur des sites	124
2.6.3	Exemple : Deux comptoirs de service en série	125
2.6.4	Processus de naissance et de mort stationnaire	127
2.6.5	Système d'attente stationnaire $M/M/1$	129
2.6.6	Système d'attente stationnaire $M/M/\infty$	131
2.6.7	Théorème ergodique	132
2.7	*Démonstrations	132
2.7.1	Processus à temps de vie infini	132
2.7.2	Théorème ergodique	133
2.7.3	Lemme sur la continuité des probabilités de transition	136
2.8	Exercices	138
2.9	*Exercices supplémentaires	143
3	Processus de renouvellement	149
3.1	Description générale	149
3.2	Théorèmes de renouvellement	150
3.2.1	Introduction	150
3.2.2	Théorème de renouvellement élémentaire	150
3.2.3	Lemme de Wald	150
3.2.4	Exemple : Réclamations d'assurance	152
3.2.5	Exemple : Remplacement d'un appareil	152
3.2.6	Théorème de renouvellement à temps discret	155
3.2.7	Théorème de renouvellement à temps continu	155
3.3	Distributions asymptotiques	156
3.3.1	Âge et temps de vie résiduel et total	156
3.3.2	Distributions asymptotiques à temps discret	156
3.3.3	Distributions asymptotiques à temps continu	159

3.3.4	Processus de renouvellement stationnaire	161
3.3.5	Exemple : Intervalles de loi uniforme	162
3.3.6	Exemple : Intervalles de loi exponentielle	162
3.4	Processus semi-markoviens	163
3.4.1	Extension du théorème ergodique	163
3.4.2	Exemple : Principe de Peter	164
3.4.3	Processus de renouvellement avec alternance	165
3.4.4	Exemple : Compteur de particules	166
3.4.5	Système d'attente $M/G/1$	166
3.5	*Moyennes temporelles asymptotiques	170
3.5.1	Moyennes temporelles à temps discret	170
3.5.2	Moyennes temporelles à temps continu	172
3.6	*Démonstrations	174
3.6.1	Théorème de renouvellement élémentaire	174
3.6.2	Théorème de renouvellement à temps discret	176
3.6.3	Théorème de renouvellement dans le cas stationnaire	178
3.6.4	Théorème ergodique pour processus semi-markoviens	179
3.7	Exercices	180
3.8	*Exercices supplémentaires	183
4	Introduction aux martingales	187
4.1	Définitions et exemples	187
4.1.1	Définition d'une martingale	187
4.1.2	Exemple : Marche aléatoire symétrique	188
4.1.3	Exemple : Prix juste d'une option d'achat	188
4.1.4	Exemple : Modèle de Wright-Fisher	189
4.1.5	Exemple : Processus de branchement	189
4.1.6	Martingale par rapport à une suite de variables	190
4.1.7	Exemple : Marche aléatoire asymétrique	191
4.2	Martingale arrêtée	192
4.2.1	Temps d'arrêt	192
4.2.2	Théorème d'arrêt	192
4.2.3	Exemple : Marche aléatoire symétrique arrêtée	192
4.2.4	Exemple : Marche aléatoire asymétrique arrêtée	194
4.2.5	Exemple : Martingale classique de doubler la mise	196
4.2.6	*Preuve du théorème d'arrêt	198
4.3	Exercices	200
4.4	*Exercices supplémentaires	200

5	Introduction au mouvement brownien	202
5.1	Définitions et exemples	202
5.1.1	Introduction	202
5.1.2	Définition du mouvement brownien standard	202
5.1.3	Construction du mouvement brownien standard	204
5.1.4	Mouvement brownien avec dérive et écart-type	205
5.2	*Mouvement brownien géométrique	207
5.2.1	Description générale	207
5.2.2	Exemple : Seuil d'exercice d'une option d'achat	208
5.2.3	Formule de Black-Scholes	209
5.2.4	Exemple : Prix juste d'une option d'Apple	211
5.3	*Exercices	211
	Bibliographie	212

1 Chaînes de Markov à temps discret

1.1 Introduction

Un processus stochastique est une suite de variables aléatoires indicées par le temps. Le cas le plus simple est celui d'une suite de variables aléatoires indépendantes. Ce sont des variables aléatoires qui n'ont aucune influence les unes sur les autres. C'est le sujet qu'on étudie dans un premier cours de probabilités après avoir introduit les notions fondamentales d'événement, de probabilité, d'indépendance, de variable aléatoire et d'espérance. Le tout culmine avec la loi des grands nombres, qui permet d'interpréter l'espérance comme la moyenne de valeurs observées à long terme, indépendamment dans les mêmes conditions, et le théorème limite central, qui garantit que cette moyenne est la valeur prise par une variable aléatoire dont la distribution de probabilité s'approche de plus en plus d'une loi normale. Ainsi, si on lance une pièce de monnaie bien balancée un grand nombre de fois n indépendamment dans les mêmes conditions, on s'attend à ce que la proportion de fois qu'on obtienne face soit près de $1/2$ et que cette proportion suive approximativement une loi normale d'espérance $1/2$ et de variance $(2n)^{-2}$.

Le cas le plus simple d'une suite de variables aléatoires dépendantes est celui où les valeurs prises par les variables qui suivent n'importe quelle variable en particulier, étant donné la valeur prise par cette variable, sont indépendantes des valeurs prises par les variables qui précèdent. Autrement dit, le futur étant donné le présent est indépendant du passé. Le processus est alors dit markovien, du nom du mathématicien russe Andreï Markov (1856-1922). Lorsque l'espace d'états est fini ou infini dénombrable, on a affaire à une chaîne de Markov, qui peut être à temps discret ou à temps continu.

Le résultat le plus important sur les chaînes de Markov est le théorème ergodique. Il décrit en général ce qui se passe à long terme, c'est-à-dire la distribution de probabilité limite de la chaîne sur les différents états lorsque celle-ci existe, et la proportion de temps moyenne limite que la chaîne passe dans chaque état, et ce selon l'état initial. Il permet de comprendre le comportement de la chaîne sur une longue période de temps. C'est l'objectif principal de ce chapitre qui porte sur les chaînes à temps discret.

Ainsi, la marche aléatoire décrite en faisant un pas à gauche ou à droite chaque fois qu'on obtient pile ou face, respectivement, en lançant une pièce

de monnaie un grand nombre de fois indépendamment dans les mêmes conditions, est une chaîne de Markov à temps discret. Cette marche aléatoire reste une chaîne de Markov dans le cas où un pas est annulé si on frappe un obstacle, un mur par exemple. Dans un tel contexte, il est intéressant de savoir quelle est la probabilité d'être à une position donnée après un très long moment, ou encore quelle proportion de temps est passée à cette position sur une longue période de temps. C'est le type de questions qu'on se pose lorsqu'on est en présence d'une chaîne de Markov.

De nombreuses situations réelles sont modélisées par des chaînes de Markov, que ce soit en biologie, physique, économie ou recherche opérationnelle. Ce chapitre commence donc par des exemples pour illustrer les principaux concepts et résultats qui sont développés par la suite.

1.2 *Exemples

1.2.1 Modèle de diffusion d'Ehrenfest en mécanique statistique

On considère un système hermétiquement fermé constitué de deux compartiments, représentés par A et B , contenant ensemble un nombre m de particules d'un gaz. Les particules à l'intérieur du système ne peuvent pas en sortir et aucune autre particule ne peut y entrer. La cloison séparant les deux compartiments n'est cependant pas parfaitement étanche et les particules, qui sont en mouvement permanent, peuvent passer d'un compartiment à un autre. Cela peut être représenté par une ouverture dans la cloison de dimension du même ordre de grandeur que celle d'une particule. Ce système est illustré dans la Figure 1.

On fait les hypothèses suivantes sur le passage des particules d'un compartiment à l'autre :

- Un seul passage à la fois peut survenir.
- Les particules ont des chances égales de changer de compartiment.

Le temps est calculé en nombre de passages. L'état du système après n passages, pour $n \geq 0$, est décrit par le nombre de particules dans le compartiment A , représenté par X_n . Ce nombre peut prendre n'importe quelle valeur $i = 0, 1, \dots, m$.

La probabilité de transition pour que $X_{n+1} = j$ étant donné que $X_n = i$ est dénotée par P_{ij} , c'est-à-dire

$$P_{ij} = Pr(X_{n+1} = j | X_n = i).$$

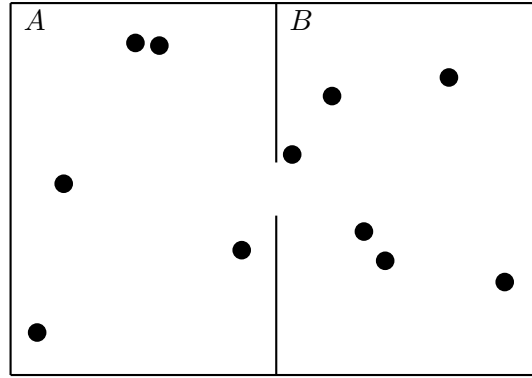


FIGURE 1 – Modèle de diffusion d'Ehrenfest.

Dans le cas présent, cette probabilité de transition est donnée par

$$P_{ij} = \begin{cases} \frac{i}{m} & \text{si } j = i - 1 \text{ pour } 1 \leq i \leq m, \\ \frac{m-i}{m} & \text{si } j = i + 1 \text{ pour } 0 \leq i \leq m - 1, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

La matrice $P = (P_{ij})$, avec l'entrée P_{ij} sur la ligne i et dans la colonne j , est la matrice de transition. Cette matrice et la distribution de X_0 décrivent entièrement le processus, c'est-à-dire les événements qui peuvent survenir au cours du temps et leurs probabilités. Le processus est en fait une chaîne de Markov à temps discret.

Voici le type de questions auxquelles on va essayer de répondre dans ce chapitre.

Question 1 : Il est intéressant de savoir ce qui se passe à long terme : la probabilité de trouver j particules dans le compartiment A au temps n étant donné qu'il y en a i initialement converge-t-elle lorsque n augmente, et si oui, quelle est la limite. *En supposant la convergence*, la limite prédite est donnée par

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Pr(X_n = j | X_0 = i) = \binom{m}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^m,$$

pour $j = 0, 1, \dots, m$. En effet, par symétrie, chaque particule devrait avoir

à long terme une probabilité $1/2$ d'être dans A plutôt que dans B , et ce indépendamment de la position des autres particules. On est alors dans le contexte de m épreuves indépendantes de Bernoulli avec $1/2$ comme probabilité de succès à chaque épreuve. Le nombre total de succès suit en conséquence une loi binomiale. Il est à noter que la limite prédite ne dépend pas de i , l'état initial du système.

Question 2 : Attention cependant à la périodicité : le nombre de particules dans le compartiment A prend en alternance des valeurs paires et impaires. Conséquemment, une probabilité de transition ne peut converger que vers 0. Dans le cas extrême où $m = 1$, par exemple, on obtient que

$$Pr(X_n = 1 | X_0 = 1) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair,} \\ 1 & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

Cette probabilité de transition du temps 0 au temps n ne converge pas, puisque les valeurs 0 et 1 alternent. Toutefois, la moyenne temporelle jusqu'au temps n converge, et sa limite est donnée par

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} Pr(X_k = 1 | X_0 = 1) = \frac{1}{2}.$$

Il est à noter que cette limite est celle prédite par la loi binomiale.

Question 3 : En général on s'attend toujours à ce que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} Pr(X_k = j | X_0 = i) = \binom{m}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^m.$$

Cette limite représente la proportion moyenne de temps à long terme avec j particules dans le compartiment A . En effet, on a que

$$Pr(X_k = j | X_0 = i) = E(1_{\{X_k=j\}} | X_0 = i),$$

en utilisant la variable aléatoire indicatrice

$$1_{\{X_k=j\}} = \begin{cases} 1 & \text{si } X_k = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par la linéarité de l'espérance, on obtient donc que

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} Pr(X_k = j | X_0 = i) = E\left(\frac{N_j(n)}{n} \middle| X_0 = i\right),$$

où

$$N_j(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\{X_k=j\}}$$

représente le temps passé avec j particules dans le compartiment A de l'instant 0 à l'instant $n - 1$.

1.2.2 Modèle de Wright-Fisher en génétique des populations

Le modèle de Wright-Fisher est le plus utilisé en génétique des populations. On considère une population de N gènes à générations séparées sans chevauchement. En l'absence de sélection et de mutation, les N gènes de la génération $n + 1$ sont obtenus en faisant des copies de N gènes tirés au hasard avec remise dans la génération n . Le modèle est neutre, car la reproduction ne dépend pas du type de gène. De plus, les copies sont identiques aux originaux.

On s'intéresse à un type donné de gènes, disons A . On définit X_n comme le nombre de gènes de type A à la génération $n \geq 0$. Étant donné que $X_n = i$, la probabilité de tirer au hasard un gène de type A dans la génération n est i/N . La loi conditionnelle du nombre de gènes de type A à la génération $n + 1$ est binomiale de paramètres N et i/N , c'est-à-dire

$$Pr(X_{n+1} = k | X_n = i) = \binom{N}{k} \left(\frac{i}{N}\right)^k \left(1 - \frac{i}{N}\right)^{N-k},$$

pour $k = 0, 1, \dots, N$.

Voici quelques questions qui se posent au sujet de cette chaîne de Markov à temps discret.

Question 1 : L'espérance du nombre de gènes de type A à la génération $n + 1$ étant donné i gènes de type A à la génération n est i . En effet,

$$E(X_{n+1} | X_n = i) = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} \left(\frac{i}{N}\right)^k \left(1 - \frac{i}{N}\right)^{N-k} k = N \left(\frac{i}{N}\right) = i.$$

Cette propriété, qui découle de la neutralité, garantit que X_n pour $n \geq 0$ est une martingale. Quelles conséquences peut-on en tirer ? C'est le sujet du chapitre 4.

Question 2 : Les valeurs 0 et N pour X_n , qui correspondent à l'extinction de A et la fixation de A , respectivement, sont des états absorbants dans le sens qu'on y reste certainement une fois qu'on les atteint. En effet,

$$Pr(X_{n+1} = 0 | X_n = 0) = Pr(X_{n+1} = N | X_n = N) = 1.$$

On peut se demander si ces états sont éventuellement atteints avec certitude. Cela est le cas si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Pr(1 \leq X_n \leq N-1 | X_0 = i) = 0.$$

En supposant cette condition vérifiée, on peut se demander quelle est la probabilité d'atteindre éventuellement l'état N plutôt que l'état 0 à partir de l'état initial i . Une façon d'obtenir la réponse est de distinguer les gènes initiaux, disons G_1, \dots, G_N , dont G_1, \dots, G_i sont de type A . Le nombre de copies de G_j pour chaque $j = 1, \dots, N$ est éventuellement 0 ou N avec certitude. Tous les gènes sont donc éventuellement des copies du même gène initial, qui est un gène choisi au hasard parmi tous les gènes initiaux par symétrie. La probabilité qu'il soit de type A est donc i/N . Par conséquent, on devrait avoir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Pr(X_n = N | X_0 = i) = \frac{i}{N}.$$

La confirmation de ce type de résultats est l'un des objectifs du chapitre 1.

1.2.3 Système de bonus-malus en assurance automobile

En assurance automobile, la prime d'un assuré peut diminuer si aucune réclamation n'est faite durant une période donnée ou augmenter si une ou plusieurs réclamations sont soumises durant une certaine période. Les réclamations font suite à des accidents de la route qui se produisent au hasard dans le temps.

L'arrivée d'événements au hasard est décrite dans le chapitre 2 par un processus de Poisson, qui est l'exemple le plus important de chaîne de Markov à temps continu. La caractéristique du processus est que le nombre de fois que l'événement se réalise dans un intervalle de temps donné est de loi de Poisson et qu'il est indépendant du nombre d'événements dans n'importe quel autre intervalle de temps disjoint du premier.

Supposons que la classe d'un assuré est mise à jour après chaque année de conduite automobile. Elle est alors augmentée du nombre de réclamations durant l'année s'il y en a, mais diminuée de 1 s'il n'y en a pas. La classe

initiale est 0 et elle ne peut pas descendre plus bas. Si X_n représente la classe d'un assuré après n années de conduite automobile, alors

$$Pr(X_{n+1} = i + k | X_n = i) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

pour $k \geq 1$ et $i \geq 0$, mais

$$Pr(X_{n+1} = i - 1 | X_n = i) = Pr(X_{n+1} = 0 | X_n = 0) = e^{-\lambda},$$

pour $i \geq 1$. Le paramètre λ représente un taux de réclamations. Sa valeur dépend du groupe de l'assuré.

Les questions qui se posent ici au sujet de cette chaîne de Markov à temps discret sont de savoir si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Pr(X_n = j | X_0 = 0) = \pi_j \geq 0,$$

et d'identifier la limite si elle existe. Cette limite π_j devrait correspondre à la proportion moyenne d'années à long terme qu'un assuré passe dans la classe j .

1.2.4 Modèle d'entretien en théorie de la fiabilité

Un dispositif peut être ou bien en état de fonctionnement, ou bien en état de réparation. On fait l'hypothèse que les temps de fonctionnement et de réparation sont des variables aléatoires indépendantes d'espérance μ et ν , respectivement. De plus, les périodes de fonctionnement et de réparation se succèdent en alternance. Elles se terminent respectivement par une panne ou une remise en service.

Le nombre de changements d'état au cours du temps est un processus de renouvellement tel que défini au chapitre 3. Quant, à l'état du système X_t , pour tout instant $t \geq 0$, il correspond à un processus semi-markovien.

Dans le cas où les temps de fonctionnement et de réparation sont de loi exponentielle, le nombre de changements d'état et l'état du système sont des chaînes de Markov à temps continu. La première est en fait un processus de naissance sur un nombre infini d'états.

Le nombre de changements d'état est évidemment un processus croissant vers l'infini. Quant à l'état du système, on s'attend à ce qu'il soit en fonctionnement une proportion moyenne de temps à long terme donnée par $\mu/(\mu + \nu)$. Cela reste à confirmer.

1.3 Définitions

1.3.1 Chaîne de Markov à temps discret

Une chaîne de Markov à temps discret est une suite de variables aléatoires $\{X_n\}_{n \geq 0}$ à valeurs dans un espace d'états (fini ou infini) dénombrable (habituellement dénotés par $0, 1, 2, \dots$) telle que

$$Pr(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = Pr(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

pour tous les états $j, i, i_{n-1}, \dots, i_0$ et tout entier $n \geq 0$. C'est la propriété markovienne.

L'indice n représente habituellement le temps. Lorsque les probabilités de transition ci-dessus sont stationnaires (c'est-à-dire les mêmes pour tout $n \geq 0$), la chaîne est dite homogène. C'est l'hypothèse faite à partir de maintenant à moins d'indication contraire.

La matrice P dont l'entrée sur la rangée i et dans la colonne j est donnée par

$$P_{ij} = Pr(X_{n+1} = j | X_n = i),$$

pour tous les états i et j , est appelée la matrice de transition.

La matrice de transition et la distribution de X_0 déterminent complètement la chaîne, c'est-à-dire toutes les distributions conjointes. En effet, en utilisant la définition de la probabilité conditionnelle et la propriété markovienne, on obtient que

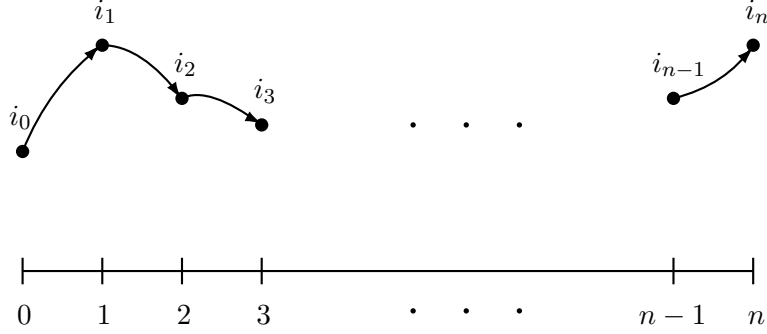
$$\begin{aligned} & Pr(X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) \\ &= Pr(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) \times Pr(X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) \\ &= P_{i_{n-1}, i_n} \times Pr(X_{n-1} = i_{n-1}, X_{n-2} = i_{n-2}, \dots, X_0 = i_0) \\ &= P_{i_{n-1}, i_n} \times P_{i_{n-2}, i_{n-1}} \times \dots \times P_{i_0, i_1} \times Pr(X_0 = i_0), \end{aligned}$$

la dernière égalité étant obtenue par induction sur l'entier $n \geq 0$, et ce pour tous les états i_n, \dots, i_0 . Les transitions du temps 0 au temps n sont illustrées dans la Figure 2.

1.3.2 Matrice de transition en n pas

La matrice de transition en n pas pour tout $n \geq 1$ est la matrice $P^{(n)}$ dont l'entrée sur la rangée i et dans la colonne j est donnée par

$$P_{ij}^{(n)} = Pr(X_n = j | X_0 = i),$$

FIGURE 2 – Exemple de transitions du temps 0 au temps n .

pour tous les états i et j . Par stationnarité, on a

$$P_{ij}^{(n)} = Pr(X_{n+k} = j | X_k = i),$$

pour tout $k \geq 0$. De plus on a les propriétés suivantes :

Propriété 1. $0 \leq P_{ij}^{(n)} \leq 1$ pour tout i, j .

Propriété 2. $\sum_j P_{ij}^{(n)} = 1$ pour tout i .

Propriété 3. $P_{ij}^{(n)} = \sum_l P_{il}^{(k)} P_{lj}^{(n-k)}$ pour tout i, j et pour tout $0 \leq k \leq n$,
avec

$$P_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

ou en notation matricielle $P^{(n)} = P^{(k)} P^{(n-k)}$ pour tout $0 \leq k \leq n$,
avec $P^{(0)} = I$ où I désigne la matrice identité.

Propriété 4. $P^{(n)} = P^n$ pour tout $n \geq 0$.

Les propriétés 1 et 2 sont immédiates, car $P_{ij}^{(n)}$ est une probabilité et la somme sur j pour tout i fixe donne la probabilité de l'ensemble de toutes les transitions possibles à partir de i . Ces deux propriétés signifient que la matrice de transition en n pas est une matrice stochastique.

La propriété 3, appelée l'équation de Chapman-Kolmogorov, est obtenue en conditionnant sur l'état à un instant intermédiaire k entre 0 et n et en

utilisant la stationnarité. Cela donne

$$\begin{aligned}
 \Pr(X_n = j | X_0 = i) &= \sum_l \Pr(X_n = j, X_k = l | X_0 = i) \\
 &= \sum_l \Pr(X_n = j | X_k = l, X_0 = i) \Pr(X_k = l | X_0 = i) \\
 &= \sum_l \Pr(X_n = j | X_k = l) \Pr(X_k = l | X_0 = i) \\
 &= \sum_l \Pr(X_{n-k} = j | X_0 = l) \Pr(X_k = l | X_0 = i),
 \end{aligned}$$

pour tout i, j et pour tout $0 \leq k \leq n$. (Voir la Figure 3.)

Enfin la propriété 4 découle de l'équation de Chapman-Kolmogorov et du fait que la matrice de transition en un pas est la matrice de transition elle-même, c'est-à-dire $P^{(1)} = P$. La propriété 4 est donc vraie pour $n = 1$ et, si elle est vraie pour $n - 1 \geq 1$, alors

$$P^{(n)} = P^{(n-1)} P^{(1)} = P^{n-1} P = P^n.$$

Le cas $n = 0$ est trivial par définition. La matrice de transition en n pas est donc donnée par la n -ième itération de la matrice de transition, d'où l'importance de pouvoir calculer la puissance d'une matrice.

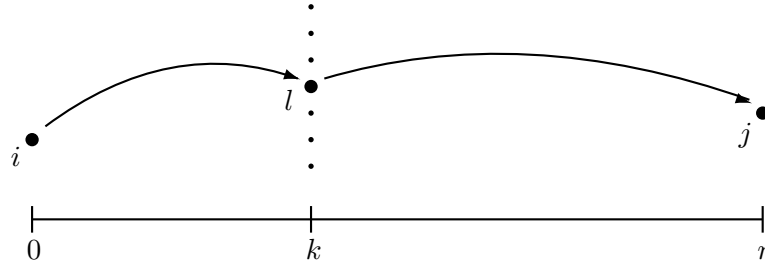


FIGURE 3 – Représentation de l'équation de Chapman-Kolmogorov.

1.3.3 Exemple : Le temps d'un jour au suivant

Supposons que le temps qu'il fera demain, disons ou bien S pour ensoleillé ou bien N pour nuageux, étant donné le temps qu'il fait aujourd'hui ne dépende pas du temps qu'il faisait les jours précédents. Désignons par S_n l'événement que le jour $n \geq 0$ est ensoleillé et par N_n celui qu'il est nuageux. Les probabilités conditionnelles suivantes sont données :

$$\begin{aligned}Pr(S_{n+1}|S_n) &= 0,2; \\Pr(S_{n+1}|N_n) &= 0,4.\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}Pr(N_{n+1}|S_n) &= 1 - Pr(S_{n+1}|S_n) = 0,8; \\Pr(N_{n+1}|N_n) &= 1 - Pr(S_{n+1}|N_n) = 0,6.\end{aligned}$$

Soit $X_n = 0$ si S_n se réalise, et $X_n = 1$ si N_n se réalise. La suite $\{X_n\}_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov à temps discret sur les états 0 et 1 dont la matrice de transition P est donnée par

$$P = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}.$$

Supposons maintenant qu'on est lundi et que c'est ensoleillé. On veut connaître la probabilité que le vendredi suivant soit ensoleillé. Puisque vendredi est dans quatre jours, on doit calculer

$$Pr(X_4 = 0 | X_0 = 0) = P_{00}^{(4)},$$

soit l'entrée $(0,0)$ de la matrice de transition en 4 pas. Nous obtenons pour cette matrice

$$\begin{aligned}P^{(4)} &= P^4 \\&= \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}^4 \\&= \begin{pmatrix} 0,36 & 0,64 \\ 0,32 & 0,68 \end{pmatrix}^2 \\&= \begin{pmatrix} 0,3344 & 0,6656 \\ 0,3328 & 0,6672 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Nous concluons que $P_{00}^{(4)} = 0,3344$. Remarquons que cette probabilité est très près de $P_{10}^{(4)} = 0,3328$. En fait les deux lignes de la matrice de transition en 4 pas sont pratiquement identiques, ce qui signifie que l'état de départ ne fait pratiquement plus de différence après seulement 4 pas. Ceci n'est pas un hasard comme nous le verrons plus loin.

1.3.4 Exemple : Le temps sur deux jours consécutifs

Reprenons l'exemple précédent, mais supposons maintenant que c'est le temps qu'il fera demain étant donné le temps qu'il fait aujourd'hui et le temps qu'il faisait hier qui ne dépende pas du temps des jours précédents avec les probabilités conditionnelles suivantes :

$$Pr(S_{n+1}|S_n, S_{n-1}) = 0, 1;$$

$$Pr(S_{n+1}|S_n, N_{n-1}) = 0, 3;$$

$$Pr(S_{n+1}|N_n, S_{n-1}) = 0, 3;$$

$$Pr(S_{n+1}|N_n, N_{n-1}) = 0, 5.$$

La suite $\{X_n\}_{n \geq 0}$ n'est plus une chaîne de Markov, car les deux premières probabilités conditionnelles ci-dessus, par exemple, signifient que

$$Pr(X_{n+1} = 0|X_n = 0, X_{n-1} = 0) \neq Pr(X_{n+1} = 0|X_n = 0, X_{n-1} = 1).$$

On peut cependant retrouver une chaîne de Markov en considérant le temps qu'il fait sur les deux derniers jours d'un jour au suivant. La suite $\{Y_n\}_{n \geq 1}$, définie par $Y_n = (X_n, X_{n-1})$ pour $n \geq 1$, est une chaîne de Markov à temps discret sur les états $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, et $(1, 1)$ dans cet ordre dont la matrice de transition est donnée par

$$P = \begin{pmatrix} 0,1 & 0 & 0,9 & 0 \\ 0,3 & 0 & 0,7 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0 & 0,7 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

On a, par exemple,

$$\begin{aligned} Pr(Y_{n+1} = (1, 0)|Y_n = (0, 1)) &= Pr(N_{n+1}, S_n|S_n, N_{n-1}) \\ &= Pr(N_{n+1}|S_n, N_{n-1}) \\ &= 1 - Pr(S_{n+1}|S_n, N_{n-1}) \\ &= 1 - 0,3 = 0,7. \end{aligned}$$

On procède de même pour les autres entrées de la matrice de transition.

On pourrait considérer de façon analogue un nombre quelconque d'états pour le temps et un nombre quelconque de jours précédents avant d'avoir l'indépendance.

1.3.5 Chaîne de Markov sur deux états

Dans le cas général d'une chaîne de Markov sur deux états, 0 et 1, la matrice de transition est de la forme

$$P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix},$$

où $0 \leq a, b \leq 1$. Supposons en fait que $0 < a, b < 1$ de telle sorte que toutes les probabilités de transition sont positives.

Pour calculer la matrice de transition en n pas, et donc la n -ième puissance de P , nous allons diagonaliser cette matrice. Nous avons l'expression

$$P = Q\Lambda Q^{-1},$$

où

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

est la matrice diagonale des valeurs propres, Q est une matrice dont les colonnes sont des vecteurs propres à droite correspondants et Q^{-1} une matrice dont les rangées sont des vecteurs propres à gauche correspondants. Cela découle des équations $PQ = Q\Lambda$ et $Q^{-1}P = \Lambda Q^{-1}$, respectivement. Nous obtenons alors que

$$P^n = Q\Lambda^n Q^{-1},$$

pour tout $n \geq 1$. En effet, cette équation est vraie pour $n = 1$ et, si elle est vraie pour $n - 1$, alors

$$P^n = PP^{n-1} = Q\Lambda Q^{-1}Q\Lambda^{n-1}Q^{-1} = Q\Lambda\Lambda^{n-1}Q^{-1} = Q\Lambda^n Q^{-1},$$

du fait que $Q^{-1}Q = I$.

Les valeurs propres sont obtenues en solutionnant l'équation

$$\det(P - \lambda I) = (1 - a - \lambda)(1 - b - \lambda) - ab = 0,$$

qui est équivalente à

$$\lambda^2 - (2 - a - b)\lambda + (1 - a - b) = 0.$$

On trouve les solutions

$$\lambda_1 = \frac{(2 - a - b) + \sqrt{(2 - a - b)^2 - 4(1 - a - b)}}{2} = 1$$

et

$$\lambda_2 = \frac{(2 - a - b) - \sqrt{(2 - a - b)^2 - 4(1 - a - b)}}{2} = 1 - a - b.$$

D'autre part les vecteurs propres à droite doivent satisfaire l'équation

$$P \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

donc

$$(1 - a)x_1 + ax_2 = \lambda x_1,$$

ce qui peut s'écrire sous la forme

$$x_2 = \frac{x_1(\lambda + a - 1)}{a}.$$

En faisant $x_1 = 1$ et $\lambda = \lambda_1, \lambda_2$, on obtient que

$$P \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{b}{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{b}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - a - b \end{pmatrix},$$

d'où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{b}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - a - b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \\ \frac{a}{a+b} & -\frac{a}{a+b} \end{pmatrix}.$$

La matrice de transition en n pas est alors donnée par

$$P^{(n)} = P^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{b}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1 - a - b)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \\ \frac{a}{a+b} & -\frac{a}{a+b} \end{pmatrix}.$$

Puisque $-1 < 1 - a - b < 1$ lorsque $0 < a, b < 1$, on obtient sous cette condition que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^{(n)} = \begin{pmatrix} \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \\ \frac{a}{a+b} & -\frac{a}{a+b} \end{pmatrix}.$$

La limite de la matrice de transition en n pas lorsque $n \rightarrow \infty$ a donc des lignes identiques. Cela signifie que la chaîne oublie son état initial à mesure que le temps s'écoule. De plus, quel que soit l'état initial, on a convergence vers une distribution de probabilité qui est donnée par un vecteur propre à gauche de P associé à la valeur propre 1 dont les composantes sont positives

et de somme égale à 1. Cette convergence découle du fait que la matrice stochastique P a une valeur propre 1 qui possède un vecteur propre à droite dont toutes les composantes sont 1 et que cette valeur propre est simple et dominante. C'est un cas particulier du théorème ergodique, qui est le résultat à venir le plus important sur les chaînes de Markov.

Dans l'exemple du temps d'un jour au suivant, on a $a = 0,8$ et $b = 0,4$, ce qui donne

$$\frac{b}{a+b} = \frac{0,4}{1,2} = \frac{1}{3}.$$

Les calculs effectués dans cet exemple montrent que cette limite est déjà pratiquement atteinte lorsque $n = 4$.

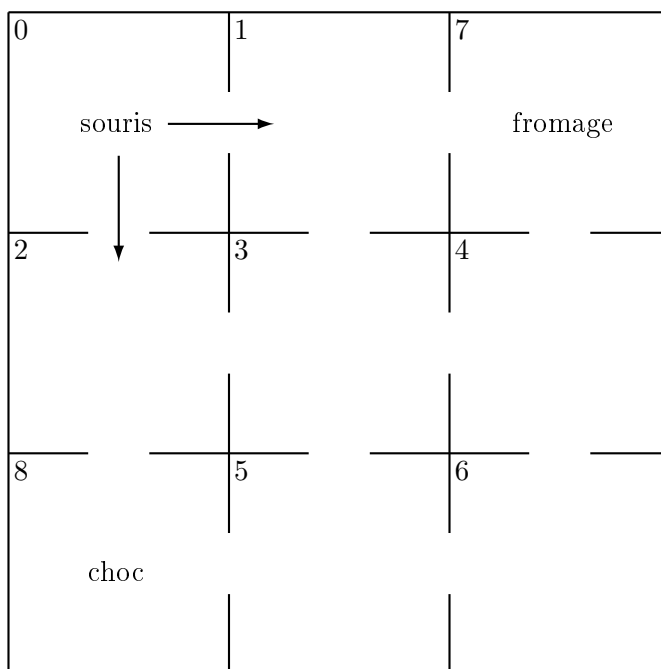


FIGURE 4 – Souris dans un labyrinthe.

1.4 Méthode de conditionnement sur la première transition

1.4.1 Exemple : Promenade aléatoire dans un labyrinthe

Dans cet exemple, une souris est placée dans un labyrinthe de 9 cases disposées selon un damier 3×3 . Les cases sont numérotées de 0 à 8, la case

7 à l'une des quatre extrémités contenant un morceau de fromage, et la case 8 à l'extrémité opposée déclenchant un léger choc électrique (voir la Figure 4). Les cases adjacentes communiquent entre elles en excluant cependant les cases en diagonale. La souris se promène dans ce labyrinthe en se déplaçant d'une case à la fois et en choisissant chaque fois au hasard l'une des cases adjacentes accessibles. La promenade est dite aléatoire. On suppose cependant qu'elle s'arrête lorsqu'on atteint l'une des cases 7 ou 8.

Soit X_n la position de la souris suite à n déplacements, pour $n \geq 0$. La suite $\{X_n\}_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov à temps discret sur les états $0, 1, \dots, 8$. La matrice de transition par rapport à ces états dans cet ordre est

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les états 7 et 8 sont absorbants, ce qui se traduit par $P_{77} = P_{88} = 1$.

Nous désirons calculer la probabilité que la souris atteigne la case 7 contenant le fromage plutôt que la case 8 où elle reçoit un choc étant donné un départ de n'importe quelle case. Posons

$$u_i = Pr(\text{atteindre 7} \mid \text{départ de } i),$$

pour $i = 0, 1, \dots, 8$. En conditionnant sur la première transition à partir de i et en utilisant la stationnarité des probabilités de transition, on obtient le

système d'équations linéaire suivant :

$$\begin{aligned}
 u_0 &= \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2, \\
 u_1 &= \frac{1}{3}u_0 + \frac{1}{3}u_3 + \frac{1}{3}u_7, \\
 u_2 &= \frac{1}{3}u_0 + \frac{1}{3}u_3 + \frac{1}{3}u_8, \\
 u_3 &= \frac{1}{4}u_1 + \frac{1}{4}u_2 + \frac{1}{4}u_4 + \frac{1}{4}u_5, \\
 u_4 &= \frac{1}{3}u_3 + \frac{1}{3}u_6 + \frac{1}{3}u_7, \\
 u_5 &= \frac{1}{3}u_3 + \frac{1}{3}u_6 + \frac{1}{3}u_8, \\
 u_6 &= \frac{1}{2}u_4 + \frac{1}{2}u_5,
 \end{aligned}$$

avec $u_7 = 1$ et $u_8 = 0$. Ce système se simplifie en utilisant la condition de symétrie $u_0 = u_3 = u_6 = 1/2$ sous l'hypothèse que la promenade aléatoire se termine à la case 7 ou à la case 8 avec probabilité 1. On trouve alors que

$$\begin{aligned}
 u_1 = u_4 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}, \\
 u_2 = u_5 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que c'est bien la solution du système complet.

1.4.2 Exemple : Jeu de pile ou face

Dans l'exemple suivant, un joueur lance une pièce de monnaie jusqu'à ce qu'il obtienne trois faces consécutives. Nous nous intéressons à l'espérance du nombre de lancers effectués et du nombre de faces obtenues jusqu'à la fin du jeu en supposant que la pièce est équilibrée et que les lancers sont indépendants.

Pour effectuer les calculs, nous allons considérer la chaîne de Markov sur le nombre de faces consécutives avant un lancer jusqu'à un maximum de trois. Le tableau 1 présente les quatre états possibles selon les résultats des trois derniers lancers avec F pour face, P pour pile, et X pour pile ou face. Les probabilités initiales de ces résultats sont également données.

État	3 derniers lancers	Probabilité initiale
3	<i>FFF</i>	$1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 1/8$
2	<i>PFF</i>	$1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 1/8$
1	<i>XPF</i>	$1 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 1/4$
0	<i>XXP</i>	$1 \cdot 1 \cdot 1/2 = 1/2$

La matrice de transition par rapport aux états 0, 1, 2, 3 est

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'état 3 qui correspond à *FFF* marque la fin du jeu. On définit

$$\tau_i = E(\text{nombre de lancers supplémentaires avant l'état 3} \mid \text{état } i),$$

pour $i = 0, 1, 2, 3$. Évidemment, $\tau_3 = 0$. En conditionnant sur le résultat du premier lancer supplémentaire à partir de i , on obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} \tau_2 &= \frac{1}{2}\tau_3 + \frac{1}{2}\tau_0 + 1, \\ \tau_1 &= \frac{1}{2}\tau_2 + \frac{1}{2}\tau_0 + 1, \\ \tau_0 &= \frac{1}{2}\tau_1 + \frac{1}{2}\tau_0 + 1. \end{aligned}$$

En effet si le résultat du premier lancer supplémentaire est *F*, ce qui a probabilité $1/2$, le nombre de faces consécutives avant le prochain lancer augmente de 1, sinon il tombe à 0. Le premier lancer supplémentaire doit cependant être ajouté à la nouvelle espérance dans tous les cas.

La solution de ce système est donnée par $\tau_0 = 14$, $\tau_1 = 12$ et $\tau_2 = 8$. Finalement, en conditionnant sur les résultats des trois premiers lancers, le nombre espéré de lancers avant la fin du jeu est donnée par

$$3 + \frac{1}{8}\tau_3 + \frac{1}{8}\tau_2 + \frac{1}{4}\tau_1 + \frac{1}{2}\tau_0 = 14.$$

Remarquons que cela correspond au nombre espéré de lancers supplémentaires avant la fin du jeu à partir d'une pile, c'est-à-dire τ_0 .

On considère maintenant

$$\nu_i = E(\text{nombre de faces supplémentaires avant l'état 3} \mid \text{état } i),$$

pour $i = 0, 1, 2, 3$. Ici encore, $\nu_3 = 0$. Le système d'équations pour les autres espérances est cependant différent :

$$\begin{aligned}\nu_2 &= \frac{1}{2}(\nu_3 + 1) + \frac{1}{2}\nu_0, \\ \nu_1 &= \frac{1}{2}(\nu_2 + 1) + \frac{1}{2}\nu_0, \\ \nu_0 &= \frac{1}{2}(\nu_1 + 1) + \frac{1}{2}\nu_0.\end{aligned}$$

C'est que le premier lancer supplémentaire doit être ajouté à la nouvelle espérance seulement si le résultat de ce lancer est F .

Ici on trouve la solution $\nu_0 = 7$, $\nu_1 = 6$ et $\nu_2 = 4$, d'où le nombre espéré de faces avant la fin du jeu est

$$\frac{1}{8}(\nu_3 + 3) + \frac{1}{8}(\nu_2 + 2) + \frac{1}{4}\left(\nu_1 + \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2}(\nu_0 + 1) = 7.$$

Ce nombre espéré est donc égal à ν_0 .

Il est intéressant de remarquer que $\nu_0 = \tau_0/2$. On peut penser que le critère pour la fin du jeu favorise les faces, ce qui n'est cependant pas le cas. Ce résultat n'est pas un hasard et il découle d'un théorème général en théorie des martingales qui sera présenté dans un autre chapitre.

1.4.3 Ruine du joueur

Cet exemple est le plus important sur les chaînes de Markov. Deux joueurs, A et B , qui ont un avoir total égal à N unités, font une série de parties. Chaque joueur mise une unité sur chaque partie et le gagnant récolte le tout. On suppose que le joueur A a une probabilité p de gagner chaque partie et le joueur B la probabilité complémentaire $q = 1 - p$, et ce indépendamment de toutes les autres parties. On fait l'hypothèse que $0 < p < 1$. Le jeu se termine lorsque l'un des deux joueurs est ruiné. L'autre joueur a alors un avoir égal à N .

On définit X_n comme étant l'avoir de A après n parties pour $n \geq 0$. On a une chaîne de Markov sur les états $0, 1, \dots, N$ avec états absorbants 0 et N . Les probabilités de transition sont données par

$$\begin{aligned}P_{i,i+1} &= p, \\ P_{i,i-1} &= 1 - p,\end{aligned}$$

pour $i = 1, \dots, N-1$, et $P_{00} = P_{NN} = 1$. Cela signifie que si l'avoir de A est i après n parties, alors il est $i+1$ avec probabilité p , ou $i-1$ avec probabilité

$q = 1 - p$ après $n + 1$ parties, en autant que $1 \leq i \leq N - 1$. Si l'avoir de A est 0 ou N , alors il ne change plus par la suite avec probabilité 1. (Voir la Figure 5.)

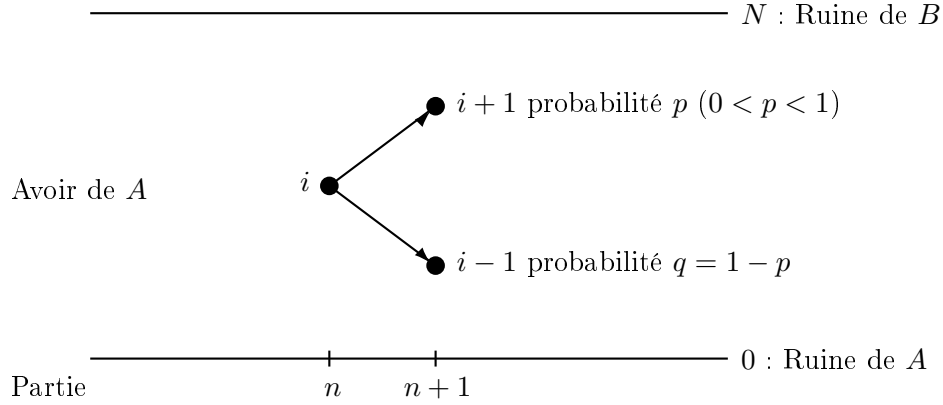


FIGURE 5 – La ruine du joueur.

On s'intéresse à la ruine éventuelle du joueur A . On définit

$$u_i = Pr(\text{ruine éventuelle de } A \mid \text{avoir initial } i \text{ pour } A),$$

pour $i = 0, 1, \dots, N$. On a $u_0 = 1$ et $u_N = 0$. De plus, en conditionnant sur l'issue de la prochaine partie lorsque l'avoir de A est $i = 1, \dots, N - 1$, on obtient que

$$u_i = pu_{i+1} + qu_{i-1},$$

c'est-à-dire

$$(u_{i+1} - u_i) = \frac{q}{p} (u_i - u_{i-1}).$$

On en déduit par induction que

$$(u_{i+1} - u_i) = \left(\frac{q}{p}\right)^i (u_1 - u_0).$$

On a donc que

$$u_k = \sum_{i=0}^{k-1} (u_{i+1} - u_i) + u_0 = \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{q}{p}\right)^i (u_1 - u_0) + u_0,$$

pour $k = 0, 1, \dots, N$, avec

$$0 = u_N = \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{q}{p}\right)^i (u_1 - u_0) + u_0.$$

et $u_0 = 1$. On conclut donc que

$$u_1 - u_0 = -\frac{1}{\sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{q}{p}\right)^i},$$

d'où

$$u_k = 1 - \frac{\sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{q}{p}\right)^i}{\sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{q}{p}\right)^i} = \begin{cases} 1 - \frac{k}{n} & \text{si } p = q = 1/2, \\ 1 - \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^k}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N} & \text{si } p \neq q, \end{cases}$$

pour $k = 0, 1, \dots, N$. Ici on utilise le fait que

$$\sum_{i=0}^{k-1} r^i = \begin{cases} k & \text{si } r = 1, \\ \frac{1-r^k}{1-r} & \text{si } r \neq 1. \end{cases}$$

En remplaçant k par $N - k$ et p par q , on peut vérifier que la probabilité de ruine éventuelle du joueur B est $1 - u_k$, lorsque l'avoir initial de A est k . Donc le jeu se termine avec probabilité 1 par la ruine de l'un des deux joueurs.

En laissant tendre l'avoir total des deux joueurs vers l'infini, on obtient que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} u_k = \begin{cases} 1 & \text{si } p \leq q, \text{ c'est-à-dire } p \leq 1/2, \\ \left(\frac{q}{p}\right)^k & \text{si } p > q, \text{ c'est-à-dire } p > 1/2. \end{cases}$$

Ceci suggère que, dans le cas où l'avoir du joueur B est infini, la ruine éventuelle du joueur A est certaine si et seulement si sa probabilité de gagner chaque partie est inférieure ou égale à $1/2$.

On considère maintenant l'espérance du nombre de parties jusqu'à la ruine de l'un des deux joueurs dans le cas de joueurs de force égale, c'est-à-dire $p = q = 1/2$, ayant un avoir total égal à N . On définit

$$\nu_i = E(\text{durée du jeu} \mid \text{avoir initial } i \text{ pour } A).$$

En conditionnant sur l'issue de la prochaine partie lorsque l'avoir de A est i , on obtient que

$$\nu_i = \frac{1}{2}\nu_{i+1} + \frac{1}{2}\nu_{i-1} + 1,$$

c'est-à-dire

$$(\nu_{i+1} - \nu_i) = (\nu_i - \nu_{i-1}) - 2.$$

On en déduit alors par induction que

$$(\nu_{i+1} - \nu_i) = (\nu_1 - \nu_0) - 2i,$$

pour $i = 1, \dots, N-1$, avec $\nu_0 = \nu_N = 0$. Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} \nu_k &= \sum_{i=0}^{k-1} (\nu_{i+1} - \nu_i) + \nu_0 \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} (\nu_1 - 2i) \\ &= k\nu_1 - k(k-1), \end{aligned}$$

pour $k = 0, 1, \dots, N$, avec

$$0 = \nu_N = N\nu_1 - N(N-1),$$

c'est-à-dire, $\nu_1 = N-1$. On déduit finalement que

$$\nu_k = k(N-k),$$

pour $k = 0, 1, \dots, N$. On remarque que $\nu_{N-k} = \nu_k$, ce qui est attendu par symétrie, que la plus grande espérance est atteinte lorsque $k = \lfloor N/2 \rfloor$, la partie entière de $N/2$, mais surtout que l'espérance est toujours finie. Cette propriété sera utilisée pour la classification des états.

1.5 Processus de branchement

1.5.1 Probabilité d'extinction éventuelle

Le processus de Galton-Watson est un processus de branchement qui a été introduit à l'origine pour décrire la transmission de noms de famille de père à fils.

On considère une population à générations discrètes et séparées dans laquelle les individus produisent des copies d'eux-mêmes. On suppose que chaque individu à chaque génération produit un nombre k de descendants de première génération avec probabilité p_k pour $k \geq 0$, indépendamment de tous les autres individus. L'espérance du nombre de descendants de première génération de chaque individu est

$$m = \sum_{k \geq 0} k p_k.$$

Le nombre total d'individus à la génération $n \geq 0$ est représenté par Z_n . On suppose un seul individu à la génération initiale, c'est-à-dire $Z_0 = 1$, et on s'intéresse à l'extinction éventuelle de la population. La Figure 6 illustre la situation.

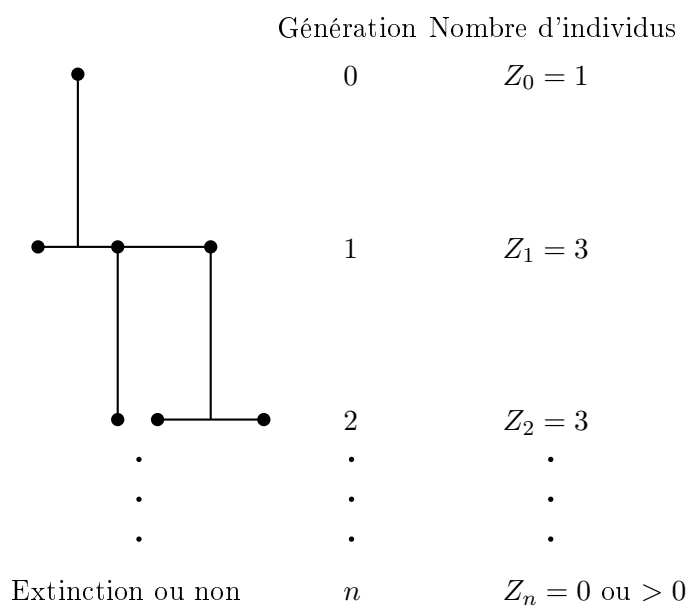


FIGURE 6 – Processus de branchement de Galton-Watson.

La suite $\{Z_n\}_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov à temps discret sur un nombre infini dénombrable d'états $0, 1, 2, \dots$ avec 0 comme état absorbant. Cet état correspond à l'extinction de la population.

On définit

$$u_n = Pr(Z_n = 0 | Z_0 = 1),$$

pour $n \geq 0$. C'est la probabilité que la population soit éteinte à la génération n étant donné qu'elle commence avec un seul individu à la génération 0. Autrement dit, c'est la probabilité que la descendance d'un individu soit éteinte après n générations. Cependant l'extinction peut se produire à une génération antérieure.

En conditionnant sur le nombre de descendants de première génération produits par l'individu de la génération 0, qui est la valeur prise par Z_1 , on obtient l'équation de récurrence

$$u_n = \sum_{k \geq 0} p_k (u_{n-1})^k.$$

En effet, le nombre d'individus à la génération 1 est k avec probabilité p_k , et la descendance de chacun d'eux sera éteinte à la génération n , soit $n - 1$ générations plus tard, avec probabilité donnée par u_{n-1} , indépendamment de toutes les autres.

L'équation de récurrence peut s'écrire

$$u_n = \phi(u_{n-1}),$$

où

$$\phi(s) = \sum_{k \geq 0} p_k s^k,$$

pour $0 \leq s \leq 1$, représente la fonction génératrice pour le nombre de descendants de première génération d'un individu. En procédant à l'itération de l'équation de récurrence n fois, on obtient l'expression

$$u_n = \phi^{(n)}(u_0),$$

pour $n \geq 0$, avec $u_0 = 0$.

Dans ce qui suit, on fait les hypothèses suivantes :

Hypothèse 1 : $0 < p_0 < 1$.

Hypothèse 2 : $0 < p_0 + p_1 < 1$.

Ces hypothèses garantissent que la fonction génératrice $\phi(s)$ est strictement croissante et strictement convexe pour $0 < s < 1$. En effet, on a alors

$$\phi'(s) = \frac{d}{ds} \phi(s) = \sum_{k \geq 1} k p_k s^{k-1} > 0$$

et

$$\phi''(s) = \frac{d^2}{ds^2} \phi(s) = \sum_{k \geq 2} k(k-1) p_k s^{k-2} > 0.$$

De plus, $\phi(s)$ est continue pour $0 \leq s \leq 1$ avec

$$\phi(0) = p_0 > 0 \text{ et } \phi(1) = 1.$$

La courbe de $\phi(s)$ étant strictement croissante et de pente strictement croissante sur l'intervalle $[0, 1]$ avec une valeur positive à $s = 0$ et une valeur 1 à $s = 1$, elle ne peut satisfaire $\phi(s) = s$ qu'en un seul autre point $s \neq 1$ dans cet intervalle. La trajectoire des points obtenus par itération de $\phi(s)$ à partir de $s = 0$ dépend de la position de ce point initial par rapport à 1. Celle-ci dépend de la pente à $s = 1$, qui est donnée par

$$\phi'(1) = \sum_{k \geq 1} k p_k = m.$$

Deux cas sont à considérer.

Cas $m > 1$.

La Figure 7 illustre cette situation. Il existe un point unique $0 < u < 1$ tel que $\phi(u) = u$. Puisque

$$0 = u_0 < p_0 = u_1 < u,$$

on a aussi par croissance stricte

$$\phi(u_0) < \phi(u_1) < \phi(u),$$

c'est-à-dire

$$u_1 < u_2 = \phi(u_1) < u.$$

En répétant l'argument, on obtient que

$$u_n < u_{n+1} = \phi(u_n) < u,$$

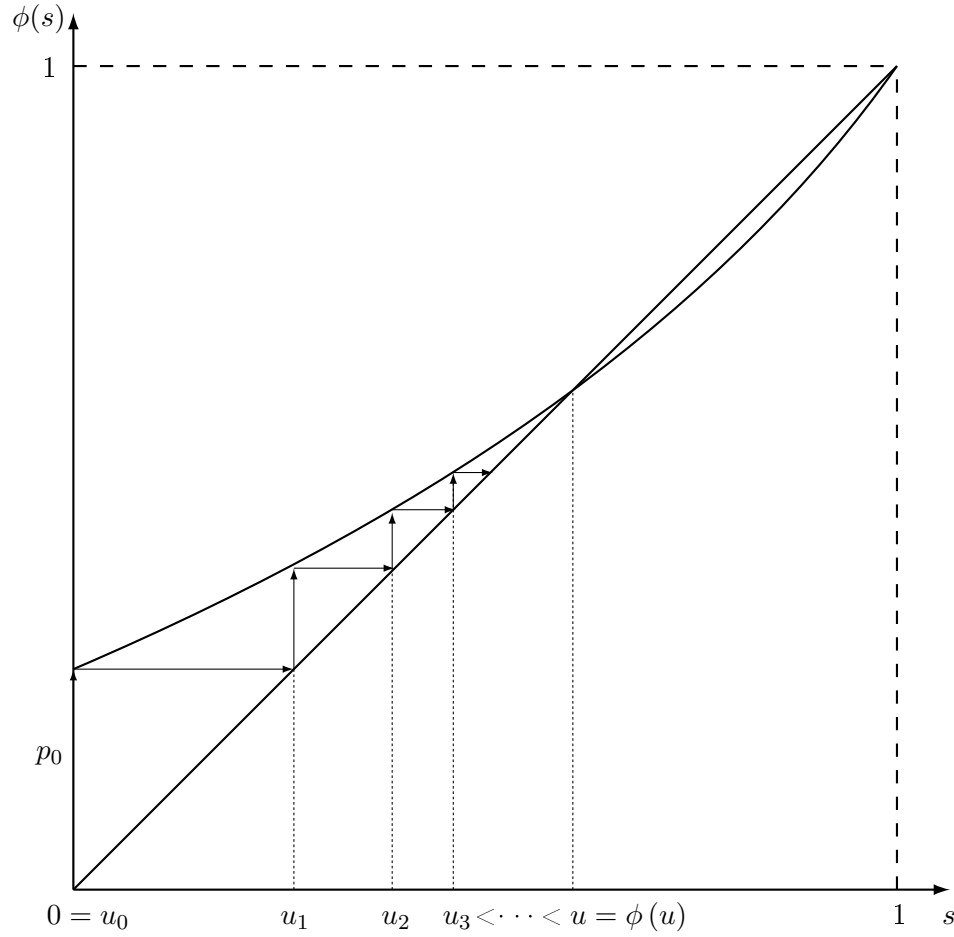
pour tout $n \geq 0$. La suite $\{u_n\}_{n \geq 0}$ étant croissante et bornée, elle converge. Soit

$$u_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n.$$

On a alors par continuité

$$\phi(u_\infty) = u_\infty.$$

Mais puisque $0 < u_\infty \leq u$, la seule possibilité est que $u_\infty = u$.

FIGURE 7 – Graphique de la fonction génératrice $\phi(s)$ dans le cas où $m > 1$.

Cas $m \leq 1$.

Comme l'illustre la Figure 8, la courbe de la fonction $\phi(s)$ pour $0 \leq s \leq 1$ ne rencontre alors la diagonale principale qu'au point $s = 1$. Les arguments précédents s'appliquent avec u remplacé par 1.

En conclusion, on a le résultat suivant qui s'applique aux deux cas ci-dessus : Étant donné que $Z_0 = 1$, la probabilité d'extinction éventuelle de la

population définie par

$$u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$$

est la plus petite solution de $\phi(s) = s$ pour $0 \leq s \leq 1$. De plus, $u < 1$ si et seulement si $m > 1$.

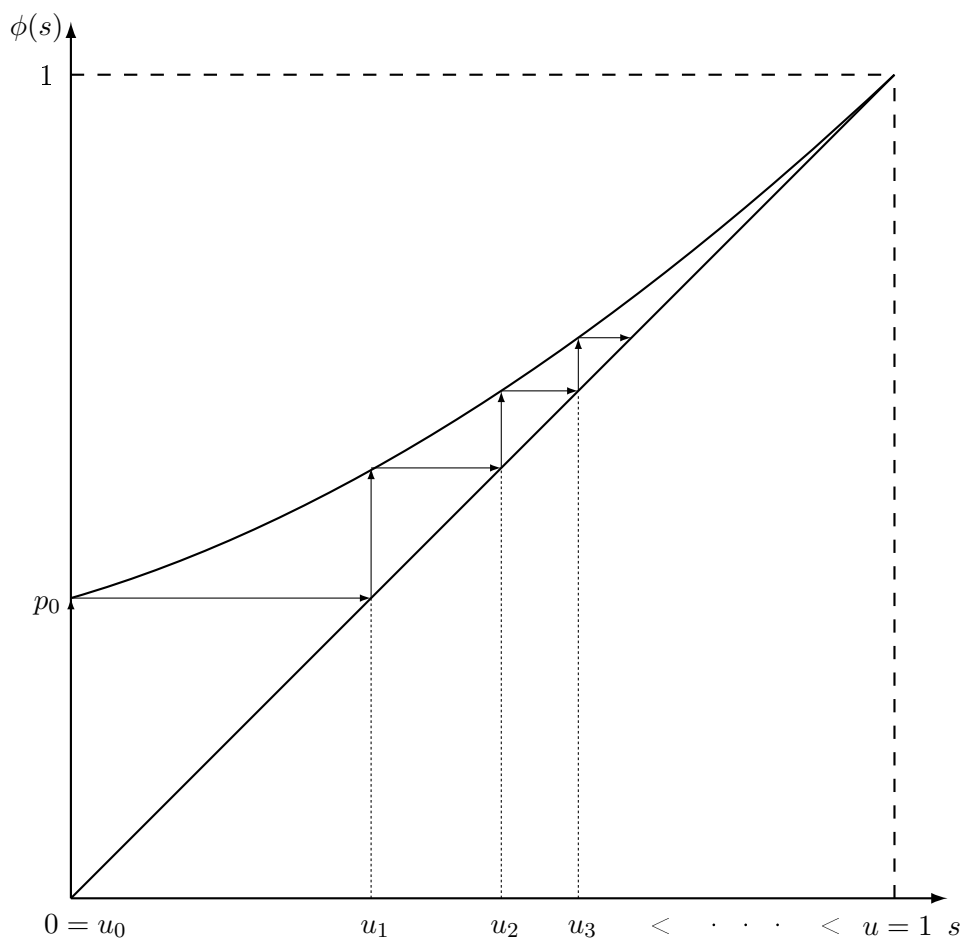


FIGURE 8 – Graphique de la fonction génératrice $\phi(s)$ dans le cas où $m \leq 1$.

Remarque : Si $Z_0 = i$, alors la probabilité d'extinction éventuelle est u^i , car les i descendance des i individus de la génération initiale doivent être

éteintes pour que la population soit éteinte.

1.5.2 Distribution asymptotique de la taille de la population

La taille de la population à la génération n est donnée par la variable aléatoire Z_n . La fonction génératrice de Z_n étant donné que $Z_0 = 1$ est définie par

$$\phi_n(s) = E(s^{Z_n} | Z_0 = 1),$$

pour $0 \leq s \leq 1$. Cette fonction satisfait l'équation de récurrence

$$\phi_n(s) = \phi_{n-1}(\phi(s)),$$

pour tout $n \geq 1$. On en déduit alors par induction que

$$\phi_n(s) = \phi^{(n)}(s),$$

ce qui est la n -ième itérée de la fonction $\phi(s)$.

Ce résultat découle du fait que la fonction génératrice de

$$Z = X_1 + \cdots + X_Y,$$

où X_1, X_2, \dots sont des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées à valeurs entières non négatives et de fonction génératrice $\phi(s)$, indépendantes de la variable aléatoire Y également à valeurs entières non négatives mais de fonction génératrice $\psi(s)$, est donnée par

$$\begin{aligned} E(s^Z) &= \sum_{k \geq 0} E(s^Z | Y = k) Pr(Y = k) \\ &= \sum_{k \geq 0} E\left(\prod_{i=1}^k s^{X_i}\right) Pr(Y = k) \\ &= \sum_{k \geq 0} \left(\prod_{i=1}^k E(s^{X_i})\right) Pr(Y = k) \\ &= \sum_{k \geq 0} \phi(s)^k Pr(Y = k) \\ &= \psi(\phi(s)), \end{aligned}$$

pour $0 \leq s \leq 1$. Dans le cas présent les conditions sont satisfaites pour

$$Z_n = X_1 + \cdots + X_{Z_{n-1}},$$

où X_1, X_2, \dots représentent les nombres de descendants de première génération des individus de la génération $n - 1$, tous de fonction génératrice $\phi(s)$, et Z_{n-1} est le nombre total d'individus de la génération $n - 1$, de fonction génératrice $\psi(s) = \phi_{n-1}(s)$.

L'espérance d'une variable aléatoire correspond à la dérivée de sa fonction génératrice évaluée au point 1. Pour Z_n étant donné que $Z_0 = 1$, cela donne

$$\begin{aligned} E(Z_n | Z_0 = 1) &= \phi'_n(1) \\ &= \phi'(\phi^{(n-1)}(1)) \cdot \phi'(\phi^{(n-2)}(1)) \cdot \dots \cdot \phi'(\phi^{(1)}) \cdot \phi'(1) \\ &= (\phi'(1))^n \\ &= m^n. \end{aligned}$$

Asymptotiquement, on a donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(Z_n | Z_0 = 1) = \begin{cases} 0 & \text{si } m < 1, \\ 1 & \text{si } m = 1, \\ \infty & \text{si } m > 1. \end{cases}$$

Ce résultat suggère une explosion possible de la population à long terme au moins lorsque $m > 1$. En fait on peut montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr(Z_n = k | Z_0 = 1) = 0 \text{ pour tout } k \geq 1.$$

Donc dans tous les cas il y a extinction ou explosion de la population à long terme avec probabilité 1.

En effet, on a

$$\phi^{(n)}(s) = u_n + \sum_{j \geq 1} s^j P(Z_n = j | Z_0 = 1).$$

Or

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi^{(n)}(s) = u,$$

pour $0 \leq s < 1$, où u est la probabilité d'extinction éventuelle de la population. Pour $0 \leq s < u$, la suite croît vers u comme pour $u_n = \phi^{(n)}(0)$. Pour $u < s < 1$, on a de façon analogue une suite qui décroît vers u (voir la Figure 9). Enfin pour $s = u$, on a $\phi^{(n)}(u) = u$ pour tout $n \geq 0$. Finalement on obtient que

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} s^k \Pr(Z_n = k | Z_0 = 1) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j \geq 1} s^j P(Z_n = j | Z_0 = 1) = 0,$$

pour $0 \leq s < 1$ et tout $k \geq 1$, ce qui permet de conclure.

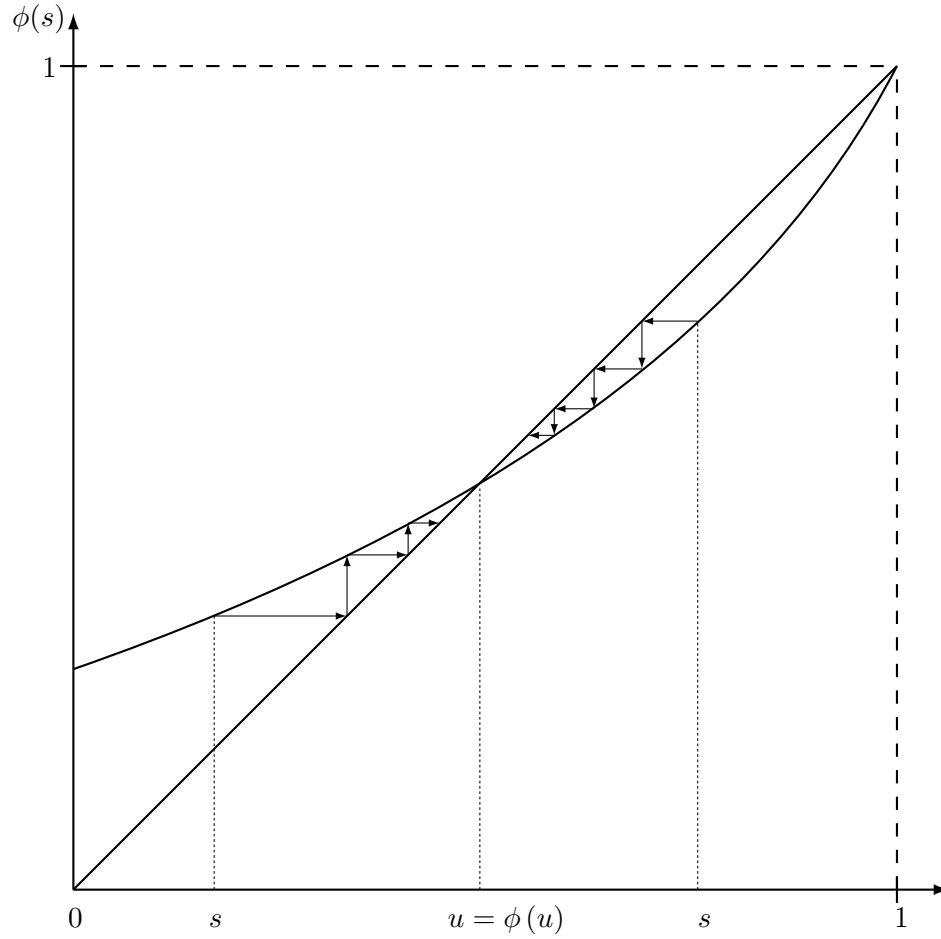


FIGURE 9 – Graphique de la probabilité d'extinction éventuelle.

1.5.3 Ruine du joueur contre un adversaire infiniment riche

On reprend le problème de la ruine du joueur mais en supposant que l'avoir de l'adversaire B est infini. Donc l'avoir du joueur A après chaque partie, en autant qu'il est positif, augmente d'une unité avec probabilité p ou diminue d'une unité avec probabilité $1 - p$, indépendamment de l'issue de toutes les autres parties. On suppose $0 < p < 1$. Lorsque le joueur A n'a plus aucun avoir, et donc qu'il est ruiné, le jeu s'arrête. On s'intéresse à la ruine éventuelle du joueur A étant donné un avoir initial égal à i .

La situation peut être décrite par un processus de branchement en ima-

ginant que le joueur A mise à tour de rôle les i unités de son avoir initial, qu'il multiplie chacune par 2 avec probabilité p ou 0 avec probabilité $1 - p$, puis qu'il recommence avec son nouvel avoir à la fin de la ronde. Une ronde correspond à une génération de la population, une unité de mise à un individu qui peut en produire 2 avec probabilité p ou aucun avec probabilité $q = 1 - p$, et l'avoir de A après la n -ième ronde au nombre d'individus à la génération n , représenté par Z_n . Cela est illustré dans les Figures 10 et 11.

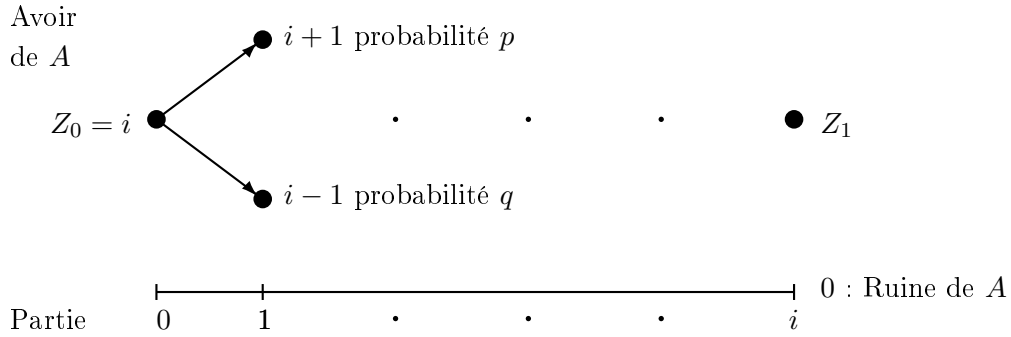


FIGURE 10 – Première ronde de parties d'un joueur contre un adversaire infiniment riche.

La ruine éventuelle du joueur A dont l'avoir initial est i correspond alors à l'extinction éventuelle de la population étant donné i individus à la génération initiale, c'est-à-dire, $Z_0 = i$. On a donc

$$Pr(\text{ruine éventuelle de } A \mid \text{avoir initial } i \text{ pour } A) = u^i,$$

où

$$u = \phi(u) = (1 - p) + pu^2.$$

Les deux solutions possibles sont

$$u = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4p(1 - p)}}{2p} = \frac{1 \pm (1 - 2p)}{2p}.$$

On conclut que

$$u = \begin{cases} \frac{1-p}{p} & \text{si } p > 1/2, \\ 1 & \text{si } p \leq 1/2. \end{cases}$$

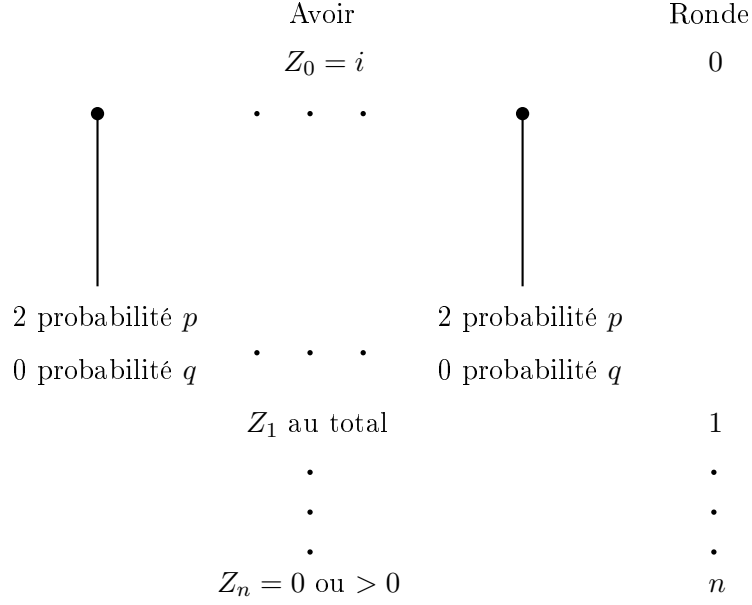


FIGURE 11 – Processus de branchement pour modéliser l'avoir d'un joueur contre un adversaire infiniment riche.

La ruine éventuelle de A est donc certaine si et seulement si $p \leq 1/2$.

Dans le cas où la ruine éventuelle de A est certaine, on définit

$$w_i = E(\text{nombre de parties jusqu'à la ruine de } A \mid \text{avoir initial } i \text{ pour } A).$$

On a alors

$$\begin{aligned} w_i &= E\left(\sum_{n \geq 0} Z_n \mid Z_0 = i\right) \\ &= \sum_{n \geq 0} E(Z_n \mid Z_0 = i) \\ &= \sum_{n \geq 0} i E(Z_n \mid Z_0 = 1) \\ &= i \sum_{n \geq 0} m^n, \end{aligned}$$

où

$$m = 0 \times (1 - p) + 2 \times p = 2p.$$

Par conséquent, on obtient que

$$w_i = \begin{cases} \frac{i}{1-2p} & \text{si } p < 1/2, \\ \infty & \text{si } p = 1/2. \end{cases}$$

L'espérance du nombre de parties avant la ruine de A est donc finie si et seulement si $p < 1/2$, c'est-à-dire, si et seulement si $m < 1$.

1.6 Classification des états

Il y a plusieurs types d'état. La classification des états d'une chaîne de Markov joue un rôle essentiel dans l'étude de son comportement asymptotique.

1.6.1 Définitions

(a) Un état i est *récurrent* si

$$f_{ii} = \Pr(\text{retour à } i \mid \text{départ de } i) = 1.$$

Sinon ($f_{ii} < 1$), alors l'état est *transitoire*.

(b) Un état récurrent i est *récurrent nul* si

$$\mu_i = E(\text{temps de premier retour à } i \mid \text{départ de } i) = \infty.$$

Sinon ($\mu_i < \infty$), alors l'état est *récurrent positif*. Ici le temps est mesuré en nombre de transitions.

(c) La *période* $d(i)$ d'un état i est définie par

$$d(i) = \text{p.g.c.d.}\{n \geq 1 : P_{ii}^{(n)} > 0\}.$$

Par convention, $d(i) = 0$ si l'ensemble ci-dessus est vide. Un état i est *périodique* si $d(i) > 1$ et *apériodique* sinon ($d(i) = 0$ ou 1). Il est montré dans l'appendice (section 1.9.3) que $d(i) = 1$ si et seulement si $P_{ii}^{(n)} > 0$ pour tout $n \geq N(i)$ pour un certain entier $N(i) \geq 1$.

(d) Un état récurrent positif apériodique est dit *ergodique*.

1.6.2 Exemples

Dans les exemples ci-dessous les états sont représentés par des cercles numérotés et les transitions de probabilité positive par des flèches.

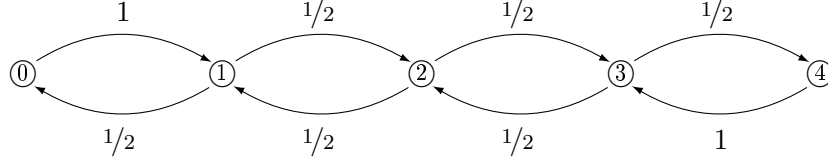


FIGURE 12 – Exemple (a).

(a) Dans l'exemple de la Figure 12, l'état 2 est récurrent, car

$$Pr(\text{ne jamais retourner à 2} \mid \text{départ de 2}) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdots = 0.$$

En effet pour ne plus retourner à 2 à partir de 2, deux situations sont possibles : soit on va à 1 (probabilité $1/2$), puis on fait la boucle 1, 0, 1 (probabilité $1/2 \cdot 1$) une infinité de fois ; soit on va à 3, puis on fait la boucle 3, 4, 3 une infinité de fois, avec les mêmes probabilités. Dans les deux cas, la probabilité résultante est 0. De plus, $d(2) = 2$, car on retourne à 2 à partir de 2 avec probabilité positive seulement en $2k$ pas, pour tout $k \geq 1$.

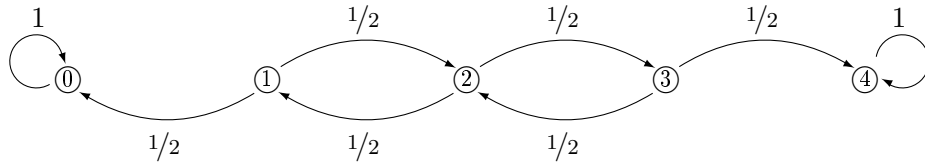


FIGURE 13 – Exemple (b).

(b) Dans l'exemple de la Figure 13, l'état 2 est transitoire, car

$$Pr(\text{ne jamais retourner à 2} \mid \text{départ de 2}) \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdots = \frac{1}{4} > 0.$$

En effet on ne retourne pas à 2 à partir de 2 si on va à 1 (probabilité $1/2$), puis à 0 (probabilité $1/2$), car on retourne par la suite à 0 (probabilité 1) une

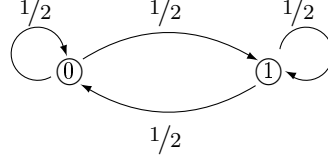


FIGURE 14 – Exemple (c).

infinité de fois. De plus, $d(2) = 2$ pour la même raison que dans l'exemple (a).

(c) Dans l'exemple de la Figure 14, l'état 0 est récurrent, car

$$Pr(\text{ne jamais retourner à } 0 \mid \text{départ de } 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdots = 0.$$

Ici pour ne plus retourner à 0 à partir de 0, il faut en effet aller 1 (probabilité $1/2$), puis retourner à 1 (probabilité $1/2$) une infinité de fois, ce qui a probabilité 0. De plus l'état 0 est apériodique, car

$$P_{00}^{(1)} = \frac{1}{2} > 0.$$

Finalement l'état 0 est récurrent positif, car l'espérance du temps de premier retour à 0 à partir de 0 est

$$\begin{aligned}
 \mu_0 &= \sum_{k \geq 1} k \left(\frac{1}{2} \right)^k \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k \geq 1} k \left(\frac{1}{2} \right)^{k-1} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \left(\sum_{k \geq 0} s^k \right) \Big|_{s=\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{1-s} \right) \Big|_{s=\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-s} \right)^2 \Big|_{s=\frac{1}{2}} \\
 &= 2,
 \end{aligned}$$

qui est fini. On conclut que l'état 0 est ergodique.

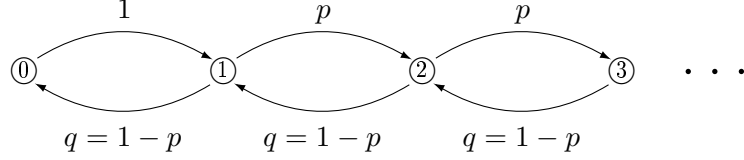


FIGURE 15 – Exemple (d).

(d) L'exemple de la Figure 15 décrit une situation identique au problème de la ruine du joueur contre un adversaire infiniment riche, sauf qu'un bon samaritain donne l'équivalent d'une mise au joueur lorsque celui-ci est ruiné. On suppose que $0 < p < 1$. L'état 0 est périodique de période 2 pour la même raison que dans l'exemple (a). De plus, il est transitoire si $p > 1/2$ et récurrent si $p \leq 1/2$. En effet, puisqu'on va à 1 à partir de 0 avec probabilité 1, la probabilité de retourner à 0 à partir de 0, f_{00} , est égale à la probabilité d'atteindre 0 à partir de 1. Or, cette probabilité correspond à la probabilité de ruine éventuelle du joueur à partir d'un avoir initial de 1, c'est-à-dire

$$f_{00} = \begin{cases} \frac{1-p}{p} < 1 & \text{si } p > \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{si } p \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Quant à l'espérance du temps de premier retour à 0 à partir de 0, μ_0 , lorsque 0 est récurrent, elle est donnée par 1 plus l'espérance du nombre de parties jusqu'à la ruine du joueur à partir d'un avoir initial égal à 1, c'est-à-dire

$$\mu_0 = \begin{cases} 1 + \frac{1}{1-2p} & \text{si } p < \frac{1}{2}, \\ \infty & \text{si } p = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

L'espérance est alors finie, et donc 0 est récurrent positif, si et seulement si $p < 1/2$.

1.6.3 Critères de classification

Les critères de classification des états suivants servent à démontrer de nombreux résultats théoriques. Ils illustrent également le fait qu'un état récurrent nul partage une propriété avec un état récurrent positif et une propriété avec un état transitoire. La démonstration de ces critères est reportée

à une section ultérieure.

(a) Un état i est récurrent si et seulement si

$$\sum_{n \geq 1} P_{ii}^{(n)} = \infty.$$

Sinon il est transitoire, et alors nécessairement $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ii}^{(n)} = 0$.

(b) Un état récurrent i est récurrent nul si et seulement si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ii}^{(n)} = 0.$$

Sinon il est récurrent positif.

1.6.4 Partition des états

L'espace des états d'une chaîne de Markov peut être décomposé en classes d'équivalence. De plus les états appartenant à une même classe sont alors de même type et de même période, qui sont aussi le type et la période de la classe. Enfin certains types d'état sont exclus si le nombre d'états est fini. Cela s'avère utile pour déterminer le type d'une classe d'états. Les démonstrations des propositions 1, 2 et 3 ci-dessous sont reportées à une section ultérieure.

Definition

Deux états i et j communiquent, ce qui est noté $i \leftrightarrow j$, si j est accessible à partir de i , c'est-à-dire

$$P_{ij}^{(n)} > 0 \text{ pour un certain } n \geq 0,$$

et de même si i est accessible à partir de j , donc

$$P_{ji}^{(m)} > 0 \text{ pour un certain } m \geq 0.$$

Cette relation binaire est une relation d'équivalence. En effet elle est :

- réflexive : $i \leftrightarrow i$, puisque $P_{ii}^{(0)} = 1 > 0$;
- symétrique : $j \leftrightarrow i$ si $i \leftrightarrow j$, par définition ;

- transitive : $i \leftrightarrow k$ si $i \leftrightarrow j$ et $j \leftrightarrow k$, puisqu'alors $P_{ij}^{(n)} P_{jk}^{(m)} > 0$ pour certains $m, n \geq 0$, et donc

$$P_{ik}^{(n+m)} = \sum_l P_{il}^{(n)} P_{lk}^{(m)} \geq P_{ij}^{(n)} P_{jk}^{(m)} > 0.$$

Par conséquent, l'ensemble des états peut être décomposé en classes d'équivalence. Lorsqu'il y a une seule classe, la chaîne est dite irréductible.

Proposition 1

Si $i \leftrightarrow j$, c'est-à-dire $P_{ij}^{(n)} P_{ji}^{(m)} > 0$ pour certains $n, m \geq 0$, alors :

- (a) i est récurrent si et seulement si j est récurrent ;
- (b) i est récurrent positif si et seulement si j est récurrent positif ;
- (c) i et j ont la même période.

Puisqu'un état est ou bien récurrent ou bien transitoire, et qu'un état récurrent est ou bien récurrent positif ou bien récurrent nul, les états d'une même classe sont de même type et de même période. Une classe (ou une chaîne irréductible) est dite transitoire, récurrente positive ou nulle, périodique, ergodique selon le type de ses états.

Proposition 2

- (a) Si un état i est récurrent, alors

$$f_{ij} = Pr(\text{visite future à } j \mid \text{départ de } i) = 1$$

pour tout $j \leftrightarrow i$, et 0 autrement, c'est-à-dire $P_{ij}^{(n)} = 0$ pour tout $n \geq 1$ et tout $j \nleftrightarrow i$. Donc une classe récurrente est fermée.

- (b) Si i et j sont des états dans la même classe récurrente, alors $f_{ki} = f_{kj}$ pour tout état k .

Proposition 3

Si le nombre d'états est fini, alors :

- (a) Tous les états récurrents sont récurrents positifs.
- (b) Dans tous les cas, il y a au moins un état récurrent.

Corollaire : Une chaîne irréductible (et toute classe fermée) sur un nombre fini d'états est récurrente positive.

1.6.5 Exemple de partition des états

Une chaîne de Markov à temps discret sur les états 0, 1, 2, 3, 4, 5 dans cet ordre a des probabilités de transition en un pas données par la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il y a trois classes d'états tel qu'illustré dans la Figure 16 :

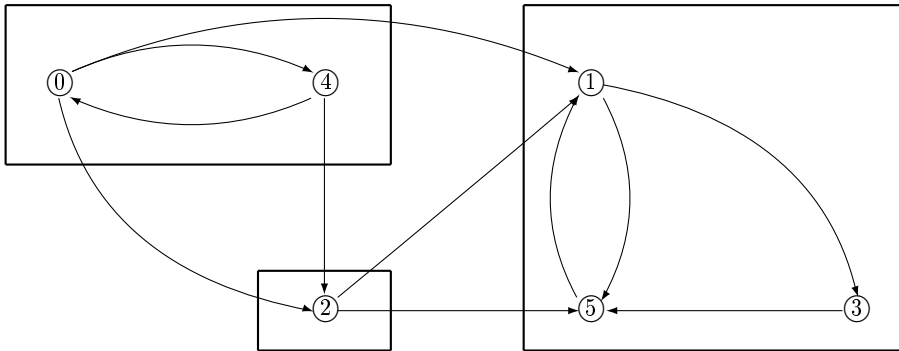


FIGURE 16 – Exemple de partition des états.

- $\{2\}$ transitoire, car non fermée, et apériodique, car $d(2) = 0$.
- $\{0, 4\}$ transitoire, car non fermée, et périodique de période 2, car

$$d(0) = \text{p.g.c.d.}\{2k : k \geq 1\} = 2.$$

- $\{1, 3, 5\}$ récurrente positive, car fermée sur un nombre fini d'états, et apériodique, car

$$d(1) = \text{p.g.c.d.}\{2, 3, \dots\} = 1,$$

donc ergodique.

1.7 Théorème ergodique et distribution stationnaire

Cette section présente les résultats principaux sur les chaînes de Markov. Ils décrivent la situation à long terme, c'est-à-dire après un très long moment ou sur une très longue période de temps. Leur utilisation est illustrée par plusieurs exemples. Les démonstrations sont reportées à une section ultérieure. Les démonstrations sont plus simples dans le cas où le nombre d'états est fini.

1.7.1 Théorème ergodique

(a) Dans tous les cas sauf peut-être dans celui où j est récurrent positif périodique, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^{(n)} = f_{ij} \times \frac{1}{\mu_j},$$

où

$$f_{ij} = \text{Pr}(\text{visite future à } j \mid \text{départ de } i)$$

et

$$\mu_j = E(\text{temps de premier retour à } j \mid \text{départ de } j).$$

(b) Dans tous les cas, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P_{ij}^{(k)} = f_{ij} \times \frac{1}{\mu_j}.$$

Remarque 1 : Les probabilités f_{ij} se calculent par la méthode de conditionnement sur la première transition. Des simplifications sont possibles en utilisant la Proposition 2 de la section 1.5.4.

Remarque 2 : Pour tout état j récurrent nul ou transitoire, on a $\mu_j^{-1} = 0$.

Remarque 3 : Pour tout état j récurrent positif, la quantité μ_j^{-1} représente la fraction moyenne à long terme de visites à j à partir de j (voir la Figure 17). En effet on a alors

$$\begin{aligned}\mu_j^{-1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P_{jj}^{(k)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} E(\mathbf{1}_{\{X_k=j\}} | X_0 = j) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} E\left(\frac{N_j(n)}{n} \middle| X_0 = j\right),\end{aligned}$$

où

$$N_j(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\{X_k=j\}}$$

est le nombre de visites à j du temps 0 au temps $n - 1$.

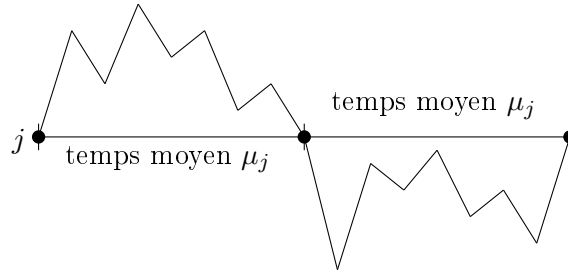


FIGURE 17 – Retours à un état récurrent j .

1.7.2 Distribution stationnaire

Une suite finie ou infinie dénombrable $\pi = (\pi_j)$ est une distribution stationnaire pour une chaîne irréductible, donc avec une seule classe d'états, si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

- (a) $\pi_j > 0$ pour tout j ;
- (b) $\sum_j \pi_j = 1$;

(c) $\pi_j = \sum_i \pi_i P_{ij}$ pour tout j , c'est-à-dire $\pi = \pi P$ en notation matricielle.

Les conditions (a) et (b) garantissent que (π_j) est une distribution de probabilité positive, alors que la condition (c) représente l'équation de stationnarité. En notation matricielle, celle-ci signifie que π est un vecteur propre à gauche de la matrice de transition P associée à la valeur propre 1. À noter que le vecteur dont toutes les composantes sont égales à 1 est un vecteur propre à droite correspondant.

1.7.3 Matrice de transition doublement stochastique

Une matrice de transition P pour une chaîne de Markov à temps discret est dite doublement stochastique si sa transposée est une matrice stochastique, c'est-à-dire

$$\sum_i P_{ij} = 1,$$

pour tout j .

Une chaîne de Markov irréductible sur un nombre fini N d'états, numérotés $0, 1, \dots, N-1$, dont la matrice de transition est doublement stochastique admet une distribution stationnaire uniforme donnée par $\pi_i = N^{-1}$ pour $i = 0, 1, \dots, N-1$. En effet, les trois conditions pour une distribution stationnaire sont trivialement satisfaites.

1.7.4 Théorème sur la distribution stationnaire

Une chaîne irréductible a une distribution stationnaire (π_j) si et seulement si elle est récurrente positive. Dans ce cas la distribution stationnaire est unique et donnée par $\pi_j = \mu_j^{-1}$ pour tout j .

Remarque 1 : Les équations de stationnarité ont ainsi l'interprétation suivante : la fraction moyenne à long terme de visites à l'état j est égale à la somme des fractions moyennes à long terme des visites aux états i suivies immédiatement d'une transition à l'état j .

Remarque 2 : Pour tout état j dans une classe récurrente positive $C(j)$, qui est nécessairement fermée, on a $\mu_j^{-1} = \pi_j$, où (π_j) est une distribution stationnaire pour la chaîne de Markov restreinte aux états de la classe $C(j)$.

1.7.5 Chaîne irréductible apériodique à espace d'états fini

Une chaîne irréductible apériodique sur un nombre fini d'états, disons $0, 1, \dots, N-1$, est récurrente positive et la matrice de transition en n pas satisfait

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^{(n)} = \begin{pmatrix} \pi_0 & \pi_1 & \cdots & \pi_{N-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \pi_0 & \pi_1 & \cdots & \pi_{N-1} \end{pmatrix},$$

où $(\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{N-1})$ est la distribution stationnaire qui est donnée par $\pi_j = \mu_j^{-1}$ pour $j = 0, 1, \dots, N-1$.

1.7.6 Exemple : Retour sur le temps d'un jour au suivant

On reprend à nouveau l'exemple de la Section 1.2.3 sur le temps d'un jour au suivant avec les états S , ou 0, pour ensoleillé et N , ou 1, pour nuageux dont la matrice de transition est donnée par

$$P = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}.$$

La situation est illustré par le graphe de la Figure 18.

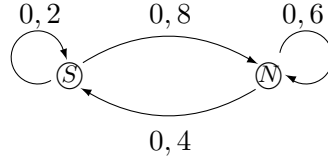


FIGURE 18 – Représentation des transitions pour le temps qu'il fait d'un jour au suivant.

Nous avons ici une seule classe d'états, donc une chaîne irréductible, récurrente positive, car le nombre d'états est fini, et apériodique, car $P_{00} = 0,2 > 0$, donc ergodique. On a alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^{(n)} = \begin{pmatrix} \pi_0 & \pi_1 \\ \pi_0 & \pi_1 \end{pmatrix}$$

pour la limite de la matrice de transition en n pas, où $(\pi_0, \pi_1) = \pi$ est la distribution stationnaire. L'équation de stationnarité $\pi = \pi P$ donne ici

$$\begin{aligned}\pi_0 &= 0,2\pi_0 + 0,4\pi_1, \\ \pi_1 &= 0,8\pi_0 + 0,6\pi_1,\end{aligned}$$

d'où $\pi_1 = 2\pi_0$. La condition $\pi_0 + \pi_1 = 1$ permet alors d'obtenir $\pi_0 = 1/3$ et $\pi_1 = 2/3$.

1.7.7 Exemple : Modèle de réparation

Dans l'exemple suivant, il est question d'une machine qui peut être soit en réparation (état 0), soit dans un état de fonctionnement qui est bon (état 1), moyen (état 2) ou mauvais (état 3). Si la machine est dans l'un des états de fonctionnement 1 ou 2 un jour donné, le jour suivant elle peut soit rester dans le même état, soit tomber dans un moins bon état de fonctionnement, c'est-à-dire 2 ou 3, respectivement. Lorsque la machine est en mauvais état de fonctionnement, elle est envoyée en réparation dès le lendemain, puis remise en bon état de fonctionnement pour le surlendemain. Les différents états et les transition possibles sont illustrés dans la Figure 19. Voici la matrice de transition pour l'état de la machine, 0, 1, 2 ou 3, d'un jour au suivant :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 & 0,2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

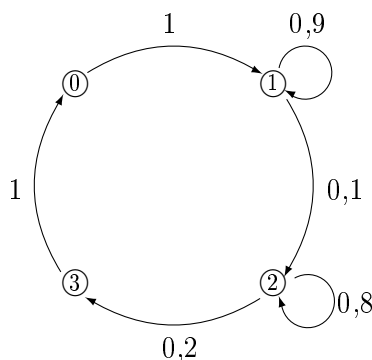


FIGURE 19 – Représentation graphique d'un modèle de réparation d'une machine.

Tous les états communiquent entre eux, et donc la chaîne est irréductible. Puisque le nombre d'états est fini, la chaîne est récurrente positive. De plus, $P_{11} = 0,9 > 0$, ce qui implique que la chaîne est apériodique, et donc ergodique.

Dans ce cas, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^{(n)} = \begin{pmatrix} \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \\ \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \\ \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \\ \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \end{pmatrix},$$

où $(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3) = \pi$ satisfait $\pi = \pi P$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \pi_3 \\ \pi_1 &= \pi_0 + 0,9\pi_1 \\ \pi_2 &= 0,1\pi_1 + 0,8\pi_2 \\ \pi_3 &= 0,3\pi_2, \end{aligned}$$

avec $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$. Cette condition s'écrit alors $\pi_0 + 10\pi_0 + 5\pi_0 + \pi_0 = 1$, d'où $\pi_0 = 1/17$. C'est la proportion moyenne de jours à long terme que la machine passe en réparation. De plus, $\mu_0 = \pi_0^{-1} = 17$ est le nombre moyen de jours qu'une machine nouvellement réparée fonctionne avant de retourner en réparation.

1.7.8 Exemple : Bonus-malus pour l'assurance-automobile

Dans cet exemple, on considère un système de bonus-malus pour l'assurance-automobile tel qu'utilisé au Brésil. Il y a 7 classes d'assurés. La classe dans laquelle se trouve un assuré détermine le pourcentage de la prime annuelle maximale qu'il doit payer. De la classe 7 à la classe 1, on a les pourcentages suivants : 100%, 90%, 85%, 80%, 75%, 70%, 65%. La classe d'un assuré change d'une année à la suivante selon le nombre de réclamations effectuées durant l'année. La matrice de transition pour les classes de 7 à 1 dans cet ordre est de la forme

$$P = \begin{pmatrix} 1 - p_0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 - p_0 & 0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 - \sum_{i=0}^1 p_i & p_1 & 0 & p_0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 - \sum_{i=0}^2 p_i & p_2 & p_1 & 0 & p_0 & 0 & 0 \\ 1 - \sum_{i=0}^3 p_i & p_3 & p_2 & p_1 & 0 & p_0 & 0 \\ 1 - \sum_{i=0}^4 p_i & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 & 0 & p_0 \\ 1 - \sum_{i=0}^5 p_i & p_5 & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 & p_0 \end{pmatrix},$$

où

$$p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

représente la probabilité de k réclamations durant l'année, pour $k \geq 0$. On fait donc l'hypothèse que les réclamations surviennent selon un processus de Poisson d'intensité annuelle $\lambda > 0$.

La Figure 20 représente les différents états et les transitions de probabilité positive.

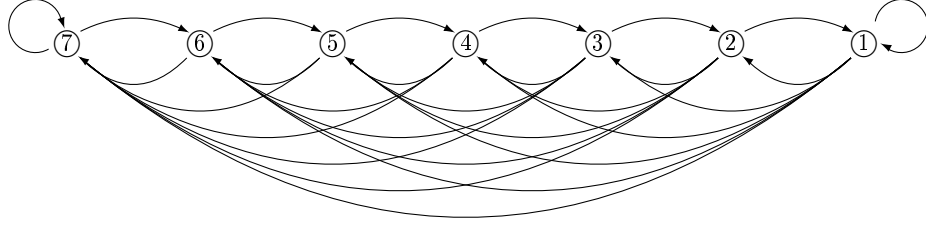


FIGURE 20 – Transitions pour des classes d'assurés selon un système de bonus-malus.

Il y a une seule classe, car tous les états communiquent entre eux, et elle est récurrente positive, car il y a un nombre fini d'états. De plus, elle est apériodique, car $P_{11} = p_0 > 0$. On a donc affaire à une chaîne irréductible ergodique.

Dans le cas où $\lambda = 0,10$, on peut vérifier que la distribution de probabilité $\pi = (\pi_7, \pi_6, \pi_5, \pi_4, \pi_3, \pi_2, \pi_1)$ qui satisfait $\pi = \pi P$, donc la distribution stationnaire, est donnée par

$$\begin{aligned} \pi_7 &= 0,00001, & \pi_6 &= 0,00005, & \pi_5 &= 0,00032, & \pi_4 &= 0,00215, \\ \pi_3 &= 0,01444, & \pi_2 &= 0,09355, & \pi_1 &= 0,88948. \end{aligned}$$

Cela signifie notamment que presque 89% des assurés en moyenne sont dans la classe 1 à long terme. De plus, le pourcentage moyen de la prime payée par les assurés à long terme est

$$\pi_7 \cdot 100\% + \pi_6 \cdot 90\% + \cdots + \pi_1 \cdot 65\% = 65,65\%,$$

ce qui est très près du pourcentage pour la classe 1.

1.7.9 Exemple : Marche aléatoire sur les entiers

On considère une marche aléatoire sur les entiers de telle sorte que les probabilités de transition sont données par

$$P_{i,i+1} = P_{i,i-1} = \frac{1}{2},$$

pour tout entier i , positif, négatif ou nul. Cette marche est illustrée dans la Figure 21.

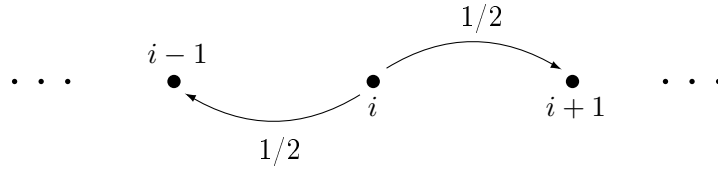


FIGURE 21 – Marche aléatoire sur les entiers.

La chaîne est clairement irréductible, car tous les états communiquent entre eux. Ensuite, elle est de période 2, car

$$d(0) = \text{p.g.c.d.}\{2k : k \geq 1\} = 2.$$

La chaîne est récurrente positive si et seulement si elle possède une distribution stationnaire (π_i) . Si c'est le cas, alors

$$\pi_i = \frac{1}{2}\pi_{i-1} + \frac{1}{2}\pi_{i+1},$$

pour tout entier i . Cette équation signifie que le point (i, π_i) est au milieu du segment de la droite L qui relie les points $(i-1, \pi_{i-1})$ et $(i+1, \pi_{i+1})$. Supposons que

$$\pi_{i-1} < \pi_{i+1},$$

pour un certain i . La droite L qui passe par ces points est alors de pente positive comme illustré dans la Figure 22. De plus, l'équation précédente garantit que le point $(i-2, \pi_{i-2})$ est sur le prolongement de la droite L . Par induction, c'est aussi le cas pour le point $(i-k, \pi_{i-k})$, pour tout $k \geq 1$. Or, cette droite étant de pente positive, ce point est sous l'axe horizontal, et donc $\pi_{i-k} < 0$, pour k assez grand. Ceci est une contradiction. Un raisonnement similaire s'applique si on suppose que $\pi_{i-1} > \pi_{i+1}$ pour un certain i . On conclut que

$$\pi_{i-1} = \pi_{i+1} = \pi_i,$$

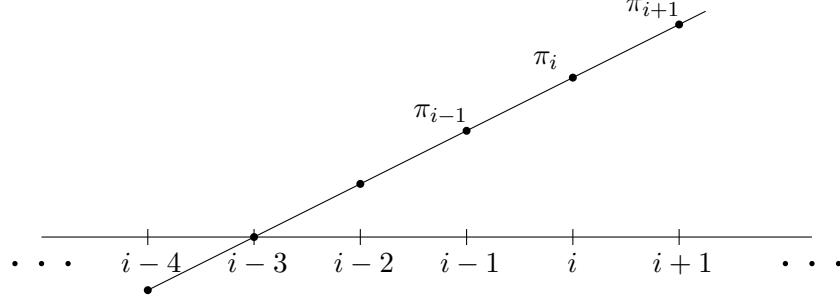


FIGURE 22 – Situation contradictoire pour une distribution stationnaire pour la marche aléatoire sur les entiers satisfaisant $\pi_{i-1} < \pi_{i+1}$ pour un certain i .

pour tout entier i , et donc que

$$\pi_i = c,$$

pour tout entier i , pour une certaine constante $c \geq 0$. Mais alors

$$\sum_i \pi_i = \begin{cases} 0 & \text{si } c = 0, \\ \infty & \text{si } c > 0, \end{cases}$$

ce qui entre en contradiction avec $\sum_i \pi_i = 1$. La chaîne ne peut donc pas être récurrente positive.

1.7.10 Exemple : Chaîne avec plusieurs classes d'états

On considère une chaîne de Markov à temps discret sur les états $0, 1, \dots, 6$ telle qu'illustrée dans la Figure 23 dont la matrice de transition est donnée par

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 \end{pmatrix}.$$

On relève trois classes d'états :

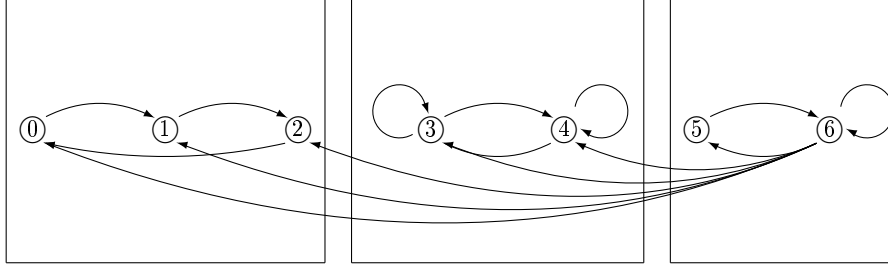


FIGURE 23 – Illustration d’une chaîne de Markov avec trois classes d’états.

- $\{0, 1, 2\}$, qui est récurrente positive, car fermée sur un nombre fini d’états, de distribution stationnaire $(1/3, 1/3, 1/3)$, car P_{ij} pour $i, j = 0, 1, 2$ forment une matrice de transition doublement stochastique pour 3 états, de période 3, car

$$d(0) = \text{p.g.c.d.}\{3k : k \geq 1\} = 3.$$

- $\{3, 4\}$, qui est récurrente positive, car fermée sur un nombre fini d’états, apériodique, car $P_{33} > 0$, donc ergodique, de distribution stationnaire $(1/2, 1/2)$, car P_{ij} pour $i, j = 3, 4$ forment une matrice de transition doublement stochastique pour 2 états.
- $\{5, 6\}$, qui est transitoire, car non fermée, apériodique, car $P_{66} > 0$.

On remarque que

$$P_{ij}^{(n)} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = j - i \text{ (modulo 3),} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

pour $i, j = 0, 1, 2$, ne converge pas lorsque $n \rightarrow \infty$, mais que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P_{ij}^{(k)} = \frac{1}{3},$$

pour $i, j = 0, 1, 2$.

Plus généralement, on a que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P^{(k)} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les 0 dans les colonnes correspondant aux états 3, 4, 5, 6 et sur les lignes correspondant aux états 0, 1, 2 illustrent le fait que la classe $\{0, 1, 2\}$ est fermée, et donc $f_{ij} = 0$ pour $i = 0, 1, 2$ et $j = 3, 4, 5, 6$. Les entrées non nulles sur chacune de ces lignes correspondent à la distribution stationnaire pour cette classe récurrente positive, pour laquelle $\mu_j^{-1} = 1/3$ et $f_{ij} = 1$ pour $i, j = 0, 1, 2$. La situation est analogue pour les lignes correspondant aux états de la classe récurrente positive $\{3, 4\}$ avec $\mu_j^{-1} = 1/2$ pour $j = 3, 4$.

D'autre part, les 0 apparaissant dans les deux dernières colonnes des deux dernières lignes correspondant aux états de la classe transitoire $\{5, 6\}$ s'expliquent par le fait que $\mu_j^{-1} = 0$, pour $j = 5, 6$.

Pour les entrées non nulles sur les deux dernières lignes, nous devons calculer f_{ij} pour $i = 5, 6$ et $j = 0, 1, 2, 3$. En conditionnant sur la première transition, on trouve par exemple que

$$f_{63} = \frac{1}{7}f_{63} + \frac{1}{7}f_{53} + \frac{1}{7}f_{43} + \frac{1}{7}f_{33} + \frac{1}{7}f_{23} + \frac{1}{7}f_{13} + \frac{1}{7}f_{03},$$

où $f_{03} = f_{13} = f_{23} = 0$, $f_{33} = f_{43} = 1$ et $f_{53} = f_{63}$. On obtient ainsi que

$$f_{63} = \frac{2/7}{5/7} = \frac{2}{5}.$$

Ce résultat est intuitivement clair. En effet lorsqu'on quitte la classe transitoire $\{5, 6\}$, il y a 2 chances sur 5 d'entrer dans la classe récurrente $\{3, 4\}$, et d'y rester en visitant tous les états avec probabilité 1. De façon analogue il y a 3 chances sur 5 pour l'autre classe récurrente $\{0, 1, 2\}$. Le théorème ergodique garantit alors que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P_{63}^{(k)} = f_{63} \times \frac{1}{\mu_3} = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{5}.$$

Les autres entrées peuvent être obtenues de la même façon. Ainsi on a que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P_{50}^{(k)} = f_{50} \times \frac{1}{\mu_0} = \frac{3}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{5}.$$

Il est même possible de montrer ici que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{50}^{(n)} = \frac{1}{5},$$

bien que l'état d'arrivée 0 est récurrent positif périodique. Cela est dû au fait que lorsqu'on entre dans la classe récurrente positive périodique $\{0, 1, 2\}$, il

il y a 1 chance sur 3 d'entrer par chacun des états, et la probabilité de chacun reste $1/3$ par la suite.

Ce résultat est cependant exceptionnel. Lorsque l'état d'arrivée j est récurrent positif périodique, le théorème ergodique ne garantit pas en général la convergence de $P_{ij}^{(n)}$. En fait, on n'a jamais convergence dans ce cas lorsque l'état de départ $i = j$.

1.7.11 Exemple : Déplacement aléatoire sur un échiquier

On suppose qu'un roi se déplace au hasard sur un échiquier de $8 \times 8 = 64$ cases en choisissant à chaque pas l'une des cases adjacentes avec la même probabilité. En numérotant les colonnes et les rangées de 1 à 8 tel qu'illustré dans la Figure 24, l'espace des positions est $\{(i, j) : i, j = 1, \dots, 8\}$. Il y a trois types de position : à l'intérieur (I), à un bord (B), à un coin (C).

								i	
	C	B	B	B	B	B	B	C	1
	B	I	I	I	I	I	I	B	2
	B	I	I	I	I	I	I	B	3
	B	I	I	I	I	I	I	B	4
	B	I	I	I	I	I	I	B	5
	B	I	I	I	I	I	I	B	6
	B	I	I	I	I	I	I	B	7
	C	B	B	B	B	B	B	C	8
j	1	2	3	4	5	6	7	8	

FIGURE 24 – Représentation d'un échiquier pour le déplacement d'un roi.

La probabilité de transition de la position u à la position v s'exprime sous la forme suivante :

$$P(u, v) = \frac{A(u, v)}{d(u)},$$

où

$$A(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{si } u \text{ et } v \text{ sont voisins,} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$d(u) = \sum_v A(u, v) = \begin{cases} 8 & \text{si } u \text{ est à l'intérieur (type } I), \\ 5 & \text{si } u \text{ est à un bord (type } B), \\ 3 & \text{si } u \text{ est à un coin (type } C). \end{cases}$$

On remarque que la matrice A est symétrique, c'est-à-dire $A(u, v) = A(v, u)$.

La succession des positions du roi sur l'échiquier est une chaîne de Markov qui est récurrente positive, car irréductible sur un nombre fini d'états. De plus elle est apériodique, car on peut retourner à la case $(1, 1)$ à partir de cette case en 2 ou 3 pas par exemple. La chaîne est donc ergodique.

On définit

$$\pi(u) = \frac{d(u)}{\sum_{u'} d(u')},$$

où

$$\sum_{u'} d(u') = 6 \times 6 \times 8 + 6 \times 4 \times 5 + 4 \times 3 = 420.$$

Par définition, on a $\pi(u) > 0$ pour tout u , et $\sum_u \pi(u) = 1$. De plus,

$$\pi(u)P(u, v) = \frac{A(u, v)}{\sum_{u'} d(u')} = \frac{A(v, u)}{\sum_{u'} d(u')} = \pi(v)P(v, u),$$

pour tout u, v . Dans ce cas, on dit que la chaîne est réversible.

On vérifie alors que

$$\begin{aligned} \pi(u) &= \pi(u) \sum_v P(u, v) \\ &= \sum_v \pi(u)P(u, v) \\ &= \sum_v \pi(v)P(v, u), \end{aligned}$$

pour tout u , ce qui est la condition de stationnarité. On conclut que $(\pi(u))$ est la distribution stationnaire.

1.8 *Démonstrations

1.8.1 Critères de classification

(a) Un état i est récurrent si et seulement si

$$\sum_{n \geq 1} P_{ii}^{(n)} = \infty.$$

Sinon il est transitoire, et alors nécessairement $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ii}^{(n)} = 0$.

(b) Un état récurrent i est récurrent nul si et seulement si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ii}^{(n)} = 0.$$

Sinon il est récurrent positif.

Démonstration : (en utilisant le théorème ergodique pour (b))

(a) On a

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} P_{ii}^{(n)} &= \sum_{n \geq 1} Pr(X_n = i | X_0 = i) \\ &= \sum_{n \geq 1} E(\mathbf{1}_{\{X_n=i\}} | X_0 = i) \\ &= E(N_i | X_0 = i), \end{aligned}$$

où

$$N_i = \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{\{X_n=i\}}$$

représente le nombre de visites futures à i . Or,

$$\begin{aligned} E(N_i | X_0 = i) &= \sum_{k \geq 1} k Pr(N_i = k | X_0 = i) \\ &= \sum_{k \geq 1} Pr(N_i \geq k | X_0 = i). \end{aligned}$$

De plus

$$Pr(N_i \geq k | X_0 = i) = \sum_{l \geq 1} f_{ii}^{(l)} Pr(N_i^{(l)} \geq k - 1 | X_l = i),$$

où

$$f_{ii}^{(l)} = Pr(X_l = i, X_{l-1} \neq i, \dots, X_1 \neq i | X_0 = i)$$

est la probabilité que la première visite future à i à partir de i à l'instant 0 ait lieu à l'instant l , et

$$N_i^{(l)} = \sum_{n \geq l+1} \mathbf{1}_{\{X_n = i\}}$$

représente le nombre de visites à i à partir de l'instant $l+1$. Par stationarité, on a

$$Pr(N_i^{(l)} \geq k-1 | X_l = i) = Pr(N_i \geq k-1 | X_0 = i).$$

D'autre part,

$$f_{ii} = \sum_{l \geq 1} f_{ii}^{(l)} = Pr(N_i \geq 1 | X_0 = i)$$

est la probabilité de visite future à i à partir de i . On obtient finalement l'équation de récurrence

$$Pr(N_i \geq k | X_0 = i) = f_{ii} Pr(N_i \geq k-1 | X_0 = i),$$

pour tout $k \geq 1$, d'où

$$Pr(N_i \geq k | X_0 = i) = f_{ii}^k,$$

par induction. On en déduit que

$$\sum_{n \geq 1} P_{ii}^{(n)} = \sum_{k \geq 1} f_{ii}^k = \begin{cases} \frac{f_{ii}}{1-f_{ii}} & \text{si } f_{ii} < 1, \\ \infty & \text{si } f_{ii} = 1. \end{cases}$$

Donc la série diverge si et seulement si i est récurrent, alors qu'elle converge si et seulement si i est transitoire, et dans ce cas, $P_{ii}^{(n)} \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

(b) La démonstration du résultat est une conséquence du théorème ergodique qui garantit que $P_{ii}^{(n)} \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$ si un état i est récurrent nul. Inversement, si $P_{ii}^{(n)} \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$, alors (voir le lemme 1 en appendice sur la limite d'une moyenne)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P_{ii}^{(k)} = 0.$$

Dans le cas où i est récurrent, la limite est égale à μ_i^{-1} par le théorème ergodique, d'où $\mu_i = \infty$, ce qui veut dire que i est récurrent nul.

Remarque

La suite $P_{ii}^{(n)}$ ne converge pas lorsque $n \rightarrow \infty$ si i est récurrent positif périodique. Sinon, on devrait avoir convergence vers 0, puisque $P_{ii}^{(n)} = 0$ pour tout n qui n'est pas un multiple de $d(i)$. On devrait donc avoir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P_{ii}^{(k)} = 0.$$

Or, la limite dans le cas où i est récurrent est donnée par μ_i^{-1} par le théorème ergodique, d'où $\mu_i = \infty$, ce qui est une contradiction avec un état i récurrent positif.

1.8.2 Proposition 1 sur la partition des états

Si $i \leftrightarrow j$, c'est-à-dire $P_{ij}^{(n)} P_{ji}^{(m)} > 0$ pour certains $n, m \geq 0$, alors :

- (a) i est récurrent si et seulement si j est récurrent ;
- (b) i est récurrent positif si et seulement si j est récurrent positif ;
- (c) i et j ont la même période.

Démonstration : (en utilisant les critères de classification)

- (a) Pour tout $r \geq 1$, on a les inégalités

$$P_{ii}^{(n+r+m)} \geq P_{ij}^{(n)} P_{jj}^{(r)} P_{ji}^{(m)} \geq 0,$$

d'où

$$\sum_{r \geq 1} P_{ii}^{(r)} \geq \sum_{r \geq 1} P_{ii}^{(n+r+m)} \geq P_{ij}^{(n)} P_{ji}^{(m)} \sum_{r \geq 1} P_{jj}^{(r)} \geq 0.$$

Donc, $\sum_{r \geq 1} P_{ii}^{(r)} < \infty$, c'est-à-dire, i transitoire, implique $\sum_{r \geq 1} P_{jj}^{(r)} < \infty$, c'est-à-dire, j transitoire, et inversement par symétrie. Par conséquent, i est

récurrent si et seulement si j est récurrent.

(b) On suppose que i et j sont récurrents. Par les inégalités en (a), si

$$P_{ii}^{(n+r+m)} \rightarrow 0 \text{ lorsque } r \rightarrow \infty,$$

c'est-à-dire, i récurrent nul, alors

$$P_{jj}^{(r)} \rightarrow 0 \text{ lorsque } r \rightarrow \infty,$$

c'est-à-dire, j récurrent nul, et inversement par symétrie. Par conséquent, i est récurrent positif si et seulement si j est récurrent positif.

(c) Par les inégalités en (a), si

$$P_{jj}^{(r)} > 0,$$

alors

$$P_{ii}^{(n+r+m)} > 0,$$

c'est-à-dire que $n + r + m$ est un multiple de $d(i)$, la période de i . Mais alors on a aussi

$$P_{jj}^{(2r)} \geq P_{jj}^{(r)} P_{jj}^{(r)} > 0,$$

d'où $n + 2r + m$ est un multiple de $d(i)$. En conséquence, $r = (n + 2r + m) - (n + r + m)$ est un multiple de $d(i)$. Par la définition de la période de j , on a alors $d(j) \geq d(i)$. Inversement, on a $d(j) \leq d(i)$ par symétrie. On conclut donc que $d(i) = d(j)$.

1.8.3 Proposition 2 sur la partition des états

(a) Si i est un état récurrent, alors

$$f_{ij} = \text{Pr}(\text{visite future à } j \mid \text{départ de } i) = 1$$

pour tout $j \leftrightarrow i$, et 0 autrement, c'est-à-dire $P_{ij}^{(n)} = 0$ pour tout $n \geq 1$ et tout $j \nleftrightarrow i$.

(b) Si i et j sont des états dans la même classe récurrente, alors $f_{ki} = f_{kj}$ pour tout état k .

Démonstration :

(a) Il va suffire de montrer que si i est récurrent, alors on a l'égalité

$$f_{ij} \cdot (1 - f_{ji}) = 0.$$

Si de plus $j \leftrightarrow i$, alors il existe un certain $n \geq 1$ tel que $0 < P_{ij}^{(n)} \leq f_{ij}$. Ceci n'est compatible avec l'égalité ci-dessus que si $f_{ji} = 1$. On a aussi $f_{ij} = 1$ par symétrie, car j est récurrent si i est récurrent et $j \leftrightarrow i$.

Si d'autre part $j \nleftrightarrow i$, alors ou bien $f_{ij} = 0$ ou bien $f_{ji} = 0$. En fait la seule possibilité compatible avec l'égalité ci-dessus est $f_{ij} = 0$.

Il reste donc à montrer l'égalité ci-dessus. Son interprétation est que la probabilité de ne pas retourner à i à partir de i en passant par j est 0 si i est récurrent. Cela est intuitivement clair, car cette probabilité est plus petite ou égale à la probabilité de ne pas retourner à i à partir de i , qui est nulle lorsque i est récurrent.

L'égalité est évidente pour $j = i$, car $f_{ii} = 1$ si i est récurrent. On considère donc $j \neq i$ et on suppose que $f_{ij} > 0$. Alors, $P_{ij}^{(n)} > 0$ pour un certain $n \geq 1$. Dans ce cas, il existe une suite d'états $i_0 = i, i_1, \dots, i_{n-1}, i_n = j$ telle que

$$P_{i_0, i_1} \cdot P_{i_1, i_2} \cdot \dots \cdot P_{i_{n-1}, i_n} > 0.$$

Soit $i_k = \max\{1 \leq l \leq n : i_l = i\}$. On a alors

$$g_{ij}^{(k)} \geq P_{i_k, i_{k+1}} \cdot \dots \cdot P_{i_{n-1}, i_n} > 0,$$

où

$$g_{ij}^{(k)} = \Pr(X_k = j; X_{k-1} \neq i, j; \dots; X_1 \neq i, j | X_0 = i)$$

représente la probabilité de la première visite future à j au k -ième pas à partir de i sans passer à nouveau par i . D'autre part, on a évidemment l'inégalité

$$0 = 1 - f_{ii} \geq g_{ij}^{(k)} (1 - f_{ji}),$$

d'où on conclut que $1 - f_{ji} = 0$.

(b) Pour tous les états i, j et k , on a

$$f_{kj} \geq f_{ki} f_{ij} = \Pr(\text{visite future à } j \text{ en passant par } i \mid \text{départ de } k)$$

en considérant la première visite future à i à partir de k . Si i et j sont dans la même classe récurrente, alors $f_{ij} = 1$ par (a), d'où l'inégalité $f_{kj} \geq f_{ki}$. L'inégalité inverse est obtenue par symétrie.

1.8.4 Proposition 3 sur la partition des états

Si le nombre d'états est fini, alors :

- (a) Tous les états récurrents sont récurrents positifs.
- (b) Dans tous les cas, il y a au moins un état récurrent.

Corollaire : Une chaîne irréductible (et toute classe fermée) sur un nombre fini d'états est récurrente positive.

Démonstration : (en utilisant le théorème ergodique)

(a) Par la proposition 1, si i est récurrent nul, alors j est récurrent nul pour tout $j \leftrightarrow i$. Par la proposition 2 et le théorème ergodique, on a alors

$$1 = \sum_j P_{ij}^{(n)} = \sum_{j:j \leftrightarrow i} P_{ij}^{(n)} \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow \infty,$$

puisque l'on a un nombre fini de termes qui tendent tous vers 0, ce qui est une contradiction avec une somme égale à 1.

(b) Si tous les états j sont transitoires, alors le théorème ergodique garantit la convergence vers 0 de chaque terme de la somme à gauche ci-dessus, ce qui mène à une contradiction pour les mêmes raisons. Il y a donc au moins un état récurrent, et cet état est nécessairement récurrent positif par (a). C'est aussi le cas pour la classe de cet état, ce qui démontre le corollaire.

1.8.5 Théorème sur la distribution stationnaire

Une chaîne irréductible a une distribution stationnaire (π_j) si et seulement si elle est récurrente positive. Dans ce cas la distribution stationnaire est unique et donnée par $\pi_j = \mu_j^{-1}$ pour tout j .

Démonstration de la nécessité : (en utilisant le théorème ergodique)

Pour tout état j , l'existence de la distribution stationnaire (π_j) implique que

$$\begin{aligned} 0 < \pi_j = \sum_l \pi_l P_{lj} &= \sum_l \sum_i \pi_i P_{il} P_{lj} \\ &= \sum_i \pi_i \sum_l P_{il} P_{lj} \\ &= \sum_i \pi_i P_{ij}^{(2)}, \end{aligned}$$

et donc par induction que

$$0 < \pi_j = \sum_i \pi_i P_{ij}^{(n)},$$

pour tout entier $n \geq 1$. L'équation est aussi trivialement satisfaite pour $n = 0$. Par conséquent, on a

$$0 < \pi_j = \sum_i \pi_i \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P_{ij}^{(k)} \right),$$

pour tout entier $n \geq 1$. Or, le théorème ergodique garantit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P_{ij}^{(k)} = f_{ij} \times \frac{1}{\mu_j} = \frac{1}{\mu_j},$$

pour i, j dans la même classe. En effet, si la classe est transitoire, alors $1/\mu_j = 0$, et si la classe est récurrente, alors $f_{ij} = 1$. Dans ces conditions, le lemme 2 en appendice sur la limite d'une somme donne

$$0 < \pi_j = \frac{1}{\mu_j} \sum_i \pi_i = \frac{1}{\mu_j},$$

c'est-à-dire,

$$\mu_j = \frac{1}{\pi_j} < \infty,$$

d'où l'état j est récurrent positif.

Démonstration de la suffisance :

On considère un état particulier i . On montre que

$$\pi_j = \frac{w_j}{\sum_l w_l}$$

pour tout état j , où w_j représente l'espérance du nombre de visites à j entre une visite à i et la suivante, définit une distribution stationnaire. On remarque d'abord que $w_j > 0$, puisque que j est atteignable à partir de i , et que

$$w_j = E(N_j) = \sum_l E(N_{lj}),$$

où N_{lj} représente le nombre de visites à j précédées immédiatement d'une visite à l , entre une visite à i et la suivante, et $N_j = \sum_l N_{lj}$ avec $N_j = 1$ si $j = i$. On obtient alors que

$$\begin{aligned} w_j &= \sum_l \sum_n E(N_{lj} | N_l = n) Pr(N_l = n) \\ &= \sum_l \sum_n n P_{lj} Pr(N_l = n) \\ &= \sum_l E(N_l) P_{lj} \\ &= \sum_l w_l P_{lj}, \end{aligned}$$

pour tout j . En divisant par $\sum_l w_l = \mu_i < \infty$, puisque i est récurrent positif, on a toutes les conditions d'une distribution stationnaire.

Remarque : Puisque $w_i = 1$, on a que $\pi_i = 1 / \sum_l w_l = 1 / \mu_i$, d'où $\pi_j = \pi_i w_j$, c'est-à-dire, $w_j = \pi_j / \pi_i$.

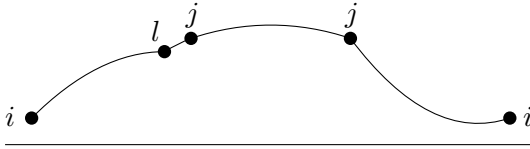


FIGURE 25 – Visites à j entre une visite à i et la suivante.

1.8.6 Théorème ergodique

(a) Dans tous les cas sauf peut-être dans celui où j est récurrent positif périodique, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^{(n)} = f_{ij} \times \frac{1}{\mu_j},$$

où

$$f_{ij} = Pr(\text{visite future à } j \mid \text{départ de } i)$$

et

$$\mu_j = E(\text{temps de premier retour à } j \mid \text{départ de } j).$$

(b) Dans tous les cas, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P_{ij}^{(k)} = f_{ij} \times \frac{1}{\mu_j}.$$

Démonstration de (a) :

Partie 1. On observe d'abord qu'il suffit de montrer que

$$P_{jj}^{(n)} \rightarrow \frac{1}{\mu_j} \text{ lorsque } n \rightarrow \infty.$$

En effet on a alors (voir la Figure 26)

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^n f_{ij}^{(k)} P_{jj}^{(n-k)} = \sum_{k \geq 1} f_{ij}^{(k)} \delta_{\{k \leq n\}} P_{jj}^{(n-k)} \rightarrow f_{ij} \times \frac{1}{\mu_j} \text{ lorsque } n \rightarrow \infty,$$

où

$$f_{ij}^{(k)} = Pr(\text{première visite future à } j \text{ au } k\text{-ième pas} \mid \text{départ de } i)$$

La convergence découle du lemme 2 en appendice sur la limite d'une somme, car

$$0 \leq f_{ij} = \sum_{k \geq 1} f_{ij}^{(k)} \leq 1$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_{\{k \leq n\}} P_{jj}^{(n-k)} = \frac{1}{\mu_j},$$

avec $\delta_{\{k \leq n\}} = 1$ si $k \leq n$, et 0 autrement.

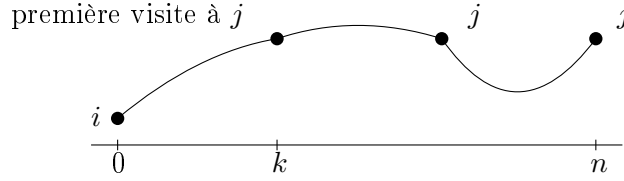


FIGURE 26 – Transition de i à j en n pas avec première visite à j au pas k .

Partie 2. On sait déjà, par les critères de classification des états, que $P_{jj}^{(n)} \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$ si j est transitoire, auquel cas $\mu_j^{-1} = 0$. On considère maintenant le cas où j est récurrent apériodique. La probabilité de retourner à j à partir de la dernière visite à j avant l'instant n est alors égale à 1. En décomposant l'événement selon l'instant de la dernière visite à j avant l'instant n (n exclu), on obtient l'équation de renouvellement

$$q(n) = \sum_{k \geq 1} \delta_{\{k \leq n\}} P_{jj}^{(n-k)} \left(\sum_{m \geq k} f_{jj}^{(m)} \right) = 1,$$

pour tout entier $n \geq 1$. Il suffit de montrer que si

$$\lambda_j = \lim_{l \rightarrow \infty} P_{jj}^{(n_l)},$$

pour une sous-suite $\{n_l\}$, alors $\lambda_j = \mu_j^{-1}$. On montre d'abord que

$$\lambda_j = \lim_{l \rightarrow \infty} P_{jj}^{(n_l - k)},$$

pour tout entier $k \geq 1$, en utilisant le fait démontré dans la partie 3 que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^{(n)} - P_{jj}^{(n)} = 0,$$

pour tout état i dans la classe de j , représentée par $C(j)$. En effet, si

$$\lambda'_j = \lim_{l \rightarrow \infty} P_{jj}^{(n_{l_r})},$$

pour une sous-suite $\{n_{l_r}\}$, alors

$$P_{jj}^{(n_{l_r})} = \sum_i P_{ji}^{(k)} P_{ij}^{(n_{l_r}-k)} = \sum_i P_{ji}^{(k)} \left(P_{ij}^{(n_{l_r}-k)} - P_{jj}^{(n_{l_r}-k)} \right) + \sum_i P_{ji}^{(k)} P_{jj}^{(n_{l_r}-k)},$$

dès que $n_{l_r} \geq k$, où la somme est sur tous les états i dans la classe $C(j)$, qui est récurrente, donc fermée. Le lemme 2 en appendice sur la limite d'une somme permet alors d'obtenir que

$$\lambda_j = \lambda'_j \sum_i P_{ji}^{(k)} = \lambda'_j.$$

Finalement, l'application du même lemme à $q(n_l)$ donne

$$1 = \lambda_j \sum_{k \geq 1} \sum_{m \geq k} f_{jj}^{(m)} = \lambda_j \sum_{m \geq 1} m f_{jj}^{(m)} = \lambda_j \mu_j,$$

ce qui permet de conclure.

Il reste à considérer le cas où j est récurrent nul périodique, disons de période $d(j) = d$ pour la chaîne (X_n) . Alors j est récurrent nul apériodique pour la chaîne (X_{kd}) , de telle sorte que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_{jj}^{(kd)} = 0,$$

par ce qui précède. D'autre part,

$$P_{jj}^{(n)} = 0,$$

si n n'est pas un multiple de d . On peut donc conclure que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{jj}^{(n)} = 0.$$

Partie 3. Soit j un état récurrent apériodique. Par le lemme 3 en appendice sur la condition d'apériodicité, il existe un entier $N(i, k) \geq 1$ pour tous i, k dans la classe de j , représentée par $C(j)$, tel que

$$P_{ik}^{(n)} > 0,$$

pour tout $n \geq N(i, k)$. On construit maintenant une chaîne couplée $((X_n, Y_n))$ sur l'espace des états de forme (i, k) pour i, k dans $C(j)$ dont les probabilités de transition sont données par

$$P_{(i,k)(j,l)} = P_{ij} P_{kl},$$

pour tous i, j, k, l dans $C(j)$. La chaîne couplée restreinte à cet espace d'états est irréductible, car

$$P_{(i,k)(j,l)}^{(n)} = P_{ij}^{(n)} P_{kl}^{(n)} > 0,$$

dès que $n \geq \max(N(i, j), N(k, l))$. On définit (voir la figure 27)

$$T = \min\{n \geq 1 : (X_n, Y_n) = (j, j)\}.$$

On remarque que

$$Pr(X_n = j | T = k) = P_{jj}^{(n-k)} = Pr(Y_n = j | T = k),$$

pour tout $n \geq k$. Par conséquent, pour tout i dans $C(j)$, on déduit que

$$\begin{aligned} P_{ij}^{(n)} &= Pr(X_n = j | X_0 = i, Y_0 = j) \\ &= \sum_{k \geq 1} Pr(X_n = j, T = k | X_0 = i, Y_0 = j) \\ &= \sum_{k \geq 1} Pr(X_n = j | T = k) Pr(T = k | X_0 = i, Y_0 = j) \\ &= \sum_{k=1}^n Pr(Y_n = j | T = k) Pr(T = k | X_0 = i, Y_0 = j) \\ &\quad + \sum_{k=n+1}^{\infty} Pr(X_n = j | T = k) Pr(T = k | X_0 = i, Y_0 = j) \\ &\leq \sum_{k \geq 1} Pr(Y_n = j, T = k | X_0 = i, Y_0 = j) \\ &\quad + \sum_{k=n+1}^{\infty} Pr(T = k | X_0 = i, Y_0 = j) \\ &= Pr(Y_n = j | X_0 = i, Y_0 = j) + Pr(T \geq n+1 | X_0 = i, Y_0 = j) \\ &= P_{jj}^{(n)} + Pr(T \geq n+1 | X_0 = i, Y_0 = j). \end{aligned}$$

De façon analogue, on trouve que

$$P_{jj}^{(n)} \leq P_{ij}^{(n)} + Pr(T \geq n+1 | X_0 = i, Y_0 = j).$$

On a donc

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} |P_{ij}^{(n)} - P_{jj}^{(n)}| &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} Pr(T \geq n+1 | X_0 = i, Y_0 = j) \\ &= 1 - f_{(i,j)(j,j)}. \end{aligned}$$

Si la chaîne couplée est récurrente, alors $f_{(i,j)(j,j)} = 1$, d'où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^{(n)} - P_{jj}^{(n)} = 0.$$

En fait on obtient le même résultat si la chaîne couplée est transitoire, car alors

$$\left(P_{ij}^{(n)}\right)^2 = P_{(i,j)(i,j)}^{(n)} \rightarrow 0,$$

lorsque $n \rightarrow \infty$, pour tout i dans $C(j)$.

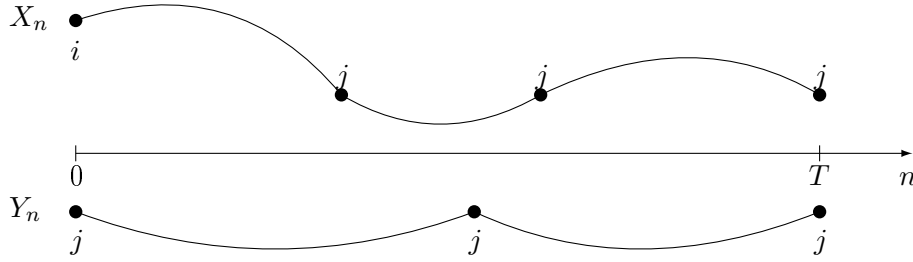


FIGURE 27 – Première visite future de la chaîne couplée (X_n, Y_n) à (j, j) à l'instant T étant donné que $(X_0, Y_0) = (i, j)$.

Démonstration de (b) :

Par le lemme en appendice sur la limite d'une moyenne, le résultat (b) découle du résultat (a) sauf dans le cas où l'état j est récurrent positif périodique, disons pour la chaîne (X_n) . Cependant, j est récurrent positif apériodique pour la chaîne (X_{ld}) , où $d = d(j) \geq 2$. Le résultat (a) garantit alors que

$$\lim_{l \rightarrow \infty} P_{jj}^{(ld)} = \frac{1}{\mu_j/d},$$

où μ_j/d représente l'espérance du temps de premier retour à j à partir de j avec d pas comme unité de temps. D'autre part,

$$P_{jj}^{(n)} = 0,$$

si n n'est pas un multiple de d . On peut donc conclure que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P_{jj}^{(k)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(n)}{n} \frac{1}{k(n)} \sum_{l=0}^{k(n)} P_{jj}^{(ld)} = \frac{1}{\mu_j},$$

où $k(n)$ = la partie entière de $(n-1)/d$, est tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(n)}{n} = \frac{1}{d}.$$

Finalement, pour un état de départ i quelconque, on procède comme dans la partie 1 de la démonstration de (a).

1.8.7 Chaîne irréductible apériodique à espace d'états fini

Une chaîne irréductible apériodique sur un nombre fini d'états, disons $0, 1, \dots, N-1$, est récurrente positive et la matrice de transition en n pas satisfait

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^{(n)} = \begin{pmatrix} \pi_0 & \pi_1 & \cdots & \pi_{N-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \pi_0 & \pi_1 & \cdots & \pi_{N-1} \end{pmatrix},$$

où $(\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{N-1})$ est la distribution stationnaire qui est donnée par $\pi_j = \mu_j^{-1}$ pour $j = 0, 1, \dots, N-1$.

Démonstration :

Ce résultat est une conséquence du théorème ergodique et du théorème sur la distribution stationnaire du fait que les propositions 2 et 3 sur la partition des états garantissent que la chaîne est récurrente positive et que $f_{ij} = 1$ pour tous états i, j . Nous en proposons ici une démonstration directe. Par le corollaire du lemme 3 en appendice sur la condition d'apériodicité, la matrice de transition P de la chaîne admet une puissance P^N , pour un certain entier $N \geq 1$, dont toutes les entrées sont strictement positives. On définit

$$M_j^{(n)} = \max_i P_{ij}^{(n)},$$

pour tout entier $n \geq 1$. L'équation de Chapman-Kolmogorov permet d'obtenir l'inégalité

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_l P_{il} P_{lj}^{(n-1)} \leq M_j^{(n-1)} \sum_l P_{il} = M_j^{(n-1)},$$

pour tout état i et tout entier $n \geq 2$. On a donc

$$M_j^{(n-1)} \geq M_j^{(n)} \rightarrow M_j,$$

lorsque $n \rightarrow \infty$. De même,

$$m_j^{(n-1)} \leq m_j^{(n)} = \min_i P_{ij}^{(n)} \rightarrow m_j,$$

lorsque $n \rightarrow \infty$. Toutes les probabilités de transition étant bornées par 1 et le nombre d'états étant fini, il existe une sous-suite d'entiers $\{n_k\}$ telle que

$$P_{ij}^{(n_k)} \rightarrow \pi_{ij},$$

lorsque $k \rightarrow \infty$, pour tous états i, j avec

$$M_j = \max_i \pi_{ij}, m_j = \min_i \pi_{ij}.$$

L'équation de Chapman-Kolmogorov donne alors

$$P_{ij}^{(N+n_k)} = \sum_l P_{il}^{(N)} P_{lj}^{(n_k)} \rightarrow \sum_l P_{il}^{(N)} \pi_{lj},$$

lorsque $k \rightarrow \infty$. On a donc

$$M_j^{(N+n_k)} \rightarrow \max_i \sum_l P_{il}^{(N)} \pi_{lj} = M_j.$$

Puisque $P_{il}^{(N)} > 0$, pour tous i, l , on doit avoir $\pi_{lj} = M_j$, pour tout l , ce qui implique que $m_j = M_j$. On conclut que

$$P_{ij}^{(n)} \rightarrow M_j,$$

lorsque $n \rightarrow \infty$, pour tous i, j . De plus, on a

$$M_j \geq \min_i P_{ij}^{(N)} > 0$$

et

$$\sum_j M_j = \sum_j \lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_j P_{ij}^{(n)} = 1,$$

avec

$$M_j = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{jj}^{(n)} = \sum_i \left(\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ji}^{(n-1)} \right) P_{ij} = \sum_i M_i P_{ij},$$

ce qui signifie que (M_j) est bien une distribution stationnaire. D'autre part,

$$M_j = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{jj}^{(n)} = \sum_{k=1}^n f_{jj}^{(k)} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} P_{jj}^{(n-k)} \right) = M_j \sum_{k \geq 1} f_{jj}^{(k)} = M_j f_{jj},$$

ce qui implique que $f_{jj} = 1$, c'est-à-dire que j est récurrent. Finalement, l'équation de renouvellement donne

$$1 = q(n) = \sum_{k \geq 1} \delta_{\{k \leq n\}} P_{jj}^{(n-k)} \left(\sum_{m \geq k} f_{jj}^{(m)} \right) \rightarrow M_j \sum_{m \geq k} m f_{jj}^{(m)} = M_j \mu_j,$$

d'où j est récurrent positif et $M_j = \mu_j^{-1}$.

1.9 *Appendice

1.9.1 Lemme 1 sur la limite d'une moyenne

On a

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \rightarrow a \text{ lorsque } n \rightarrow \infty,$$

si $a_k \rightarrow a$ lorsque $n \rightarrow \infty$ avec $0 \leq a_k \leq 1$ pour tout $k \geq 0$.

Démonstration :

On a

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k - a \right| &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |a_k - a| \\ &\leq \frac{2N}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=N}^{n-1} |a_k - a|, \end{aligned}$$

pour tout $N \geq 1$. Ceci est plus petit que $\varepsilon > 0$ arbitraire si $n > 4N/\varepsilon$, où N est tel que $|a_k - a| < \varepsilon/2$ pour tout $k \geq N$.

1.9.2 Lemme 2 sur la limite d'une somme

On a

$$\sum_{k \geq 1} a_k b_{n,k} \rightarrow b \sum_{k \geq 1} a_k \text{ lorsque } n \rightarrow \infty,$$

si $b_{n,k} \rightarrow b$ lorsque $n \rightarrow \infty$ pour tout $k \geq 1$, où $a_k \geq 0$ et $0 \leq b_{n,k} \leq 1$ pour tout $n, k \geq 1$, dans les cas suivants : (a) $\sum_{k \geq 1} a_k < \infty$, ou sinon (b) $b > 0$.

Remarque 1 : Le résultat s'applique à $b_{n,k} = b_{n-k}$ si $k \leq n$, et 0 autrement, avec $0 \leq b_m \leq 1$ pour tout $m \geq 0$ et $b_m \rightarrow b$ lorsque $m \rightarrow \infty$.

Remarque 2 : Dans le cas où $\sum_{k \geq 1} a_k < \infty$, la condition $0 \leq b_{n,k} \leq 1$ peut être remplacée par $|b_{n,k}| \leq B < \infty$, en utilisant le fait qu'alors $0 \leq \frac{b_{n,k} + B}{2B} \leq 1$.

Démonstration :

(a) On a

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k \geq 1} a_k (b_{n,k} - b) \right| &\leq \sum_{k \geq 1} a_k |b_{n,k} - b| \\ &\leq \sum_{k=1}^N a_k |b_{n,k} - b| + 2 \sum_{k > N} a_k, \end{aligned}$$

pour tout $N \geq 1$. Ceci est plus petit que $\varepsilon > 0$ arbitraire si N est assez grand pour que $\sum_{k > N} a_k < \varepsilon/4$, puis n assez grand pour que $|b_{n,k} - b| < \varepsilon(2N \sum_{k=1}^N a_k)^{-1}$ pour $k = 1, \dots, N$.

(b) On a

$$\sum_{k \geq 1} a_k b_{n,k} \geq \sum_{k=1}^N a_k b_{n,k},$$

pour tout $N \geq 1$. Ceci est plus grand que $M > 0$ arbitraire si N est assez grand pour que $\sum_{k=1}^N a_k > 2M/b$, puis n assez grand pour que $b_{n,k} > b/2$ pour $k = 1, \dots, N$.

1.9.3 Lemme 3 sur la condition d'apériodicité

Pour un état j , les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) $d(j) = \text{p.g.c.d.} \{n \geq 1 : P_{jj}^{(n)} > 0\} = 1$;

(2) $P_{jj}^{(n)} > 0$ pour tout $n \geq N(j)$ pour un certain entier $N(j) \geq 1$.

Dans ce cas, si j est accessible à partir de i , alors il existe un entier $N(i, j) \geq 1$ tel que $P_{ij}^{(n)} > 0$ pour tout $n \geq N(i, j)$.

Corollaire : La matrice de transition P d'une chaîne irréductible apériodique sur un nombre fini d'états admet une puissance P^N , pour un certain entier $N \geq 1$, dont toutes les entrées sont strictement positives.

Démonstration :

Il est évident que (2) implique (1). On suppose la condition (1) pour un état j et on définit l'ensemble

$$M = \{n \geq 1 : P_{jj}^{(n)} > 0, \},$$

qui est non vide. Cet ensemble satisfait alors les conditions suivantes :

(1) p.g.c.d. $\{n : n \text{ dans } M\} = 1$;

(1') $n_1 + n_2$ est dans M si n_1, n_2 sont dans M , car $P_{jj}^{(n_1+n_2)} \geq P_{jj}^{(n_1)} P_{jj}^{(n_2)}$.

On montre d'abord que M contient deux entiers consécutifs. Sinon, il existe un entier $k \geq 2$ tel que $\nu, \nu + k$ appartiennent à M , et $n_2 - n_1 \geq k$ pour tous $n_2 > n_1$ dans M . Par la condition (1), il existe un n dans M qui n'est pas divisible par k , c'est-à-dire, $n = mk + r$ pour certains entiers $m \geq 0$ et $0 < r < k$. Par la condition (1'), les entiers $n_2 = (m+1)(\nu + k)$ et $n_1 = n + (m+1)\nu$ appartiennent à M , mais la différence satisfait

$$0 < n_2 - n_1 = (m+1)k - n = k - r < k,$$

ce qui est une contradiction.

On suppose maintenant que $\nu, \nu + 1$ appartiennent à M , et on montre que tout $n \geq N(j) = \nu^2$ est dans M . En effet, on a alors $0 \leq n - \nu^2 = j\nu + l$ pour certains entiers $j \geq 0$ et $0 \leq l < \nu$. La condition (1') garantit que

$$n = l(\nu + 1) + (\nu + j - l)\nu$$

appartient à M .

Enfin, si j est accessible à partir de i , il existe un entier $m(i, j) \geq 0$ tel que

$$P_{ij}^{(m(i,j))} > 0,$$

et alors

$$P_{ij}^{(n)} \geq P_{ij}^{(m(i,j))} P_{jj}^{(n-m(i,j))} > 0,$$

dès que $n \geq N(i, j) = m(i, j) + N(j) \geq 1$.

Lorsque qu'une chaîne est irréductible apériodique sur un nombre fini d'états, on a la même inégalité pour toute paire d'états i, j dès que $n \geq \max(N(k, l))$.

1.10 Exercices

- Supposons que le temps qu'il fait d'une journée à la suivante est décrit par une chaîne de Markov sur les états 0, 1, 2 (0 pour ensoleillé, 1 pour nuageux, 2 pour pluvieux) dont la matrice de transition est donnée par

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

On est jeudi et c'est nuageux. Déterminer : (a) la probabilité que les trois prochains jours soient ensoleillés ; (b) la probabilité que dimanche prochain soit ensoleillé.

- En utilisant les propriétés d'une matrice de transition, montrer que si $P^{(2)}$ est la matrice de transition en deux pas d'une chaîne de Markov à temps discret sur deux états, 0 et 1, alors

$$P_{00}^{(2)} \geq P_{10}^{(2)}.$$

- Une unité de production comprend deux machines-outils qui fonctionnent indépendamment l'une de l'autre. Chaque machine-outil a une fiabilité 0,9 au cours d'une journée, ce qui signifie que sa probabilité de tomber en panne est 0,1. Il faut une nuit pour réparer une machine-outil qui tombe en panne mais une seule à la fois peut être réparée. (a) Quelle est la matrice de transition pour le nombre de machines-outils en état de fonctionnement au début d'une journée ? (b) S'il faut deux nuits pour réparer une machine-outil, quels états peut-on considérer

pour avoir une chaîne de Markov et quelle est sa matrice de transition ?

4. On considère un pentagone régulier dont les sommets sont numérotés de 1 à 5 dans le sens des aiguilles d'une montre. Initialement (instant 0), deux coccinelles sont placées aux sommets 1 et 3, respectivement. À chaque instant suivant, chacune des coccinelles se déplace, indépendamment de l'autre, vers l'un des deux sommets adjacents avec probabilité $1/2$ pour chacun d'eux. Combien de temps en moyenne faudra-t-il pour que les deux coccinelles se rencontrent au même sommet ? Suggestion : Considérer la distance entre les deux coccinelles.
5. Deux joueurs de tennis, A et B , sont rendus à égalité dans un jeu. Il faut deux points d'avance pour être déclaré vainqueur. Un joueur qui a un point d'avance est dit en avantage. En supposant que A a une probabilité p de gagner chaque point, et B une probabilité $1 - p$, indépendamment de tous les autres points, déterminer : (a) la probabilité pour A d'être déclaré vainqueur ; (b) l'espérance du nombre de fois que A sera en avantage avant la fin du jeu.
6. On lance une pièce de monnaie non pipée plusieurs fois indépendamment jusqu'à ce qu'on obtienne trois faces consécutives (FFF). Les résultats des trois premiers jets sont FPF . En incluant les trois premiers jets, déterminer la probabilité d'obtenir trois piles consécutives (PPP) avant la fin du jeu.
7. (SOA M A05 #5) Une espèce de fleurs peut se trouver dans trois états : viable (0), en voie de disparition (1), ou éteinte (2). Les transitions d'état d'une année à la suivante sont modélisées par une chaîne de Markov non-homogène avec matrice de transition Q_i de l'année $i - 1$ à l'année i définie comme suit :

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 & 0 \\ 0 & 0,7 & 0,3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Q_3 = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 & 0 \\ 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q_i = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

pour $i \geq 4$. Calculer la probabilité que l'espèce de fleurs s'éteigne éven-

tuellement étant donné qu'elle est initialement en voie de disparition.

8. Dans un processus de branchement avec générations séparées, chaque individu de chaque génération, indépendamment de tous les autres, produit k individus de la génération suivante avec probabilité $(1-p)p^k$ pour $k \geq 0$. Déterminer la probabilité d'extinction éventuelle de la descendance d'un individu : (a) si $0 < p < 1/2$; (b) si $p = 1/2$; (c) si $1/2 < p < 1$. Dans le cas où l'extinction éventuelle est certaine, déterminer le nombre moyen total de descendants d'un individu.
9. Supposons que, dans un processus de branchement, le nombre de descendants de première génération de tout individu a comme fonction génératrice $\varphi(s) = 1/2 + (1/2)s^3$. Quelle est la probabilité d'extinction éventuelle de la population s'il y a 2 individus à la génération initiale ?
10. Supposons que, dans un processus de branchement, le nombre de descendants de première génération de tout individu de la génération n a comme fonction génératrice $\psi(s) = 1/4 + (3/4)s$ si n est pair et $\varphi(s) = 1/4 + (3/4)s^2$ si n est impair. Quelle est la probabilité d'extinction éventuelle de la population s'il y a un seul individu à la génération initiale ($n = 0$) ?
11. Une plante survit d'un printemps au suivant avec probabilité $3/4$ et dans ce cas elle produit le printemps suivant 0, 1 ou 2 autres plantes identiques à elle-même avec la même probabilité $1/3$. Une plante peut donc survivre et se reproduire plusieurs printemps de suite. On suppose une seule plante au départ et on considère le nombre total de plantes à chaque printemps suivant. (a) L'extinction est-elle certaine ? (b) Si elle ne l'est pas, quelle est sa probabilité ?
12. Dans un processus de branchement avec générations séparées, chaque individu de chaque génération, indépendamment de tous les autres, produit un nombre d'individus de la génération suivante selon une loi binomiale de paramètres 3 et $1/2$, c'est-à-dire un nombre k avec probabilité

$$p_k = \frac{3!}{k!(3-k)!} \left(\frac{1}{2}\right)^3,$$

pour $k \geq 0$. Dans la génération initiale, il y a deux individus. (a) A-t-on extinction certaine de la population ? (b) Sinon, quelle est la

probabilité d'extinction éventuelle de la population ?

- 13.** On lance un dé non pipé à répétition de façon indépendante. On représente par X_n le nombre maximum de points obtenus lors des n premiers jets. Déterminer : (a) la matrice de transition de cette chaîne ; (b) les états transitoires, récurrents, périodiques, apériodiques.

- 14.** Déterminer les classes d'états transitoires, récurrentes nulles, récurrentes positives, périodiques (dans ce cas donner leur période) et ergodiques de la chaîne de Markov sur les états $0, 1, \dots$ dont la matrice de transition est :

(a)

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix};$$

(b)

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Justifier brièvement vos affirmations.

- 15.** Une chaîne de Markov sur trois états, 0, 1 et 2, a comme matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Déterminer : (a) les classes d'états et leur type ; (b) la matrice de transition en n pas ; (c) la limite de cette matrice lorsque n tend vers l'infini. Suggestion : Diagonaliser la matrice de transition.

- 16.** Considérons la promenade aléatoire sur les entiers avec probabilités de transition données par

$$P_{i,i+1} = p, \quad P_{i,i-1} = q = 1 - p.$$

- (a) Trouver $P_{ij}^{(n)}$ et en déduire que tous les états communiquent entre eux, et donc que la chaîne est irréductible. (b) Montrer que les états de la promenade aléatoire ne peuvent être récurrents positifs en utilisant la formule de Stirling :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^{n+1/2} e^{-n} \sqrt{2\pi}} = 1.$$

- (c) Montrer que tous les états sont récurrents nuls si $p = 1/2$, et transitoires sinon. Remarque : Si $a_n, b_n \geq 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/b_n = 1$, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergent ou divergent ensemble.

- 17.** Dans un test de Vrai ou Faux, les questions sont posées de telle façon que trois quarts du temps en moyenne une réponse Vrai suit une réponse Vrai et deux tiers du temps en moyenne une réponse Faux suit une réponse Faux. Quelle fraction approximative des réponses devrait être Vrai sur un grand nombre de questions ?

- 18.** Supposons que, d'une génération à la suivante, les familles changent de groupe de revenu (Bas, Moyen, Élevé) selon une chaîne de Markov dont la matrice de transition est

$$P = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0,1 & 0,3 & 0,6 \end{pmatrix}.$$

Comment devraient se répartir les familles dans les trois groupes de revenu après un grand nombre de générations ?

- 19.** Les résultats successifs de parties d'échecs d'un joueur donné contre un autre suivent une chaîne de Markov sur les états V pour victoire, D pour défaite et N pour nulle avec matrice de transition correspondante donnée par

$$P = \begin{pmatrix} 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Déterminer : (a) la proportion de victoires à long terme de ce joueur ; et (b) l'espérance du nombre de parties d'une victoire à la suivante.

20. Soit S_n la somme des points obtenus en lançant un dé non pipé n fois de façon indépendante. La probabilité que S_n soit un multiple de 6 converge-t-elle lorsque n tend vers l'infini ? Si oui, quelle est la limite ?

21. Une chaîne de Markov sur les états 0, 1, 2, 3, 4 a comme matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer, si elles existent, les limites des probabilités de transition en n pas suivantes : (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{0,0}^{(n)}$; (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{0,1}^{(n)}$.

22. Une boutique d'électronique garde en inventaire au plus 3 unités d'un produit, alors que chaque jour, la demande est de 0, 1, 2, 3 avec probabilités correspondantes $3/10$, $4/10$, $2/10$, $1/10$. Elle renouvelle l'inventaire à 3 unités pour le lendemain matin seulement si le nombre d'unités est inférieur ou égal à 1 à la fin d'une journée. Déterminer : (a) la matrice de transition pour le nombre d'unités à la fin d'une journée, d'une journée à la suivante ; (b) le profit net moyen par jour à long terme si le profit réalisé sur une unité vendue est de 12 dollars et le coût pour garder une unité en inventaire durant une nuit est de 2 dollars. Comparer ce profit à celui obtenu dans le cas où l'inventaire est renouvelé à 3 unités pour le lendemain matin dans tous les cas.

23. Montrer avec un exemple qu'une chaîne de Markov avec deux classes d'équivalence (la chaîne n'est donc pas irréductible) peut avoir plusieurs distributions stationnaires même si les deux classes sont ergodiques.

24. Une chaîne de Markov sur un nombre fini d'états avec matrice de transition P est dite régulière s'il existe un entier $N \geq 1$ tel que P^N est positive (c'est-à-dire que toutes les entrées sont > 0). Montrer que la chaîne de Markov sur les états 0, 1, 2, 3, 4 avec la matrice de transition

ci-dessous est régulière et trouver sa distribution stationnaire :

$$P = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 3/4 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 3/4 & 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 3/4 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 25.** Une sauterelle se déplace sur les sites 0, 1, 2 disposés sur un cercle en allant à chaque saut au site adjacent dans le sens des aiguilles d'une montre avec probabilité p et au site adjacent dans le sens contraire avec probabilité $1-p$. Soit $P_{ij}^{(n)}$ la probabilité de passer du site i au site j en n sauts. (a) Déterminer les valeurs de p pour lesquelles $P_{ij}^{(n)}$ converge pour tout i, j et trouver alors les valeurs limites. (b) Répondre à la même question pour $(1/n) \sum_{k=0}^{n-1} P_{ij}^{(k)}$. (c) Répondre aux deux mêmes questions dans le cas où on ajoute un site 3.

- 26.** Dans une population, il y a trois types de caractère génétique : D pour dominant, R pour récessif, H pour hybride. En supposant des accouplements entre frères et soeurs au hasard à l'intérieur des familles, les lois de Mendel prédisent les probabilités de transition ci-dessous d'une génération à la suivante pour les couples de parents DD, RR, DH, DR, HH, HR :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/16 & 1/16 & 1/4 & 1/8 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Déterminer, si elle existe, la distribution limite des couples de parents étant donné un couple HH initialement.

- 27.** Le modèle de diffusion d'Ehrenfest pour le nombre de molécules d'un gaz dans un compartiment A en communication avec un compartiment B qui contiennent ensemble m molécules admet les probabilités de transition

$$P_{i,i-1} = \frac{i}{m}, P_{i,i+1} = \frac{m-i}{m},$$

pour $i = 1, \dots, m-1$ et $P_{0,1} = P_{m,m-1} = 1$. Cette chaîne est irréductible. (a) Vérifier que la distribution binomiale de paramètres m et $1/2$

donnée par

$$\pi_i = \frac{m!}{i!(m-i)!2^m},$$

pour $i = 0, 1, \dots, m$, satisfait les équations d'équilibre et qu'elle est donc la distribution stationnaire. (b) Est-ce que $P_{i,i}^{(n)}$ converge vers π_i pour tout i lorsque n tend vers l'infini ? Justifier brièvement.

- 28.** Une chaîne de Markov à temps discret sur les entiers ≥ 0 a comme probabilités de transition

$$P_{i,i+1} = p, P_{i,i} = q, P_{i,0} = 1 - p - q,$$

pour $i \geq 1$, et $P_{0,1} = p, P_{0,0} = 1 - p$, où $p, q > 0$ et $p + q < 1$. (a) Pour quelles valeurs de p et q la chaîne est-elle récurrente positive ? (b) Dans ce cas, quelle est l'espérance du temps de premier retour à 0 à partir de 0 ?

- 29.** Une chaîne de Markov à temps discret sur les entiers ≥ 0 a comme probabilités de transition

$$P_{i,i+1} = \frac{1}{2(i+1)}, P_{i,0} = 1 - \frac{1}{2(i+1)},$$

pour $i \geq 0$. Déterminer : (a) les classes d'états et leur type (transitoire, récurrente positive ou nulle, ergodique) ; (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{0,2}^{(n)}$ si la limite existe, en précisant pourquoi la limite existe ou n'existe pas.

- 30.** Une machine à sous dans un casino vous donne 3 dollars si vous gagnez une partie, mais il faut payer 2 dollars par partie pour jouer. Il est annoncé sur la machine qu'il y a toujours au moins une chance sur deux de gagner à chaque partie. En effet, la probabilité de succès à une partie est égale à $(k+1)/(k+2)$ où k représente le nombre de succès aux deux parties précédentes. Est-ce que cette machine à sous est profitable pour le casino ?

1.11 *Exercices supplémentaires

- 31.** Supposons qu'un jour ensoleillé (S) est suivi d'un jour ensoleillé avec probabilité $2/3$ et d'un jour nuageux avec probabilité $1/3$, indépendamment du temps des autres jours, alors qu'un jour nuageux (N) est suivi

d'un jour nuageux avec probabilité $1/2$ et d'un jour ensoleillé avec probabilité $1/2$, indépendamment du temps des autres jours. Étant donné que c'est nuageux depuis deux jours, quelle est l'espérance du nombre de jours nuageux supplémentaires avant d'avoir deux jours ensoleillés consécutifs ?

- 32.** Un joueur de basketball a manqué ses deux premiers paniers et par la suite il réussit un panier avec les probabilités suivantes : $1/2$ s'il a manqué ses deux paniers précédents, $2/3$ s'il a manqué l'un ou l'autre de ses deux paniers précédents et $3/4$ s'il a réussi ses deux paniers précédents. Déterminer : (a) l'espérance du nombre de tentatives, en excluant les deux premières, pour réussir deux paniers consécutifs ; (b) l'espérance du nombre de paniers réussis sur toutes les tentatives en (a).
- 33.** Une compagnie d'assurances utilise un système de bonus-malus avec des niveaux de risque 1, 2, etc. . Si un assuré ne fait aucune réclamation durant une année et survit, ce qui se produit avec probabilité $3/4$, son niveau de risque diminue de 1 l'année suivante (ou reste le même si ce niveau est déjà à 1), alors que s'il fait une réclamation et survit, ce qui a probabilité $1/8$, son niveau de risque augmente de 1, et s'il décède, avec la probabilité complémentaire $1/8$, son niveau de risque tombe à 0. Calculer : (a) la probabilité que l'assuré décède avant d'atteindre le niveau de risque 3 à partir du niveau 1 ; (b) l'espérance du nombre d'années sans réclamation avant que l'assuré ne décède ou n'atteigne le niveau de risque 3 à partir du niveau 1.
- 34.** Deux amies, Ariane (A) et Béatrice (B), jouent à roche-papier-ciseaux jusqu'à ce que l'une des deux mène par deux parties, roche (R) l'emportant sur ciseaux, papier (P) l'emportant sur roche, ciseaux (C) l'emportant sur papier, et deux stratégies identiques créant l'égalité *en effaçant tous les gains précédents*. Les cinq états possibles pour décrire l'issue du jeu sont : -2 pour victoire A, -1 pour avantage A, 0 pour égalité, +1 pour avantage B, +2 pour victoire B. Ainsi, si les stratégies utilisées par A et B, respectivement, au cours des 5 premières parties sont (R, P), (C, P), (P, R), (C, C), (C, R), les états consécutifs à partir de l'état initial 0 sont +1, 0, -1, 0, +1. On suppose qu'Ariane et Béatrice choisissent chaque fois leur stratégie au hasard et indépendamment. Déterminer : (a) la matrice de transition de cette chaîne ; (b) les classes d'états et leur type (transitoire, récurrente positive ou

nulle, périodique ou apériodique) ; (c) l'espérance du nombre de parties avant la fin du jeu.

- 35.** Dans une série de parties indépendantes, un joueur mise 1 sur chaque partie. Selon l'issue de la partie, on suppose que le joueur triple sa mise avec probabilité $1/7$, qu'il la double avec probabilité $1/2$, et qu'il la perd sinon. Déterminer la probabilité de la ruine éventuelle du joueur étant donné qu'il dispose d'un avoir initial de 5.
- 36.** Le nombre d'enfants de chaque individu dans un processus de branchement est 1, 2 ou 3 avec la même probabilité p et 0 avec probabilité $1 - 3p$, pour $0 < p < 1$, indépendamment de tous les autres. Déterminer : (a) la condition sur p pour que la descendance d'un individu ne s'éteigne pas avec probabilité 1 ; (b) la probabilité d'extinction de la descendance d'un individu sous la condition trouvée en (a).
- 37.** Dans un processus de branchement avec générations séparées, chaque individu de chaque génération, indépendamment de tous les autres, produit $2k$ individus de la génération suivante avec probabilité $(1-p)p^k$ pour $k \geq 0$, où $0 < p < 1$. Attention au fait que le nombre d'individus produit est pair avec probabilité 1. Déterminer : (a) les valeurs de p pour lesquelles l'extinction de la descendance d'un individu est certaine ; (b) dans ce cas, l'espérance du nombre total de descendants d'un individu avant l'extinction ; (c) dans le cas contraire, la probabilité d'extinction de la descendance d'un individu.
- 38.** On considère le problème de la ruine du joueur avec un avoir initial $S_0 = 1$ et un avoir après n parties pour $n \geq 1$ donné par

$$S_n = S_0 + \xi_1 + \dots + \xi_n,$$

où $\xi_k = 2$ avec probabilité p et $\xi_k = -1$ avec probabilité $1 - p$, indépendamment pour $k \geq 1$ avec $0 < p < 1$. Cela signifie que le joueur gagne le double de sa mise en plus de récupérer celle-ci, qui est de 1 sur chaque partie, avec probabilité p alors qu'il perd cette mise avec probabilité $1 - p$. On définit

$$N = \min\{n \geq 1 : S_n = 0\},$$

qui représente le temps jusqu'à la ruine du joueur. En utilisant la théorie des processus de branchement, déterminer les valeurs de p pour

lesquelles :

- (a) la ruine est certaine, c'est-à-dire, $Pr(N < \infty) = 1$;
 - (b) la ruine se produit en un temps moyen fini, c'est-à-dire, $E(N) < \infty$.
- Dans ce cas, quelle est la valeur de $E(N)$?

- 39.** Supposons que le nombre d'étudiants gradués supervisés par un professeur d'une année à la suivante suive une chaîne de Markov sur les entiers $0, 1, 2, 3, 4$ avec probabilités de transition $P_{0,1} = P_{4,3} = 1$ et $P_{i,i-1} = P_{i,i+1} = 1/2$ pour $i = 1, 2, 3$. (a) Pourquoi la distribution stationnaire existe-t-elle et quelle est-elle ? (b) Quelle est la proportion de temps à long terme que ce professeur supervisera au moins un étudiant ? (c) En supposant que ce professeur commence à superviser un premier étudiant cette année, quelle est l'espérance du nombre d'années consécutives (incluant l'année en cours) durant lesquelles ce professeur supervisera au moins un étudiant ? (d) Est-ce que $P_{0,0}^{(n)}$ converge lorsque $n \rightarrow \infty$ et pourquoi en utilisant des arguments présentés au cours ?

- 40.** Une chaîne de Markov sur les états $0, 1, 2, 3, 4$ a comme matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer : (a) les classes d'états et leur type (transitoire, récurrente nulle ou positive, périodique) ; (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n$.

- 41.** Une chaîne de Markov à temps discret sur les états $0, 1, 2, 3, 4$ a des probabilités de transition en un pas données par la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer : (a) les classes d'états et leur type (transitoire ou récurrente, et dans ce cas récurrente positive ou nulle, apériodique ou périodique, et dans ce cas leur période, ergodique) ; (b) la limite lorsque n tend vers l'infini de la probabilité de transition de 0 à 1 en n pas,

$P_{01}^{(n)}$, si cette limite existe.

- 42.** Une chaîne de Markov à temps discret sur les états 0, 1, 2, 3, 4 a des probabilités de transition en un pas données par la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Déterminer : (a) les classes d'états et leur type (transitoire, récurrente positive ou nulle, périodique ou apériodique); (b) la limite lorsque n tend vers l'infini de la probabilité de transition de 0 à 4 en n pas, $P_{04}^{(n)}$, si la limite existe.

- 43.** Une chaîne de Markov à temps discret sur les états 0, 1, 2, 3, 4 a des probabilités de transition à un pas données par la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

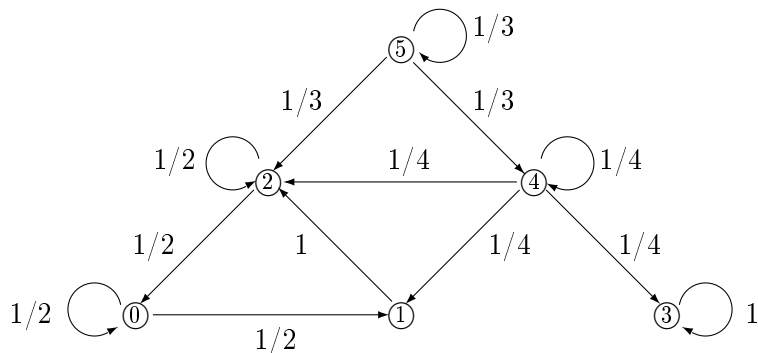
Déterminer : (a) les classes d'états et leur type (transitoire ou récurrente, et dans ce cas récurrente positive ou nulle, apériodique ou périodique, et dans ce cas leur période); (b) la limite lorsque n tend vers l'infini de la probabilité de transition de 2 à 1 en n pas, $P_{21}^{(n)}$, si cette limite existe.

- 44.** Une chaîne de Markov à temps discret sur les états 0, 1, 2, 3, 4, 5 a des probabilités de transition en un pas données par la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer : (a) la distribution stationnaire si elle existe ; (b) la limite lorsque n tend vers l'infini de la probabilité de transition de 0 à 0 en n pas, $P_{00}^{(n)}$, si la limite existe ; (c) la limite lorsque n tend vers l'infini de $(1/n) \sum_{k=0}^{n-1} P_{05}^{(k)}$, où $P_{05}^{(k)}$ est la probabilité de transition de 0 à 5 en k pas, si la limite existe. Justifier brièvement l'existence ou non dans chaque cas.

45. Les probabilités de transition en une étape d'une chaîne de Markov sur les états 0, 1, 2, 3, 4, 5 sont représentées dans la figure suivante :



Calculer la limite de la probabilité de transition de l'état 5 à l'état 1 en n étapes, représentée par $P_{51}^{(n)}$, lorsque $n \rightarrow \infty$. Justifier votre réponse.

46. Une personne dispose de trois parapluies qui sont ou bien au bureau ou bien à la maison. Au départ de la maison tous les matins et du bureau tous les soirs, elle prend un parapluie s'il pleut à ce moment-là et s'il y a un parapluie disponible à cet endroit-là. Supposons qu'il pleuve à chaque départ avec probabilité $1/4$ indépendamment de tous les autres. Soit X_n le nombre de parapluies disponibles au lieu du départ au moment du n -ième départ. Déterminer : (a) les états et la matrice de transition de cette chaîne ; (b) la proportion de fois à long terme que la personne se fera mouiller parce qu'il pleut au moment du départ et qu'il n'y a aucun parapluie disponible au lieu du départ à ce moment-là.

47. Une chaîne de Markov sur les états 0, 1, 2, 3, 4 a comme matrice de

transition

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Déterminer : (a) les classes d'états et leur type (transitoire, récurrente positive ou nulle, périodique ou apériodique) ; (b) la probabilité d'atteindre éventuellement l'état 4 à partir de l'état 0, représentée par f_{04} ; (c) la limite de la probabilité de transition de l'état 0 à l'état 4 en n pas lorsque $n \rightarrow \infty$, c'est-à-dire, $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{04}^{(n)}$.

2 Chaînes de Markov à temps continu

2.1 Description générale

La description des chaînes de Markov à temps continu présentée dans cette section est la plus intuitive. Il s'agit en fait d'une construction à partir de temps de séjours et de probabilités de changement d'état sous des conditions qui sont généralement vérifiées. Cette description n'est cependant pas la plus générale. Elle exclut notamment la possibilité de transitions instantanées ou très rapprochées. Elle convient toutefois pour la plupart des applications.

2.1.1 Retour sur les chaînes à temps discret

Considérons une chaîne de Markov $\{X_n\}_{n \geq 0}$ à temps discret sur les états $i \geq 0$, dont les probabilités de transition sont données par P_{ij} , pour $i, j \geq 0$. Un temps de séjour à un état $i \geq 0$ est dénoté par S_i . Ce temps correspond à un nombre de transitions pour changer d'état à partir de l'état i tel qu'illustré dans la Figure 28. On remarque les propriétés suivantes.

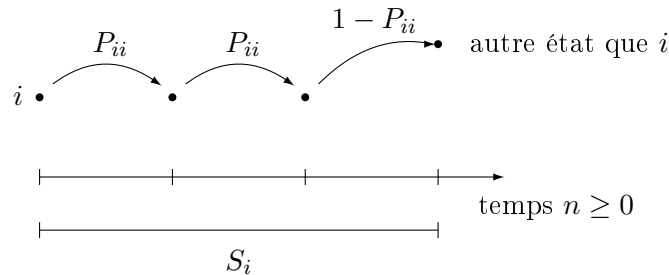


FIGURE 28 – Temps de séjour à un état i d'une chaîne de Markov à temps discret.

- Le temps de séjour S_i prend la valeur $k \geq 1$ avec probabilité

$$Pr(S_i = k) = P_{ii}^{k-1}(1 - P_{ii}),$$

et par conséquent

$$Pr(S_i > l) = \sum_{k \geq l+1} Pr(S_i = k) = P_{ii}^l,$$

pour tout $l \geq 0$.

- Le temps de séjour S_i est donc une variable aléatoire discrète qui suit une loi géométrique de paramètre $1 - P_{ii}$, ce qui est noté $S_i \sim G(1 - P_{ii})$. Le cas $P_{ii} = 1$ correspond à un état i absorbant avec un temps de séjour infini.
- Il possède une espérance donnée par

$$E(S_i) = \sum_{l \geq 0} Pr(S_i > l) = \frac{1}{1 - P_{ii}}.$$

- Il est sans mémoire, car

$$\begin{aligned} Pr(S_i > k + l | S_i > k) &= \frac{Pr(S_i > k + l)}{Pr(S_i > k)} \\ &= \frac{P_{ii}^{k+l}}{P_{ii}^k} \\ &= P_{ii}^l \\ &= Pr(S_i > l), \end{aligned}$$

pour $k, l \geq 1$.

- Il est indépendant des états visités auparavant et des temps de séjour à ces états. Cela est garanti par la propriété markovienne.
- Finalement, les probabilités de transition conditionnelles étant donné qu'il y a changement d'état, c'est-à-dire lorsqu'on quitte l'état i , sont indépendantes des temps de séjour et des transitions qui ont précédé, et sont données par

$$q_{ij} = \begin{cases} \frac{P_{ij}}{1 - P_{ii}} & \text{si } j \neq i, \\ 0 & \text{si } j = i. \end{cases}$$

Par convention, $q_{ij} = 0$ pour tout j si $P_{ii} = 1$, c'est-à-dire si i est absorbant.

La matrice de transition lorsqu'il y a changement d'état, $Q = (q_{ij})$, dont l'entrée sur la rangée i et dans la colonne j est donnée par la probabilité q_{ij} , pour tous les états i et j , ainsi que les paramètres des lois géométriques pour les temps de séjours décrivent entièrement la chaîne.

2.1.2 Chaînes à temps continu

Considérons maintenant les propriétés correspondantes du temps de séjour S_i à un état $i \geq 0$ dans un contexte de processus à temps continu $\{X_t\}_{t \geq 0}$. La Figure 29 illustre cette situation.

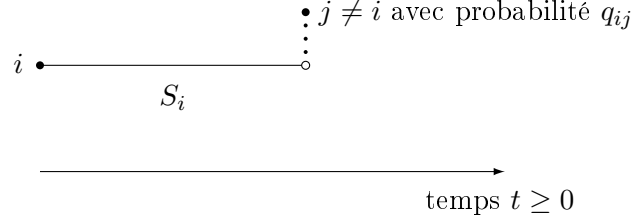


FIGURE 29 – Temps de séjour à un état i d'une chaîne de Markov à temps continu.

- Le temps de séjour S_i suit une loi continue à valeurs strictement positives, interdisant ainsi les visites instantanées. Il s'agit en fait d'une loi exponentielle de paramètre $0 \leq \lambda_i < \infty$, ce qui est noté $S_i \sim \text{Exp}(\lambda_i)$, avec $\lambda_i = 0$ lorsque i est un état absorbant.
- Il prend alors une valeur supérieure à $h > 0$ avec probabilité

$$\Pr(S_i > h) = \int_h^\infty \lambda_i e^{-\lambda_i t} dt = e^{-\lambda_i h}.$$

Par le développement de Taylor, nous obtenons que

$$\Pr(S_i > h) = 1 - \lambda_i h + o(h),$$

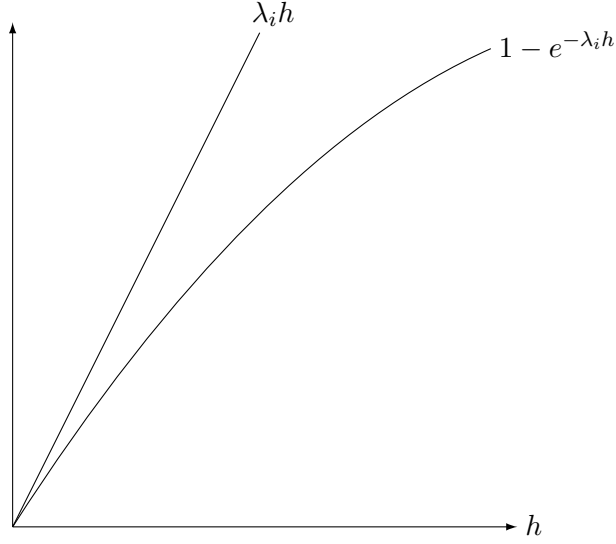
où $o(h)/h \rightarrow 0$ lorsque $h \rightarrow 0$. Nous avons donc que

$$\Pr(0 < S_i \leq h) = 1 - e^{-\lambda_i h} = \lambda_i h + o(h).$$

Ainsi, λ_i est le taux avec lequel on quitte l'état i . De plus, on a l'inégalité

$$\Pr(0 < S_i \leq h) \leq \lambda_i h.$$

En effet, $1 - e^{-\lambda_i h}$ pour $h \geq 0$ est une fonction concave dont la dérivée à $h = 0$ est la pente de la droite $\lambda_i h$ pour $h \geq 0$ (voir la Figure 30).

FIGURE 30 – Graphique pour $1 - e^{-\lambda_i h} \leq \lambda_i h$.

- Le temps de séjour S_i possède une espérance donnée par

$$E(S_i) = \int_0^{\infty} Pr(S_i > h) dh = \frac{1}{\lambda_i}.$$

- Il est sans mémoire, car

$$\begin{aligned} Pr(S_i > s + h | S_i > s) &= \frac{e^{-\lambda_i(s+h)}}{e^{-\lambda_i s}} \\ &= e^{-\lambda_i h} \\ &= Pr(S_i > h), \end{aligned}$$

pour $s, h > 0$.

- Il est indépendant des états visités auparavant et des temps de séjour à ces états.
- Lorsqu'on quitte l'état i , il y a transition de i à $j \neq i$ avec probabilité q_{ij} , indépendamment des temps de séjour et des transitions qui ont précédé. On a $q_{ij} = 0$ si $j = i$ par définition, ou si i est absorbant ($\lambda_i = 0$) par convention. Si i n'est pas absorbant ($\lambda_i > 0$), alors

$$\sum_j q_{ij} = 1.$$

La matrice de transition lorsqu'il y a changement d'état, $Q = (q_{ij})$, et les paramètres des lois exponentielles pour les temps de séjour décrivent entièrement le processus. Si on définit X_t comme l'état à l'instant t , alors $\{X_t\}_{t \geq 0}$ est une chaîne de Markov à temps continu, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} Pr(X_{t+h} = j | X_t = i, X_s = i_s \text{ pour } 0 \leq s < t) &= Pr(X_{t+h} = j | X_t = i) \\ &= P_{ij}(h), \end{aligned}$$

pour tous les états j, i, i_s pour $0 \leq s < t$ et pour $t, h > 0$.

Remarque : Les chaînes à temps discret et les chaînes à temps continu ont des propriétés analogues. La plus importante est d'être des processus sans mémoire : leur comportement futur étant donné l'état présent ne dépend pas des états et des temps de séjour passés. En effet, les temps de séjour sont sans mémoire et les changements d'état indépendants de tous les états précédents.

2.1.3 Minimum de variables de loi exponentielle

Soient T_1, T_2, \dots, T_n des variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, respectivement. On définit

$$T = \min(T_1, \dots, T_n).$$

De façon typique, T_1, \dots, T_n représentent des temps avant que des événements différents ne se produisent, et alors T est le temps avant que le premier de ces événements ne se produise. On a les deux propriétés suivantes :

- (a) La variable aléatoire T est de loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 + \dots + \lambda_n$, c'est-à-dire

$$T \sim \text{Exp}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n).$$

- (b) La variable aléatoire T prend la valeur de T_i avec probabilité proportionnelle à λ_i , c'est-à-dire

$$T = T_i \text{ avec probabilité } \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n},$$

pour $i = 1, \dots, n$.

- (c) L'événement $T = T_i$ est indépendant de la variable aléatoire T .

Démonstration :

- (a) En utilisant les hypothèses d'indépendance et de loi exponentielle pour les variables aléatoires T_1, \dots, T_n , on obtient que

$$\begin{aligned}
 Pr(T > t) &= Pr(\min(T_1, \dots, T_n) > t) \\
 &= Pr(T_1 > t, \dots, T_n > t) \\
 &= Pr(T_1 > t) \dots Pr(T_n > t) \\
 &= e^{-\lambda_1 t} \dots e^{-\lambda_n t} \\
 &= e^{-(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)t},
 \end{aligned}$$

pour tout $t > 0$.

- (b) En conditionnant sur la valeur de T_i et en utilisant l'indépendance des variables T_1, \dots, T_n , on calcule que

$$\begin{aligned}
 Pr(T = T_i) &= \int_0^\infty Pr(T_j \geq s, \text{ pour tout } j \neq i) \lambda_i e^{-\lambda_i s} ds \\
 &= \int_0^\infty \left(\prod_{j \neq i} e^{-\lambda_j s} \right) \lambda_i e^{-\lambda_i s} ds \\
 &= \lambda_i \int_0^\infty \left(e^{-s \sum_{j=1}^n \lambda_j} \right) ds \\
 &= \lambda_i \left(\frac{e^{-s \sum_{j=1}^n \lambda_j}}{-\sum_{j=1}^n \lambda_j} \right) \Big|_0^\infty \\
 &= \frac{\lambda_i}{\sum_{j=1}^n \lambda_j}.
 \end{aligned}$$

- (c) En utilisant les mêmes arguments que précédemment, mais en conditionnant sur la valeur de $T_i > t$, on trouve que

$$\begin{aligned}
 Pr(T = T_i, T > t) &= \lambda_i \left(\frac{e^{-s \sum_{j=1}^n \lambda_j}}{-\sum_{j=1}^n \lambda_j} \right) \Big|_t^\infty \\
 &= \frac{\lambda_i}{\sum_{j=1}^n \lambda_j} e^{-t \sum_{j=1}^n \lambda_j} \\
 &= Pr(T = T_i) Pr(T > t),
 \end{aligned}$$

pour tout $t > 0$.

2.1.4 Conditionnement sur le premier changement d'état

La probabilité d'atteindre éventuellement un état à partir d'un autre état dans une chaîne de Markov à temps continu peut être obtenue en conditionnant sur le premier changement d'état. La méthode est analogue au conditionnement sur la première transition dans une chaîne de Markov à temps discret, mais en utilisant les probabilités de transition lorsqu'il y a changement d'état, qui sont données par les entrées de la matrice $Q = (q_{ij})$. On obtient ainsi un système d'équations linéaire qu'il suffit de résoudre.

Pour l'espérance du temps pour atteindre un état à partir d'un autre état, disons

$$\tau_i = E(\text{temps avant l'état } 0 \mid \text{départ de l'état } i),$$

le conditionnement sur le premier changement d'état donne l'équation

$$\tau_i = \lambda_i^{-1} + \sum_j q_{ij} \tau_j,$$

où λ_i^{-1} est l'espérance d'un temps de séjour à l'état i , pour tout $i \neq 0$. Il suffit alors de résoudre ce système avec $\tau_0 = 0$.

2.1.5 Exemple : Entretien de rampes mobiles

Dans cet exemple, deux rampes mobiles fonctionnent indépendamment l'une de l'autre, chacune pendant un temps de loi $\text{Exp}(\mu)$, jusqu'à ce que l'une des deux tombe en panne. Lorsque cela se produit, la rampe mobile en panne est réparée par un technicien. Cependant, comme il y a un seul technicien, une seule rampe mobile peut être réparée à la fois. Le temps de cette réparation est de loi $\text{Exp}(\nu)$. Tous les temps de réparation et de fonctionnement sont indépendants.

On considère X_t , le nombre de rampes mobiles qui fonctionnent à l'instant $t \geq 0$. Il y a trois états possibles, 0, 1 ou 2. Lorsqu'on est à l'état 0, on y reste jusqu'à temps que la rampe mobile qui est en réparation soit remise en fonctionnement, soit un temps S_0 de loi $\text{Exp}(\nu)$. Si en revanche on est à l'état 2, on y reste jusqu'à ce que l'une des deux rampes mobiles qui sont en fonctionnement tombe en panne, soit un temps $S_2 = \min(T_1, T_2)$, où T_1 et T_2 sont des variables aléatoires indépendantes de loi $\text{Exp}(\mu)$, donc un temps S_2 de loi $\text{Exp}(2\mu)$. Enfin, si on est à l'état 1, cela signifie qu'une rampe mobile est en fonctionnement, ce qu'elle reste un temps T de loi $\text{Exp}(\mu)$, alors que l'autre est en réparation, ce qu'elle reste un temps R de loi $\text{Exp}(\nu)$ indépendant de T . Il y a dans ce cas un changement d'état après un temps

$S_1 = \min(T, R)$ de loi $\text{Exp}(\mu + \nu)$ avec transition de l'état 1 à l'état 0 avec probabilité

$$q_{10} = \Pr(S_1 = T) = \frac{\mu}{\mu + \nu},$$

et transition de l'état 1 à l'état 2 avec probabilité

$$q_{12} = \Pr(S_1 = R) = \frac{\nu}{\mu + \nu}.$$

La situation est schématisée dans la Figure 31.

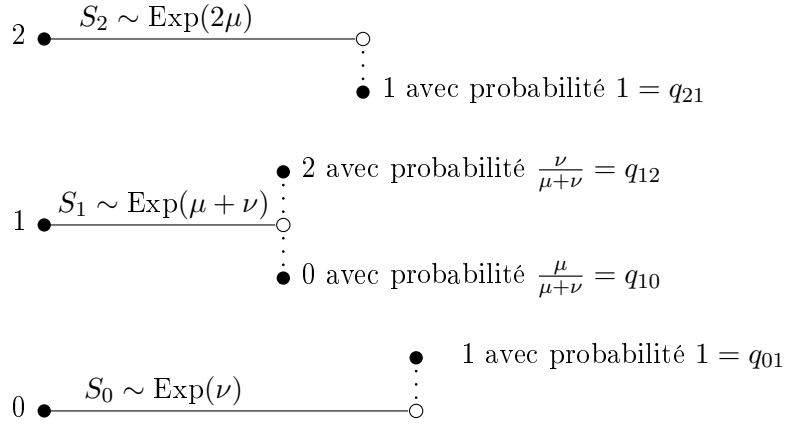


FIGURE 31 – Temps de séjour et probabilités de changement d'état dans l'exemple des rampes mobiles.

Nous voulons calculer l'espérance du temps avec au moins une rampe mobile en fonctionnement à partir du moment où il y en a deux en fonctionnement. Nous allons utiliser la méthode de conditionnement sur le premier changement d'état. Posons

$$\tau_i = E(\text{temps avant l'état 0} \mid \text{départ de l'état } i),$$

pour $i = 0, 1, 2$. On déduit alors le système d'équations linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \tau_0 &= 0, \\ \tau_1 &= \frac{1}{\nu + \mu} + \frac{\mu}{\nu + \mu} \tau_0 + \frac{\nu}{\nu + \mu} \tau_2, \\ \tau_2 &= \frac{1}{2\mu} + \tau_1. \end{aligned}$$

En effet, une fois à l'état 1, par exemple, on y reste un temps de loi $\text{Exp}(\nu + \mu)$ d'espérance $(\nu + \mu)^{-1}$, à la suite de quoi on passe ou bien à l'état 0 avec

probabilité $\mu/(\nu + \mu)$, ou bien à l'état 2 avec probabilité $\nu/(\nu + \mu)$. Dans le premier cas, on ajoute τ_0 à l'espérance du temps avant d'atteindre l'état 0, qui est trivialement 0. Dans le deuxième cas, on ajoute τ_2 , qui est à son tour l'espérance du temps passé à l'état 2, soit $(2\mu)^{-1}$ plus l'espérance du temps avant d'atteindre l'état 0 à partir de l'état 1, soit τ_1 . En exprimant τ_1 en fonction de τ_2 , on obtient que

$$\tau_2 = \frac{1}{2\mu} + \frac{1}{\nu + \mu} + \frac{\nu}{\nu + \mu} \tau_2,$$

d'où on trouve que

$$\tau_2 = \left(1 - \frac{\nu}{\nu + \mu}\right)^{-1} \left(\frac{\nu + 3\mu}{2\mu(\nu + \mu)}\right) = \frac{\nu + 3\mu}{2\mu^2}.$$

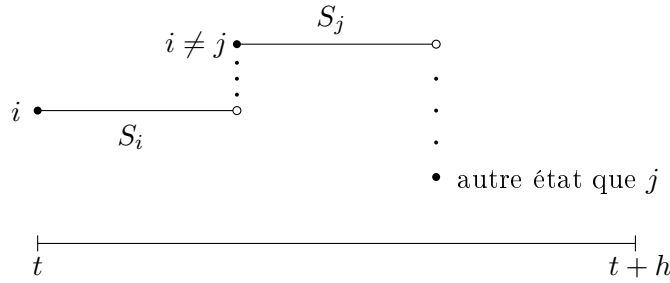


FIGURE 32 – Au moins deux changements d'état dans l'intervalle de temps $[t, t + h]$ à partir de l'état i .

2.1.6 Hypothèse sur les changements d'état

Nous faisons l'hypothèse supplémentaire suivante qui porte sur la probabilité de plusieurs changements d'état sur un petit intervalle de temps à partir de tout état i :

$$Pr(2 \text{ changements d'état ou plus dans } [t, t + h] \mid \text{état } i \text{ à } t) = o(h).$$

Cette hypothèse rend nulle la probabilité de points d'accumulation pour les temps d'arrivée de changements d'états, et signifie donc que les changements d'état sont certainement isolés. Cette hypothèse est vérifiée si

$$\sum_{j:j \neq i} \lambda_j q_{ij} < \infty,$$

pour tout état i . En effet, la probabilité ci-dessus satisfait alors (voir la Figure 32)

$$\begin{aligned} \sum_{j:j \neq i} Pr(S_i + S_j < h)q_{ij} &\leq \sum_{j:j \neq i} Pr(S_i < h, S_j < h)q_{ij} \\ &= \sum_{j:j \neq i} Pr(S_i < h)Pr(S_j < h)q_{ij} \\ &\leq \sum_{j:j \neq i} \lambda_i \lambda_j h^2 q_{ij}, \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{\sum_{j:j \neq i} Pr(S_i + S_j < h)q_{ij}}{h} \leq \sum_{j:j \neq i} \lambda_i \lambda_j h q_{ij} = h \lambda_i \sum_{j:j \neq i} \lambda_j q_{ij} \rightarrow 0,$$

lorsque $h \rightarrow 0$.

Remarque : Cette hypothèse est vérifiée si :

- le nombre d'états est fini,
- $q_{ij} \neq 0$ pour un nombre fini de j pour tout i , ou
- $\lambda_j \leq \lambda < \infty$ pour tout j .

Ces conditions couvrent tous les cas de chaîne de Markov à temps continu considérés dans ce chapitre.

2.1.7 Probabilités de transition infinitésimales

L'hypothèse supplémentaire ci-dessus permet d'obtenir des approximations pour toutes les probabilités de transition sur de petits intervalles de temps. Ainsi, pour tout $j \neq i$, on a (voir la Figure 33)

$$P_{ij}(h) = Pr(X_{t+h} = j | X_t = i) = Pr(0 < S_i < h) \cdot q_{ij} \cdot Pr(S_j > h) + o(h),$$

où $o(h)$ est la probabilité de réalisation de l'événement avec au moins deux changements d'état ou avec $S_i, S_j \leq h$. On obtient alors l'approximation

$$P_{ij}(h) = \lambda_i q_{ij} h + o(h).$$

Cela signifie que $\lambda_i q_{ij}$ est le taux avec lequel on quitte l'état i pour l'état j .

De même, on obtient que

$$P_{ii}(h) = Pr(S_i > h) + o(h) = 1 - \lambda_i h + o(h)$$

où λ_i est le taux avec lequel on quitte l'état i .

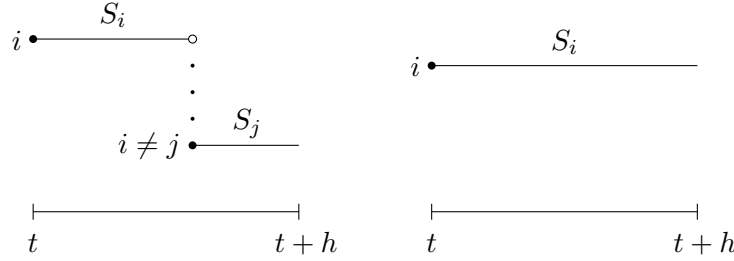


FIGURE 33 – Moins de 2 changements d'état dans l'intervalle de temps $[t, t+h]$ à partir de l'état i .

2.2 Chaînes sur un nombre fini d'états

L'objectif de cette section est d'évaluer les probabilités de transition $P_{ij}(t)$ pour tout $t \geq 0$ pour une chaîne de Markov à temps continu sur un nombre fini d'états, disons $i, j = 0, 1, \dots, N$. La méthode pour le faire est de déduire, puis de résoudre un système d'équations différentielles.

2.2.1 Générateur et probabilités de transition

Nous avons vu dans la section précédente que les probabilités de transition infinitésimales sont données par

$$P_{ij}(h) = \begin{cases} \lambda_i q_{ij} h + o(h) & \text{si } j \neq i, \\ 1 - \lambda_i h + o(h) & \text{si } j = i. \end{cases}$$

Nous en déduisons que

$$\frac{P_{ij}(h) - P_{ij}(0)}{h} = \begin{cases} \lambda_i q_{ij} + \frac{o(h)}{h} & \text{si } j \neq i, \\ -\lambda_i + \frac{o(h)}{h} & \text{si } j = i, \end{cases}$$

où $P_{ij}(0) = 1$ si $j = i$, et 0 sinon. On a alors que

$$a_{ij} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_{ij}(h) - P_{ij}(0)}{h} = \begin{cases} \lambda_i q_{ij} \geq 0 & \text{si } j \neq i, \\ -\lambda_i \leq 0 & \text{si } j = i. \end{cases}$$

Ces limites sont les entrées du générateur de la chaîne, noté $A = (a_{ij})$. Les entrées de cette matrice satisfont

$$\sum_j a_{ij} = 0,$$

pour tout i . En effet,

$$\begin{aligned} \sum_j a_{ij} &= a_{ii} + \sum_{j:j \neq i} a_{ij} \\ &= -\lambda_i + \lambda_i \sum_{j:j \neq i} q_{ij}, \end{aligned}$$

où

$$\sum_{j:j \neq i} q_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda_i > 0, \\ 0 & \text{si } \lambda_i = 0. \end{cases}$$

En notation matricielle, on a donc

$$A\mathbf{1} = \mathbf{0},$$

où $\mathbf{1}$ est un vecteur dont toutes les composantes sont 1 et $\mathbf{0}$ un vecteur dont toutes les composantes sont 0. On remarque que $a_{ij} = 0$ pour tout j si i est absorbant ($\lambda_i = 0$).

Pour les probabilités de transition de l'instant 0 à l'instant $t + h$, on considère l'état à l'instant intermédiaire t (voir le Figure 34). Ainsi, nous obtenons

$$P_{ij}(t + h) = \sum_k P_{ik}(t) P_{kj}(h),$$

pour $i, j = 0, 1, \dots, N$. C'est l'équation de Chapman-Kolmogorov.

En notation matricielle, on a donc

$$P(t + h) = P(t)P(h),$$

d'où

$$\frac{P(t + h) - P(t)}{h} = P(t) \frac{P(h) - I}{h},$$

où I représente la matrice identité. On conclut alors que

$$P'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(t + h) - P(t)}{h} = P(t) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(h) - I}{h} = P(t)A.$$

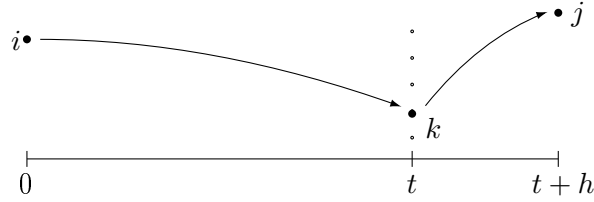


FIGURE 34 – Transition de i à j de l'instant 0 à l'instant $t + h$ en passant par l'état k à l'instant intermédiaire t .

C'est l'équation progressive de Kolmogorov.

De même, si on considère l'état à l'instant intermédiaire h entre 0 et $t + h$ et qu'on laisse tendre h vers 0, nous obtenons l'équation différentielle matricielle

$$P'(t) = AP(t),$$

qui est l'équation rétrograde de Kolmogorov.

Les équations ont comme solution

$$P(t) = e^{At} = \sum_{n \geq 0} \frac{A^n t^n}{n!}.$$

En effet, on a alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{At} &= \left(\sum_{n \geq 1} \frac{n A^{n-1} t^{n-1}}{n!} \right) A \\ &= \left(\sum_{n \geq 0} \frac{A^n t^n}{n!} \right) A \\ &= e^{At} A \\ &= A e^{At}. \end{aligned}$$

Afin de calculer $P(t)$, nous supposons que le générateur A est diagonalisable, c'est-à-dire

$$A = Q \Lambda Q^{-1},$$

où

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_0 & & & \\ & \lambda_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_N \end{pmatrix}$$

est une matrice diagonal de valeurs propres de A et Q est une matrice inversible dont les colonnes sont des vecteurs propres à droite associés. On a alors

$$\begin{aligned} e^{At} &= \sum_{n \geq 0} \frac{Q \Lambda^n Q^{-1} t^n}{n!} \\ &= Q \left(\sum_{n \geq 0} \frac{\Lambda^n t^n}{n!} \right) Q^{-1} \\ &= Q e^{\Lambda t} Q^{-1} \\ &= Q \begin{pmatrix} e^{\lambda_0 t} & & & \\ & e^{\lambda_1 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_N t} \end{pmatrix} Q^{-1}. \end{aligned}$$

2.2.2 Exemple : Retour sur les rampes mobiles

Reprenons l'exemple des deux rampes mobiles avec les hypothèses suivantes :

- temps de fonctionnement de chaque tapis de loi $\text{Exp}(\mu)$;
- un seul tapis réparé à la fois et temps de réparation de loi $\text{Exp}(\nu)$;
- indépendance de tous les temps de fonctionnement et de réparation.

On passe de l'état 0 à l'état 1 au taux ν et de l'état 2 à l'état 1 au taux 2μ , alors qu'on quitte l'état 1 pour l'état 2 au taux ν et pour l'état 0 au taux μ . Le générateur pour le nombre de rampes mobiles en fonctionnement est donc

$$A = \begin{pmatrix} -\nu & \nu & 0 \\ \mu & -(\nu + \mu) & \nu \\ 0 & 2\mu & -2\mu \end{pmatrix}.$$

On pose $\mu = 1$ et $\nu = 2$ de telle sorte que

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix},$$

Les valeurs propres sont alors obtenues en solutionnant l'équation caractéristique

$$\begin{aligned} 0 &= \det(A - \lambda I) \\ &= \det \begin{pmatrix} -\lambda - 2 & 2 & 0 \\ 1 & -\lambda - 3 & 2 \\ 0 & 2 & -\lambda - 2 \end{pmatrix} \\ &= (-\lambda - 2)((-\lambda - 3)(-\lambda - 2) - 2 \cdot 2) - 2(-\lambda - 2) \\ &= -\lambda(\lambda + 2)(\lambda + 5). \end{aligned}$$

Les valeurs propres sont donc $\lambda = 0, -2, -5$. Les vecteurs propres à droite associés sont obtenus en solutionnant l'équation

$$\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x + 2y \\ x - 3y + 2z \\ 2y - 2z \end{pmatrix}.$$

Il y a trois cas à considérer :

- si $\lambda = 0$, alors

$$x = y = z,$$

d'où

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

en prenant arbitrairement $x = 1$;

- si $\lambda = -2$, alors

$$y = 0, x = -2z,$$

et on obtient

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

en prenant arbitrairement $z = 1$;

– enfin, si $\lambda = -5$, alors

$$3x = 3z = -2y,$$

et dans ce cas

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

en prenant arbitrairement $y = 3$.

On définit donc

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

On trouve alors que

$$Q^{-1} = -\frac{1}{15} \begin{pmatrix} -3 & -6 & -6 \\ 5 & 0 & -5 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

La matrice A peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} A &= Q\Lambda Q^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 & 2/5 \\ -1/3 & 0 & 1/3 \\ -1/15 & 1/5 & -2/15 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La matrice de transition de l'instant 0 à l'instant t est alors donnée par

$$\begin{aligned} P(t) &= Qe^{\Lambda t}Q^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{0t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 & 2/5 \\ -1/3 & 0 & 1/3 \\ -1/15 & 1/5 & -2/15 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, on déduit que

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 & 2/5 \\ -1/3 & 0 & 1/3 \\ -1/15 & 1/5 & -2/15 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 & 2/5 \\ 1/5 & 2/5 & 2/5 \\ 1/5 & 2/5 & 2/5 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Il est important de remarquer que toutes les lignes de la matrice de transition limite sont identiques, ce qui signifie que la chaîne oublie l'état initial à long terme. De plus, les entrées sur chaque ligne correspondent aux proportions moyennes de temps à long terme dans les états 0, 1 et 2, respectivement.

2.3 Processus de Poisson comme processus de naissance

2.3.1 Description générale

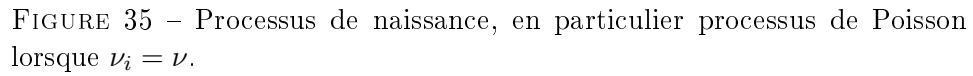
Un processus de Poisson est une chaîne de Markov à temps continu $\{X_t\}_{t \geq 0}$, qui compte le nombre d'arrivées d'un événement qui surviennent au hasard dans le temps à un taux constant, par exemple, des accidents ou des clients.

Le processus de Poisson est d'intensité $\nu > 0$ si les arrivées surviennent avec ce taux. Dans ce cas, le temps entre deux arrivées consécutives, qui est indépendant de tous les autres temps inter-arrivées, est de loi exponentielle de paramètre ν . Si le nombre d'arrivées dans l'intervalle de temps $[0, t]$ est i , alors l'état du processus à l'instant t est i , c'est-à-dire $X_t = i$. Le temps avant l'arrivée du prochain événement est de loi $\text{Exp}(\nu)$. La chaîne passe alors de l'état i à l'état $i + 1$ avec probabilité 1.

Plus généralement, lorsque le taux d'arrivée dépend de l'état courant de telle sorte qu'on passe de l'état $i \geq 0$ à l'état $i + 1$ avec probabilité 1 après un temps de loi $\text{Exp}(\nu_i)$, alors $\{X_t\}_{t \geq 0}$ où X_t représente l'état à l'instant $t \geq 0$ est appelé un processus de naissance (voir la Figure 35). Un processus de naissance est un processus croissant sur tous les entiers non négatifs avec augmentation de 1 à la fois avec probabilité 1. Une naissance correspond à une transition d'un entier à l'entier suivant.

2.3.2 Nombre d'arrivées dans un intervalle de temps

Si $\{X_t\}_{t \geq 0}$ est un processus de Poisson d'intensité ν pour les arrivées d'un événement, alors le nombre d'arrivées dans l'intervalle de temps $[0, t]$ suit



La Figure 36 représente un intervalle de temps $[0, t]$ subdivisé en N sous-intervalles de longueur égale t/N . On suppose que N est grand de telle sorte que t/N est petit et que la probabilité de deux arrivées ou plus dans un même sous-intervalle est négligeable.


$$p_N = Pr(S \leq t/N) = \frac{\nu t}{N} + o\left(\frac{t}{N}\right) \cong \frac{\nu t}{N},$$
$$1 - p_N = 1 - \frac{\nu t}{N} + o\left(\frac{t}{N}\right) \cong 1 - \frac{\nu t}{N}.$$

On s'intéresse au nombre d'événements qui surviennent dans l'intervalle de temps $[0, t]$, représenté par X_t . Les N sous-intervalles correspondent à N épreuves indépendantes, chacune donnant lieu à un succès (arrivée d'un événement) avec probabilité p_N ou à un échec avec probabilité $1 - p_N$. Le nombre total de succès suit alors une loi binomiale avec paramètres N et p_N .

dont l'espérance

$$Np_N \rightarrow \nu t,$$

et la variance

$$Np_N(1 - p_N) \rightarrow \nu t,$$

lorsque $N \rightarrow \infty$. On a donc l'approximation

$$\begin{aligned} Pr(X_t = k | X_0 = 0) &\cong \binom{N}{k} \left(\frac{\nu t}{N}\right)^k \left(1 - \frac{\nu t}{N}\right)^{N-k} \\ &= \frac{N}{N} \times \frac{N-1}{N} \times \dots \times \frac{N-k+1}{N} \times \frac{(\nu t)^k}{k!} \times \frac{\left(1 - \frac{\nu t}{N}\right)^N}{\left(1 - \frac{\nu t}{N}\right)^k} \\ &\rightarrow \frac{(\nu t)^k}{k!} e^{-\nu t}, \end{aligned}$$

pour tout $k \geq 0$, lorsque $N \rightarrow \infty$.

Plus rigoureusement, la probabilité de transition ci-dessus, représentée par $P_{0k}(t)$, satisfait l'équation de Chapman-Kolmogorov

$$P_{0k}(t+h) = P_{0k}(t)(1 - \nu h + o(h)) + P_{0,k-1}(t)(\nu h + o(h)) + o(h),$$

pour $t, h > 0$. Cela donne l'équation différentielle

$$P'_{0k}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_{0k}(t+h) - P_{0k}(t)}{h} = \nu P_{0,k-1}(t) - \nu P_{0,k}(t),$$

pour $k \geq 1$, avec $P_{00}(t) = e^{-\nu t}$. Il est facile de vérifier que la solution est donnée par

$$P_{0k}(t) = \frac{(\nu t)^k}{k!} e^{-\nu t},$$

pour $k \geq 0$. Cela signifie que X_t , étant donné que $X_0 = 0$, suit une loi de Poisson de paramètre νt , donc d'espérance et de variance νt .

En fait, le même raisonnement montre que

$$Pr(X_{t+s} - X_s = k | X_s = i) = \frac{(\nu t)^k}{k!} e^{-\nu t},$$

pour tout $s > 0$. L'indépendance par rapport à X_s découle essentiellement du fait que la loi exponentielle est sans mémoire, alors que la distribution reste identique parce que l'intensité du processus est constante.

2.3.3 Distribution des temps d'arrivée

Le premier événement dans un processus de Poisson d'intensité ν arrive après un temps de loi exponentielle de paramètre ν . Le n -ième événement arrive après un temps

$$T_n = S_0 + \cdots + S_{n-1},$$

où S_0, \dots, S_{n-1} sont des variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre ν . Or,

$$Pr(T_n \leq t) = \sum_{k \geq n} P_{0k}(t) = \sum_{k \geq n} \frac{(\nu t)^k}{k!} e^{-\nu t}.$$

La fonction de densité de T_n est donnée par la dérivée par rapport à t , soit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} Pr(T_n \leq t) &= -\nu e^{-\nu t} \sum_{k \geq n} \frac{(\nu t)^k}{k!} + \nu e^{-\nu t} \sum_{k \geq n} \frac{(\nu t)^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \nu e^{-\nu t} \frac{(\nu t)^{n-1}}{(n-1)!}, \end{aligned}$$

pour $t > 0$. La loi correspondante est appelée loi gamma de paramètres n et ν .

2.3.4 Arrivée d'événements d'un type donné

Supposons que des événements (par exemple, des accidents) surviennent selon un processus de Poisson d'intensité ν et que chaque événement qui survient est d'un type donné A (par exemple, accident avec blessures corporelles) avec la même probabilité p , indépendamment de tous les autres événements. Alors les événements de type A surviennent selon un processus de Poisson d'intensité νp . Cela signifie que le taux d'arrivée des événements de type A est νp .

En effet, soit N le nombre d'événements à survenir avant qu'un événement de type A ne se réalise. Cette variable aléatoire suit une loi géométrique de paramètre p . Soit aussi T_i , le temps entre l'arrivée du $(i-1)$ -ième événement (instant initial si $i = 1$) et l'arrivée du i -ième événement, pour $i \geq 1$. Cette variable aléatoire suit une loi exponentielle de paramètre ν . De plus, toutes les variables sont indépendantes.

On a alors (voir la Figure 37)

$$T = \sum_{i=1}^N T_i \sim \text{Exp}(\nu p).$$

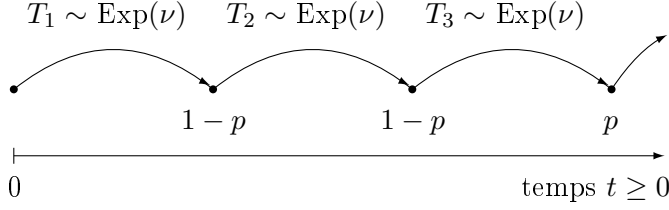


FIGURE 37 – Temps jusqu'à l'arrivée d'un événement de probabilité p dans une suite d'événements qui surviennent au hasard au taux ν .

En effet, on trouve que

$$\begin{aligned}
 \Pr(T > t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \Pr(T > t | N = n) \Pr(N = n) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\nu t)^k e^{-\nu t}}{k!} \right) p(1-p)^{n-1} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\nu t)^k e^{-\nu t}}{k!} \sum_{n \geq k+1} p(1-p)^{n-1} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\nu t)^k e^{-\nu t}}{k!} (1-p)^k \\
 &= e^{-\nu t} e^{\nu t(1-p)} \\
 &= e^{-\nu tp},
 \end{aligned}$$

pour tout $t > 0$.

2.3.5 Arrivée d'événements de deux types

Si $\{X_t\}_{t \geq 0}$ et $\{Y_t\}_{t \geq 0}$ sont des processus de Poisson indépendants d'intensité ν_1 et ν_2 , respectivement (par exemple, pour l'arrivée d'accidents avec blessures corporelles et l'arrivée d'accidents avec dommages matériels seulement), alors $\{X_t + Y_t\}_{t \geq 0}$ est un processus de Poisson d'intensité $\nu_1 + \nu_2$.

Cela découle du fait que $T = \min(T_1, T_2)$ est de loi $\text{Exp}(\nu_1 + \nu_2)$ si T_1 et T_2 sont des variables aléatoires indépendantes de loi $\text{Exp}(\nu_1)$ et $\text{Exp}(\nu_2)$, respectivement. Ici, T_1 représente un temps avant que X_t augmente de 1 et de même T_2 un temps avant que Y_t augmente de 1, de telle sorte que la somme augmente de 1 à la fin du minimum de ces deux temps, représenté par T .

2.3.6 Distribution conditionnelle des temps d'arrivée

Étant donné une seule arrivée dans un intervalle de temps $[0, t]$ dans un processus de Poisson d'intensité ν , on s'attend à ce que la loi du temps de cette arrivée soit uniforme sur $[0, t]$. En effet, le taux d'arrivée étant constant il n'y a pas de raison pour que l'événement survienne de préférence dans des régions de l'intervalle plutôt que d'autres.

Plus généralement, étant donné n arrivées dans $[0, t]$, les temps ordonnés de ces arrivées, T_1, \dots, T_n , sont distribués comme les statistiques d'ordre de variables aléatoires indépendantes U_1, \dots, U_n , toutes de loi uniforme sur $[0, t]$. Autrement dit, les n arrivées surviennent à des instants choisis au hasard et indépendamment dans l'intervalle $[0, t]$.

En effet, si X_t représente le nombre d'arrivées dans $[0, t]$, alors on a la décomposition

$$X_t = Z_1 + Z_2,$$

où Z_1 et Z_2 sont les nombres d'arrivées dans $[0, s]$ et $(s, t]$, respectivement, et donc des variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètre $s\nu$ et $(t-s)\nu$, respectivement. La loi conditionnelle de Z_1 , étant donné que $X_t = n$, est binomiale de paramètres n et s/t , car

$$\begin{aligned} Pr(Z_1 = k, Z_2 = n - k | X_t = n) &= \frac{e^{-\nu s} \frac{(\nu s)^k}{k!} e^{-\nu(t-s)} \frac{(\nu(t-s))^{n-k}}{(n-k)!}}{e^{-\nu t} \frac{(\nu t)^n}{n!}} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{s}{t}\right)^k \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-k}, \end{aligned}$$

pour $k = 0, 1, \dots, n$. Cela signifie que chacune des n arrivées dans $[0, t]$ survient dans $[0, s]$ avec probabilité s/t indépendamment des autres. Si U_i est un temps choisi au hasard parmi les temps d'arrivée ordonnés T_1, \dots, T_n , alors

$$Pr(U_i \leq s | X_t = n) = \frac{s}{t},$$

pour $0 < s \leq t$. Donc, la variable U_i est bien de loi uniforme sur $[0, t]$.

De façon analogue, les nombres d'arrivées dans les intervalles $[s_0, s_1]$, $(s_1, s_2], \dots, (s_n, s_{n+1}]$, avec $s_0 = 0$ et $s_{n+1} = t$, représentés par Z_1, \dots, Z_{n+1} ont une distribution conditionnelle de loi multinomiale de paramètres n et $(s_1 - s_0)/t, \dots, (s_{n+1} - s_n)/t$, étant donné que $X_t = n$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} Pr(Z_1 = k_1, \dots, Z_{n+1} = k_{n+1} | X_t = n) \\ = \frac{n!}{k_1! \dots k_{n+1}!} \left(\frac{s_1 - s_0}{t}\right)^{k_1} \dots \left(\frac{s_{n+1} - s_n}{t}\right)^{k_{n+1}}. \end{aligned}$$

Cela signifie que chacune des n arrivées dans $[0, t]$ survient dans les intervalles ci-dessus avec probabilités proportionnelles à la longueur de ces intervalles, indépendamment des autres. Si U_1, \dots, U_n sont choisis au hasard sans remise parmi les temps d'arrivée ordonnés T_1, \dots, T_n , alors

$$\begin{aligned} Pr(U_1 \leq s_1, \dots, U_n \leq s_n | X_t = n) &= \frac{s_1}{t} \dots \frac{s_n}{t} \\ &= Pr(U_1 \leq s_1 | X_t = n) \dots Pr(U_n \leq s_n | X_t = n), \end{aligned}$$

pour $0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_n \leq 1$. En fait, on a l'égalité pour $0 \leq s_1, \dots, s_n \leq 1$, car toute permutation de U_1, \dots, U_n a la même distribution conjointe. L'égalité montre que ces variables sont indépendantes.

2.4 Processus de mort

2.4.1 Description générale

Un processus de mort $\{X_t\}_{t \geq 0}$ est une chaîne de Markov à temps continu sur les entiers non négatifs avec transition de $i \geq 1$ à $i - 1$, qui correspond à une mort, avec probabilité 1 après un temps de loi $\text{Exp}(\mu_i)$ (voir la Figure 38). De plus, on a $\mu_0 = 0$ de telle sorte que 0 est un état absorbant. Un processus de mort est toujours décroissant. Lorsque le processus est utilisé pour décrire la taille d'une population, l'état 0 correspond à l'extinction de la population.

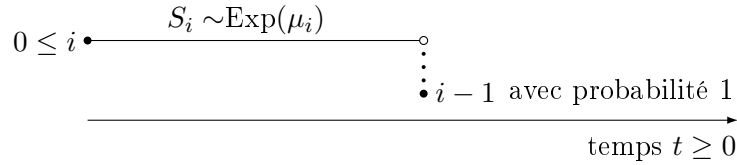


FIGURE 38 – Processus de mort ($\mu_0 = 0$ de telle sorte que l'état 0 est absorbant).

2.4.2 Processus de mort linéaire

Considérons le cas où le taux de mort lorsqu'on est à l'état $i \geq 0$ est donné par $\mu_i = i\mu$. C'est le cas, par exemple, pour une population sans naissance où chaque individu vit indépendamment des autres pendant un temps aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre μ . Ainsi, s'il y a

$i \geq 1$ individus dans la population à un moment donné, la taille de celle-ci diminue à $i - 1$ après un temps

$$S_i = \min(T_1, T_2, \dots, T_i),$$

où T_1, \dots, T_i sont des variables aléatoires indépendantes de loi $\text{Exp}(\mu)$. On a donc

$$S_i \sim \text{Exp}(i\mu).$$

De plus, ce temps de séjour est indépendant de tous les autres. La Figure 39 illustre la situation. Remarquons que la probabilité que la population soit

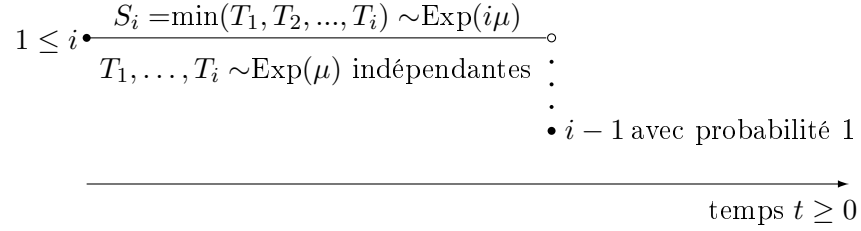


FIGURE 39 – Représentation du processus de mort linéaire.

éteinte à l'instant $t \geq 0$ étant donné que sa taille est $k \geq 1$ initialement est donnée par

$$Pr(\text{extinction à } t \mid \text{état } k \text{ à } 0) = Pr(S_k + \dots + S_1 < t).$$

La représentation graphique de cet événement est donnée dans la Figure 40. Or la population est éteinte à l'instant $t > 0$ si et seulement si les temps de vie des k individus à l'instant 0 sont inférieurs à t , c'est-à-dire (voir la Figure 41)

$$\begin{aligned} Pr(S_k + \dots + S_1 < t) &= Pr(T_1 < t, \dots, T_k < t) \\ &= Pr(T_1 < t) \cdots Pr(T_k < t) \\ &= (1 - e^{-\mu t})^k, \end{aligned}$$

en utilisant l'hypothèse d'indépendance.

2.4.3 Processus de naissance de Yule

Le processus de naissance de Yule est un processus de naissance linéaire avec taux de naissance lorsqu'on est à l'état $i \geq 1$ de la forme $\nu_i = i\nu$. C'est la situation par exemple lorsque chacune des cellules d'une population

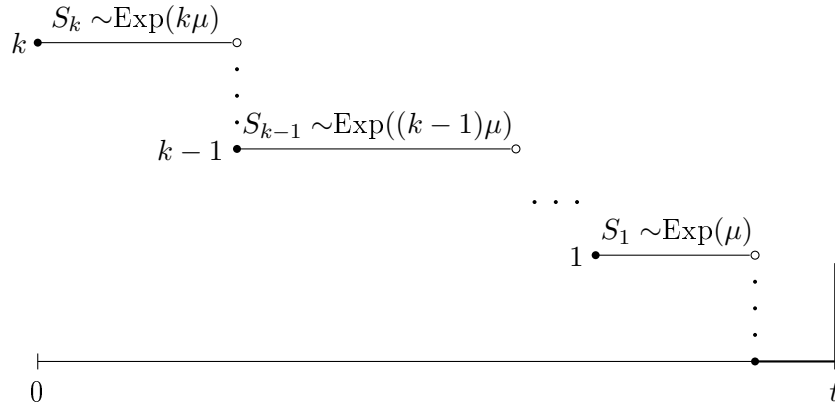


FIGURE 40 – Extinction au temps $t > 0$ dans un processus de mort linéaire à partir de l'état k au temps 0.

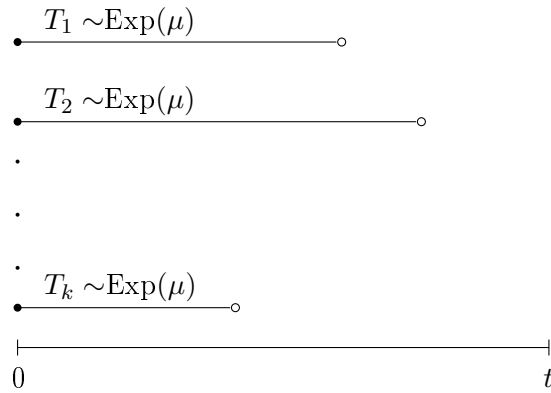


FIGURE 41 – Extinction au temps $t > 0$ à partir de temps de vie individuels.

se divise en deux après un temps aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre ν , indépendamment des autres cellules. L'état de la chaîne est le nombre total de cellules dans la population. Si ce nombre est i , alors il augmente à $i + 1$ après un temps de séjour

$$S_i = \min(T_1, T_2, \dots, T_i) \sim \text{Exp}(i\nu)$$

indépendant des autres temps de séjour, où T_1, \dots, T_i sont des variables aléatoires indépendantes de loi $\text{Exp}(\nu)$ qui représentent les temps de vie de cellules-mères avant de se diviser en deux cellules-filles. Les Figures 42 et 43 illustrent cette situation.

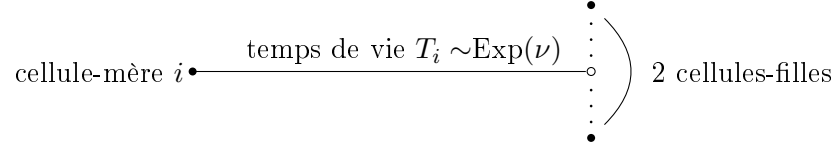
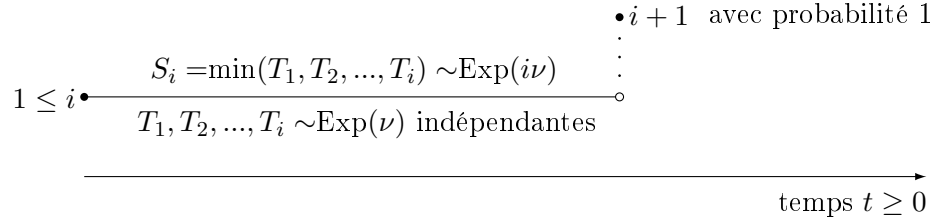


FIGURE 42 – Temps de division d’une cellule-mère en deux cellules-filles.

FIGURE 43 – Temps avant une division parmi i cellules-mères.

La loi de probabilité conditionnelle de X_t , le nombre de cellules au temps $t \geq 0$, étant donné que $X_0 = 1$, peut être obtenue à partir d’une correspondance avec le processus de mort linéaire. En effet, on a

$$Pr(X_t > k \mid X_0 = 1) = Pr(S_1 + \dots + S_k < t) = (1 - e^{-\nu t})^k,$$

pour tout $k \geq 1$, puisque les temps de séjour S_1, \dots, S_k satisfont les mêmes conditions que dans la section précédente (voir la Figure 44). Ainsi, le nombre de cellules qui sont présentes au temps $t \geq 0$ lorsqu’il n’y a qu’une cellule au départ suit une loi géométrique de paramètre $e^{-\nu t}$.

2.4.4 *Processus de coalescence

Le processus de coalescence est un processus de mort particulier avec taux de mort lorsqu’on est à l’état $i \geq 1$ donné par

$$\mu_i = \frac{i(i-1)}{2}.$$

Il est utilisé en génétique des populations pour les lignées ancestrales d’un échantillon aléatoire de gènes. Ce taux correspond au nombre de paires de lignées qui peuvent coalescer en remontant le temps pour n’en former qu’une seule, parmi i lignées. C’est le cas si chaque paire de lignées coalescent au taux 1 indépendamment des autres. Lorsqu’une paire de lignées coalescent

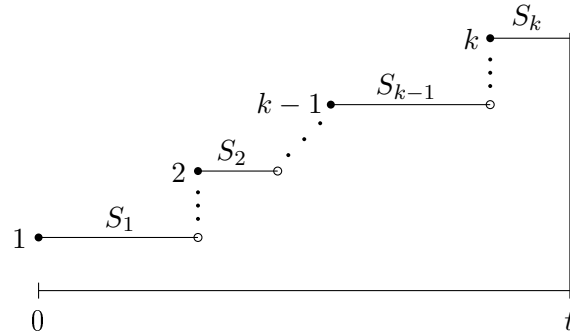


FIGURE 44 – État k au temps $t > 0$ dans un processus de naissance linéaire à partir de l'état 1 au temps 0

le nombre total de lignées passe de i à $i - 1$. De plus une seule coalescence peut se produire à la fois avec probabilité 1.

A partir d'un échantillon de $i \geq 2$ gènes, on peut suivre les lignées en remontant le temps jusqu'à ce qu'on ait une seule lignée pour la première fois. Cela se produit lorsqu'on arrive à l'ancêtre commun le plus récent. On obtient ainsi un arbre de coalescence. La Figure 45 représente un arbre de coalescence à partir de $i = 16$ lignées initiales.

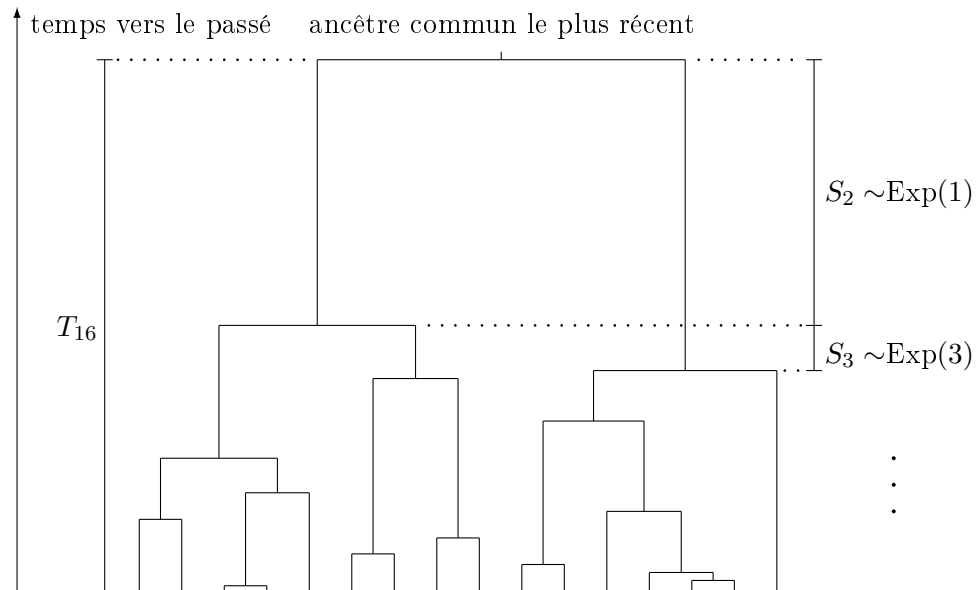


FIGURE 45 – Arbre de coalescence pour 16 lignées initiales.

Soit T_i le temps nécessaire pour arriver à l'ancêtre commun le plus récent à partir de $i \geq 2$ gènes. On a

$$T_i = \sum_{j=2}^i S_j,$$

où S_j représente le temps passé avec j lignées, pour $j = 2, \dots, i$. Ce temps est de loi $\text{Exp}((j(j-1)/2))$. De plus les temps S_1, \dots, S_i sont des variables aléatoires indépendantes. Pour l'espérance de T_i , on obtient donc que

$$\begin{aligned} E(T_i) &= \sum_{j=2}^i E(S_j) \\ &= \sum_{j=2}^i \frac{2}{j(j-1)} \\ &= 2 \sum_{j=2}^i \left(\frac{1}{j-1} - \frac{1}{j} \right) \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{i} \right). \end{aligned}$$

Quant à la variance, elle est donnée par

$$\begin{aligned} \text{Var}(T_i) &= \sum_{j=2}^i \text{Var}(S_j) \\ &= \sum_{j=2}^i \left(\frac{2}{j(j-1)} \right)^2 \\ &= 4 \sum_{j=2}^i \left(\frac{1}{j-1} - \frac{1}{j} \right)^2 \\ &= 4 \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{j^2} + 4 \sum_{j=2}^i \frac{1}{j^2} - 8 \sum_{j=2}^i \frac{1}{j(j-1)} \\ &= 8 \sum_{j=1}^i \frac{1}{j^2} - 4 - \frac{4}{i^2} - 8 \left(1 - \frac{1}{i} \right). \end{aligned}$$

Par conséquent on déduit que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} E(T_i) = 2$$

et

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \text{Var}(T_i) = 8 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} - 12 = \frac{8\pi^2}{6} - 12 \approx 1,16.$$

Il est intéressant de remarquer que $E(S_2) = \text{Var}(S_2) = 1$, ce qui signifie que le temps passé avec deux lignées est responsable de plus de la moitié de l'espérance du temps jusqu'à l'ancêtre commun le plus récent, et de la grande majorité de la variabilité de ce temps, à partir d'un nombre quelconque de lignées.

Un autre élément intéressant de l'arbre de coalescence est la longueur totale de toutes les branches verticales jusqu'à l'ancêtre commun le plus récent. Cette longueur est donnée par la variable

$$L_i = \sum_{j=2}^i j S_j.$$

Son espérance est

$$E(L_i) = \sum_{j=2}^i j E(S_j) = 2 \sum_{j=2}^i \frac{1}{j-1} \approx 2 \int_1^i \frac{1}{x} dx = 2 \log(i).$$

Supposons maintenant que des mutations se produisent au hasard le long de toutes les branches verticales de l'arbre de coalescence selon des processus de Poisson indépendants d'intensité λ . De plus les mutations transforment le matériel génétique à des sites tous différents du brin d'ADN qui détermine le gène considéré. Chacune de ces mutations correspond à un site polymorphe dans l'échantillon, dans le sens que certains des gènes échantillonnés portent le matériel génétique de l'ancêtre commun le plus récent à un site donné alors que d'autres portent un matériel différent.

Le nombre de sites polymorphes dans un échantillon de taille i est représenté par N_i . En conditionnant sur la longueur totale de toutes les branches verticales de l'arbre de coalescence, L_i , dont la fonction de densité est représentée par $f(l)$, on trouve que

$$\begin{aligned} E(N_i) &= \int_0^{\infty} E(N_i \mid L_i = l) f(l) dl \\ &= \int_0^{\infty} \lambda l f(l) dl \\ &= \lambda E(L_i) \\ &\approx 2\lambda \log(i). \end{aligned}$$

Cela permet d'estimer le taux de mutation λ par le nombre de sites polymorphes observés dans un échantillon de taille i divisé par $2\log(i)$.

Remarque : Dans le modèle de Wright-Fisher pour une population de taille N à générations séparées, les N individus de la génération $n + 1$ sont des copies de N individus de la génération n choisis au hasard avec remise. Considérons un échantillon aléatoire sans remise de i individus à une génération donnée, et suivons les i lignées de ces individus en remontant le temps. Lorsque deux individus sont des copies d'un même individu de la génération précédente, les deux lignées correspondantes coalescent. Soit S_i le temps jusqu'à la première coalescence en prenant N générations comme unité de temps et en laissant $N \rightarrow \infty$. La probabilité qu'il n'y ait aucune coalescence en une génération est

$$\frac{N \cdot (N-1) \cdots (N-i+1)}{N \cdot N \cdots N} = 1 - \frac{i(i-1)}{2N} + o(N^{-1}).$$

En désignant par $[Nt]$ la partie entière de Nt pour tout $t > 0$ fixé, on a donc

$$Pr(S_i > t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{i(i-1)}{2N} + o(N^{-1}) \right)^{[Nt]} = e^{-\frac{i(i-1)}{2}t}.$$

De plus, étant donné qu'il y a au moins une coalescence, la probabilité conditionnelle qu'il y en ait exactement une a comme limite 1. Le nombre de lignées ancestrales est alors décrit par un processus de coalescence. C'est le cas asymptotiquement pour beaucoup d'autres modèles de population.

2.5 Processus de naissance et de mort

2.5.1 Description générale

Le processus de naissance et de mort combine le processus de naissance et le processus de mort en un seul. Ici, une fois à l'état $i \geq 0$ on y reste un temps de loi $\text{Exp}(\nu_i + \mu_i)$ avant d'aller soit à l'état $i + 1$ avec probabilité $\nu_i / (\nu_i + \mu_i)$, soit à l'état $i - 1$ avec probabilité $\mu_i / (\nu_i + \mu_i)$ (voir la Figure 46). Cela est le cas si le temps avant une naissance est de loi $\text{Exp}(\nu_i)$ et le temps avant une mort est de loi $\text{Exp}(\mu_i)$, les deux temps étant indépendants. Les paramètres ν_i et μ_i sont les taux de naissance et de mort, respectivement. On suppose que $\mu_0 = 0$.

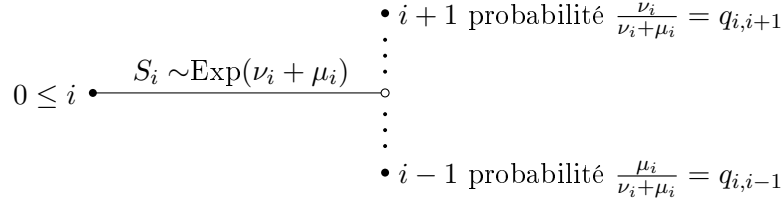


FIGURE 46 – Processus de naissance et de mort.

2.5.2 Processus à temps de vie infini

Un processus de naissance et de mort est à temps de vie infini, sous-entendu presque sûrement, si

$$\sum_j P_{ij}(t) = 1,$$

pour tout état i et pour tout instant $t > 0$. Autrement dit, la probabilité d'une explosion en un temps fini est égale à 0.

Une condition suffisante pour qu'un processus de naissance et de mort soit à temps de vie infini est

$$\sum_{j \geq 0} \frac{1}{\mu_j + \nu_j} = \infty.$$

Cela signifie que l'espérance de la somme des temps de séjour aux différents états, en supposant une naissance à la fin de chacun d'eux, est infinie.

Remarque : Une explosion en un temps fini ne peut survenir que dans le cas d'une chaîne de Markov à temps continu. En effet, dans le cas d'une chaîne de Markov à temps discret, il ne peut y avoir qu'un nombre fini de changements d'état en un temps fini, ce qui exclut la possibilité d'explosion.

2.5.3 Systèmes d'attente

Considérons un système d'attente de type $M/M/s$. La lettre M , pour sans mémoire, est une notation utilisée pour signifier une loi exponentielle.

Ainsi, le premier M signifie que le temps entre deux arrivées consécutives de clients suit une loi exponentielle, disons de paramètre ν . Le deuxième M signifie que le temps de service suit aussi une loi exponentielle, disons de paramètre μ . Les temps inter-arrivées et les temps de service sont tous supposés indépendants. Le processus d'arrivées est donc un processus de Poisson. Finalement, le s représente le nombre de serveurs pour les clients dans le système. La Figure 47 représente la situation dans le cas $s = 1$.

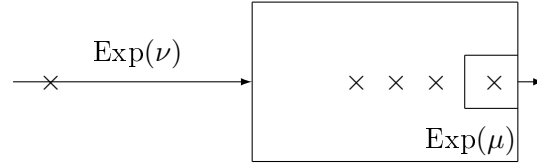


FIGURE 47 – Système d'attente $M/M/1$.

Le nombre de clients X_t en attente ou en train de se faire servir dans le système à l'instant t , pour $t \geq 0$, est un processus de naissance et de mort dont les paramètres dépendent du nombre de serveurs. Trois systèmes sont à considérer :

- $M/M/1$: Dans le cas où il n'y a qu'un seul serveur, le serveur est occupé dès qu'il y a au moins un client dans le système. Ainsi, on a

$$\begin{aligned}\nu_i &= \nu \text{ pour } i \geq 0, \\ \mu_i &= \mu \text{ pour } i \geq 1, \\ \mu_0 &= 0.\end{aligned}$$

- $M/M/s$ pour $1 < s < \infty$: Dans ce cas, le nombre de serveurs occupés est égal au nombre de clients dans le système jusqu'à un maximum de s . Le taux de naissance est le même que précédemment, soit $\nu_i = \nu$ pour tout $i \geq 0$, mais le taux de mort est

$$\mu_i = \begin{cases} i\mu & \text{pour } 0 \leq i \leq s, \\ s\mu & \text{pour } i \geq s + 1. \end{cases}$$

- $M/M/\infty$: Dans ce cas, le nombre de serveurs occupés est égal au nombre de clients dans le système qui ne sera jamais saturé. Le taux

de naissance est toujours $\nu_i = \nu$ pour tout $i \geq 0$, alors que le taux de mort est

$$\mu_i = i\mu \text{ pour } i \geq 0.$$

2.5.4 Équation progressive de Kolmogorov

L'équation progressive de Kolmogorov pour la dérivée de la probabilité de transition de l'état i à l'état j dans un processus de naissance et de mort de l'instant 0 à l'instant t est

$$P'_{ij}(t) = \mu_{j+1}P_{i,j+1}(t) + \nu_{j-1}P_{i,j-1}(t) - (\mu_j + \nu_j)P_{ij}(t),$$

pour $i, j \geq 0$, avec $\nu_{-1} = \mu_0 = 0$ et $P_{ij}(0) = 1$ si $j = i$, et 0 sinon.

Cette équation est obtenue en considérant la probabilité de transition de l'instant 0 à l'instant $t + h$ et en conditionnant sur l'état à l'instant intermédiaire t . Lorsque h est petit, les probabilités des visites à $j - 1$, j , $j + 1$ à cet instant sont dominantes (voir la Figure 48).

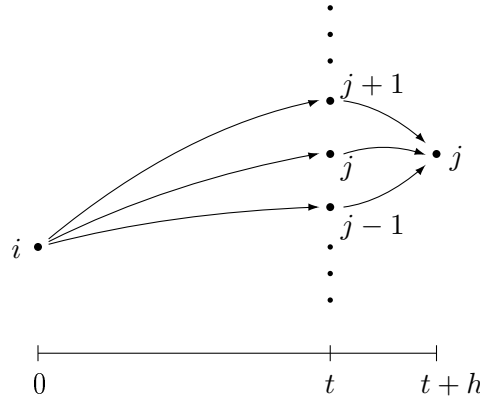


FIGURE 48 – Transitions pour l'équation progressive de Kolmogorov.

En effet, l'équation de Chapman-Kolmogorov donne

$$\begin{aligned}
 P_{ij}(t+h) &= \sum_k P_{ik}(t)P_{kj}(h) \\
 &= P_{i,j+1}(t)(\mu_{j+1}h + o(h)) \\
 &\quad + P_{i,j-1}(t)(\nu_{j-1}h + o(h)) \\
 &\quad + P_{ij}(t)(1 - (\mu_i + \nu_j)h + o(h)) \\
 &\quad + \sum_{k \neq j-1, j, j+1} P_{ik}(t)P_{kj}(h).
 \end{aligned}$$

Or,

$$P_{kj}(h) \leq \max(Pr(S_{j-2} + S_{j-1} < h), Pr(S_{j+2} + S_{j+1} < h)),$$

où S_l désigne un temps de séjour à l'état l . De plus,

$$\begin{aligned}
 Pr(S_{j-2} + S_{j-1} < h) &\leq Pr(S_{j-2} < h, S_{j-1} < h) \\
 &= Pr(S_{j-2} < h)Pr(S_{j-1} < h) \\
 &\leq (\mu_{j-2} + \nu_{j-2})(\mu_{j-1} + \nu_{j-1})h^2.
 \end{aligned}$$

De même

$$Pr(S_{j+2} + S_{j+1} < h) \leq (\mu_{j+2} + \nu_{j+2})(\mu_{j+1} + \nu_{j+1})h^2.$$

On conclut que

$$\sum_{k \neq j-1, j, j+1} P_{ik}(t)P_{kj}(h) = o(h),$$

qui dépend seulement de j . En regroupant toutes les fonctions $o(h)$, on obtient que

$$\frac{P_{ij}(t+h) - P_{ij}(t)}{h} = \mu_{j+1}P_{i,j+1}(t) + \nu_{j-1}P_{i,j-1}(t) - (\mu_j + \nu_j)P_{ij}(t) + \frac{o(h)}{h}.$$

La limite lorsque $h \rightarrow 0$ donne l'équation progressive de Kolmogorov.

2.5.5 Processus linéaire avec immigration

On considère un processus de naissance et de mort avec $\nu_i = i\nu + \lambda$ et $\mu_i = i\mu$, $\mu \neq \nu$, pour $i \geq 0$. C'est un processus qui décrit une population qui reçoit des immigrants au taux λ et dans laquelle chaque individu donne

naissance à un autre individu au taux ν et meurt au taux μ , indépendamment des autres. On définit

$$M(t) = \sum_{j \geq 0} j P_{ij}(t),$$

soit l'espérance du nombre d'individus à l'instant t étant donné qu'il y en a i à l'instant 0. En utilisant l'équation progressive de Kolmogorov, on trouve que

$$\begin{aligned} M'(t) &= \sum_{j \geq 1} j P'_{ij}(t) \\ &= \sum_{j \geq 1} (j+1)(j+1)\mu P_{i,j+1}(t) + \sum_{j \geq 1} (j-1)((j-1)\nu + \lambda) P_{i,j-1}(t) \\ &\quad - \sum_{j \geq 1} j(j\mu + j\nu + \lambda) P_{ij}(t) - \sum_{j \geq 1} (j+1)\mu P_{i,j+1}(t) \\ &\quad + \sum_{j \geq 1} ((j-1)\nu + \lambda) P_{i,j-1}(t) \\ &= -\mu P_{i,j}(t) - \sum_{j \geq 1} (j+1)\mu P_{i,j+1}(t) + \sum_{j \geq 1} (j-1)\nu P_{i,j-1}(t) \\ &\quad + \lambda \sum_{j \geq 1} P_{i,j-1}(t). \end{aligned}$$

Or,

$$\sum_{j \geq 1} P_{i,j-1}(t) = 1,$$

car

$$\sum_{i \geq 0} \frac{1}{i\mu + i\nu + \lambda} = \infty,$$

ce qui garantit que le processus est à temps de vie infini. On a alors

$$M'(t) = (-\mu + \nu)M(t) + \lambda,$$

avec $M(0) = i$. On essaie une solution de la forme

$$M(t) = F(t)e^{(\nu-\mu)t},$$

où $e^{(\nu-\mu)t}$ est la solution de l'équation homogène (lorsque $\lambda = 0$). Ainsi,

$$\begin{aligned} M'(t) &= (F'(t) + F(t)(\nu - \mu))e^{(\nu-\mu)t} \\ &= ((\nu - \mu)F(t) + \lambda e^{(\mu-\nu)t})e^{(\nu-\mu)t}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$F'(t) = \lambda e^{(\mu-\nu)t},$$

c'est-à-dire que

$$F(t) = \frac{\lambda}{\mu - \nu} e^{(\mu-\nu)t} + c,$$

pour une certaine constante c . On trouve que $c = i - \lambda/(\mu - \nu)$, en faisant $F(0) = M(0) = i$. On obtient donc comme solution

$$M(t) = \frac{\lambda}{\mu - \nu} (1 - e^{(\nu-\mu)t}) + i e^{(\nu-\mu)t},$$

d'où

$$\lim_{t \rightarrow \infty} M(t) = \begin{cases} \infty & \text{si } \nu > \mu, \\ \frac{\lambda}{\mu - \nu} & \text{si } \nu < \mu. \end{cases}$$

Cela suggère l'existence d'une distribution stationnaire dans le cas $\nu < \mu$ si $\lambda > 0$, mais l'absorption à l'état 0 avec probabilité 1 si $\lambda = 0$.

2.5.6 *Processus linéaire sans immigration

On considère le processus de naissance et de mort linéaire avec $\nu_i = i\nu$ et $\mu_i = i\mu$, pour $i \geq 0$. L'état 0, qui correspond à l'extinction, est donc absorbant.

Les probabilités de changement d'état à partir de tout état $i \geq 1$ sont données par

$$q_{i,i+1} = \frac{i\nu}{i\nu + i\mu} = \frac{\nu}{\nu + \mu},$$

$$q_{i,i-1} = \frac{i\mu}{i\nu + i\mu} = \frac{\mu}{\nu + \mu}.$$

La probabilité d'extinction éventuelle à partir de l'état $i \geq 1$ est donc la même que la probabilité de ruine éventuelle d'un joueur contre un adversaire infiniment riche, étant donné un avoir initial de i et une mise de 1 sur chaque partie d'une série qui est doublée avec probabilité $p = \nu/(\nu + \mu)$ indépendamment des autres ou perdue avec la probabilité complémentaire.

L'extinction est donc certaine si $p \leq 1/2$, c'est-à-dire $\nu \leq \mu$, alors que sa probabilité donnée par $(1-p)^i/p^i = (\mu/\nu)^i$ si $\nu > \mu$.

Dans le cas où $\nu \leq \mu$, on définit

$$\tau_i = E(\text{temps avant l'état 0} \mid \text{départ de l'état } i).$$

En conditionnant sur le premier changement d'état, on obtient l'équation

$$\tau_i = \frac{1}{i(\nu + \mu)} + \frac{\nu}{\nu + \mu} \tau_{i+1} + \frac{\mu}{\nu + \mu} \tau_{i-1},$$

pour tout $i \geq 1$, avec $\tau_0 = 0$. Cette équation est équivalente à

$$\tau_i - \tau_{i+1} = \frac{1}{i\nu} + \frac{\mu}{\nu} (\tau_{i-1} - \tau_i).$$

En itérant jusqu'à ce qu'on arrive à $\tau_0 - \tau_1 = -\tau_1$, on obtient alors que

$$\tau_i - \tau_{i+1} = \sum_{j=1}^i \frac{1}{j\nu} \left(\frac{\mu}{\nu}\right)^{i-j} - \left(\frac{\mu}{\nu}\right)^i \tau_1.$$

D'autre part,

$$\tau_i \leq \tau_{i+1} \leq \tau_i + \tau_1.$$

En effet, $\tau_i = E(T_i)$, où T_i représente le temps jusqu'à l'extinction de la descendance de i individus dans une population où chaque individu donne naissance à un autre au taux ν et meurt au taux μ , indépendamment des autres. Or,

$$E(T_i) \leq E(T_{i+1}) = E(\max(T_i, T_1)) \leq E(T_i + T_1) = E(T_i) + E(T_1),$$

où T_i et T_1 sont des variables indépendantes, d'où le résultat.

Dans le cas $\nu = \mu$, on a

$$\tau_1 = \sum_{j=1}^i \frac{1}{j\nu} + \tau_{i+1} - \tau_i \geq \sum_{j=1}^i \frac{1}{j\nu},$$

pour tout $i \geq 1$. On faisant tendre i vers l'infini, on obtient que $\tau_1 = \infty$.

Dans le cas $\nu < \mu$, on a

$$z_i \leq \tau_1 = z_i + \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^i (\tau_{i+1} - \tau_i) \leq z_i + \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^i \tau_1,$$

pour tout $i \geq 1$, où

$$z_i = \sum_{j=1}^i \frac{1}{j\nu} \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^j.$$

En faisant tendre i vers l'infini et en supposant que $\tau_1 < \infty$, on trouve que

$$\tau_1 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j\nu} \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^j = -\frac{\log(1 - \nu/\mu)}{\nu}.$$

Il reste à montrer que $\tau_1 < \infty$. On remarque d'abord que $\tau_1 \leq E(L_1)$, où L_1 représente le temps avant d'atteindre 0 à partir de 1 dans un processus de naissance et de mort avec taux de naissance et de mort $\nu_i = \nu$ et $\mu_i = i\mu$, respectivement, pour $i \geq 1$. En effet, un temps de séjour à tout état $i \geq 1$ dans ce processus est d'espérance $(\nu + \mu)^{-1} \geq (i(\nu + \mu))^{-1}$, alors que les probabilités de transition lorsqu'on change d'état sont les mêmes. Or,

$$L_1 = \sum_{k=1}^{N_1} S_k,$$

où N_1 représente le nombre de parties jusqu'à la ruine du joueur contre un adversaire infiniment riche étant donné un avoir initial de 1, et S_k pour $k \geq 1$ sont des variables aléatoires de loi $\text{Exp}(\nu + \mu)$, toutes les variables étant indépendantes. En conditionnant sur la valeur de N_1 , on a donc

$$\begin{aligned} E(L_1) &= \sum_{n=1}^{\infty} E\left(\sum_{k=1}^n S_k\right) Pr(N_1 = n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n E(S_k)\right) Pr(N_1 = n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\nu + \mu} Pr(N_1 = n) \\ &= \frac{E(N_1)}{\nu + \mu}. \end{aligned}$$

Or,

$$E(N_1) = \frac{1}{1 - 2p} = \frac{\mu + \nu}{\mu - \nu} < \infty.$$

On conclut que $\tau_1 \leq (\mu - \nu)^{-1} < \infty$.

2.5.7 *Équation rétrograde de Kolmogorov

L'équation rétrograde de Kolmogorov pour la dérivée de la probabilité de transition de l'état i à l'état j dans un processus de naissance et de mort de l'instant 0 à l'instant t est donnée par

$$P'_{ij}(t) = \mu_i P_{i-1,j}(t) + \nu_i P_{i+1,j}(t) - (\mu_i + \nu_i) P_{ij}(t),$$

pour $i, j \geq 0$, avec $\mu_0 = 0$ et $P_{ij}(0) = 1$ si $j = i$, et 0 sinon.

Cette équation est obtenue en considérant les instants 0, h et $t + h$. La Figure 49 représente cette situation.

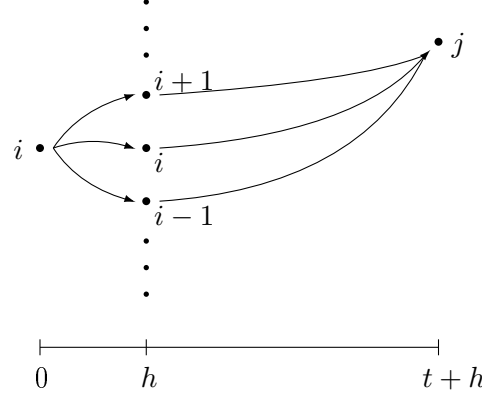


FIGURE 49 – Transitions pour l'équation rétrograde de Kolmogorov.

Dans ce cas, l'équation est déduite à partir de

$$\begin{aligned}
 P_{ij}(t+h) &= (\mu_i h + o(h))P_{i-1,j}(t) \\
 &\quad + (\nu_i h + o(h))P_{i+1,j}(t) \\
 &\quad + (1 - (\mu_i + \nu_i) + o(h))P_{ij}(t) \\
 &\quad + \sum_{k \neq i-1, i, i+1} P_{ik}(h)P_{kj}(t),
 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
 \sum_{k \neq i-1, i, i+1} P_{ik}(h)P_{kj}(t) &\leq Pr(S_{i-1} + S_i < h) + Pr(S_{i+1} + S_i < h) \\
 &\leq (\mu_{i-1} + \nu_{i-1})(\mu_i + \nu_i)h^2 + (\mu_{i+1} + \nu_{i+1})(\mu_i + \nu_i)h^2,
 \end{aligned}$$

qui est une fonction $o(h)$ qui dépend seulement de i .

2.6 Distribution stationnaire et théorème ergodique

2.6.1 Définition de distribution stationnaire

Soit $\{X_t\}_{t \geq 0}$ une chaîne de Markov à temps continu sur un nombre fini d'états ou un processus de naissance et de mort à temps de vie infini sur une infinité d'états. On suppose la chaîne irréductible, avec un temps de séjour à

tout état i de loi exponentielle de paramètre $\lambda_i > 0$, de telle sorte que l'état i est non absorbant, et de probabilités de transition q_{ij} de l'état i à l'état $j \neq i$ lorsqu'on quitte l'état i qui sont telles que la matrice stochastique $Q = (q_{ij})$ est irréductible. La situation est illustrée dans la Figure 50.

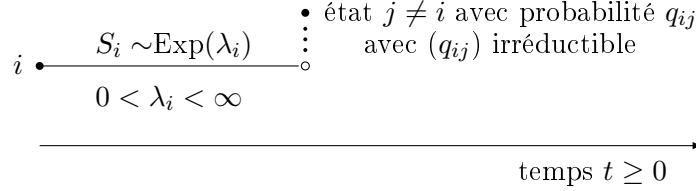


FIGURE 50 – Description d'une chaîne de Markov à temps continu irréductible.

Une distribution stationnaire $\pi = (\pi_i)$ pour cette chaîne est définie par les trois conditions suivantes :

- (a) $\pi_j > 0$ pour tout j ;
- (b) $\sum_j \pi_j = 1$;
- (c) $\pi_j \lambda_j = \sum_{i \neq j} \pi_i \lambda_i q_{ij}$ pour tout j , ou $\pi A = \mathbf{0}$ en notation matricielle.

Ici $A = (a_{ij})$, avec $a_{ij} = \lambda_i q_{ij}$ si $j \neq i$, et $-\lambda_j$ si $j = i$, est le générateur de la chaîne, et $\mathbf{0}$ est un vecteur dont toutes les composantes sont 0.

Les conditions (a) et (b) garantissent que la distribution stationnaire est une distribution de probabilité positive. Par le théorème ergodique (section 2.6.7), la probabilité π_j correspond à la fraction moyenne de temps à long terme que la chaîne passe à l'état j . La condition (c) signifie alors que le flot de sortie de j est égal au flot d'entrée à j par tout autre état i . C'est la condition de stationnarité.

Remarque : La distribution stationnaire pour la matrice stochastique Q est donnée par

$$\left(\frac{\pi_j \lambda_j}{\sum_k \pi_k \lambda_k} \right).$$

2.6.2 Exemple : Sauts aléatoires sur des sites

On imagine neuf nénuphars dans un étang qui correspondent à autant de sites dont quatre sont occupés par une grenouille. On suppose que chaque

grenouille saute à un taux de 1 sur l'un des nénuphars inoccupés choisi au hasard, indépendamment des autres grenouilles. Les états de cette chaîne sont représentés par les quatre nénuphars occupés. Ainsi, il y a $\binom{9}{4} = 126$ états possibles, numérotés de 1 à 126. Le temps de séjour à un état est un minimum de 4 temps indépendants de loi $\text{Exp}(1)$. Le taux avec lequel on quitte l'état i est donc $\lambda_i = 4$, pour $i = 1, \dots, 126$. Par symétrie, le taux avec lequel on passe de l'état i à l'état j est le même que le taux avec lequel on passe de l'état j à l'état i , c'est-à-dire

$$\lambda_i q_{ij} = \lambda_j q_{ji},$$

pour $j \neq i$. Ici, on a

$$q_{ij} = \frac{1}{5 \times 4} = \frac{1}{20},$$

si i et j diffèrent par un seul nénuphar occupé, et 0 sinon. En effet, un changement d'état correspond au remplacement au hasard d'un nénuphar parmi 4 qui étaient occupés par un nénuphar parmi 5 qui étaient inoccupés. Le générateur A étant symétrique, on a que

$$\mathbf{1}A = A\mathbf{1} = \mathbf{0}.$$

Donc, $\pi_i = 1/126$ pour $i = 1, \dots, 126$ est une distribution stationnaire.

2.6.3 Exemple : Deux comptoirs de service en série

On considère deux comptoirs de service en série, c'est-à-dire qu'après avoir été servi à un comptoir 1, un client se rend à un comptoir 2 pour recevoir un autre service. Cependant, par impatience, un client qui arrive à un comptoir déjà occupé quitte aussitôt le système. Les clients arrivent au comptoir 1 selon un processus de Poisson d'intensité 2. Le temps de service au comptoir 1 suit une loi exponentielle de paramètre 4, alors que celui au comptoir 2 suit une loi exponentielle de paramètre 2. Tous les temps de service sont indépendants et ils sont également indépendants du processus d'arrivées. Cet exemple est représenté dans la Figure 51.

Les quatre états possibles du système sont qu'aucun comptoir n'est occupé (0), seul le comptoir 1 est occupé (1), seul le comptoir 2 est occupé (2), et les deux comptoirs sont occupés (12). Le générateur A pour les états dans cet ordre est

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & -6 \end{pmatrix}.$$

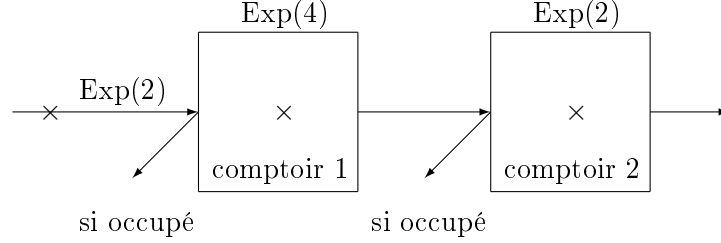


FIGURE 51 – Deux comptoirs de service en série.

Le système à résoudre afin de déterminer la distribution stationnaire est

$$\begin{pmatrix} \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \pi_{12} \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec la contrainte que $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_{12} = 1$. La solution est

$$\begin{pmatrix} \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \pi_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/9 & 1/3 & 1/9 \end{pmatrix}.$$

À l'aide de cette distribution stationnaire, plusieurs quantités intéressantes peuvent être calculées.

- La proportion moyenne de temps à long terme avec le comptoir 2 occupé est donnée par

$$\pi_2 + \pi_{12} = 4/9.$$

- Le nombre moyen de serveurs occupés à long terme est donné par la somme du nombre de serveurs occupés pour chaque état, multiplié par la proportion moyenne de temps à long terme passé à cet état, soit

$$0 \cdot \pi_0 + 1 \cdot (\pi_1 + \pi_2) + 2 \cdot \pi_{12} = 7/9.$$

- La proportion moyenne de clients servis au comptoir 2 parmi tous les clients qui se présentent à long terme est

$$\pi_0 + \left(\frac{2}{2+4} \right) \cdot \pi_2 = 4/9.$$

À long terme, un client qui se présente à un instant au hasard est servi au comptoir 2 si les deux comptoirs sont libres à son arrivée (probabilité π_0), ou si le comptoir 1 est libre et le comptoir 2 occupé (probabilité π_2), mais que celui-ci se libère avant la fin du service au comptoir 1 (probabilité $2/(2+4)$), soit la probabilité qu'un temps de loi $\text{Exp}(2)$ se

termine avant un temps de loi $\text{Exp}(4)$ qui lui est indépendant). Remarquons que le taux d'arrivée des clients est 2 et aussi le taux de sortie lorsque le comptoir 2 est occupé. Or, le comptoir 2 est occupé $4/9$ du temps à long terme, d'où la proportion de clients servis au comptoir 2 doit être $4/9$.

- Le temps moyen qu'un client qui se présente passe dans le système à long terme est donné par

$$0 \cdot (\pi_1 + \pi_{12}) + (1/4 + 1/2) \cdot \pi_0 + \left(1/4 + \frac{2}{2+4} \times 1/2\right) \cdot \pi_2 = 7/18.$$

À long terme, un client qui se présente à un instant au hasard ne passe pas de temps dans le système si le comptoir 1 est occupé à son arrivée (probabilité $\pi_1 + \pi_{12}$). En revanche, si aucun des deux comptoirs n'est occupé à son arrivée (probabilité π_0), il passe un temps moyen $1/4$ au comptoir 1, puis un temps moyen $1/2$ au comptoir 2. Finalement, si le comptoir 1 est libre à son arrivée, mais le comptoir 2 occupé (probabilité π_2), il passe un temps moyen $1/4$ au comptoir 1 auquel on ajoute un temps moyen $1/2$ au comptoir 2 seulement si celui-ci se libère entre-temps (probabilité $2/(2+4)$).

Il est à remarquer que les raisonnements pour déduire les deux dernières quantités fonctionnent parce que le processus d'arrivée de clients est de Poisson, et donc qu'une arrivée particulière ne dépend pas de celles qui précèdent ou qui suivent.

2.6.4 Processus de naissance et de mort stationnaire

On considère un processus de naissance et de mort à temps de vie infini sur tous les entiers non négatifs pour lequel les taux de naissance ν_i et les taux de mort μ_i , pour $i \geq 0$, sont tous finis et strictement positifs sauf $\mu_0 = 0$. Dans ce cas, la distribution stationnaire existe si et seulement si

$$\sum_{k \geq 0} \theta_k < \infty,$$

où

$$\theta_k = \frac{\nu_0 \cdot \nu_1 \cdots \nu_{k-1}}{\mu_1 \cdot \mu_2 \cdots \mu_k},$$

pour $k \geq 1$, avec $\theta_0 = 1$. La distribution stationnaire $\pi = (\pi_i)$ est alors donnée par

$$\pi_i = \frac{\theta_i}{\sum_{k \geq 0} \theta_k},$$

pour $i \geq 0$.

Nous allons prouver cette affirmation par induction. Tout d'abord, le générateur est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} -\nu_0 & \nu_0 & & & & & \\ \mu_1 & -(\nu_1 + \mu_1) & \nu_1 & & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ & & \cdot & \cdot & \nu_{j-1} & & \\ & & & \cdot & -(\nu_j + \mu_j) & \cdot & \\ & & & & \mu_{j+1} & \cdot & \cdot \\ & & & & & \cdot & \cdot \\ & & & & & & \cdot \end{pmatrix}.$$

La distribution stationnaire $\pi = (\pi_i)$ est déterminée par le système d'équations

$$\pi A = \mathbf{0}.$$

Ainsi, la première équation de ce système est

$$0 = -\nu_0 \pi_0 + \mu_1 \pi_1,$$

d'où

$$\pi_1 = \frac{\nu_0}{\mu_1} \pi_0 = \theta_1 \pi_0.$$

L'hypothèse d'induction est que

$$\pi_i = \theta_i \pi_0,$$

pour $i = 1, \dots, j$. La $(j+1)$ -ième équation du système donne

$$0 = \nu_{j-1} \pi_{j-1} - (\nu_j + \mu_j) \pi_j + \mu_{j+1} \pi_{j+1},$$

c'est-à-dire

$$\pi_{j+1} = \frac{(\nu_j + \mu_j) \pi_j - \nu_{j-1} \pi_{j-1}}{\mu_{j+1}}.$$

L'hypothèse d'induction mène alors à l'équation

$$\begin{aligned}\pi_{j+1} &= \left(\frac{\nu_0 \cdot \nu_1 \cdots \nu_{j-1} \cdot (\nu_j + \mu_j)}{\mu_1 \cdots \mu_j \cdot \mu_{j+1}} - \frac{\nu_0 \cdot \nu_1 \cdots \nu_{j-1} \cdot \mu_j}{\mu_1 \cdots \mu_j \cdot \mu_{j+1}} \right) \pi_0 \\ &= \frac{\nu_0 \cdot \nu_1 \cdots \nu_j}{\mu_1 \cdot \mu_2 \cdots \mu_{j+1}} \pi_0 \\ &= \theta_{j+1} \pi_0.\end{aligned}$$

Il y a donc une distribution stationnaire si et seulement si $\pi_0 > 0$, et dans ce cas

$$1 = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = \pi_0 \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i$$

si et seulement si

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{i \geq 0} \theta_i},$$

avec $\sum_{i \geq 0} \theta_i < \infty$.

Remarque : Dans le cas d'un processus de naissance et de mort sur les entiers $0, 1, \dots, N$ avec $0 < \nu_i < \infty$ pour $i = 0, 1, \dots, N-1$ et $0 < \mu_i < \infty$ pour $i = 1, \dots, N$, mais $\mu_0 = \nu_N = 0$, la distribution stationnaire $\pi = (\pi_i)$ est donnée par

$$\pi_i = \frac{\theta_i}{\sum_{j=0}^N \theta_j},$$

pour $i = 0, 1, \dots, N$.

2.6.5 Système d'attente stationnaire $M/M/1$

Soit un système d'attente de type $M/M/1$, comme illustré dans la Figure 47, avec comme règle de service «premier arrivé, premier servi». Le nombre de clients dans le système est un processus de naissance et de mort avec taux de naissance $\nu_i = \nu$ pour tout $i \geq 0$ et taux de mort $\mu_i = \mu$ pour tout $i \geq 1$, où ν est le taux d'arrivée des clients et μ le taux de service d'un client. Nous avons donc que

$$\theta_k = \left(\frac{\nu}{\mu} \right)^k,$$

pour tout $k \geq 1$, avec $\theta_0 = 1$. Ainsi,

$$\sum_{k \geq 0} \theta_k = \begin{cases} \infty & \text{si } \nu \geq \mu, \\ \frac{1}{1-\nu/\mu} & \text{si } \nu < \mu. \end{cases}$$

Donc la distribution stationnaire $\pi = (\pi_i)$ existe si et seulement si $\nu < \mu$, et elle est alors donnée par

$$\pi_i = \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^i (1 - \nu/\mu),$$

pour $i \geq 0$. Il s'agit donc de la distribution de $X - 1$, où X est une variable de loi géométrique de paramètre $1 - \nu/\mu$.

Voici quelques remarques intéressantes :

- π_0 représente la fraction moyenne de temps à long terme que le serveur est libre.
- $1 - \pi_0$ représente la fraction moyenne de temps à long terme que le serveur est occupé.
- Le nombre moyen de clients dans le système est donné par

$$L = \frac{1}{1 - \nu/\mu} - 1 = \frac{\nu/\mu}{1 - \nu/\mu},$$

où $1/(1 - \nu/\mu)$ est l'espérance d'une variable de loi géométrique de paramètre $1 - \nu/\mu$. Ainsi $L \rightarrow \infty$ lorsque $\nu/\mu \rightarrow 1$.

- Le temps moyen à long terme qu'un client passe dans le système est donné par

$$\begin{aligned} W &= \sum_{i \geq 0} \frac{(i+1)}{\mu} \pi_i \\ &= \sum_{i \geq 0} \frac{i\pi_i}{\mu} + \sum_{i \geq 0} \frac{\pi_i}{\mu} \\ &= \frac{L}{\mu} + \frac{1}{\mu} \\ &= \frac{1}{\mu(1 - \nu/\mu)}. \end{aligned}$$

Nous obtenons donc que

$$L = \nu W.$$

C'est la formule de Little. La quantité L représente le nombre moyen de clients dans le système à l'état stationnaire à l'arrivée d'un client. La quantité νW représente le nombre moyen de clients dans le système au départ d'un client. L'égalité découle de la stationnarité.

2.6.6 Système d'attente stationnaire $M/M/\infty$

Dans le cas d'un système d'attente de type $M/M/\infty$, les taux de naissance et de mort sont donnés par $\nu_i = \nu$ et $\mu_i = i\mu$, respectivement, pour $i \geq 0$, comme illustré dans la figure 52.

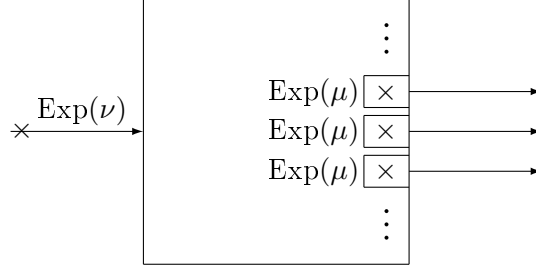


FIGURE 52 – Système d'attente avec une infinité de serveurs.

Dans ce cas, on a que

$$\theta_k = \frac{\nu_0 \cdots \nu_{k-1}}{\mu_1 \cdots \mu_k} = \frac{\nu^k}{k! \mu^k},$$

pour $k \geq 1$, et $\theta_0 = 1$. Ainsi,

$$\sum_{k \geq 0} \theta_k = \sum_{k \geq 0} \frac{(\nu/\mu)^k}{k!} = e^{\nu/\mu} < \infty,$$

pour tout $\nu, \mu > 0$. La distribution stationnaire $\pi = (\pi_i)$ existe dans tous les cas et elle est donnée par

$$\pi_i = \frac{(\nu/\mu)^i}{i!} e^{-\nu/\mu},$$

pour $i \geq 0$.

Le temps moyen W qu'un client passe dans le système équivaut simplement à l'espérance d'une variable de loi exponentielle de paramètre μ , soit $1/\mu$. D'autre part, le nombre moyen de clients dans le système à l'état stationnaire est

$$L = \frac{\nu}{\mu},$$

soit l'espérance d'une variable de loi de Poisson de paramètre ν/μ . On vérifie ici encore la formule de Little, soit $L = \nu W$.

2.6.7 Théorème ergodique

Si $\{X_t\}_{t \geq 0}$ est une chaîne de Markov à temps continu irréductible sur un nombre fini d'états ou un processus de naissance et de mort irréductible à temps de vie infini sur une infinité d'états, alors on a

$$P_{ij}(t) = \Pr(X_t = j | X_0 = i) \rightarrow \pi_j \geq 0 \text{ lorsque } t \rightarrow \infty.$$

De plus, ou bien $\pi_j = 0$ pour tout j , ou bien $\pi_j > 0$ pour tout j , et dans ce cas, (π_j) est l'unique distribution stationnaire.

2.7 *Démonstrations

2.7.1 Processus à temps de vie infini

Un processus de naissance et de mort est à temps de vie infini, c'est-à-dire qu'il satisfait

$$\sum_j P_{ij}(t) = 1,$$

pour tout état i et pour tout instant $t > 0$, si

$$\sum_{j \geq 0} \frac{1}{\mu_j + \nu_j} = \infty.$$

Démonstration :

On note d'abord que la situation la moins favorable à un temps de vie infini est celle où il y a une naissance à la fin de tous les temps de séjour. On considère donc un processus de naissance avec taux de naissance $\nu_j + \mu_j$ pour tout $j \geq 0$. Pour tout $i \geq 0$, on définit

$$T_i = \sum_{j \geq i} S_j,$$

où S_j représente un temps de séjour à l'état $j \geq 0$. On a alors que

$$E(T_i) = \sum_{j \geq i} \frac{1}{\mu_j + \nu_j}.$$

Supposons maintenant que

$$p = Pr(T_i > t) = \sum_{j \geq i} P_{ij}(t) < 1,$$

pour un certain $t > 0$. En conditionnant sur l'état à l'instant t , on obtient alors que

$$Pr(T_i > 2t) = \sum_{j \geq i} P_{ij}(t) Pr(T_j > t) \leq Pr(T_0 > t) \sum_{j \geq i} P_{ij}(t) = p^2.$$

Par induction, on trouve que

$$Pr(T_i > kt) \leq p^k,$$

pour tout $k \geq 1$. On a donc que

$$E(T_i) = \int_0^\infty Pr(T_i > s) ds \leq \sum_{k=1}^\infty Pr(T_i > kt) \leq \sum_{k=1}^\infty p^k = \frac{p}{1-p} < \infty.$$

Par conséquent, la condition $E(T_0) = \infty$, qui entraîne que $E(T_i) = \infty$ pour tout $i \geq 0$, entraîne aussi que $\sum_{j \geq i} P_{ij}(t) = 1$ pour tout $t > 0$ et tout $i \geq 0$.

2.7.2 Théorème ergodique

Si $\{X_t\}_{t \geq 0}$ est une chaîne de Markov à temps continu irréductible sur un nombre fini d'états ou un processus de naissance et de mort irréductible à temps de vie infini sur une infinité d'états, alors on a

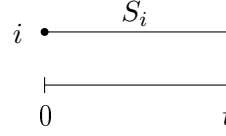
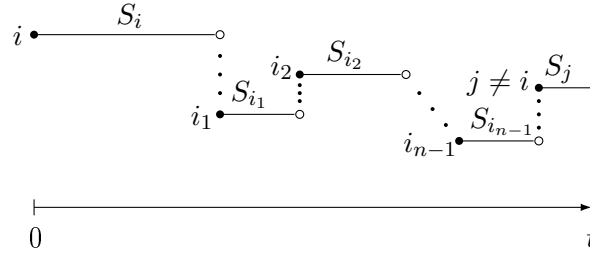
$$P_{ij}(t) = Pr(X_t = j | X_0 = i) \rightarrow \pi_j \geq 0 \text{ lorsque } t \rightarrow \infty.$$

De plus, ou bien $\pi_j = 0$ pour tout j , ou bien $\pi_j > 0$ pour tout j , et dans ce cas, (π_j) est l'unique distribution stationnaire.

Démonstration :

On remarque d'abord que $P_{ij}(t) > 0$ pour tout $t > 0$ et tout couple d'états i, j sous la condition que la chaîne est irréductible (voir les figures 53 et 54). En effet,

$$P_{ii}(t) \geq Pr(S_i > t) > 0,$$

FIGURE 53 – Situation pour $P_{ii}(t) > 0$.FIGURE 54 – Situation pour $P_{ij}(t) > 0$ pour $j \neq i$.

où S_i représente un temps de séjour à l'état i . Pour $j \neq i$, il existe des états $i_0 = i, i_1, \dots, i_n = j$ tous différents tels que la probabilité de transition de i_k à i_{k+1} lorsqu'on quitte l'état i_k est positive, c'est-à-dire $q_{i_k i_{k+1}} > 0$, pour $k = 0, 1, \dots, n-1$. On a alors

$$P_{ij}(t) \geq Pr \left(\sum_{k=0}^{n-1} S_{i_k} < t < \sum_{k=0}^n S_{i_k} \right) \prod_{k=0}^{n-1} q_{i_k i_{k+1}} > 0,$$

où S_{i_k} représente un temps de séjour à l'état i_k pour $k = 0, 1, \dots, n$.

En considérant seulement les instants entiers $n \geq 0$, on obtient une chaîne de Markov à temps discret $\{X_n\}_{n \geq 0}$ dont les probabilités de transition d'un instant au suivant sont données par $P_{ij}(1) > 0$ pour tout i et j , donc irréductible apériodique. Le théorème ergodique à temps discret garantit alors que

$$P_{ij}(n) \rightarrow \pi_j \geq 0 \text{ lorsque } n \rightarrow \infty.$$

De plus, ou bien $\pi_j = 0$ pour tout j , ou bien $\pi_j > 0$ pour tout j . Dans ce second cas, $\sum_j \pi_j = 1$ et

$$\pi_j = \sum_i \pi_i P_{ij}(n),$$

pour tout $n \geq 0$ et tout j . De même, en considérant seulement les instants de la forme $n/2^k$ pour tout $n \geq 0$ pour $k \geq 1$ fixé, on obtient que

$$P_{ij} \left(\frac{n}{2^k} \right) \rightarrow \pi_j \text{ lorsque } n \rightarrow \infty$$

et

$$\pi_j = \sum_i \pi_i P_{ij} \left(\frac{n}{2^k} \right),$$

pour tout $n \geq 0$ et tout j .

Maintenant, pour tout $t \geq 0$ fixé et tout entier $k \geq 1$ fixé, il existe un entier $n_k(t) \geq 0$ tel que

$$\frac{n_k(t)}{2^k} \leq t < \frac{n_k(t) + 1}{2^k}.$$

De plus, on a l'inégalité

$$|P_{ij}(t) - \pi_j| \leq \left| P_{ij}(t) - P_{ij} \left(\frac{n_k(t)}{2^k} \right) \right| + \left| P_{ij} \left(\frac{n_k(t)}{2^k} \right) - \pi_j \right|.$$

Pour $\varepsilon > 0$ arbitraire, le premier terme à droite est inférieur à $\varepsilon/2$ pour k assez grand (par le lemme sur la continuité uniforme des probabilités de transition de la section 2.6.8), et pour un tel k fixé le deuxième terme à droite est également inférieur à $\varepsilon/2$ pour $n_k(t)$ assez grand (par ce qui précède), c'est-à-dire, pour t assez grand.

Il reste à vérifier les équations de stationarité pour (π_j) dans la cas où $\pi_j > 0$ pour tout j avec $\sum_j \pi_j = 1$. Tout d'abord, en faisant croître k vers l'infini dans

$$\pi_j = \sum_i \pi_i P_{ij} \left(\frac{n_k(t)}{2^k} \right),$$

on obtient que

$$\pi_j = \sum_i \pi_i P_{ij}(t),$$

pour tout j et tout $t \geq 0$. Puis, en faisant décroître h vers 0 dans

$$0 = \sum_i \pi_i \left(\frac{P_{ij}(t+h) - P_{ij}(t)}{h} \right),$$

on conclut que

$$0 = \sum_i \pi_i P'_{ij}(t),$$

pour tout j et tout $t \geq 0$. (Dans les deux cas, on utilise le lemme 2 sur la convergence d'une somme en appendice du chapitre 1.) Finalement, l'équation progressive de Kolmogorov et un changement d'ordre de sommations donnent

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_i \pi_i \left(\sum_k P_{ik}(t) a_{kj} \right) \\ &= \sum_k \left(\sum_i \pi_i P_{ik}(t) \right) a_{kj} \\ &= \sum_k \pi_k a_{kj}, \end{aligned}$$

pour tout j , où a_{kj} représente l'élément k, j du générateur A de la chaîne de Markov à temps continu.

2.7.3 Lemme sur la continuité des probabilités de transition

Si $\{X_t\}_{t \geq 0}$ est une chaîne de Markov à temps continu irréductible sur un nombre fini d'états ou un processus de naissance et de mort irréductible à temps de vie infini sur une infinité d'états, alors on a

$$|P_{ij}(t+h) - P_{ij}(t)| \leq C_j h,$$

pour tout $t, h \geq 0$, où C_j est une constante qui peut dépendre de l'état j , et

$$P_{ij}(t) = Pr(X_t = j | X_0 = i)$$

est la probabilité de transition de l'état i à l'état j de l'instant 0 à l'instant $t \geq 0$. Ce résultat garantit que la probabilité de transition est uniformément continue.

Démonstration :

En conditionnant sur l'état à l'instant t , on obtient que

$$P_{ij}(t+h) = \sum_l P_{il}(t)P_{lj}(h),$$

d'où

$$P_{ij}(t+h) - P_{ij}(t) = \sum_{l \neq j} P_{il}(t)P_{lj}(h) + P_{ij}(t)(P_{jj}(h) - 1),$$

et par conséquent

$$|P_{ij}(t+h) - P_{ij}(t)| \leq \sum_{l \neq j} P_{il}(t)P_{lj}(h) + P_{ij}(t)(1 - P_{jj}(h)).$$

On a toujours

$$1 - P_{jj}(h) \leq \Pr(S_j < h) \leq \lambda_j h,$$

où S_j représente un temps de séjour à l'état j de loi exponentielle de paramètre λ_j . De même,

$$P_{lj}(h) \leq \Pr(S_l < h) \leq \lambda_l h,$$

pour tout $l \neq j$. Dans le cas d'un processus de naissance et mort, on utilise plutôt

$$P_{lj}(h) \leq \Pr(S_{j-1} < h) \leq \lambda_{j-1} h,$$

pour tout $l < j$, et

$$P_{lj}(h) \leq \Pr(S_{j+1} < h) \leq \lambda_{j+1} h,$$

pour tout $l > j$. Puisque $\sum_l P_{il}(t) = 1$, on obtient le résultat énoncé avec

$$C_j = \max_l \lambda_l$$

dans le cas d'une chaîne sur un nombre fini d'états, et

$$C_j = \max\{\lambda_{j-1}, \lambda_j, \lambda_{j+1}\}$$

dans le cas d'un processus de naissance et de mort sur un nombre infini d'états.

Remarque : La démonstration montre que le résultat est aussi valide pour n'importe quelle chaîne sur un nombre infini d'états avec $\lambda_l \leq \lambda$ pour tout état l .

2.8 Exercices

1. Deux employés d'une maison de courtage reçoivent des appels de clients au sujet d'achat ou de vente de fonds mutuels. Lorsque leurs lignes téléphoniques étaient indépendantes, chacun d'eux était occupé un temps de loi exponentielle de moyenne $1/4$ d'heure avec chaque client, temps pendant lequel tout nouvel appel était rejeté, puis attendait un temps de loi exponentielle de moyenne 1 heure avant de recevoir le prochain appel. Depuis une réorganisation du service, lorsqu'un appel est reçu par un employé qui est occupé, il est transféré à l'autre employé si celui-ci est libre, sinon l'appel est rejeté. Déterminer le générateur pour le nombre d'employés occupés : (a) avant la réorganisation du service, et (b) après la réorganisation du service.
2. Supposons qu'un appareil tombe en panne après avoir subi un k -ième choc avec probabilité $k^2/9$ pour $k = 1, 2, 3$ et dans ce cas qu'il est remplacé par un appareil neuf. Si les chocs sont espacés par des intervalles de temps indépendants de loi exponentielle de paramètre 9, quel est le générateur pour le nombre de chocs subis par l'appareil en fonctionnement ?
3. Une chaîne de Markov à temps continu sur les états 0, 1 et 2 a comme générateur :

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Déterminer le temps moyen pour atteindre 2 à partir de 0.

4. Un sous-marin dispose de trois systèmes de navigation et il reste en mer tant qu'au moins deux de ces systèmes fonctionnent. Les temps de fonctionnement de ces systèmes sont indépendants et de loi exponentielle de moyennes 1 an, 1,5 an et 3 ans, respectivement. Quel est le temps moyen que le sous-marin restera en mer ?
5. Une lampe a besoin de deux batteries pour être opérationnelle. On dispose de quatre batteries numérotées de 1 à 4 dont les temps de vie sont indépendants de loi exponentielle de moyenne 100 heures. On utilise les batteries dans l'ordre (d'abord 1 et 2, puis 3 lorsque l'une des deux premières est épuisée, etc.). Soit T le temps de fonctionnement de la lampe et N le numéro de la dernière batterie non épuisée. Trouver

l'espérance de T et la distribution de N . Répondre à la même question dans le cas de n batteries.

6. Dans une population de N individus, certains sont affectés d'une certaine maladie, d'autres pas. Chaque individu affecté guérit à un taux μ , alors que chaque paire d'individus se rencontre à un taux λ et chaque fois que cela se produit un individu affecté transmet la maladie à un autre qui ne l'est pas avec probabilité p . Déterminer le temps moyen pour que tous les individus soient affectés par la maladie étant donné qu'il y en a un seul initialement dans le cas où $\mu = 0$ et $p > 0$.
7. Une ampoule à l'entrée d'un immeuble a un temps de vie de loi exponentielle de moyenne 100 jours. Lorsqu'elle brûle, le concierge la remplace immédiatement pour une neuve. De plus, un employé qui s'occupe de l'entretien journalier remplace l'ampoule par une neuve par mesure préventive selon un processus de Poisson d'intensité 0,02 par jour. (a) Quel est le taux de remplacement de l'ampoule ? (b) Quelle est la probabilité que la prochaine ampoule soit remplacée par le concierge ?
8. Un correcteur d'épreuves lit un manuscrit de 200 pages et relève 108 erreurs typographiques. Supposons que l'auteur fasse des erreurs typographiques selon un processus de Poisson d'intensité inconnue λ par page et que le correcteur en relève en moyenne 9 sur 10. Comment estimeriez-vous λ ?
9. Supposons que le prix d'une action d'une grande compagnie est à la hausse (+) dès et aussi longtemps que la dernière nouvelle la concernant est bonne et à la baisse (-) lorsqu'elle est mauvaise. De plus ces nouvelles arrivent selon un processus de Poisson d'intensité 2 par jour et chacune d'elles est bonne avec probabilité $2/3$ ou mauvaise avec probabilité $1/3$ indépendamment de toutes les autres. Quel est le générateur de la chaîne de Markov pour le mouvement (+ ou -) du prix de l'action de cette compagnie ? Justifier brièvement en identifiant bien les états.
10. Un câble transatlantique prend un temps de loi exponentielle de paramètre 2 avant de subir un bris. Le temps de réparation est de loi exponentielle de paramètre 5. En supposant deux câbles avec des temps de fonctionnement et de réparation indépendants et deux équipes de

réparation, quelle est la probabilité que les deux câbles ne fonctionnent pas après un temps t étant donné qu'ils fonctionnent tous les deux initialement ?

11. Dans une prison du Far West, les tentatives d'évasion surviennent selon un processus de Poisson d'intensité 1 par 4 mois, mais elles réussissent seulement avec probabilité $1/2$, et dans ce cas tous les prisonniers s'évadent en bloc. D'autre part, il faut un temps de loi exponentielle de moyenne 2 mois pour rattraper et emprisonner à nouveau chaque prisonnier en cavale. En faisant toutes les hypothèses d'indépendance, déterminer : (a) le générateur pour le nombre de prisonniers en cavale sur les deux en prison au départ ; (b) le temps moyen pour que les deux prisonniers en cavale se retrouvent ensemble en prison.
12. (SOA M A06 #9) Un jeu dans un casino fait des paiements selon un processus Poisson d'intensité 5 par heure et le montant d'un paiement peut être 1, 2, 3, ... sans limite. La probabilité qu'un paiement soit égal à i est $1/2^i$ et les paiements sont indépendants les uns des autres. Calculer la probabilité qu'il n'y ait pas de paiement de 1, 2 ou 3 dans une période de 20 minutes.
13. (SOA M A06 #10) Vous arrivez à une station de train à 6h15. Jusqu'à 7h00, les trains arrivent selon un processus Poisson d'intensité 1 par 30 minutes. Après 7h00, ils arrivent selon un processus Poisson d'intensité 2 par 30 minutes. Calculer l'espérance du temps que vous devrez attendre avant qu'un train arrive.
14. Une chaîne de Markov à temps continu sur les états 0, 1 et 2 a comme générateur

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Déterminer la fraction moyenne de temps à long terme à l'état 0.

15. Un courtier d'assurances reçoit des appels de clients selon un processus de Poisson d'intensité 4 par heure. La conversation téléphonique avec un client dure un temps de loi exponentielle de moyenne $1/4$ d'heure. Si un autre appel arrive durant cette période, il est mis en attente jusqu'à la fin de la conversation en cours, mais la ligne té-

léphonique devient alors inaccessible et tout nouvel appel est rejeté. D'autre part un client en attente s'impatiente et libère la ligne après un temps de loi exponentielle de moyenne $1/4$ d'heure. On fait les hypothèses habituelles d'indépendance et on s'intéresse à ce qui se passera à long terme. Déterminer : (a) la proportion moyenne de temps que le courtier sera au téléphone ; (b) la proportion moyenne de clients auxquels le courtier répondra ; (c) le temps moyen qu'un client passera au téléphone ?

- 16.** Deux machines, 1 et 2, fonctionnent chacune un temps exponentiel de paramètre 1 avant de tomber en panne et prennent chacune un temps exponentiel de paramètre 1 à réparer. Il y a un seul réparateur et celui-ci répare en priorité la machine 1 lorsque les deux machines sont en panne quitte à suspendre la réparation de la machine 2. Tous les temps de fonctionnement et de réparation sont indépendants. Déterminer : (a) le générateur pour les machines en fonctionnement, soit 0 (aucune), 1, 2 ou 12 ; (b) la proportion moyenne de temps à long terme avec la machine 2 en fonctionnement.
- 17.** Le temps de fonctionnement d'un appareil suit une loi exponentielle de moyenne 2 alors que le temps de réparation suit une loi exponentielle de moyenne $1/2$. Il y a 4 appareils et 2 réparateurs qui peuvent travailler chacun sur un seul appareil à la fois. On suppose que tous les temps de fonctionnement et de réparation sont indépendants. Quel est le nombre moyen de réparateurs en service à long terme ?
- 18.** Des automobilistes se présentent à une station-service au taux de 20 par heure, mais n'entrent pas s'il y a au moins quatre voitures dans la station. Il y a deux pompes disponibles dans la station et le temps de service à chacune d'elle est de loi exponentielle de moyenne 6 minutes. (a) Quelle est la distribution stationnaire du nombre de voitures dans la station ? (b) En moyenne, combien d'automobilistes sont servis par heure ?
- 19.** Une boutique qui vend des ordinateurs en garde au plus 3 en stock. Les acheteurs se présentent selon un processus de Poisson d'intensité 2 par semaine et ils repartent avec un ordinateur s'il y en a au moins un en stock. Lorsqu'il reste un seul ordinateur, la boutique en commande 2 et elle les reçoit en un temps exponentiel de moyenne une semaine. Déterminer : (a) le nombre moyen d'ordinateurs en stock à

long terme ; et (b) le nombre moyen d'ordinateurs vendus en une semaine à long terme.

- 20.** Un coiffeur a de la place pour seulement 2 clients dans son salon. Les clients potentiels arrivent selon un processus Poisson d'intensité 2 par heure. Lorsqu'il y a déjà 2 clients dans le salon, les clients potentiels n'entrent pas et vont se faire couper les cheveux chez un compétiteur. Si le coiffeur coupe les cheveux d'un client selon un temps de loi exponentielle, combien de temps en moyenne devrait-il passer avec un client afin que seulement $1/7$ de sa clientèle soit perdue à la faveur d'un compétiteur ?
- 21.** Il y a 1278 particules sur un damier de 100 par 100. Chaque particule saute à un taux égal à 1 sur l'une des quatre cases adjacentes au hasard (devant, derrière, gauche, droite). Si la case choisie est en dehors du damier ou est déjà occupée par une particule, le déplacement est annulé. Quelle est la distribution stationnaire pour l'ensemble des cases occupées par les particules ?
- 22.** On considère une station de taxis dans un aéroport où les taxis et les clients arrivent selon des processus de Poisson d'intensité 2 et 3, respectivement. On suppose qu'un taxi attend à la station, quel que soit le nombre de taxis présents lors de son arrivée. En revanche, si un client ne trouve pas de taxi à son arrivée, il décide d'utiliser un autre moyen de transport. (a) Quelle est la proportion à long terme des clients qui prennent un taxi ? (b) Quel est le nombre moyen de taxis en attente ? (c) Lorsqu'un taxi arrive à la station, quel est le temps moyen que ce taxi doit attendre avant de servir un client ?
- 23.** Un central téléphonique dispose de m lignes. Les appels arrivent selon un processus de Poisson d'intensité λ . Un appel est accepté s'il y a une ligne libre au moment de son arrivée, qu'il occupe pendant un temps de loi exponentielle de paramètre μ indépendamment de tout le reste. Quelle est la distribution stationnaire du nombre de lignes occupées ?
- 24.** Déterminer la distribution stationnaire, si elle existe, du processus de naissance et de mort dont les taux de naissance et de mort sont

$$\nu_i = \nu, \mu_i = \frac{i}{i+1},$$

respectivement, pour $i \geq 0$.

- 25.** Une population reçoit des immigrants à un taux égal à 1. De plus, CHAQUE individu se reproduit à un taux constant égal 2 et meurt à un taux donné par $1 + i$ qui dépend de la taille i de la population. (a) Déterminer les taux de naissance et de mort pour le nombre total d'individus dans cette population. (b) Existe-t-il une distribution stationnaire ? (On ne demande pas de la trouver si elle existe.)
- 26.** Des clients se présentent pour recevoir un service selon un processus de Poisson d'intensité λ . Il sont servis un à la fois et le temps de service est de loi exponentielle de paramètre μ . De plus, les clients qui attendent pour être servis deviennent impatients et ils quittent au taux δ indépendamment les uns des autres. (a) Déterminer la distribution stationnaire dans le cas où $\delta = \mu$; (b) Montrer que la distribution stationnaire existe pour tout $\delta > 0$.

2.9 *Exercices supplémentaires

- 27.** Un centre de traumatologie dispose de deux salles d'opération. Les arrivées de patients, un à la fois, sont espacées par des temps aléatoires d'espérance 1, alors que les temps d'intervention sont des variables aléatoires d'espérance $1/2$. Tous les temps sont supposés indépendants et de loi exponentielle. Lorsque les deux salles d'opération sont occupées, les patients sont dirigés vers d'autres centres. Déterminer : (a) le générateur pour le nombre de salles d'opération occupées ; (b) l'espérance du temps pour que les deux salles soient libres à partir du moment où elles sont toutes les deux occupées.
- 28.** Un assuré passe de la catégorie A à la catégorie B et y reste après une seule réclamation pour un accident majeur ou trois réclamations pour un accident mineur. Supposons qu'un assuré de catégorie A subit des accidents selon un processus de Poisson d'intensité $1/2$, qu'un accident n'est que mineur avec probabilité $3/4$ indépendamment des autres, mais qu'un tel accident n'est pas déclaré avec probabilité $i/3$, où i est le nombre de réclamations précédentes pour un accident mineur. Il y a quatre états possibles pour le statut de l'assuré : $A0, A1, A2, B$, où Ai représente la catégorie A avec i réclamations pour un accident mineur au dossier. Déterminer : (a) le générateur pour le statut de l'assuré ; (b) l'espérance du temps pour atteindre le statut B à

partir du statut $A0$.

- 29.** Une grenouille sur le bord d'un étang (état 0) saute dans l'étang (état 1) et vice versa selon une chaîne de Markov à temps continu dont le générateur est

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Déterminer : (a) la probabilité que la grenouille soit dans l'étang à l'instant t si elle est au bord de l'étang à l'instant 0 ; (b) le générateur pour le nombre de grenouilles dans l'étang si trois grenouilles sautent indépendamment les unes des autres selon le modèle ci-dessus.

- 30.** Un médecin de garde reçoit des appels selon un processus de Poisson d'intensité 2 par 24 heures. Un appel nécessite un temps d'intervention de loi exponentielle d'espérance 3 heures, indépendant de tout le reste. Tout nouvel appel durant ce temps est envoyé à quelqu'un d'autre. Le médecin commence sa garde le vendredi à 18h. Quelle est la probabilité qu'il puisse passer entièrement la soirée du samedi, soit de 18h à minuit, en famille ?
- 31.** Dans une population de $2N$ personnes qui ont chacune un téléphone cellulaire, chaque personne qui n'est pas au téléphone en appelle une autre au hasard qui n'est pas au téléphone au taux instantané de 1 par heure indépendamment des autres, alors que chaque appel dure un temps de loi exponentielle d'espérance 3 minutes. On suppose tous les temps indépendants. Le nombre d'appels en cours est alors un processus de naissance et de mort sur un nombre fini d'états. Déterminer : (a) les taux de naissance et les taux de mort ; (b) la distribution stationnaire pour le nombre d'appels en cours ; (c) l'espérance du nombre d'appels en cours à l'état stationnaire ; (d) la proportion moyenne de temps à long terme que chaque personne parlera au téléphone.
- 32.** Le temps pour un membre du CEPSUM de réserver un plateau sportif par téléphone à partir du moment où il obtient la ligne est de 30 secondes. Les appels arrivent indépendamment selon un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$ par minute et ils sont mis en attente si la ligne est occupée. La ligne redevient inoccupée lorsqu'il ne reste plus personne en ligne ni en attente. Déterminer avec justification à l'appui : (a) les valeurs de λ pour lesquelles la ligne redevient certainement

inoccupée à partir d'un premier appel; (b) les valeurs de λ pour lesquelles la ligne redevient inoccupée en un temps moyen fini à partir d'un premier appel, et dans ce cas le temps moyen.

33. Le CEPSUM reçoit des appels pour la réservation d'un plateau sportif selon un processus de Poisson d'intensité 2 et les appels sont dirigés vers deux préposés, un en formation numéroté 1 qui prend un temps exponentiel d'espérance 1 pour finaliser la réservation et un avec expérience numéroté 2 qui prend un temps exponentiel d'espérance $1/2$. Lorsque l'un des préposés est occupé, l'appel est pris par l'autre, alors que lorsque les deux sont libres, l'un des deux au hasard prend l'appel. De plus, lorsque les deux préposés sont occupés, l'appel est mis en attente, ce qui bloque la ligne aux appels entrants. Dans ce cas, l'appel en attente est pris par le premier préposé qui se libère si la personne en attente ne quitte pas la ligne auparavant par impatience, ce qui survient au taux instantané de 1. On numérote les états 0 (aucun préposé occupé), 1 (préposé 1 seulement occupé), 2 (préposé 2 seulement occupé), 3 (préposés 1 et 2 occupés avec aucun appel en attente), et 4 (préposés 1 et 2 occupés avec un appel en attente). En faisant les hypothèses habituelles pour une chaîne de Markov à temps continu, déterminer : (a) le générateur de la chaîne ; (b) les proportions moyennes à long terme des appels reçus par le CEPSUM qui seront pris par les préposés 1 et 2, respectivement, en fonction de la distribution stationnaire (vous n'avez pas à calculer cette distribution). APRÈS le quiz, calculer la distribution stationnaire et donner une explication pour laquelle les proportions en (b) ne sont pas dans le rapport de 1 à 2.

34. Des clients se présentent à un comptoir de service selon un processus de Poisson d'intensité 2, mais rebroussent chemin si le comptoir est déjà occupé par un client. D'autre part, le temps de service est d'espérance $1/2$. Cependant, le serveur quitte son poste pour s'acquitter d'une autre tâche après un temps d'inoccupation d'espérance $1/3$ et ne revient qu'après un temps d'espérance $1/4$. De plus, un client qui ne trouve aucun serveur en poste quitte le comptoir après un temps d'attente d'espérance $1/5$. On suppose tous les temps indépendants de loi exponentielle. Les états du système sont $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ et $(1, 1)$, où la première composante représente le nombre de client au comptoir et la deuxième le nombre de serveur en poste. Déterminer : (a) le générateur de la chaîne ; (b) l'espérance du temps qu'un client qui se présente au comptoir passera dans le système en fonction de la

distribution stationnaire MAIS SANS LA CALCULER.

- 35.** Un entrepreneur en construction a pratiqué trois ouvertures dans une clôture d'un chantier pour permettre aux passants de satisfaire leur curiosité. On suppose que les passants se présentent selon un processus de Poisson d'intensité 3, mais ne s'arrêtent à une ouverture pour regarder qu'avec probabilité $1/3$ et seulement s'il y a une ouverture disponible. On suppose qu'un seul passant à la fois peut regarder par une ouverture et un temps d'observation de loi exponentielle de paramètre 1 pour chacun. Le générateur pour le nombre d'ouvertures occupées, 0, 1, 2, 3, dans cet ordre, est

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Déterminer : (a) la distribution stationnaire ; (b) la proportion moyenne de passants à long terme qui s'arrêtent pour regarder.

- 36.** Trois enfants s'amuse dans une glissade d'un parc. Un seul enfant peut glisser à la fois. On suppose tous les temps de remontée et de descente indépendants et de loi exponentielle, disons de paramètres λ et μ , respectivement. On a une chaîne de Markov sur quatre états possibles selon les nombres d'enfants en remontée, en descente et en attente, respectivement : $(3, 0, 0)$, $(2, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$ et $(0, 1, 2)$, représentés par 0, 1, 2 et 3, respectivement. En supposant que la remontée prend en moyenne deux fois plus de temps que la descente, déterminer : (a) le générateur ; (b) la distribution stationnaire ; (c) la proportion moyenne de temps à long terme pendant laquelle chaque enfant glissera.

- 37.** Une station-service possède deux pompes à essence : une en libre service et une avec service. Le temps de service est plus long à la seconde, car on y vérifie le niveau d'huile et on y lave le pare-brise. On suppose des temps de service de loi exponentielle, de moyenne 2 min à la première et de moyenne 4 min à la seconde. Les temps entre les arrivées des automobilistes sont aussi de loi exponentielle, de moyenne 2 minutes. Tous ces temps sont indépendants. Un automobiliste choisit la pompe en libre service lorsque les deux pompes sont libres, car l'essence y est moins chère, sinon il prend celle qui est libre ou qui se libère. Les automobilistes en attente de service s'impatientent et

ils quittent la station-service à un taux instantané de $1/4$ par minute indépendamment les uns des autres et de tout le reste. (a) Existe-t-il une distribution stationnaire pour le nombre d'automobilistes dans la station-service ? Si oui, quelle est-elle ? (b) La chaîne pour ce nombre est-elle récurrente positive ? Si oui, quelle est l'espérance du temps pour revenir à 0 à partir de 0 ? (c) Quelle est la fraction moyenne à long terme des automobiliste qui prennent de l'essence en libre service parmi tous ceux qui en prennent ?

- 38.** Des clients arrivent à un centre commercial selon un processus de Poisson d'intensité 100 par heure. Les temps passés par les clients dans le centre commercial sont des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, indépendantes du processus d'arrivée. On considère trois hypothèses sur la loi de probabilité d'un tel temps, représenté par X : (a) loi constante de valeur une heure ; (b) loi exponentielle d'espérance une heure ; (c) loi continue quelconque d'espérance une heure, de telle sorte que

$$\int_0^\infty (1 - F(x))dx = 1,$$

où $F(x) = Pr(T \leq x)$. Déterminer dans chaque cas la loi de probabilité pour le nombre de clients dans le centre commercial à l'état stationnaire.

- 39.** Un préposé à l'information reçoit des appels téléphoniques de clients selon un processus de Poisson d'intensité 1. Le temps requis pour répondre aux questions d'un client est de loi exponentielle d'espérance $1/2$. Si le préposé reçoit un appel alors qu'il est inoccupé (état 0), il prend aussitôt l'appel. S'il reçoit un appel alors qu'il répond à un client (état 1), il prend l'appel pour un temps de loi exponentielle d'espérance $1/4$ mais seulement pour dire au nouveau client qu'il sera mis en attente jusqu'à ce qu'il ait terminé avec le client précédent. Pendant ce temps (état 2) et tant que le nouveau client est en attente par la suite (état $2a$), tout nouvel appel est rejeté. D'autre part, un client en attente s'impatiente au taux 2, auquel cas il libère la ligne avant que le préposé ne réponde à ses questions. Déterminer : (a) la distribution stationnaire ; (b) la proportion moyenne de clients à long terme qui ne recevront pas d'information ; (c) le temps en ligne moyen à long terme (avec le préposé ou en attente) d'un client qui appelle. Suggestion pour (c) : Déterminer d'abord le temps en ligne moyen

d'un client qui appelle alors que le préposé est disponible, représenté par m_0 , puis le temps en ligne moyen d'un client qui appelle alors que le préposé est occupé mais personne n'est en attente, représenté par m_1 .

3 Processus de renouvellement

3.1 Description générale

On considère l'arrivée d'événements identiques qui sont espacés par des intervalles de temps aléatoires indépendants de même loi de probabilité, mais quelconque. L'événement en question, comme par exemple le remplacement d'un dispositif, est appelé un renouvellement. Le nombre de renouvellements $N(t)$ qui surviennent dans l'intervalle de temps $(0, t]$ pour $t > 0$ avec $N(0) = 0$ définit alors un processus de renouvellement. La figure 55 représente un tel processus.

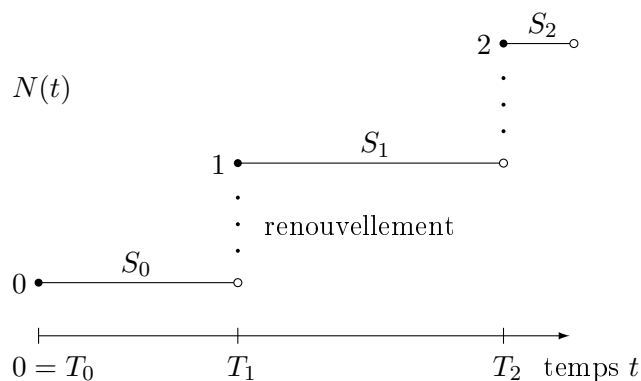


FIGURE 55 – Processus de renouvellement.

Le i -ième renouvellement survient à un temps aléatoire représenté par T_i pour $i \geq 1$. On définit les intervalles de temps

$$S_i = T_{i+1} - T_i,$$

pour $i \geq 0$, avec la convention que $T_0 = 0$. Ces intervalles correspondent aux temps de séjour aux différents états. On fait les hypothèses suivantes : S_0, S_1, S_2, \dots , sont des variables aléatoires positives, indépendantes et identiquement distribuées, d'espérance $\mu < \infty$ et de variance $\sigma^2 < \infty$.

On considère aussi la possibilité que le temps avant le premier renouvellement, S_0 , ait une distribution différente du temps entre deux renouvellements

consécutifs, avec une espérance $\mu_0 < \infty$ et une variance $\sigma_0^2 < \infty$. Dans ce cas, le processus de renouvellement est dit avec délai.

3.2 Théorèmes de renouvellement

3.2.1 Introduction

Dans le cas où les intervalles de renouvellement S_0, S_1, S_2, \dots , sont de loi exponentielle de paramètre λ , le processus $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ est un processus de poisson d'intensité λ . Dans ce cas, on a

$$\frac{E(N(t))}{t} = \lambda = \frac{1}{\mu},$$

pour tout $t > 0$. Plus généralement,

$$\frac{E(N(t+h) - N(t))}{h} = \lambda = \frac{1}{\mu},$$

pour tout $h > 0$ et tout $t \geq 0$, avec la convention $N(0) = 0$. Ce résultat signifie que $1/\mu$ est le taux d'arrivée instantané des événements.

Dans le cas général, les résultats ci-dessus ne peuvent être exacts qu'asymptotiquement, c'est-à-dire lorsque $t \rightarrow \infty$. Cela garantit que $1/\mu$ est le taux moyen de renouvellement sur une longue période de temps, ou sur une période de temps de longueur quelconque mais après un long moment.

3.2.2 Théorème de renouvellement élémentaire

On considère un processus de renouvellement avec $S_0 > 0$ d'espérance $\mu_0 < \infty$ pour le temps avant le premier renouvellement, et $S_i > 0$ d'espérance $\mu < \infty$ pour le temps entre les i -ième et $(i+1)$ -ième renouvellements, pour $i \geq 1$. Tous ces temps sont indépendants. Si $N(t)$ représente le nombre de renouvellements jusqu'à l'instant $t > 0$ inclusivement, alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E(N(t))}{t} = \frac{1}{\mu}.$$

La démonstration de ce résultat est reportée à la fin du chapitre.

3.2.3 Lemme de Wald

Soit X_1, X_2, \dots , une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées à valeurs non négatives d'espérance $\mu < \infty$. Si N une

variable aléatoire à valeurs entières non négatives telle que la réalisation ou non de l'événement $\{N \geq n\}$ est indépendante de X_n , pour tout $n \geq 1$, alors

$$E\left(\sum_{n=1}^N X_n\right) = \mu E(N).$$

Remarque 1 : La condition $E(N) < \infty$ n'est pas requise sous l'hypothèse que $X_n \geq 0$, pour tout $n \geq 1$.

Remarque 2 : Dans le cas où $X_n = X_n^+ - X_n^-$, où les parties positives et négatives, définies par

$$X_n^+ = \max(X_n, 0), X_n^- = \max(-X_n, 0),$$

satisfont $E(X_n^+) = \mu^+ < \infty$ et $E(X_n^-) = \mu^- < \infty$ avec $\mu^+ - \mu^- = \mu$, on a

$$E\left(\sum_{n=1}^N X_n\right) = E\left(\sum_{n=1}^N X_n^+\right) - E\left(\sum_{n=1}^N X_n^-\right) = \mu^+ E(N) - \mu^- E(N) = \mu E(N),$$

sous la condition que $E(N) < \infty$.

Démonstration :

En définissant la variable aléatoire indicatrice $\mathbf{1}_{\{N \geq n\}} = 1$ si $N \geq n$, et 0 autrement, qui est indépendante de X_n , pour tout $n \geq 1$, on trouve que

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{n=1}^N X_n\right) &= E\left(\sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{\{N \geq n\}} X_n\right) \\ &= \sum_{n \geq 1} E(\mathbf{1}_{\{N \geq n\}} X_n) \\ &= \sum_{n \geq 1} E(\mathbf{1}_{\{N \geq n\}}) E(X_n) \\ &= \mu \sum_{n \geq 1} Pr(N \geq n) \\ &= \mu \sum_{n \geq 1} n Pr(N = n) \\ &= \mu E(N). \end{aligned}$$

3.2.4 Exemple : Réclamations d'assurance

On considère une compagnie d'assurances qui reçoit des réclamations selon un processus de renouvellement $\{N(t)\}_{t \geq 0}$. Les montants des réclamations sont des variables aléatoires X_1, X_2, \dots , indépendantes de ce processus. Ainsi,

$$\frac{X_1 + \dots + X_{N(t)}}{t}$$

représente le montant des réclamations par unité de temps jusqu'au temps $t > 0$ inclusivement. Par le lemme de Wald, on a que

$$E\left(\frac{X_1 + \dots + X_{N(t)}}{t}\right) = \frac{E(N(t))E(X_1)}{t}.$$

Le théorème de renouvellement élémentaire permet alors d'obtenir le taux moyen du montant des réclamations à long terme, soit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E(N(t))E(X_1)}{t} = \frac{E(X_1)}{\mu},$$

où μ est l'espérance du temps entre deux réclamations consécutives.

3.2.5 Exemple : Remplacement d'un appareil

Un appareil peut être remplacé de façon préventive après un temps fixe T à un certain coût c . S'il est remplacé d'urgence à la fin de sa durée de vie, le coût du remplacement augmente à $c + C$. On cherche à déterminer la valeur de T qui minimise le coût moyen de remplacement de l'appareil à long terme.

On suppose que la durée de vie de l'appareil est une variable aléatoire W de loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$, c'est-à-dire $W \sim U[0, 1]$. Un remplacement préventif se fait après un temps fixe T si la durée de vie de l'appareil dépasse T . Sinon, l'appareil est remplacé d'urgence à la fin de sa durée de vie. Tous les appareils ont des durées de vie indépendantes.

On représente par S , le temps entre deux remplacements consécutifs. Ainsi,

$$S = \begin{cases} W & \text{si } W < T, \\ T & \text{si } W \geq T. \end{cases}$$

La loi conditionnelle de W , étant donné que $W < T$, est uniforme sur l'intervalle $[0, T]$. L'espérance conditionnelle est alors

$$E[W|W < T] = \frac{T}{2}.$$

L'espérance du temps entre deux remplacements consécutifs est donc

$$\begin{aligned} E(S) &= E(W|W < T)Pr(W < T) + TPr(W \geq T) \\ &= \frac{T}{2} \cdot T + T(1 - T) \\ &= T \left(1 - \frac{T}{2}\right). \end{aligned}$$

D'autre part, le temps \tilde{S} entre un remplacement d'urgence et le suivant peut s'écrire sous la forme

$$\tilde{S} = KT + Z,$$

où Z suit une loi uniforme sur $[0, T]$ et $K+1$ une loi géométrique de paramètre T . Ainsi,

$$Pr(K = k) = (1 - T)^k T,$$

pour $k \geq 0$, et

$$E(K) = E(K + 1) - 1 = \frac{1}{T} - 1.$$

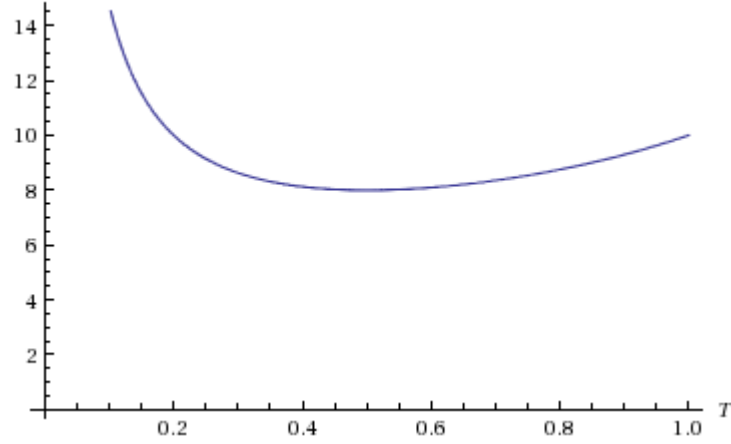
Donc, on a

$$\begin{aligned} E[\tilde{S}] &= E(K)T + E(Z) \\ &= \left(\frac{1}{T} - 1\right)T + \frac{T}{2} \\ &= 1 - \frac{T}{2}. \end{aligned}$$

En supposant un coût $c = 1$ pour un remplacement préventif et un coût supplémentaire $C = 4$ pour un remplacement d'urgence, le coût moyen à long terme par unité de temps prédit par le théorème de renouvellement élémentaire est

$$\begin{aligned} C(T) &= \frac{1}{E(S)} + \frac{4}{E(\tilde{S})} \\ &= \frac{1}{T(1 - T/2)} + \frac{4}{(1 - T/2)} \\ &= \frac{1 + 4T}{T(1 - T/2)}. \end{aligned}$$

Le graphique de $C(T)$ est illustré dans la Figure 56. Le point de minimum apparaît être entre 0,4 et 0,6. La dérivée de $C(T)$ est donnée par

FIGURE 56 – Graphique de $C(T)$.

$$\frac{d}{dT}C(T) = \frac{4T(1 - T/2) - (1 + 4T)(1 - T)}{(T(1 - T/2))^2},$$

qui est égale à 0 si et seulement si

$$4T - 2T^2 - 1 + T - 4T + 4T^2 = 0,$$

c'est-à-dire si et seulement si

$$2T^2 + T - 1 = (2T - 1)(T + 1) = 0.$$

La seule solution positive est

$$T = 1/2.$$

Il s'agit d'un point de minimum, car la dérivée seconde est positive. En effet, après quelques simplifications, on trouve que

$$\frac{d^2}{dT^2}C(T) = -\frac{4(4 - 6T + 3T^2 + 4T^3)}{((-2 + T)^3T^3)},$$

qui prend la valeur $8/3$ pour $T = 1/2$, et qui est positive en général pour $0 < T < 1$. On conclut donc que $C(T)$ pour $0 < T < 1$ est minimum lorsque $T = 1/2$.

3.2.6 Théorème de renouvellement à temps discret

On considère un processus de renouvellement avec S_0 pour le temps avant le premier renouvellement, et S_i pour le temps entre les i -ième et $(i+1)$ -ième renouvellements, pour $i \geq 1$. Tous ces temps sont indépendants, de même distribution de probabilité discrète donnée par la fonction de masse $p_k \geq 0$, pour toute valeur entière $k \geq 1$. On suppose que

$$\text{p.g.c.d.}\{k \geq 1 : p_k > 0\} = 1, \sum_{k \geq 1} kp_k = \mu < \infty.$$

Soit

$$u_k = Pr(\text{renouvellement à l'instant } k),$$

pour $k \geq 1$. Alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = \frac{1}{\mu}.$$

De plus, on a le même résultat si S_0 a une distribution de probabilité différente sur les entiers $k \geq 1$. La démonstration de ce résultat est reportée à la fin du chapitre.

Remarque : Par le théorème de renouvellement élémentaire, on a toujours

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E(N(n))}{n} = \frac{1}{\mu},$$

qu'on ait ou non la condition

$$\text{p.g.c.d.}\{k \geq 1 : p_k > 0\} = 1.$$

3.2.7 Théorème de renouvellement à temps continu

Dans le cas d'un processus de renouvellement $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ avec intervalles de renouvellement S_0, S_1, S_2, \dots , de distribution de probabilité continue, on a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E(N(t+h) - N(t))}{h} = \frac{1}{\mu},$$

pour tout $h > 0$ et tout $t \geq 0$. Donc $1/\mu$ représente le taux moyen de renouvellement par unité de temps sur une période de temps de longueur quelconque, mais à partir d'un moment qui tend vers l'infini. Ce théorème est énoncé sans démonstration.

3.3 Distributions asymptotiques

3.3.1 Âge et temps de vie résiduel et total

Lorsqu'on observe un processus de renouvellement à un instant donné, trois temps ont un intérêt particulier : (a) le temps qui s'est écoulé depuis le dernier renouvellement, qui correspond à l'âge de ce renouvellement, représenté par A , (b) le temps qui reste à écouler jusqu'au prochain renouvellement, appelé le temps de vie résiduel, représenté par R , et (c) le temps entre ces deux renouvellements, qui est le temps de vie total, représenté par V . La distribution de probabilité de ces temps lorsque l'instant d'observation tend vers l'infini, appelée distribution asymptotique, dépend de la distribution du temps entre deux renouvellements consécutifs.

3.3.2 Distributions asymptotiques à temps discret

On considère d'abord l'âge et les temps de vie résiduel et total dans le cas où le temps entre deux renouvellements consécutifs est une variable aléatoire de loi discrète.

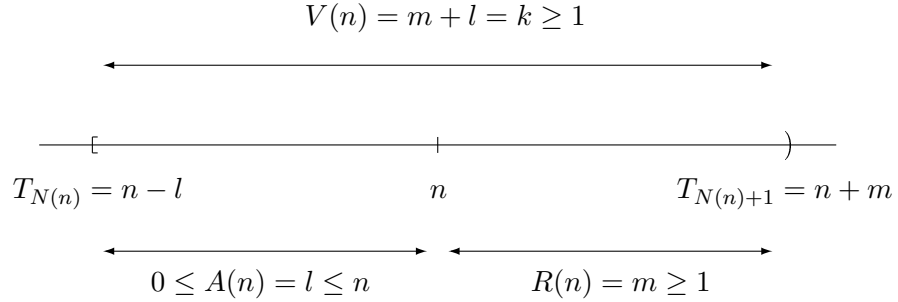


FIGURE 57 – Âge, temps de vie résiduel et temps de vie total à temps discret.

Les temps à valeurs entières $S_i > 0$ entre les i -ième et $(i + 1)$ -ième renouvellements, pour $i \geq 1$, sont indépendants et identiquement distribués, de fonction de masse donnée par $p_k \geq 0$, pour tout entier $k \geq 1$, avec

$$\sum_{k \geq 1} kp_k = \mu < \infty.$$

On suppose de plus que $\text{p.g.c.d.}\{k \geq 1 : p_k > 0\} = 1$. Le temps S_0 avant le premier renouvellement est aussi à valeurs entières, et il est indépendant des temps entre les renouvellements suivants.

L'âge, le temps de vie résiduel et le temps de vie total du renouvellement courant à l'instant $n \geq 0$ sont définis par

$$\begin{aligned} A(n) &= n - T_{N(n)}, \\ R(n) &= T_{N(n)+1} - n, \\ V(n) &= T_{N(n)+1} - T_{N(n)}, \end{aligned}$$

respectivement. La variable $N(n)$ représente le nombre de renouvellements jusqu'à l'instant $n \geq 0$, inclusivement, alors que

$$T_{N(n)} = S_0 + \dots + S_{N(n)-1}$$

est l'instant du dernier renouvellement avant n (n inclus), et

$$T_{N(n)+1} = S_0 + \dots + S_{N(n)}$$

est l'instant du premier renouvellement après n (n exclu). La figure 57 représente ces variables.

On considère les limites des fonctions de masse des différents temps lorsque $n \rightarrow \infty$.

– Temps de vie résiduel : Pour tout $m \geq 1$, on a

$$Pr(R(n) = m) = \sum_{l=0}^n u_{n-l} p_{m+l},$$

où u_{n-l} représente la probabilité d'un renouvellement à l'instant $n-l$. En faisant appel au théorème de renouvellement à temps discret et au lemme sur la limite d'une somme du chapitre 1, on obtient que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Pr(R(n) = m) = \sum_{l \geq 0} \frac{1}{\mu} p_{m+l} = \frac{\sum_{k \geq m} p_k}{\mu},$$

pour tout $m \geq 1$.

– Âge : Pour tout $l \geq 0$, on a

$$Pr(A(n) = l) = u_{n-l} \sum_{m \geq 1} p_{m+l}.$$

Dans ce cas, le théorème de renouvellement à temps discret garantit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Pr(A(n) = l) = \frac{1}{\mu} \sum_{m \geq 1} p_{m+l} = \frac{\sum_{k \geq l+1} p_k}{\mu},$$

pour tout $l \geq 0$.

– Temps de vie total : Pour tout $k \geq 1$, on a

$$Pr(V(n) = k) = \sum_{l=0}^{k-1} u_{n-l} p_k.$$

Par le théorème de renouvellement à temps discret, on conclut alors que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Pr(V(n) = k) = \sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{\mu} p_k = \frac{k p_k}{\mu},$$

pour tout $k \geq 1$.

On arrive aux mêmes résultats pour les proportions moyennes limites de temps que ces variables prennent ces valeurs en utilisant la loi des grands nombres. (Voir la section 3.5.1 pour une démonstration.)

Remarque 1 : La distribution asymptotique conditionnelle du temps de vie résiduel étant donné un temps de vie total $k \geq 1$ est uniforme sur les entiers $1, \dots, k$. Cela donne une probabilité totale

$$\sum_{k \geq m} \frac{1}{k} \left(\frac{k p_k}{\mu} \right) = \frac{\sum_{k \geq m} p_k}{\mu},$$

pour que le temps de vie résiduel prenne asymptotiquement la valeur $m \geq 1$. En conditionnant de façon analogue sur la vie totale, on obtient la fonction de masse

$$\sum_{k \geq l+1} \frac{1}{k} \left(\frac{k p_k}{\mu} \right) = \frac{\sum_{k \geq l+1} p_k}{\mu},$$

pour $l \geq 0$, pour la distribution asymptotique de l'âge.

Remarque 2 : L'âge a la même distribution asymptotique que le temps de vie résiduel moins 1. Cela découle de la convention que c'est l'âge, et non pas le temps de vie résiduel, qui prend la valeur 0 lorsqu'un renouvellement

a lieu exactement à l'instant d'observation du processus.

Remarque 3 : La distribution asymptotique du temps de vie total est différente de la distribution entre deux renouvellements consécutifs. C'est le paradoxe de l'inspection. L'explication est que l'observation du processus à un instant au hasard favorise les grandes valeurs qui occupent d'avantage de temps. Ainsi, avec autant de piles d'une durée de vie de deux ans que de piles d'une durée de vie d'un an, les premières seront utilisées deux tiers du temps à long terme.

3.3.3 Distributions asymptotiques à temps continu

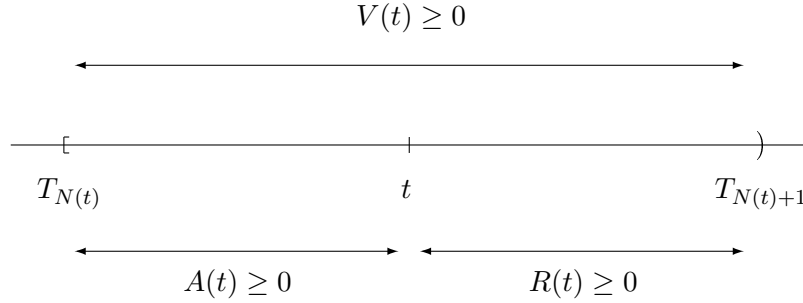


FIGURE 58 – Âge, temps de vie résiduel et temps de vie total à temps continu.

On considère maintenant un processus de renouvellement avec temps de loi continue $S_i > 0$ entre les i -ième et $(i + 1)$ -ième renouvellements, pour $i \geq 1$, indépendants identiquement distribués, de fonction de densité donnée par $f(x) \geq 0$, pour tout réel $x > 0$, avec

$$\int_0^\infty x f(x) dx = \mu < \infty.$$

De plus, ces temps sont indépendants du temps avant le premier renouvellement, S_0 , qui est aussi supposé de loi continue.

L'âge, le temps de vie résiduel et le temps de vie total du renouvellement courant à l'instant $t \geq 0$ sont définis par

$$\begin{aligned} A(t) &= t - T_{N(t)}, \\ R(t) &= T_{N(t)+1} - t, \\ V(t) &= T_{N(t)+1} - T_{N(t)}, \end{aligned}$$

respectivement. Ici, $N(t)$ représente le nombre de renouvellements jusqu'à l'instant $t \geq 0$, inclusivement, alors que

$$T_{N(t)} = S_0 + \dots + S_{N(t)-1}$$

est l'instant du dernier renouvellement avant t (t inclus), et

$$T_{N(t)+1} = S_0 + \dots + S_{N(t)}$$

est l'instant du premier renouvellement après t (t exclu). (Voir la figure 58.)

Nous énonçons ici sans démonstration, par analogie avec le cas discret, les résultats pour les limites des fonctions de distribution des différents temps lorsque $t \rightarrow \infty$.

– Temps de vie total :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Pr(V(t) \leq x) = \int_0^x \frac{yf(y)}{\mu} dy,$$

pour tout $x > 0$.

– Âge et temps de vie résiduel :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Pr(A(t) \leq x) = \lim_{t \rightarrow \infty} Pr(R(t) \leq x) = \int_0^x \frac{1 - F(y)}{\mu} dy,$$

où

$$F(x) = \int_0^x f(y) dy,$$

pour tout $x > 0$.

En utilisant la loi des grands nombres, on obtient les mêmes limites pour les proportions moyennes de temps que ces variables prennent des valeurs inférieures ou égales à x . (Voir la section 3.5.2 pour une démonstration.)

L'espérance de la distribution asymptotique du temps de vie total est donnée par

$$\int_0^\infty \frac{x \cdot xf(x)}{\mu} dx = \frac{\int_0^\infty x^2 f(x) dx}{\int_0^\infty xf(x) dx} = \frac{E(S_1^2)}{E(S_1)} = \frac{\sigma^2 + \mu^2}{\mu},$$

où $\sigma^2 = \text{Var}(S_1)$. On note ici que l'espérance de la distribution asymptotique du temps de vie total est plus grande que l'espérance du temps entre deux renouvellements consécutifs donné par $\mu = E(S_1)$.

Pour ce qui est de l'espérance de la distribution asymptotique de l'âge et du temps de vie résiduel, on obtient que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{x \cdot (1 - F(x))}{\mu} dx &= \frac{\int_0^\infty x \int_x^\infty f(y) dy}{\mu} \\ &= \frac{\int_0^\infty \int_0^y x f(y) dx dy}{\mu} \\ &= \frac{\int_0^\infty (y^2/2) f(y) dy}{\mu} \\ &= \frac{E(S_1^2)}{2E(S_1)} \\ &= \frac{\sigma^2 + \mu^2}{2\mu}. \end{aligned}$$

Sans surprise, par symétrie, l'espérance de la distribution asymptotique du temps de vie résiduel et de l'âge est la moitié de l'espérance de la distribution asymptotique du temps de vie total.

Remarque : La distribution asymptotique du temps de vie total a une densité donnée par $xf(x)/\mu$, pour tout $x > 0$. D'autre part, la distribution asymptotique conditionnelle du temps de vie résiduel et de l'âge étant donné un temps de vie total $x > 0$ est uniforme sur l'intervalle $(0, x)$. Cela donne une densité totale

$$\int_y^\infty \frac{1}{x} \left(\frac{xf(x)}{\mu} \right) dx = \frac{1 - F(y)}{\mu},$$

pour tout $y > 0$, pour la distribution asymptotique du temps de vie résiduel et de l'âge.

3.3.4 Processus de renouvellement stationnaire

Un processus de renouvellement est dit stationnaire lorsque la distribution du temps de vie résiduel à tout instant est donnée par la distribution asymptotique de ce temps. C'est le cas si la distribution de S_0 est donnée par la distribution asymptotique du temps de vie résiduel. Sous les conditions du théorème de renouvellement à temps discret ou à temps continu, on a alors

$$E(N(t+h) - N(t)) = \frac{h}{\mu},$$

pour tout $t, h > 0$. C'est le théorème de renouvellement pour un processus stationnaire. La démonstration pour un processus en temps continu est présentée à la fin du chapitre.

À noter qu'on s'attend à ce qu'un processus de renouvellement soit approximativement stationnaire après un long moment quelle que soit la distribution de S_0 en admettant la convergence de la distribution du temps de vie résiduel vers sa distribution asymptotique.

3.3.5 Exemple : Intervalles de loi uniforme

Si le temps S_1 entre deux renouvellements consécutifs suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$, alors sa fonction de densité $f(x) = 1$ si $0 \leq x \leq 1$, et 0 autrement. Son espérance est $\mu = 1/2$ et sa fonction de répartition

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

La densité asymptotique de l'âge et du temps de vie résiduel est donnée par

$$\frac{1 - F(x)}{\mu} = \begin{cases} 2(1 - x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

La densité asymptotique du temps de vie total est

$$\frac{xf(x)}{\mu} = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

L'espérance asymptotique de la vie totale est

$$\int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3},$$

ce qui est plus grand que $\mu = 1/2$ comme prévu.

3.3.6 Exemple : Intervalles de loi exponentielle

On suppose maintenant que S_1 suit une loi exponentielle de paramètre λ . Ainsi, l'espérance est $\mu = 1/\lambda$, et la fonction de distribution satisfait

$$1 - F(x) = Pr(S_1 > x) = e^{-\lambda x},$$

pour $x > 0$. La densité asymptotique pour le temps de vie résiduel et pour l'âge est donnée par

$$\frac{1 - F(x)}{\mu} = \lambda e^{-\lambda x},$$

pour $x > 0$, qui est la fonction de densité de S_1 . La loi exponentielle étant sans mémoire, le processus de renouvellement est stationnaire quel que soit l'instant initial choisi.

En ce qui concerne la densité asymptotique de la vie totale, elle est donnée par

$$\frac{xf(x)}{\mu} = x\lambda^2 e^{-\lambda x},$$

pour $x > 0$. L'espérance correspondante est

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^2 \lambda^2 e^{-\lambda x} dx &= \lambda E(S_1^2) \\ &= \lambda(Var(S_1) + E(S_1)^2) \\ &= \lambda \left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} \right) \\ &= \frac{2}{\lambda}, \end{aligned}$$

qui excède $1/\lambda = E(S_1)$.

3.4 Processus semi-markoviens

Un processus semi-markovien sur les entiers $i \geq 0$ est décrit par des temps de séjour aux différents états, tous indépendants, qui sont de même distribution de probabilité, mais quelconque, discrète ou continue, pour chaque état $i \geq 0$. À la fin d'un temps de séjour à l'état $i \geq 0$, il y a transition à l'état $j \geq 0$ avec probabilité P_{ij} , indépendamment de toutes les autres transitions et de tous les temps de séjour. À remarquer qu'on peut avoir $P_{ii} \neq 0$. La matrice stochastique $P = (P_{ij})$ correspond à une matrice de transition pour une chaîne de Markov à temps discret.

3.4.1 Extension du théorème ergodique

On considère un processus semi-markovien avec temps de séjour à chaque état $i \geq 0$ d'espérance $0 < \mu_i \leq \mu < \infty$. On suppose que la matrice de transition $P = (P_{ij})$ correspond à une chaîne de Markov à temps discret irréductible, récurrente positive avec distribution stationnaire donnée par

(π_i) . Si $W_i(t)$ représente le temps passé à l'état i de l'instant 0 à l'instant $t > 0$ inclusivement, alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E(W_i(t))}{t} = \frac{\pi_i \mu_i}{\sum_{j \geq 1} \pi_j \mu_j}.$$

Cette limite représente la proportion moyenne de temps à long terme que le processus est à l'état i . Ce théorème pour les processus semi-markoviens est une extension du théorème ergodique pour les chaînes de Markov. La démonstration du résultat est reportée à la fin du chapitre.

Remarque : Dans le cas où les temps de séjour prennent la valeur 1 avec probabilité 1, on obtient le théorème ergodique pour les moyennes des probabilités de transition de P , c'est-à-dire,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P_{ji}^{(k)} = \pi_i,$$

pour tout $i, j \geq 0$. Dans le cas où les temps de séjour sont de loi exponentielle, disons de paramètre λ_i lorsqu'on est à l'état i , et que $P_{ii} = 0$ pour tout état i , alors on a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{s=0}^t P_{ji}(s) ds = \frac{\pi_i / \lambda_i}{\sum_{j \geq 1} \pi_j / \lambda_j},$$

où $P_{ji}(s)$ représente la probabilité d'être à l'état i à l'instant s étant donné qu'on est à l'état j à l'instant 0. Le résultat est cohérent avec le théorème ergodique pour les chaînes de Markov à temps continu.

3.4.2 Exemple : Principe de Peter

Le principe de Peter prédit que la majorité des postes sont occupés par des incompetents, car un employé compétent est rapidement promu à un poste supérieur jusqu'à ce qu'il occupe finalement un poste pour lequel il est incompetent. La situation est modélisée par un processus semi-markovien. On considère un nouvel employé qui arrive à un poste donné. L'employé est compétent pour le poste en question avec probabilité p , ce qui représente l'état 0. En revanche, il est incompetent avec la probabilité complémentaire $1 - p$, ce qui correspond à l'état 1. On suppose que $0 \leq p \leq 1$. Le temps moyen μ_1 que passe un nouvel employé incompetent à ce poste est supérieur

au temps moyen μ_0 qu'y passe un employé compétent, car ce dernier est promu plus rapidement. La matrice de transition sur les états 0 et 1 dans cet ordre pour le poste en question est

$$P = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ p & 1-p \end{pmatrix}.$$

La distribution stationnaire est donnée par $\pi_0 = p$ et $\pi_1 = 1 - p$.

Ainsi, la proportion moyenne de temps à long terme avec le poste occupé par un employé incompetent, avec $\mu_0 = 1$, $\mu_1 = 10$ et $p = 1/2$, est

$$\frac{\pi_1 \mu_1}{\pi_1 \mu_1 + \pi_0 \mu_0} = 0,91.$$

Cette proportion est très près de 1.

3.4.3 Processus de renouvellement avec alternance

On considère la situation de l'alternance d'un système entre deux états, disons un état de fonctionnement, représenté par 1, et un état de réparation, représenté par 0. Le système tombe en panne après un temps de fonctionnement d'espérance $\mu_1 < \infty$ et il est remis en fonctionnement après un temps de réparation d'espérance $\mu_0 < \infty$, tel qu'illustré dans la figure 59.

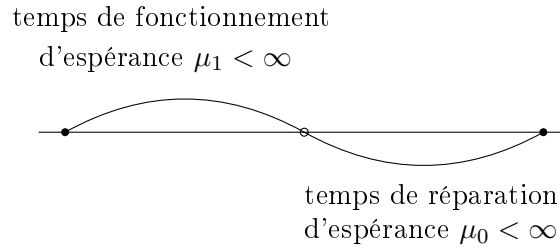


FIGURE 59 – Alternance entre deux états.

L'état du système au cours du temps, 0 ou 1, est un processus semi-markovien dont la matrice de transition est donnée par

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La distribution stationnaire correspondante est $\pi_0 = \pi_1 = 1/2$. La proportion de temps à long terme que le système est à l'état de fonctionnement est alors donnée par

$$\frac{\frac{1}{2}\mu_1}{\frac{1}{2}\mu_0 + \frac{1}{2}\mu_1} = \frac{\mu_1}{\mu_0 + \mu_1}.$$

3.4.4 Exemple : Compteur de particules

Des particules arrivent à un compteur selon un processus de Poisson d'intensité λ qui est inconnue. Le temps avant l'arrivée d'une particule, et ce à partir de n'importe quel instant, est donc d'espérance $\mu_0 = 1/\lambda$. Après chaque réception d'une particule, le compteur prend un temps d'espérance μ_1 connue pour récupérer, temps pendant lequel il ne peut recevoir aucune particule. La figure 60 illustre la situation.

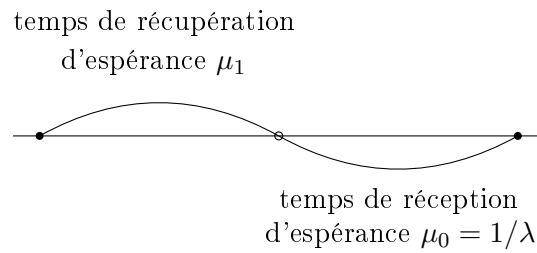


FIGURE 60 – Compteur de particules.

Le taux moyen de réception des particules à long terme est

$$\gamma = \frac{1}{\mu_0 + \mu_1} = \frac{1}{(1/\lambda) + \mu_1}.$$

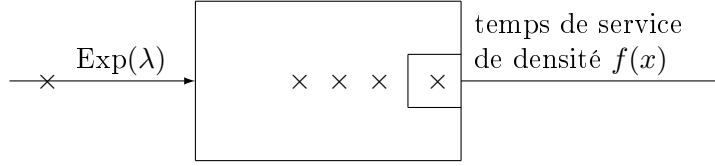
On en déduit que le taux d'arrivée des particules est

$$\lambda = \frac{\gamma}{1 - \gamma\mu_1}.$$

3.4.5 Système d'attente $M/G/1$

Pour un système d'attente, l'hypothèse que le processus d'arrivée est un processus de Poisson est raisonnable, car les clients se présentent souvent au gré d'aléas divers. En revanche, l'hypothèse que le temps de service est de loi exponentielle, donc sans mémoire, est très forte.

On considère un système d'attente de type $M/G/1$. Le G signifie que le temps de service suit une loi générale, quelconque. Ici, on suppose un temps de service strictement positif, de fonction de densité f et d'espérance $0 < \nu = \int_0^\infty xf(x)dx < \infty$. D'autre part, il y a un seul serveur et l'arrivée des clients se fait selon un processus de Poisson d'intensité $0 < \lambda < \infty$. La figure 61 illustre ce système.

FIGURE 61 – Système d’attente de type $M/G/1$.

Le processus $\{X_t\}_{t \geq 0}$, où X_t représente le nombre de clients présents dans le système à l’instant $t \geq 0$, n’est généralement pas une chaîne de Markov à temps continu. Il faut pour cela que le temps de service soit de loi exponentielle. En revanche, le processus $\{X_n\}_{n \geq 0}$, où X_n représente le nombre de clients restants dans le système au départ du n -ième client, est une chaîne de Markov à temps discret, le temps étant compté en nombre de services. En fait, la chaîne est irréductible, apériodique, sur les états $0, 1, 2, \dots$, avec matrice de transition de forme

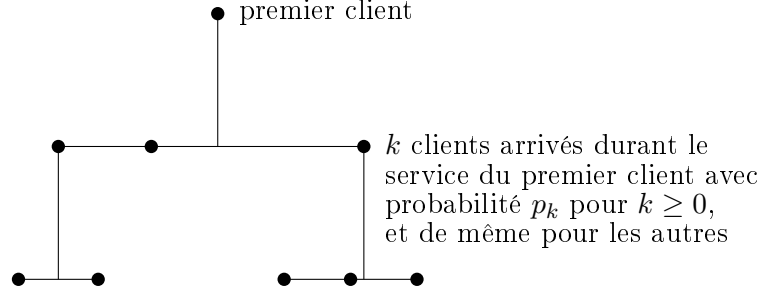
$$P = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_0 & p_1 & p_2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & p_0 & p_1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Ici

$$p_k = \int_0^\infty \frac{(\lambda y)^k}{k!} e^{-\lambda y} f(y) dy > 0,$$

représente la probabilité de k arrivées pendant un service, pour tout $k \geq 0$.

La chaîne est-elle récurrente, et si oui est-elle récurrente positive ou nulle ? On construit un processus de branchement afin de répondre à ces questions. Pour cela, on considère que les clients qui arrivent pendant le service d’un premier client correspondent aux descendants de première génération de ce client. Les clients qui arrivent pendant les services de ces descendants de première génération forment la génération suivante, et ainsi de suite. On obtient donc un processus de branchement qui commence avec un individu à la génération initiale et dans lequel chaque individu produit k descendants de première génération avec probabilité p_k , pour $k \geq 0$. La figure 62 illustre cela.

FIGURE 62 – Processus de branchement pour système d'attente $M/G/1$.

Dans ce cas, on a une extinction certaine si et seulement si

$$\begin{aligned}
 m &= \sum_{k \geq 0} k p_k \\
 &= \int_0^\infty \left(\sum_{k \geq 0} \frac{k(\lambda y)^k}{k!} e^{-\lambda y} \right) f(y) dy \\
 &= \int_0^\infty \lambda y f(y) dy \\
 &= \lambda \nu \leq 1,
 \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\nu \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Cela signifie que l'état 0 est récurrent si et seulement si l'espérance du temps de service est plus petit que l'espérance du temps entre l'arrivée d'un client et l'arrivée du suivant.

D'autre part, si on définit

$$\tau = E(\text{nombre de services avant un retour à 0} \mid \text{départ de 0}),$$

alors on a

$$\tau = E\left(\sum_{k \geq 0} Z_k\right) = \sum_{k \geq 0} E(Z_k),$$

où Z_k représente le nombre d'individus à la génération $k \geq 0$. On a donc

$$\tau = \sum_{k \geq 0} m^k = \frac{1}{1 - m} = \frac{1}{1 - \lambda \nu} < \infty,$$

si et seulement si $\lambda\nu < 1$. C'est la condition pour que l'état 0 soit récurrent positif. Sinon, il est récurrent nul.

Un retour à 0 à partir de 0 correspond à une période d'occupation du serveur. Une telle période commence par l'arrivée d'un premier client dans le système et se termine par le départ d'un dernier client. Dans le cas récurrent positif, on s'intéresse à l'espérance d'une période d'occupation en temps réel, soit

$$\mu = E(\text{période d'occupation du serveur en temps réel}).$$

Cette espérance est représentée par

$$\mu = E\left(\sum_{i=1}^T S_i\right)$$

où S_1, S_2, \dots , sont des temps de service identiquement distribués, indépendants entre eux et indépendants de la variable

$$T = \sum_{k \geq 0} Z_k.$$

Par le lemme de Wald, on obtient que

$$\mu = E(S_1)E(T) = \nu\tau = \frac{\nu}{1 - \lambda\nu}.$$

Enfin, par la théorie du renouvellement avec alternance, la fraction moyenne de temps à long terme que le serveur est en repos est (voir la figure 63)

$$\begin{aligned}\pi_0 &= \frac{1/\lambda}{(1/\lambda) + (\nu/(1 - \lambda\nu))} \\ &= \frac{1 - \lambda\nu}{1 - \lambda\nu + \lambda\nu} \\ &= 1 - \lambda\nu.\end{aligned}$$

Par conséquent, la fraction moyenne de temps à long terme que le serveur est occupé est

$$\lambda\nu = \frac{\nu}{1/\lambda},$$

c'est-à-dire l'espérance d'un temps de service sur l'espérance du temps entre deux arrivées consécutives de clients.

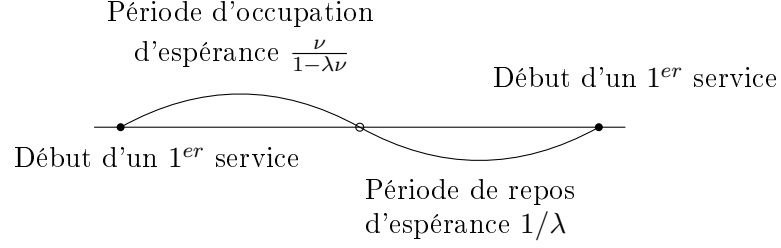


FIGURE 63 – Périodes d’occupation et de repos d’un système d’attente $M/G/1$

3.5 *Moyennes temporelles asymptotiques

3.5.1 Moyennes temporelles à temps discret

On considère un processus de renouvellement avec temps $S_i > 0$ entre les i -ième et $(i + 1)$ -ième renouvellements, pour $i \geq 1$, indépendants et identiquement distribués, de fonction de masse donnée par $p_k \geq 0$, pour tout entier $k \geq 1$, avec $\sum_{k \geq 1} kp_k = \mu < \infty$. De plus, ces temps sont indépendants du temps avant le premier renouvellement, S_0 , qui est aussi supposé à valeurs entières.

L’âge, le temps de vie résiduel et le temps de vie total du renouvellement courant à l’instant $n \geq 0$ sont définis par

$$\begin{aligned} A(n) &= n - T_{N(n)}, \\ R(n) &= T_{N(n)+1} - n, \\ V(n) &= T_{N(n)+1} - T_{N(n)}, \end{aligned}$$

respectivement, où $N(n)$ représente le nombre de renouvellements jusqu’à l’instant $n \geq 0$, inclusivement, alors que

$$T_{N(n)} = S_0 + \dots + S_{N(n)-1}$$

est l’instant du dernier renouvellement avant n (n inclus), et

$$T_{N(n)+1} = S_0 + \dots + S_{N(n)}$$

est l’instant du premier renouvellement après n (n exclu).

Théorème :

Avec probabilité 1, la proportion de temps avec un renouvellement courant de temps de vie total $k \geq 1$ jusqu'à l'instant $n \geq 0$ converge lorsque $n \rightarrow \infty$ vers

$$\frac{kp_k}{\mu},$$

alors que la proportion de temps avec un renouvellement courant de temps de vie résiduel $m \geq 1$ converge vers

$$\frac{\sum_{k \geq m} p_k}{\mu},$$

et la proportion de temps avec un renouvellement courant d'âge $l \geq 0$ vers

$$\frac{\sum_{k \geq l+1} p_k}{\mu}.$$

Remarque : Les distributions empiriques limites ainsi obtenues correspondent aux distributions asymptotiques du temps de vie total, du temps de vie résiduel et de l'âge, respectivement, lorsque ces distributions existent, c'est-à-dire, lorsque $\text{p.g.c.d.}\{k \geq 1 : p_k > 0\} = 1$.

Démonstration :

Pour la proportion de temps avec un temps de vie total $k \geq 1$ jusqu'à l'instant $n \geq 0$, inclusivement, on obtient les inégalités

$$\frac{1}{T_{N(n)+1}} \sum_{i=0}^{N(n)-1} k \mathbf{1}_{\{S_i=k\}} \leq \frac{1}{n+1} \sum_{l=0}^n \mathbf{1}_{\{V(l)=k\}} \leq \frac{1}{T_{N(n)}} \sum_{i=0}^{N(n)} k \mathbf{1}_{\{S_i=k\}},$$

où $\mathbf{1}_{\{V(l)=k\}} = 1$ si le temps de vie total à l'instant l est k , et 0 autrement, alors que $\mathbf{1}_{\{S_i=k\}} = 1$ si le i -ième renouvellement a un temps de vie total k , et 0 autrement. Cela découle des inégalités pour les sommes qui représentent des temps passés avec un temps de vie total k jusqu'aux instants $T_{N(n)}$, n et $T_{N(n)+1}$, respectivement, et du fait que

$$T_{N(n)} < n+1 \leq T_{N(n)+1}.$$

Le terme de gauche peut s'écrire

$$\left(\frac{N(n)}{\sum_{i=0}^{N(n)} S_i} \right) \left(\frac{1}{N(n)} \sum_{i=0}^{N(n)-1} k \mathbf{1}_{\{S_i=k\}} \right).$$

Par la loi des grands nombres, il converge vers

$$\left(\frac{1}{E(S_1)} \right) E(k \mathbf{1}_{\{S_1=k\}}) = \frac{kp_k}{\mu},$$

avec probabilité 1 lorsque $n \rightarrow \infty$. En effet, on a alors $N(n) \rightarrow \infty$ avec probabilité 1 (puisque $S_i < \infty$ avec probabilité 1 pour tout $i \geq 0$). Les mêmes arguments peuvent être appliqués au terme de droite.

Pour le temps de vie résiduel de valeur $m \geq 1$, la variable aléatoire $k \mathbf{1}_{\{S_i=k\}}$ ci-dessus est remplacée par la variable aléatoire $\mathbf{1}_{\{S_i \geq m\}}$, dont l'espérance est

$$Pr(S_i \geq m) = \sum_{k \geq m} p_k,$$

alors que pour l'âge de valeur $l \geq 0$, elle est remplacée par $\mathbf{1}_{\{S_i \geq l+1\}}$ d'espérance

$$Pr(S_i \geq l+1) = \sum_{k \geq l+1} p_k.$$

3.5.2 Moyennes temporelles à temps continu

On considère un processus de renouvellement avec temps $S_i > 0$ entre les i -ième et $(i+1)$ -ième renouvellements, pour $i \geq 1$, indépendants et identiquement distribués, de fonction de densité donnée par $f(x) \geq 0$, pour tout réel $x > 0$, avec $\int_0^\infty xf(x) = \mu < \infty$. De plus, ces temps sont indépendants du temps avant le premier renouvellement, S_0 , qui est aussi supposé de loi continue.

L'âge, le temps de vie résiduel et le temps de vie total du renouvellement courant à l'instant $t \geq 0$ sont définis par

$$\begin{aligned} A(t) &= t - T_{N(t)}, \\ R(t) &= T_{N(t)+1} - t, \\ V(t) &= T_{N(t)+1} - T_{N(t)}, \end{aligned}$$

respectivement, où $N(t)$ représente le nombre de renouvellements jusqu'à l'instant $t \geq 0$, inclusivement, alors que

$$T_{N(t)} = S_0 + \dots + S_{N(t)-1}$$

est l'instant du dernier renouvellement avant t (t inclus), et

$$T_{N(t)+1} = S_0 + \dots + S_{N(t)}$$

est l'instant du premier renouvellement après t (t exclu).

Théorème :

Avec probabilité 1, la proportion de temps avec un renouvellement courant de temps de vie total $\leq x$, pour $x > 0$ fixé et jusqu'à l'instant $t > 0$, converge lorsque $t \rightarrow \infty$ vers la limite

$$\frac{1}{\mu} \int_0^x y f(y) dy,$$

alors que la proportion de temps avec un renouvellement courant de temps de vie résiduel $\leq x$ et la proportion de temps avec un renouvellement courant d'âge $\leq x$ convergent toutes les deux vers la limite

$$\frac{1}{\mu} \int_0^x (1 - F(y)) dy,$$

où

$$F(x) = \int_0^x f(y) dy,$$

pour $x > 0$, est la fonction de répartition pour le temps entre deux renouvellements consécutifs.

Remarque : Les distributions empiriques limites ainsi obtenues correspondent aux distributions asymptotiques du temps de vie total, du temps de vie résiduel et de l'âge, respectivement, lorsque celles-ci existent.

Démonstration :

Pour la proportion de temps avec un renouvellement courant de temps de vie total $\leq x$, pour $x > 0$ fixé et jusqu'à l'instant $t > 0$, on obtient les inégalités

$$\frac{1}{T_{N(t)+1}} \sum_{i=0}^{N(t)-1} S_i \mathbf{1}_{\{S_i \leq x\}} \leq \frac{1}{t} \int_0^t \mathbf{1}_{\{V(s) \leq x\}} ds \leq \frac{1}{T_{N(t)}} \sum_{i=0}^{N(t)} S_i \mathbf{1}_{\{S_i \leq x\}},$$

où $\mathbf{1}_{\{V(s) \leq x\}} = 1$ si le temps de vie total du renouvellement courant à l'instant s est $\leq x$, et 0 autrement, alors que $\mathbf{1}_{\{S_i \leq x\}} = 1$ si le i -ième renouvellement a un temps de vie total $\leq x$, et 0 autrement. Ici, on a utilisé le fait que

$$T_{N(t)} \leq t < T_{N(t)+1}.$$

Le terme de gauche peut s'écrire

$$\left(\frac{N(t)}{\sum_{i=0}^{N(t)} S_i} \right) \left(\frac{1}{N(t)} \sum_{i=0}^{N(t)-1} S_i \mathbf{1}_{\{S_i \leq x\}} \right).$$

Par la loi des grands nombres, il converge vers

$$\left(\frac{1}{E(S_1)} \right) E(S_1 \mathbf{1}_{\{S_1 \leq x\}}) = \frac{1}{\mu} \int_0^x y f(y) dy,$$

avec probabilité 1 lorsque $t \rightarrow \infty$, car alors $N(t) \rightarrow \infty$ avec probabilité 1 (puisque $S_i < \infty$ avec probabilité 1 pour tout $i \geq 0$). Les mêmes arguments peuvent être appliqués au terme de droite.

Pour le temps de vie résiduel et l'âge de valeur $\leq x$, la variable aléatoire $S_1 \mathbf{1}_{\{S_1 \leq x\}}$ ci-dessus est remplacée par la variable aléatoire $\min(S_1, x)$, dont l'espérance est

$$E(\min(S_1, x)) = \int_0^x y f(y) dy + x \int_x^\infty f(y) dy = \int_0^x (1 - F(y)) dy.$$

3.6 *Démonstrations

3.6.1 Théorème de renouvellement élémentaire

On considère un processus de renouvellement avec $S_0 > 0$ d'espérance $\mu_0 < \infty$ pour le temps avant le premier renouvellement, et $S_i > 0$ d'espérance $\mu < \infty$ pour le temps entre les i -ième et $(i+1)$ -ième renouvellements, pour $i \geq 1$. Tous ces temps sont indépendants. Si $N(t)$ représente le nombre de renouvellements jusqu'à l'instant $t > 0$ inclusivement, alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E(N(t))}{t} = \frac{1}{\mu}.$$

Démonstration :

On considère d'abord le cas où $S_i \leq M$ pour une certaine constante $M < \infty$, pour tout $i \geq 0$. La figure 64 illustre cette situation.

Le temps d'arrivée du premier renouvellement après t (t exclu) satisfait alors les inégalités

$$t < S_0 + S_1 + \cdots + S_{N(t)} = T_{N(t)+1} \leq t + M.$$

D'autre part, l'événement

$$\{N(t) \geq n\} = \{S_0 + \cdots + S_{n-1} = T_n \leq t\}$$

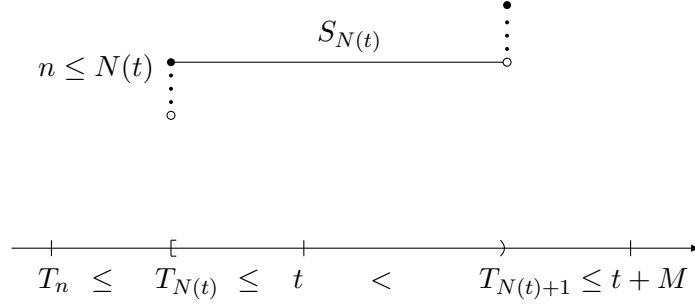


FIGURE 64 – Temps de séjour à l'état $N(t)$ dans le cas où tous les temps de séjour aux différents états sont bornés par une constante M .

est indépendant de S_n . Le lemme de Wald garantit alors que

$$t \leq \mu_0 + \mu E(N(t)) \leq t + M.$$

On obtient le résultat en divisant partout par t et en passant à la limite lorsque $t \rightarrow \infty$.

Dans le cas général, pour $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, on peut trouver une constante $0 < M < \infty$ suffisamment grande pour que les temps tronqués définis par

$$\tilde{S}_i = \begin{cases} S_i & \text{si } S_i \leq M, \\ M & \text{si } S_i > M, \end{cases}$$

aient des espérances $\tilde{\mu}_i$ satisfaisant $\tilde{\mu}_0 \leq \mu_0 < \infty$ pour $i = 0$, et

$$\frac{\mu}{1 + \varepsilon\mu} \leq \tilde{\mu} \leq \mu < \infty,$$

pour $i \geq 1$. En représentant par $\tilde{N}(t) \geq N(t)$ le nombre de renouvellements jusqu'à l'instant $t > 0$ inclusivement obtenus avec ces temps tronqués, et en répétant les arguments ci-dessus, on obtient les inégalités

$$\frac{t - \mu_0}{t\mu} \leq \frac{E(N(t))}{t} \leq \frac{E(\tilde{N}(t))}{t} \leq \frac{t + M - \tilde{\mu}_0}{t\tilde{\mu}}.$$

On conclut que

$$\frac{1}{\mu} \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{E(N(t))}{t} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{E(N(t))}{t} \leq \frac{1}{\tilde{\mu}} \leq \frac{1}{\mu} + \varepsilon,$$

ce qui complète la démonstration.

3.6.2 Théorème de renouvellement à temps discret

On considère un processus de renouvellement avec S_0 pour le temps avant le premier renouvellement, et S_i pour le temps entre les i -ième et $(i+1)$ -ième renouvellements, pour $i \geq 1$. Tous ces temps sont indépendants, de même distribution de probabilité discrète donnée par la fonction de masse $p_k \geq 0$, pour toute valeur entière $k \geq 1$. On suppose que

$$\text{p.g.c.d.}\{k \geq 1 : p_k > 0\} = 1, \sum_{k \geq 1} kp_k = \mu < \infty.$$

Soit

$$u_k = \text{Pr}(\text{renouvellement à l'instant } k),$$

pour $k \geq 1$. Alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = \frac{1}{\mu}.$$

De plus, on a le même résultat si S_0 a une distribution de probabilité différente sur les entiers $k \geq 1$.

Démonstration :

En conditionnant sur le temps du premier renouvellement (voir la figure 65), on obtient l'équation de renouvellement

$$u_k = \sum_{j=1}^k p_j u_{k-j},$$

pour tout $k \geq 1$, avec $u_0 = 1$. La solution de ce système d'équations, qui peut être obtenue par récurrence, est unique.

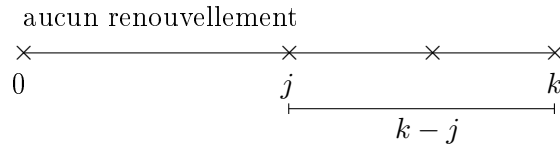


FIGURE 65 – Représentation de l'équation de renouvellement. Un \times indique un renouvellement.

D'autre part, on obtient le même système d'équations pour la probabilité de retourner à 1 en k pas à partir de 1, $P_{11}^{(k)}$, dans la chaîne de Markov à

temps discret sur les entiers $k \geq 1$ dont les probabilités de transition en un pas sont données par

$$P_{1k} = p_k, P_{k+1,k} = 1,$$

pour tout $k \geq 1$. Ces transitions sont illustrées dans la figure 66. Ce sont les transitions pour le temps qu'il reste avant le prochain renouvellement, d'un pas au suivant.

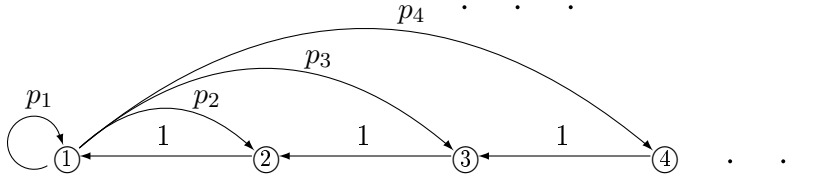


FIGURE 66 – Chaîne de Markov correspondant à l'équation de renouvellement.

De plus, par les hypothèses faites sur p_k pour $k \geq 1$, l'état 1 de cette chaîne est récurrent positif apériodique, avec

$$\mu = \sum_{k \geq 1} kp_k < \infty$$

comme espérance du nombre de pas pour retourner à 1 à partir de 1. En appliquant le théorème ergodique à temps discret, on a donc

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = \lim_{k \rightarrow \infty} P_{11}^{(k)} = \frac{1}{\mu}.$$

Si $S_0 = j$ avec probabilité q_j pour $j \geq 1$, alors la probabilité d'un renouvellement à l'instant k est

$$\sum_{j=1}^k q_j u_{k-j} = \sum_{j \geq 1} q_j \delta_{\{j \leq k\}} u_k.$$

Par le lemme sur la limite d'une somme du chapitre 1, on a convergence vers

$$\frac{\sum_{j \geq 1} q_j}{\mu} = \frac{1}{\mu}.$$

3.6.3 Théorème de renouvellement dans le cas stationnaire

On considère un processus de renouvellement stationnaire en temps continu $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ avec intervalles de renouvellement S_1, S_2, \dots , de fonction de distribution continue

$$F(x) = \int_0^x f(y) dy,$$

pour tout $x > 0$, avec $\int_0^\infty (1 - F(x)) dx = \mu < \infty$, et intervalle initial S_0 de fonction de densité

$$f_0(x) = \frac{1 - F(x)}{\mu},$$

pour tout $x > 0$. On a alors

$$E(N(t+h) - N(t)) = \frac{h}{\mu},$$

pour tout $h > 0$ et tout $t \geq 0$.

Démonstration :

Tout d'abord, on définit

$$m(t) = E(N(t)),$$

pour tout $t \geq 0$. Par stationnarité, on a que

$$m(t+s) = E(N(t+s) - N(s) + N(s)) = E(N(t+s) - N(s)) + E(N(s)) = m(t) + m(s),$$

pour tout $s, t \geq 0$. Cela implique que

$$m(t) = ct,$$

pour une constante $c = m(1)$ à déterminer. D'autre part, en conditionnant sur la valeur prise par S_1 dans le cas où les deux premiers renouvellements surviennent dans l'intervalle de temps $[0, t]$, on obtient que

$$\begin{aligned} m(t) &= Pr(N(t) = 1) + \sum_{k \geq 2} \int_0^t k Pr(N(t-x) = k-1) f(x) dx \\ &= Pr(N(t) \geq 1) + \int_0^t m(t-x) f(x) dx \\ &= Pr(S_0 \leq t) + \int_0^t m(t-x) f(x) dx. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} Pr(S_0 \leq t) &= \int_0^t \frac{1 - F(x)}{\mu} dx \\ &= \frac{t}{\mu} - \int_0^t \int_0^x \frac{f(y)}{\mu} dy dx \\ &= \frac{t}{\mu} - \int_0^t \frac{t - y}{\mu} f(y) dy. \end{aligned}$$

En faisant $m(t) = ct$, on conclut alors que $c = \mu^{-1}$.

3.6.4 Théorème ergodique pour processus semi-markoviens

On considère un processus semi-markovien avec temps de séjour à chaque état $i \geq 0$ d'espérance $0 < \mu_i \leq \mu < \infty$. On suppose que la matrice de transition $P = (P_{ij})$ correspond à une chaîne de Markov à temps discret irréductible, récurrente positive avec distribution stationnaire donnée par (π_i) . Si $W_i(t)$ représente le temps passé à l'état i de l'instant 0 à l'instant $t > 0$ inclusivement, alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E(W_i(t))}{t} = \frac{\pi_i \mu_i}{\sum_{j \geq 1} \pi_j \mu_j}.$$

Démonstration :

Le temps entre le début d'une visite à i et le début de la prochaine peut être représenté par

$$S_i = S_{i,1} + \sum_{j \neq i} \{S_{j,1} + \dots + S_{j,N_{ij}}\},$$

où $S_{i,1}$ est un temps de séjour à i d'espérance $\mu_i < \infty$ et $S_{j,1}, S_{j,2}, \dots$, des temps de séjour à j d'espérance $\mu_j < \infty$, pour $j \neq i$, tous indépendants entre eux et indépendants du nombre de visites à j entre deux visites consécutives à i , représenté par N_{ij} , pour $j \neq i$. Le lemme de Wald garantit alors que

$$E(S_i) = \mu_i + \sum_{j \neq i} \mu_j E(N_{ij}).$$

Or,

$$E(N_{ij}) = \frac{\pi_j}{\pi_i},$$

d'après la remarque qui suit la démonstration du théorème sur la distribution stationnaire pour les chaînes de Markov à temps discret. De plus,

$$0 < E(S_i) \leq \mu + \frac{\mu}{\pi_i} < \infty,$$

car $0 < \mu_i \leq \mu < \infty$ et $\pi_i > 0$, pour tout $i \geq 0$.

Le théorème de renouvellement élémentaire donne alors que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E(N_i(t))}{t} = \frac{1}{E(S_i)},$$

où $N_i(t)$ représente le nombre de visites à i jusqu'à l'instant $t > 0$ inclusivement.

D'autre part, le temps passé à l'état $i \geq 0$ jusqu'à l'instant $t > 0$ inclusivement satisfait

$$S_{i,1} + \dots + S_{i,N_i(t)-1} \leq W_i(t) \leq S_{i,1} + \dots + S_{i,N_i(t)},$$

où $S_{i,1}, S_{i,2}, \dots$ sont des temps de séjour à i d'espérance $\mu_i < \infty$, indépendants entre eux et indépendants de $N_i(t)$. Le lemme de Wald mène alors aux inégalités

$$\mu_i E(N_i(t) - 1) \leq E(W_i(t)) \leq \mu_i E(N_i(t)).$$

On conclut que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E(W_i(t))}{t} = \frac{\mu_i}{E(S_i)},$$

ce qui donne le résultat annoncé en multipliant le numérateur et le dénominateur par π_i .

3.7 Exercices

1. Des voitures arrivent à une barrière. Chaque voiture a une longueur aléatoire L ayant une fonction de répartition F . La première voiture arrive et se stationne contre la barrière. Les voitures suivantes se stationnent les unes derrière les autres à une distance qui est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 2]$. Soit N_x le nombre de voitures alignées à une distance inférieure ou égale à x de la barrière. Déterminer la limite de l'espérance de N_x sur x lorsque x tend vers l'infini dans les cas : (a) $F(l) = 0$ pour $l < c$ et 1 pour $l \geq c$; (b) $F(l) = 1 - e^{-l/2}$ pour $l > 0$ et 0 ailleurs.

2. Supposons que le temps entre deux renouvellements consécutifs dans un processus de renouvellement à temps discret est 1 avec probabilité $1/4$, 2 avec probabilité $1/4$ et 3 avec probabilité $1/2$. (a) Quelle est la probabilité d'avoir un renouvellement à l'instant n lorsque n tend vers l'infini ? (b) Quelle est la fonction de masse du temps entre l'instant n et l'instant du premier renouvellement après n (n exclu) lorsque n tend vers l'infini ? (c) Quelle est la fonction de masse du temps entre l'instant du dernier renouvellement avant n (n inclus) et l'instant du premier renouvellement après n (n exclu) lorsque n tend vers l'infini ?
3. Supposons que chaque fois qu'un appareil cesse de fonctionner, il est remplacé par un appareil neuf. Le temps de fonctionnement d'un appareil neuf a comme fonction de densité $f(x) = x^2 + 4x/3$ pour $0 < x < 1$ et 0 ailleurs. (a) Quel est le taux moyen de remplacement des appareils à long terme ? (b) Combien de temps en moyenne un appareil en opération à un instant donné très tard dans le futur va-t-il encore fonctionner ? (c) Quelle est la probabilité que l'appareil en (b) fonctionne encore plus d'une demie unité de temps ?
4. Des particules arrivent à un compteur selon un processus de Poisson d'intensité 2. Le compteur a besoin d'un intervalle de temps de longueur fixe $1/5$ pour récupérer après la détection d'une particule. Pendant cette période de récupération, les particules arrivant au compteur ne sont pas détectées. Quelle est la proportion moyenne des particules qui sont détectées à long terme ?
5. Un vendeur de drogue se tient au coin d'une rue. Les acheteurs se présentent selon un processus de Poisson d'intensité 12 par heure. Lorsqu'un acheteur tombe sur le vendeur, ils disparaissent tous les deux 5 minutes pour conclure la transaction, puis le vendeur retourne au coin de la rue. Les acheteurs qui se présentent durant l'absence du vendeur passent leur chemin. Le montant moyen d'une transaction est de 50 dollars et elles sont toutes indépendantes. (a) Quel est le montant moyen des transactions par heure à long terme ? (b) Quelle est la probabilité qu'un policier qui se présente au coin de la rue tombe sur le vendeur ? (c) Combien de temps en moyenne un policier qui commence à surveiller le coin de la rue devra-t-il attendre avant d'être témoin d'une rencontre entre un acheteur et le vendeur ?
6. Lorsqu'un appel est reçu à une boîte vocale, un message enregistré

d'une durée fixe de 2 minutes est transmis. Tout autre appel est rejeté durant cette période. Le taux moyen de messages transmis à long terme est de 12 par heure. On suppose que les appels arrivent selon un processus de Poisson. Déterminer : (a) le temps moyen entre le début d'un message et le début du suivant ; (b) la proportion moyenne des appels rejetés à long terme ; (c) le taux d'arrivée des appels (acceptés ou rejetés) ; (d) le nombre moyen d'appels rejetés durant la transmission d'un message.

7. Sur une grande artère d'une ville, le stationnement est autorisé pour une période de deux heures. Un employé de la ville passe sur cette artère toutes les deux heures et il marque les véhicules qui y sont stationnés à l'aide d'une craie. Si le véhicule est déjà marqué, l'employé donne une contravention. Supposons qu'une personne stationne son véhicule sur cette artère à un instant au hasard pour une période de temps de loi uniforme entre 0 et 4 heures. Quelle est la probabilité que cette personne obtienne une contravention ?
8. Des groupes constitués d'une, deux ou trois personnes avec les probabilités $1/4$, $1/2$ et $1/4$, respectivement, se présentent au comptoir d'un glacier selon un processus de Poisson d'intensité 20 par heure, mais passent leur chemin si le glacier est occupé. Les personnes sont servies une à la fois, indépendamment les unes des autres, et le temps de service est de loi exponentielle d'espérance 1 minute. Calculer : (a) la proportion de temps à long terme que le glacier sera occupé ; (b) le temps moyen d'une période de repos du glacier ; (c) le temps moyen d'une période d'occupation du glacier.
9. Considérons une assurance pour laquelle un nouvel assuré doit payer une prime à un taux annuel de 500 dollars. Lorsqu'un assuré n'a pas fait de réclamation durant une période de 2 années consécutives, le taux annuel de la prime diminue à 300 dollars. Cependant, il revient à nouveau à 500 dollars suite à une réclamation. Si on suppose que l'assuré vit pour toujours et fait des réclamations selon un processus Poisson d'intensité 1 par année, calculer : (a) le montant moyen annuel de la prime à long terme ; (b) la proportion de temps à long terme que l'assuré paie au taux de 500 dollars.
10. Des événements surviennent selon un processus Poisson d'intensité λ . Si un événement survient moins de 1 unité de temps après l'évène-

ment précédent, alors on dit que c'est un succès. Par exemple, si les événements surviennent aux temps 2 ; 2,8 ; 4 ; 6 ; 6,6 ; etc., alors les événements aux temps 2,8 et 6,6 sont des succès. (a) À quel taux les succès surviennent-ils à long terme ? (b) Quelle est la proportion des événements qui sont des succès à long terme ?

11. Un appareil qui cesse de fonctionner est ou bien remplacé immédiatement par un appareil neuf avec probabilité $2/3$ ou bien remis en service après avoir été réparé avec probabilité $1/3$. Le temps de réparation moyen est 1 et le temps de fonctionnement moyen est 2 ou 4 selon qu'il s'agisse d'un appareil réparé ou d'un appareil neuf. Quelle est la proportion moyenne du temps à long terme avec un appareil en réparation ?

3.8 *Exercices supplémentaires

12. L'ampoule d'un lampadaire a un temps de vie en nombre d'années de loi exponentielle de paramètre 1. Quel est le taux moyen de remplacement à long terme de l'ampoule : (a) si elle est remplacée aussitôt qu'elle brûle ; (b) si l'équipe d'entretien passe à date fixe une fois l'an et remplace l'ampoule seulement si elle est brûlée. Dans ce dernier cas, (c) quelle est la proportion moyenne de temps à long terme avec une ampoule brûlée ?
13. Un étudiant utilise des cartes prépayées pour son cellulaire qui lui dure chacune un temps S_i (en mois) de fonction de densité $f(x) = 2x$, pour $0 < x < 1$, et qu'il renouvelle juste avant qu'elle ne s'épuise. Déterminer : (a) le taux de remplacement moyen à long terme de la carte, et (b) la proportion moyenne de temps à long terme avec une carte qui sera épuisée dans moins d'un demi mois. Si on suppose maintenant qu'il oublie de renouveler avant l'épuisement de la carte avec probabilité $1/3$ et qu'il prend dans ce cas un temps de loi uniforme sur $[0, 1]$ après son épuisement pour la renouveler, déterminer : (c) le taux moyen d'oubli de remplacer la carte à long terme ; (d) la proportion moyenne du temps à long terme avec une carte épuisée ?
14. Un appareil fonctionne jusqu'à ce qu'il reçoive un deuxième choc, à la suite duquel il est remplacé par un nouveau. Les chocs surviennent selon un processus de Poisson d'intensité 1. Déterminer : (a) le taux moyen de remplacement de l'appareil à long terme ; (b) la proportion

moyenne de temps à long terme avec un appareil en fonctionnement ayant subi un choc ; (c) la densité asymptotique du temps de vie résiduel de l'appareil en fonctionnement ; (d) l'espérance asymptotique du temps de vie résiduel de l'appareil en fonctionnement. *Remarque* : L'espérance asymptotique peut être calculée sans calculer la densité asymptotique.

- 15.** Une chaîne de Markov à temps continu sur les états 0, 1, 2, 3 a comme générateur

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Déterminer : (a) la distribution stationnaire si elle existe ; (b) l'espérance du temps pour revenir à 0 lorsqu'on quitte l'état 0. *Remarque* : Il y a deux façons de répondre à la question (b), une longue et une courte.

- 16.** Un médecin travaille dans une salle d'urgence. Il est appelé en moyenne une fois toutes les deux heures selon un processus de Poisson. S'il s'écoule plus de 36 minutes depuis le dernier appel, il s'endort et il ne se réveille qu'au prochain appel. (a) Quelle est la fraction de temps moyenne à long terme que le médecin dormira ? (b) Quelle est l'espérance d'une période d'éveil continu du médecin ?
- 17.** Des paires de joueurs de tennis se présentent à un centre sportif où il y a deux courts selon un processus de Poisson d'intensité 2 par heure. Ils utilisent un court s'il y en a un qui est disponible au moment de leur arrivée ou sinon ils attendent qu'un se libère mais seulement s'il n'y pas déjà de joueurs en attente. Dans l'autre cas, ils renoncent à jouer. Le temps d'utilisation d'un court par chaque paire de joueurs est de loi exponentielle de moyenne une heure indépendamment de tout le reste. Déterminer : (a) le générateur pour le nombre de paires de joueurs en action ou en attente ; (b) le nombre moyen de courts utilisés à long terme ; (c) le temps moyen d'une période d'utilisation continue d'au moins un court.
- 18.** Des clients se présentent à un comptoir de service selon un processus de Poisson d'intensité 2, mais ils rebroussement chemin avec probabilité

$1/2$ si le serveur est occupé. Il y a un seul serveur et le temps de service est de loi exponentielle de paramètre μ . Le nombre de clients dans le système (en attente ou en train de se faire servir) est un processus de naissance et de mort. Déterminer : (a) les taux de naissance et les taux de mort ; (b) la condition nécessaire et suffisante sur μ pour l'existence d'une distribution stationnaire ; (c) la distribution stationnaire lorsqu'elle existe ; (d) l'espérance du temps dans le système d'un client qui se présente au comptoir de service à l'état stationnaire en supposant la règle du DERNIER ARRIVÉ, PREMIER SERVI. Remarque : Vous ne pouvez pas utiliser la formule de Little qui a été déduite sous d'autres conditions.

- 19.** Un hotel dispose d'une navette pour cueillir des clients à l'aéroport qui arrivent selon un processus de Poisson d'intensité 6 par heure. Lorsque 4 clients sont arrivés, la navette part pour l'hotel et elle est de retour à l'aéroport après 30 minutes. Les clients qui arrivent durant cette période choisissent un autre hotel. Sur une longue période de temps, déterminer : (a) le taux moyen de départ de la navette ; (b) la probabilité que la navette ne soit pas à l'aéroport à minuit ; (c) la probabilité qu'elle soit à l'aéroport à minuit avec 3 clients prêts à partir ; (d) l'espérance du temps du premier départ de la navette après minuit.
- 20.** On imagine trois catégories pour un assuré : 0, 1, et 2. On augmente d'une catégorie à chaque accident jusqu'au maximum de 2, alors qu'on diminue d'une catégorie après un an sans accident jusqu'au minimum de 0. Les accidents surviennent selon un processus de Poisson d'intensité annuelle 1. Déterminer la proportion moyenne de temps à long terme dans chaque catégorie.
- 21.** Des voitures se présentent à l'entrée d'un stationnement intérieur selon un processus de Poisson d'intensité 12 par heure. Un détecteur photoélectrique déclenche l'ouverture de la porte à l'arrivée d'une voiture et celle-ci se referme après 1 minute s'il n'arrive pas d'autres voitures entre-temps. Sinon, elle reste ouverte, et ne se referme que lorsqu'il s'est écoulé 1 minute depuis l'arrivée de la dernière voiture. Enfin, le temps de stationnement de chaque voiture est de loi exponentielle d'espérance $1/4$ d'heure, indépendamment de tous les autres et indépendamment du processus d'arrivée, et la porte de sortie est différente de la porte d'arrivée. Déterminer : (a) la distribution stationnaire pour le nombre de voitures dans le stationnement ; (b) l'espérance du temps

d'une période d'occupation continue du stationnement par au moins une voiture ; (c) le taux moyen à long terme d'ouverture de la porte d'entrée du stationnement.

- 22.** Une station BIXI comporte N points d'ancrage de vélo. On suppose que les usagers qui veulent utiliser un vélo et les usagers qui veulent rapporter un vélo se présentent selon des processus de Poisson d'intensité λ indépendants. Lorsqu'il n'y a aucun vélo disponible pour les premiers ou aucun point d'ancrage disponible pour les seconds, ils vont à une autre station. Déterminer : (a) la distribution stationnaire (π_i) pour le nombre de vélos à la station ; (b) l'espérance m d'une période de temps continu avec au moins un vélo à la station.

4 Introduction aux martingales

4.1 Définitions et exemples

4.1.1 Définition d'une martingale

Un processus à temps discret est une martingale lorsque l'espérance du changement d'un instant au suivant est nulle. C'est le cas notamment pour l'avoir d'un joueur qui joue une série de parties lorsque le jeu est équitable. De façon analogue, le prix d'un actif financier est décrit par une martingale sous l'hypothèse que le jeu de l'offre et de la demande permet d'établir un prix juste à tout moment sans certitude de gain ou de perte dans le futur.

Une suite de variables aléatoires $\{X_n\}_{n \geq 0}$ est une martingale si

$$E(X_{n+1} | X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) = x_n,$$

pour toutes valeurs possibles x_0, \dots, x_n . Cette espérance conditionnelle est calculée à partir de la fonction de masse ou de densité conditionnelle selon que les variables sont discrètes ou continues, respectivement. La condition ci-dessus est écrite sous la forme

$$E(X_{n+1} | X_n, \dots, X_0) = X_n,$$

pour tout $n \geq 0$.

En supposant des variables aléatoire discrètes, on vérifie alors que

$$\begin{aligned} E(X_{n+1}) &= \sum_{x_n, \dots, x_0} E(X_{n+1} | X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) Pr(X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) \\ &= \sum_{x_n, \dots, x_0} x_n Pr(X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) \\ &= \sum_{x_n} x_n \sum_{x_{n-1}, \dots, x_0} Pr(X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) \\ &= \sum_{x_n} x_n Pr(X_n = x_n) \\ &= E(X_n), \end{aligned}$$

pour tout $n \geq 0$. Par induction, on conclut que

$$E(X_n) = E(X_0),$$

pour tout $n \geq 0$. L'existence de l'espérance est sous-entendue dans la définition de martingale.

On arrive aux mêmes conclusions dans le cas de variables aléatoires continues en remplaçant la fonction de masse conjointe de X_n, \dots, X_0 par la fonction de densité conjointe, et la somme par une intégrale.

4.1.2 Exemple : Marche aléatoire symétrique

On considère une marche aléatoire sur les entiers avec 0 comme point de départ. Plus précisément, on définit $S_0 = 0$ et

$$S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n,$$

pour $n \geq 1$, où

$$\xi_k = \begin{cases} 1 & \text{avec probabilité } 1/2, \\ -1 & \text{avec probabilité } 1/2, \end{cases}$$

indépendamment pour tout $k \geq 1$. La variable aléatoire S_n représente par exemple le gain net d'un joueur qui mise 1 sur le coté face d'une pièce de monnaie équilibrée, et ce n fois de façon indépendante, en doublant ou en perdant la mise chaque fois selon qu'il gagne ou qu'il perd.

Ce qui est important dans l'expression de S_n est que les variables aléatoires ξ_k pour $k \geq 1$ sont indépendantes d'espérance 0. Cela garantit que

$$\begin{aligned} E(S_{n+1} | S_n = s_n, \dots, S_0 = s_0) &= E(S_n + \xi_{n+1} | S_n = s_n, \dots, S_0 = s_0) \\ &= s_n + E(\xi_{n+1}) \\ &= s_n. \end{aligned}$$

Donc, $\{S_n\}_{n \geq 0}$ est une martingale, et par conséquent $E(S_n) = E(S_0) = 0$.

4.1.3 Exemple : Prix juste d'une option d'achat

Le prix d'un actif financier suite à $n \geq 1$ séances boursières est représenté par

$$S_n = S_0 + \xi_1 + \dots + \xi_n,$$

pour $n \geq 1$, où ξ_k pour $k \geq 1$ sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées d'espérance μ et de variance σ^2 . Comme dans l'exemple précédent, $\{S_n\}_{n \geq 0}$ est une martingale si $\mu = 0$, ce qu'on suppose ici.

Ce modèle additif est raisonnable si la période considérée est courte de telle sorte que la variation sur toute la période est petite par rapport à la

valeur de l'actif et que le taux d'intérêt sans risque (accordé sur les bons du trésor) qui tend à augmenter la valeur de l'actif est négligeable.

On se demande quel est le prix juste à payer pour une option d'achat de l'actif au prix actuel, mais après n séances. Le prix juste correspond à l'espérance du gain. Ce gain est la différence entre le prix de l'actif après n séances et le prix actuel si cette différence est positive, sinon il est nul. Autrement dit, c'est la partie positive de la différence, représentée par $(S_n - S_0)^+$. Pour n assez grand, le théorème limite central permet d'obtenir l'approximation

$$E((S_n - S_0)^+) \approx \sigma\sqrt{n} \int_0^\infty \frac{ze^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dz = \sigma\sqrt{\frac{n}{2\pi}}.$$

4.1.4 Exemple : Modèle de Wright-Fisher

Le modèle de Wright-Fisher est le modèle le plus important en génétique des populations. On considère une population de taille constante N et on suppose que les générations sont séparées. De génération en génération, la taille de la population reste la même. Cependant, aucun des membres de la génération $n \geq 0$ ne survit à la génération $n + 1$. Les N individus de la génération $n + 1$ sont obtenus en faisant des copies de N individus de la génération n tirés au hasard avec remise.

On suppose deux types possibles d'individus dans la population, A et B , et on représente le nombre d'individus de type A à la génération n par X_n , pour $n \geq 0$. Étant donné que $X_n = x_n$, la probabilité qu'un individu tiré au hasard à la génération n soit de type A est x_n/N . Sous cette condition, la variable aléatoire X_{n+1} suit une loi binomiale de paramètres N et x_n/N . On obtient donc que

$$E(X_{n+1} | X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) = N \cdot x_n/N = x_n,$$

qui est la valeur prise par X_n . Ainsi, $\{X_n\}_{n \geq 0}$ est une martingale. En conséquence, $E(X_n) = E(X_0)$, qui est le nombre initial moyen d'individus de type A dans la population.

4.1.5 Exemple : Processus de branchement

On suppose que chaque individu d'une population a un nombre d'enfants indépendamment des autres, que ce nombre est de même loi de probabilité d'espérance m , que les générations sont séparées et qu'il y a un seul individu à la génération initiale (voir la figure 67).

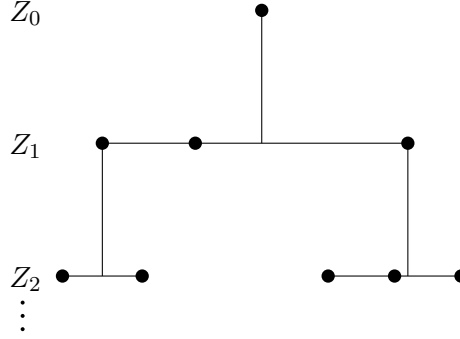


FIGURE 67 – Illustration d'un processus de branchement.

Le nombre d'individus à la génération n est dénoté par Z_n , pour $n \geq 0$. Le nombre d'individus à la génération $n + 1$ est représenté par

$$Z_{n+1} = X_1 + \cdots + X_{Z_n},$$

où X_i pour $i \geq 1$ sont indépendantes d'espérance m , et indépendantes de Z_n . Cette représentation garantit alors que

$$E(Z_{n+1} | Z_n = z_n, \dots, Z_0 = 1) = m z_n.$$

On a donc

$$E\left(\frac{Z_{n+1}}{m^{n+1}} \mid \frac{Z_n}{m^n} = \frac{z_n}{m^n}, \dots, \frac{Z_0}{m^0} = 1\right) = \frac{m z_n}{m^{n+1}} = \frac{z_n}{m^n},$$

pour $n \geq 0$. Donc, $\{Z_n/m^n\}_{n \geq 0}$ est une martingale. Par conséquent,

$$E\left(\frac{Z_n}{m^n}\right) = E\left(\frac{Z_0}{m^0}\right) = 1,$$

c'est-à-dire $E(Z_n) = m^n$. Le même résultat a été obtenu directement à la section 1.4 du chapitre 1.

4.1.6 Martingale par rapport à une suite de variables

Plus généralement, un processus $\{M_n\}_{n \geq 0}$ est une martingale par rapport à une suite de variables aléatoires $\{S_n\}_{n \geq 0}$ si M_n dépend seulement de S_0, \dots, S_n pour tout $n \geq 0$, et

$$E(M_{n+1} | S_n, \dots, S_0) = M_n.$$

La variable M_n est en quelque sorte une fonction de S_0, \dots, S_n et sa valeur est déterminée lorsque les valeurs prises par ces variables sont données. En conditionnant sur ces valeurs, on vérifie facilement comme pour une martingale par rapport à elle-même que

$$E(M_{n+1}) = E(M_n) = E(M_0),$$

pour tout $n \geq 0$. Il est sous-entendu que $E(M_n)$ existe pour tout $n \geq 0$.

4.1.7 Exemple : Marche aléatoire asymétrique

On reprend la marche aléatoire sur les entiers définie par $S_0 = 0$ et $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$, pour $n \geq 1$, mais avec

$$\xi_k = \begin{cases} 1 & \text{avec probabilité } p, \\ -1 & \text{avec probabilité } 1 - p, \end{cases}$$

pour $p \neq 1/2$, indépendamment pour $k \geq 1$. Ici, S_n pour $n \geq 0$ n'est pas une martingale, car

$$E(S_{n+1} | S_n = s_n, \dots, S_0 = s_0) = s_n + E(\xi_{n+1}) = s_n + 2p - 1 \neq s_n,$$

pour $n \geq 0$.

On introduit maintenant

$$M_n = \left(\frac{1-p}{p} \right)^{S_n},$$

pour $n \geq 0$, et on vérifie qu'on obtient ainsi une martingale par rapport à $\{S_n\}_{n \geq 0}$. En effet, M_n est une fonction de S_n , et

$$\begin{aligned} E(M_{n+1} | S_0, \dots, S_n) &= E \left(\left(\frac{1-p}{p} \right)^{S_n + \xi_{n+1}} \middle| S_0, \dots, S_n \right) \\ &= \left(\frac{1-p}{p} \right)^{S_n} E \left(\left(\frac{1-p}{p} \right)^{\xi_{n+1}} \right) \\ &= \left(\frac{1-p}{p} \right)^{S_n} \left[\left(\frac{1-p}{p} \right) p + \left(\frac{1-p}{p} \right)^{-1} (1-p) \right] \\ &= \left(\frac{1-p}{p} \right)^{S_n} \\ &= M_n, \end{aligned}$$

pour $n \geq 0$.

4.2 Martingale arrêtée

4.2.1 Temps d'arrêt

Une variable aléatoire à valeurs entières non négatives T est un temps d'arrêt par rapport à une suite de variables aléatoires $\{S_n\}_{n \geq 0}$ si l'événement $\{T \geq n\}$ dépend seulement des variables aléatoires S_0, \dots, S_{n-1} pour tout $n \geq 1$. Cela signifie qu'on sait que l'événement se réalise ou qu'il ne se réalise pas si on connaît les valeurs prises par ces variables. Autrement dit, on sait si on continue ou non après l'instant $n-1$ en connaissant l'histoire du processus jusqu'à cet instant.

4.2.2 Théorème d'arrêt

Soient $\{M_n\}_{n \geq 0}$ une martingale et T un temps d'arrêt, par rapport à une même suite de variables aléatoires $\{S_n\}_{n \geq 0}$. On considère $\{M_{n \wedge T}\}_{n \geq 0}$, où $n \wedge T = \min(n, T)$, et on suppose ou bien que

$$Pr(T < \infty) = 1$$

et

$$|M_{n \wedge T}| \leq K,$$

ou bien que

$$E(T) < \infty$$

et

$$|M_{(n+1) \wedge T} - M_{n \wedge T}| \leq K,$$

pour une constante $K < \infty$, pour tout $n \geq 0$. Alors,

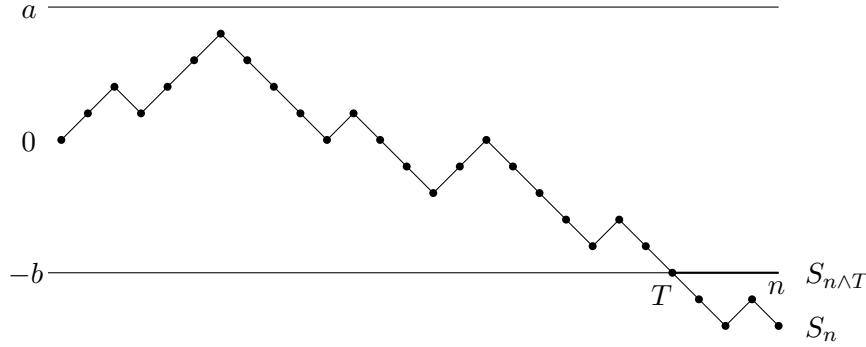
$$E(M_T) = E(M_0).$$

4.2.3 Exemple : Marche aléatoire symétrique arrêtée

On s'intéresse à la probabilité qu'une marche aléatoire symétrique sur les entiers qui commence à 0 atteigne une valeur donnée $a > 0$ avant d'atteindre une valeur donnée $-b < 0$. La figure 68 représente la situation.

Comme on l'a vu précédemment, la marche aléatoire représentée par $S_0 = 0$ et $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$, pour $n \geq 1$, où

$$\xi_i = \begin{cases} 1 & \text{avec probabilité } p = 1/2, \\ -1 & \text{avec probabilité } 1 - p = 1/2, \end{cases}$$

FIGURE 68 – Marche aléatoire sur les entiers avec arrêt à a ou $-b$.

indépendamment pour $i \geq 1$, est une martingale par rapport à elle-même.

On pose

$$T = \min\{n \geq 0 : S_n = a \text{ ou } S_n = -b\}.$$

C'est un temps d'arrêt par rapport à $\{S_n\}_{n \geq 0}$. En effet,

$$\{T \geq n\} = \{-b < S_0, \dots, S_{n-1} < a\}$$

dépend seulement de S_0, \dots, S_{n-1} , pour $n \geq 1$. La suite $\{S_{n \wedge T}\}_{n \geq 0}$ est donc une martingale arrêtée par rapport à $\{S_n\}_{n \geq 0}$. En supposant les conditions du théorème d'arrêt vérifiées, cette martingale s'arrête à a ou $-b$ avec probabilité 1. De plus on a

$$0 = E(S_0) = E(S_T) = ap_a + (-b)(1 - p_a),$$

où p_a représente la probabilité qu'elle s'arrête à a et $1 - p_a$ la probabilité qu'elle s'arrête à $-b$. On obtient alors que

$$p_a = \frac{b}{a + b},$$

qui est la probabilité que la marche aléatoire atteigne a avant $-b$. Cela correspond à la probabilité de ruine d'un joueur B contre un joueur A qui ont des avoirs initiaux b et a , respectivement, et des probabilités égales de gagner chaque partie indépendamment des autres avec une mise de 1 de chaque joueur sur chaque partie. Le même résultat a été obtenu au chapitre 1 par la méthode de conditionnement sur la première transition.

Il reste à vérifier les conditions du théorème d'arrêt. Pour tout $n \geq 0$, on a les inégalités

$$|S_{n \wedge T}| \leq \max(a, b) < \infty.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} Pr(T \geq a + b) &= 1 - Pr(T < a + b) \\ &\leq 1 - p^{a+b}, \end{aligned}$$

où p^{a+b} est la probabilité qu'il y ait $a + b$ hausses consécutives de 1. Ainsi,

$$Pr(T \geq n(a + b)) \leq \left(1 - p^{a+b}\right)^n,$$

pour $n \geq 1$, où $p = 1/2$. On en déduit que

$$Pr(T = \infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} Pr(T \geq n(a + b)) = 0.$$

Par conséquent, $T < \infty$ avec probabilité 1.

En fait, $E(T) < \infty$. En effet,

$$\begin{aligned} E(T) &= \sum_{k \geq 1} Pr(T \geq k) \leq \sum_{n \geq 0} \sum_{k=n(a+b)}^{(n+1)(a+b)-1} Pr(T \geq k) \\ &\leq \sum_{n \geq 0} (a + b) Pr(T \geq n(a + b)) \\ &\leq (a + b) \sum_{n \geq 0} \left(1 - p^{a+b}\right)^n \\ &= \frac{a + b}{p^{a+b}} < \infty. \end{aligned}$$

4.2.4 Exemple : Marche aléatoire asymétrique arrêtée

Dans cet exemple, il s'agit toujours d'une marche aléatoire sur les entiers définie par $S_0 = 0$ et $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$, pour $n \geq 1$, mais avec

$$\xi_i = \begin{cases} 1 & \text{avec probabilité } p \neq 1/2, \\ -1 & \text{avec probabilité } 1 - p, \end{cases}$$

indépendamment pour $i \geq 1$. Dans ce cas, la suite définie par

$$M_n = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n},$$

pour $n \geq 0$, est une martingale par rapport à $\{S_n\}_{n \geq 0}$.

La variable aléatoire définie par

$$T = \min\{n \geq 0 : S_n = a \text{ ou } S_n = -b\},$$

est un temps d'arrêt par rapport à $\{S_n\}_{n \geq 0}$ qui vérifie $Pr(T < \infty) = 1$ pour les mêmes raisons que précédemment. De plus,

$$|M_{n \wedge T}| \leq \max \left[\left(\frac{1-p}{p} \right)^a, \left(\frac{1-p}{p} \right)^{-b} \right] < \infty.$$

Le théorème d'arrêt garantit alors que

$$1 = E(M_0) = E(M_T) = p_a \left(\frac{1-p}{p} \right)^a + (1-p_a) \left(\frac{1-p}{p} \right)^{-b},$$

où p_a est la probabilité pour la marche aléatoire d'atteindre a avant $-b$. Dans ce cas, on trouve que

$$p_a = \frac{1 - \left(\frac{1-p}{p} \right)^b}{1 - \left(\frac{1-p}{p} \right)^{a+b}}.$$

Cela correspond à ce qui a été trouvé au chapitre 1 pour la probabilité de ruine d'un joueur contre un autre de force inégale.

D'autre part, $D_n = S_n - n(2p-1)$ est aussi une martingale par rapport à $\{S_n\}_{n \geq 0}$. En effet,

$$E(D_{n+1} | S_n, \dots, S_0) = D_n + E(\xi_{n+1}) - (2p-1) = D_n,$$

pour $n \geq 0$. De plus,

$$|D_{(n+1) \wedge T} - D_{n \wedge T}| \leq |D_{n+1} - D_n| = |\xi_{n+1} - (2p-1)| \leq 2 < \infty,$$

pour tout $n \geq 0$. Puisque T est un temps d'arrêt qui satisfait $E(T) < \infty$ pour les mêmes raisons que précédemment, la remarque qui suit le théorème d'arrêt garantit que

$$E(D_T) = E(S_T) - (2p-1)E(T) = E(D_0) = 0.$$

On en déduit que

$$E(T) = \frac{E(S_T)}{2p-1} = \frac{ap_a - b(1-p_a)}{2p-1}.$$

Remarque :

Dans le cas où $p < 1/2$, on déduit les résultats suivants :

$$Pr(S_n \text{ atteint } a) = \lim_{b \rightarrow \infty} p_a = \left(\frac{p}{1-p} \right)^a,$$

$$Pr(S_n \text{ atteint } -b) = \lim_{a \rightarrow \infty} (1 - p_a) = 1,$$

$$E(\text{temps pour } S_n \text{ d'atteindre } -b) = \lim_{a \rightarrow \infty} E(T) = \frac{b}{1-2p}.$$

Cette dernière limite correspond à l'espérance du nombre de parties avant la ruine d'un joueur qui emprunte b dollars pour jouer contre un adversaire infiniment riche en doublant ou en perdant une mise de 1 dollars sur chaque partie avec probabilité p ou $1-p$, respectivement, indépendamment des autres parties. L'explication pour cette limite est que le joueur perd en moyenne $1-2p$ dollars sur chaque partie. Ce résultat et les autres correspondent à ce qui a été obtenu au chapitre 1 au sujet de la ruine du joueur dans le cas où $p < 1/2$.

D'autre part, en appliquant la règle de l'Hôpital, on trouve que

$$\lim_{p \rightarrow 1/2} p_a = \frac{b}{a+b}$$

et

$$\lim_{p \rightarrow 1/2} E(T) = ab.$$

Ces limites correspondent aux résultats obtenus au chapitre 1 pour la ruine du joueur dans le cas $p = 1/2$.

4.2.5 Exemple : Martingale classique de doubler la mise

La martingale classique dans une série de jeux avec une chance sur deux de gagner chaque partie (par exemple, noir ou rouge, pair ou impair, passe ou manque, à la roulette) consiste à miser une unité sur le premier jeu puis à doubler la mise si on perd, et cela jusqu'à ce qu'on gagne, à la suite de quoi on recommence. Par exemple, si le joueur mise sur le rouge et que le noir sort trois fois de suite puis le rouge, alors les mises successives sur les quatre premiers jeux sont

$$M_1 = 1, M_2 = 2, M_3 = 4, M_4 = 8,$$

et les gains nets suite à ces jeux sont

$$W_1 = -1, W_2 = -3, W_3 = -7, W_4 = 1.$$

Cette stratégie semble être toujours gagnante si on arrête de jouer après le premier gain.

Le gain net après le jeu $n \geq 1$ est donné par

$$W_n = M_1\xi_1 + \cdots + M_n\xi_n,$$

où M_i représente la mise sur le jeu $i \geq 1$ et

$$\xi_i = \begin{cases} 1 & \text{si le rouge sort au jeu } i, \text{ ce qui a probabilité } p = 1/2, \\ -1 & \text{si le noir sort au jeu } i, \text{ ce qui a probabilité } 1 - p = 1/2, \end{cases}$$

pour $i \geq 1$. Les variables aléatoires ξ_i pour $i \geq 1$, sont supposées indépendantes. D'autre part, la mise M_n sur le jeu $n \geq 1$ dépend seulement des variables ξ_1, \dots, ξ_{n-1} . La suite $\{M_n\}_{n \geq 1}$ est alors une stratégie de mise prévisible. Par conséquent, la variable aléatoire W_n dépend seulement de ξ_1, \dots, ξ_n pour tout $n \geq 1$. De plus, on a

$$E(W_{n+1} | \xi_1, \dots, \xi_n) = W_n + E(M_{n+1}\xi_{n+1}) = W_n + M_{n+1}E(\xi_{n+1}) = W_n,$$

pour tout $n \geq 0$, en définissant $W_0 = 0$. La suite $\{W_n\}_{n \geq 0}$ est alors une martingale par rapport à $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$. En particulier, on a $E(W_n) = E(W_0) = 0$ pour tout $n \geq 1$, ce qui signifie que le gain net moyen est nul si on arrête de jouer à n'importe quel instant fixé.

Le temps aléatoire défini par

$$T = \min\{n \geq 1 : W_n = 1\}$$

est un temps d'arrêt par rapport à $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$, puisque

$$\{T \geq n\} = \{W_1, \dots, W_{n-1} < 1\}$$

dépend seulement de ξ_1, \dots, ξ_{n-1} , pour tout $n \geq 1$. De plus, $T = k$ avec probabilité $(1/2)^k$, pour tout $k \geq 1$, d'où $E(T) = 2 < \infty$. D'autre part, on a évidemment $W_T = 1$ avec probabilité 1, d'où

$$E(W_T) = 1 \neq 0 = E(W_0).$$

Ici, le théorème d'arrêt ne s'applique pas, car la mise est non majorée. Si au contraire elle ne peut pas dépasser 2^N par limite de ressources ou de crédit, de telle sorte qu'on doive se retirer si on atteint ce seuil, alors on a

$$T = \min\{n \geq 1 : W_n = 1 \text{ ou } W_n = -2^N + 1\}$$

comme temps d'arrêt, auquel cas

$$W_T = \begin{cases} 1 & \text{avec probabilité } 1 - \frac{1}{2^N}, \\ -2^N + 1 & \text{avec probabilité } \frac{1}{2^N}, \end{cases}$$

d'où $E(W_T) = 0$, en accord avec le théorème d'arrêt.

4.2.6 *Preuve du théorème d'arrêt

Si $\{M_n\}_{n \geq 0}$ est une martingale par rapport à une suite de variables aléatoires $\{S_n\}_{n \geq 0}$ et T est un temps d'arrêt par rapport à la même suite, alors le processus arrêté $\{M_{n \wedge T}\}_{n \geq 0}$, où $n \wedge T = \min(n, T)$, est aussi une martingale par rapport à $\{S_n\}_{n \geq 0}$.

En effet, $M_{n \wedge T}$, pour $n \geq 0$, dépend seulement de S_0, \dots, S_n , puisque c'est le cas des variables M_0, \dots, M_n et de l'événement $\{T \geq n\}$. De plus,

$$E(M_{(n+1) \wedge T} | S_n = s_n, \dots, S_0 = s_0) = E(M_{n+1} | S_n = s_n, \dots, S_0 = s_0) = m_n,$$

si $T \geq n + 1$ et $M_n = m_n$ lorsque $S_n = s_n, \dots, S_0 = s_0$. D'autre part,

$$E(M_{(n+1) \wedge T} | S_n = s_n, \dots, S_0 = s_0) = m_t,$$

si $T = t < n + 1$ et $M_T = m_t$ lorsque $S_n = s_n, \dots, S_0 = s_0$. Dans ce dernier cas, le processus a atteint un état de fixation avant l'instant $n + 1$. Dans tous les cas, on a

$$E(M_{(n+1) \wedge T} | S_n = s_n, \dots, S_0 = s_0) = M_{n \wedge T},$$

pour tout $n \geq 0$.

Puisque $\{M_{n \wedge T}\}_{n \geq 0}$ est une martingale par rapport à $\{S_n\}_{n \geq 0}$, on a que

$$E(M_{n \wedge T}) = E(M_{0 \wedge T}) = E(M_0).$$

Sous les conditions que $|M_{n \wedge T}| \leq K$ et $Pr(T < \infty) = 1$, pour une constante $K < \infty$, pour tout $n \geq 0$, on a que

$$|M_T| = \lim_{n \rightarrow \infty} |M_{n \wedge T}| \leq K.$$

De plus,

$$|E(M_T) - E(M_{n \wedge T})| = |E(M_T - M_{n \wedge T})| \leq E(|M_T - M_{n \wedge T}|) \leq 2K Pr(T > n),$$

car

$$|M_T - M_{n \wedge T}| \leq |M_T| + |M_{n \wedge T}| \leq 2K$$

si $T > n$, et 0 sinon. Or,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Pr(T > n) = Pr(T = \infty) = 1 - Pr(T < \infty) = 0.$$

On conclut que

$$E(M_T) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(M_{n \wedge T}) = E(M_0).$$

Sous les conditions alternatives que

$$E(T) < \infty$$

et

$$|M_{(n+1) \wedge T} - M_{n \wedge T}| \leq K,$$

pour une constante $K < \infty$, pour tout $n \geq 0$, on a que

$$\begin{aligned} |E(M_T - M_{n \wedge T})| &= \left| E \left(\sum_{k \geq n} (M_{(k+1) \wedge T} - M_{k \wedge T}) \right) \right| \\ &\leq \sum_{k \geq n} E(|M_{(k+1) \wedge T} - M_{k \wedge T}|) \\ &\leq K \sum_{k \geq n} Pr(T \geq k), \end{aligned}$$

car

$$|M_{(k+1) \wedge T} - M_{k \wedge T}| = 0,$$

lorsque $T < k$. Or, la somme à droite de l'inégalité ci-dessus tend vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$, car

$$E(T) = \sum_{k \geq 1} Pr(T \geq k) < \infty.$$

On conclut donc comme précédemment.

4.3 Exercices

1. Une urne contient des boules rouges et des boules vertes. À chaque instant n , on tire une boule au hasard de l'urne et on la remet dans l'urne en ajoutant une autre boule de la même couleur que celle tirée. On désigne par X_n la proportion de boules rouges dans l'urne à cet instant et on suppose qu'il y a une boule de chaque couleur dans l'urne initialement. Montrer que X_n est une martingale.
2. Montrer que $S_n^2 - n$ est une martingale par rapport à $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ où les ξ_k sont des variables aléatoires indépendantes qui prennent les valeurs $+1$ ou -1 avec la même probabilité $1/2$. Utiliser alors le théorème d'arrêt des martingales pour déterminer l'espérance du temps d'arrêt

$$N = \min\{n : S_n = a \text{ ou } -b\}.$$

3. On considère le problème de la ruine du joueur avec un avoir initial $S_0 = 1$ et un avoir après n parties pour $n \geq 1$ donné par

$$S_n = S_0 + \xi_1 + \dots + \xi_n,$$

où $\xi_k = 1$ avec probabilité $1/3$ et $\xi_k = -1$ avec probabilité $2/3$, indépendamment pour $k \geq 1$. On définit

$$N = \min\{n \geq 1 : S_n = 0 \text{ ou } 4\}.$$

- (a) Montrer que 2^{S_n} est une martingale par rapport à ξ_n .
- (b) Vérifier que N est un temps d'arrêt par rapport à ξ_n .
- (c) En utilisant le théorème d'arrêt des martingales, déterminer la distribution de probabilité de S_N .
- (d) En utilisant le lemme de Wald, déterminer $E(N)$.

4.4 *Exercices supplémentaires

4. On considère une population de N organismes dans laquelle, à chaque unité de temps, un organisme choisi au hasard parmi les N existants produit une copie identique à lui-même et cette copie remplace l'un des N organismes existants choisi au hasard (c'est le modèle de Moran en génétique des populations). Le nombre d'organismes d'un type donné

A à l'instant n , X_n , forme alors une chaîne de Markov dont la matrice de transition est donnée par

$$P_{i,i-1} = P_{i,i+1} = \frac{i(N-i)}{N^2}, P_{i,i} = 1 - \frac{2i(N-i)}{N^2},$$

pour $i = 1, \dots, N-1$ et $P_{0,0} = P_{N,N} = 1$. (a) Montrer que X_n est une martingale. (b) Déterminer la probabilité que le type A disparaisse éventuellement de la population étant donné qu'il a k représentants initialement en utilisant le théorème d'arrêt des martingales.

5. Un joueur mise une unité d'avoir sur chaque jeu d'une série de jeux identiques indépendants. Son gain net (gain brut en nombre entier d'unités moins une unité de mise) sur chaque jeu est d'espérance $\mu = -1/2 < 0$ et de variance $\sigma^2 = 1 > 0$, en plus d'être majoré en valeur absolue par une constante $K > 0$. Le gain net après $n \geq 1$ jeux est donné par

$$S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n,$$

où ξ_i représente la gain net sur le i -ième jeu. On définit $S_0 = 0$. Soient

$$M_n = S_n - n\mu,$$

et

$$W_n = (S_n - n\mu)^2 - n\sigma^2,$$

pour tout $n \geq 0$, et

$$T = \min\{n \geq 1 : S_n = -N\},$$

pour un entier $N \geq 1$. Après avoir montré que : (a) M_n et W_n , pour $n \geq 0$, sont des martingales par rapport à S_n , pour $n \geq 0$; et (b) T est un temps d'arrêt par rapport à S_n , pour $n \geq 0$; déterminer en utilisant le théorème d'arrêt : (c) l'espérance de T , représentée par $E(T)$; et (d) la variance de T , représentée par $Var(T)$. Vous pouvez supposer que l'espérance et la variance de T sont finies et que les conditions du théorème d'arrêt sont satisfaites.

5 Introduction au mouvement brownien

5.1 Définitions et exemples

5.1.1 Introduction

Le mouvement brownien décrit le déplacement dans une direction d'une particule en suspension dans un liquide, par exemple d'un grain de pollen dans l'eau. Ce mouvement a une apparence très saccadée (voir la figure 70). En effet, les collisions moléculaires font en sorte que la trajectoire de la particule change constamment de direction.

Bien que plusieurs aient imaginé ou observé le mouvement brownien bien avant Robert Brown, celui-ci est le premier, en 1827, à publier la découverte qu'il avait faite par des observations au microscope. En 1905, Albert Einstein offre une description quantitative de ce mouvement, qui permet notamment d'estimer la dimension des molécules, et plus tard de définir le nombre d'Avogadro. Le mouvement dans n'importe quelle direction donnée en fonction du temps est aussi alors décrit comme n'ayant pas de tangente en tout point. Finalement, c'est Norbert Wiener qui développe la théorie mathématique de ce mouvement en 1923, basée sur les probabilités, et confirme que les trajectoires de ce mouvement sont généralement continues, mais nulle part différentiables.

Le mouvement brownien est un processus stochastique à temps continu et à espace d'états continu. Il est le plus important dans cette catégorie et il est aujourd'hui appliqué dans une multitude de domaines, notamment en finance.

5.1.2 Définition du mouvement brownien standard

Le mouvement brownien standard $\{B(t)\}_{t \geq 0}$ est une suite de variables aléatoires continues définies pour tout temps continu $t \geq 0$ qui possède les caractéristiques suivantes :

- (a) Initialement à 0 : Le processus est à l'état 0 au temps $t = 0$, c'est-à-dire que

$$B(0) = 0.$$

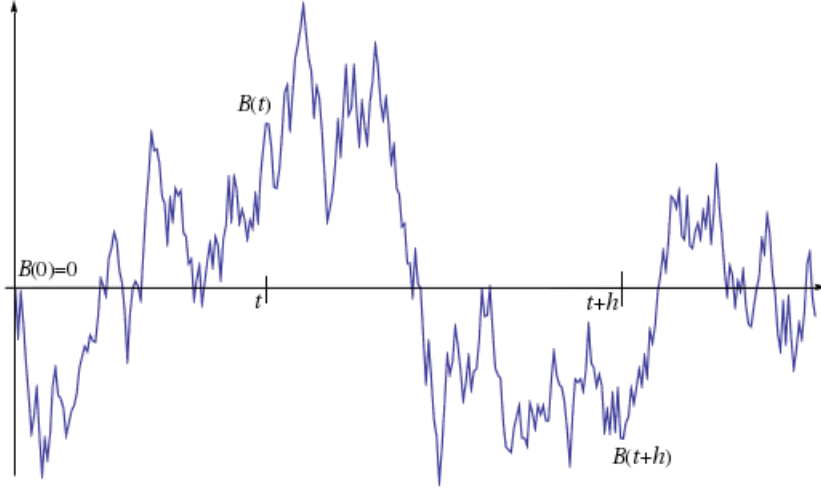


FIGURE 69 – Représentation du mouvement brownien.

- (b) Accroissements indépendants : Les accroissements sur des périodes de temps disjointes sont indépendants. En particulier, l'accroissement sur l'intervalle de temps $(t, t+h]$ pour $t, h > 0$, soit $B(t+h) - B(t)$, est indépendant de $B(s) = B(s) - B(0)$, pour $0 \leq s \leq t$. Cela implique que

$$\begin{aligned} \Pr(B(t+h) \leq a \mid B(s) = b_s, 0 \leq s \leq t) &= \Pr(B(t+h) - B(t) \leq a - b_t) \\ &= \Pr(B(t+h) \leq a \mid B(t) = b_t). \end{aligned}$$

Le processus est donc markovien.

- (c) Accroissements de loi normale d'espérance nulle et de variance égale au temps écoulé : L'accroissement sur l'intervalle de temps $(t, t+h]$ pour $t, h > 0$ est donné par

$$B(t+h) - B(t) \sim N(0, h).$$

En particulier, cela implique que

$$E(B(t+h) \mid B(s), 0 \leq s \leq t) = B(t) + E(B(t+h) - B(t)) = B(t).$$

Le processus est donc une martingale à temps continu. De plus, la fonction de densité de la variable aléatoire $B(t) = B(t) - B(0)$ est donnée par

$$p_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}},$$

pour $-\infty < x < +\infty$, pour $t > 0$. Il est facile de vérifier que cette fonction est la solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial}{\partial t} p_t(x) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} p_t(x) = \left(\frac{x^2}{\sqrt{8\pi t^5}} - \frac{1}{\sqrt{8\pi t^3}} \right) e^{-\frac{x^2}{2t}},$$

qui est l'équation de diffusion d'Einstein.

5.1.3 Construction du mouvement brownien standard

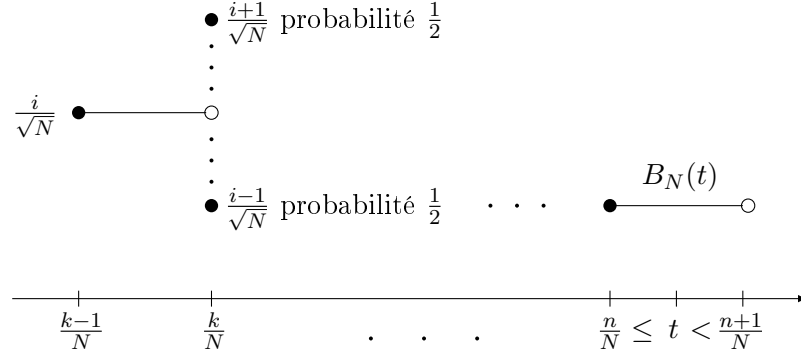


FIGURE 70 – Construction du mouvement brownien standard.

Afin de construire un mouvement brownien standard, on pose d'abord une constante entière $N \geq 1$. Initialement, on définit $B_N(0) = 0$. Par la suite, les changements d'état ont lieu aux instants de forme k/N pour $k \geq 1$. L'état est alors ou bien augmenté de $1/\sqrt{N}$ ou bien diminué de $1/\sqrt{N}$ avec probabilité $1/2$ pour chaque cas, indépendamment des autres changements (voir la figure 70). On définit ainsi

$$B_N(t) = \frac{1}{\sqrt{N}}(\xi_1 + \cdots + \xi_n) = \sqrt{\frac{n}{N}} \frac{S_n}{\sqrt{n}},$$

où $n = \lfloor Nt \rfloor$ représente la partie entière de Nt , et $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ avec

$$\xi_k = \begin{cases} +1 & \text{avec probabilité } 1/2, \\ -1 & \text{avec probabilité } 1/2, \end{cases}$$

indépendamment pour $k \geq 1$. Puisque $|t - n/N| < 1/N$, on a que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{N}} = \sqrt{t}.$$

D'autre part, comme $E(\xi_k) = 0$ et $Var(\xi_k) = E(\xi_k^2) = 1$, le théorème limite central garantit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Pr\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq x\right) = \int_{-\infty}^x \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy,$$

pour $-\infty < x < +\infty$. On en déduit que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} Pr(B_N(t) \leq x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^{-\frac{y^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}} dy,$$

pour $-\infty < x < +\infty$. Cela qui signifie que $B_N(t)$ tend en distribution vers une variable aléatoire de loi $N(0, t)$ lorsque $N \rightarrow \infty$.

Remarque 1 : Dans la construction ci-dessus du mouvement brownien standard, il suffit en fait que les variables aléatoires ξ_k pour $k \geq 1$ soient indépendantes d'espérance 0 et de variance 1.

Remarque 2 : Comme le suggère la construction en escalier ci-dessus, presque toutes les trajectoires du mouvement brownien standard sont continues, car la hauteur des marches $1/\sqrt{N}$ est de plus en plus petite, mais elles sont nulle part différentiables, car le rapport de la hauteur des marches sur leur largeur donné par \sqrt{N} est de plus en plus grand.

Remarque 3 : Le mouvement brownien standard sur tout intervalle $[0, t]$ pour $t > 0$ étant la limite d'une contraction d'une marche aléatoire symétrique sur les entiers sur un intervalle de temps de plus en plus grand, et une telle marche étant récurrente, le nombre de visites à 0 de ce mouvement de l'instant 0 à tout instant $t > 0$ est infini avec probabilité 1 !

5.1.4 Mouvement brownien avec dérive et écart-type

Un mouvement brownien plus général est obtenu en définissant

$$X(t) = \mu t + \sigma B(t),$$

pour $t \geq 0$, où $\{B(t)\}_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien standard, alors que μ et $\sigma > 0$ sont des constantes. On remarque que

$$E(X(t)) = \mu t + E(B(t)) = \mu t$$

et

$$Var(X(t)) = \sigma^2 Var(B(t)) = \sigma^2 t.$$

Les paramètres μ et $\sigma > 0$ sont appelés respectivement la dérive et l'écart-type du processus.

Comme dans la section précédente, on peut montrer que

$$Pr(X(t) \leq x) = \lim_{N \rightarrow \infty} Pr\left(\frac{\sigma}{\sqrt{N}} S_n \leq x\right),$$

pour $-\infty < x < +\infty$, où

$$S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k,$$

et $n = \lfloor Nt \rfloor$. Ici

$$\xi_k = \begin{cases} +1 & \text{avec probabilité } p = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\mu}{\sigma\sqrt{N}}\right), \\ -1 & \text{avec probabilité } 1 - p = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\mu}{\sigma\sqrt{N}}\right), \end{cases}$$

pour $k \geq 1$, sont des variables aléatoires indépendantes. Leur espérance est donnée par

$$E(\xi_k) = \frac{\mu}{\sigma\sqrt{N}}$$

et leur variance par

$$Var(\xi_k) = 1 - \frac{\mu^2}{\sigma^2 N},$$

de telle sorte que $E(\xi_k^2) = 1$.

Remarque : La plupart des propriétés du mouvement brownien peuvent être obtenues à partir de cette représentation et des résultats sur la marche aléatoire sur les entiers présentés dans le chapitre 4. Ainsi, si $\mu < 0$ et donc $p < 1/2$, alors on a pour $a, b > 0$

$$\begin{aligned} Pr(X(t) \text{ atteint } a) &= \lim_{N \rightarrow \infty} Pr(S_n \text{ atteint } a\sqrt{N}/\sigma) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \frac{\mu}{\sigma\sqrt{N}}}{1 - \frac{\mu}{\sigma\sqrt{N}}} \right)^{\frac{a\sqrt{N}}{\sigma}} \\ &= e^{2a\mu/\sigma^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(\text{temps pour } X(t) \text{ d'atteindre } -b) \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} N^{-1} E(\text{temps pour } S_n \text{ d'atteindre } -b\sqrt{N}/\sigma) \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b\sqrt{N}/(\sigma N)}{-\mu/(\sigma\sqrt{N})} \\
&= -\frac{b}{\mu}.
\end{aligned}$$

5.2 *Mouvement brownien géométrique

5.2.1 Description générale

Dans le domaine financier, la valeur d'un actif au temps $t \geq 0$ est représentée par une variable

$$Y(t) = Y(0)e^{X(t)},$$

où $X(t)$ est un mouvement brownien avec dérive μ et écart-type σ . Le processus $Y(t)$ est alors un mouvement brownien géométrique et le paramètre σ est appelé la volatilité.

La variable $Y(t)$ est approchée par la variable

$$Y_N(t) = Y(0)e^{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}S_n} = Y(0) \prod_{k=1}^n e^{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\xi_k},$$

où $n = \lfloor Nt \rfloor$ et ξ_k pour $k \geq 1$ sont des variables aléatoires indépendantes telles que définies dans la section précédente. La variable $e^{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\xi_k} - 1$ représente la variation en pourcentage de la valeur de l'actif de l'instant $(k-1)/N$ à l'instant k/N , pour $k \geq 1$.

L'hypothèse de variations en pourcentage, indépendantes et identiquement distribuées, qui mène à un modèle multiplicatif est plus réaliste pour un actif financier que l'hypothèse de variations additives qui ne dépendent pas de la valeur. De plus, la valeur de l'actif est exprimée en dollars du temps 0 pour éliminer l'effet du taux d'intérêt sans risque (généralement le taux d'intérêt accordé sur les bons du trésor).

Pour N assez grand, un développement de Taylor autour de 0 donne l'approximation

$$e^{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\xi_k} - 1 \cong \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\xi_k + \frac{\sigma^2}{2N}\xi_k^2.$$

Pour l'espérance, on a alors

$$E\left(e^{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\xi_k} - 1\right) \cong \frac{\sigma}{\sqrt{N}}E(\xi_k) + \frac{\sigma^2}{2N}E(\xi_k^2) = \frac{1}{N}\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right).$$

La variation moyenne approximative en pourcentage est nulle lorsque $\mu + \sigma^2/2 = 0$. Cela suggère que c'est la condition pour avoir la neutralité, c'est-à-dire pour que le processus soit une martingale.

En effet, la valeur de l'actif au temps $t + h$ pour $t, h > 0$ est donnée par

$$Y(t + h) = Y(0)e^{X(t+h)} = Y(t)e^{X(t+h)-X(t)}.$$

Son espérance conditionnelle sachant la valeur de l'actif $Y(s)$ à tout temps $s \leq t$, est donnée par

$$\begin{aligned} E(Y(t + h)|Y(s), 0 \leq s \leq t) &= Y(t)E(e^{\mu h + \sigma(B(t+h)-B(t))}|B(s), 0 \leq s \leq t) \\ &= Y(t)e^{\mu h}E(e^{\sigma(B(t+h)-B(t))}) \\ &= Y(t)e^{h(\mu + \sigma^2/2)}. \end{aligned}$$

Ces égalités utilisent le fait que $B(t + h) - B(t)$ est indépendante de $B(s)$ pour tout $s \leq t$ et de loi $N(0, h)$. On remarque que

$$E(Y(t + h)|Y(s), 0 \leq s \leq t) \begin{cases} < Y(t) & \text{si } \mu + \sigma^2/2 < 0, \\ = Y(t) & \text{si } \mu + \sigma^2/2 = 0, \\ > Y(t) & \text{si } \mu + \sigma^2/2 > 0. \end{cases}$$

La tendance est donc à la baisse, neutre ou à la hausse selon que $\mu + \sigma^2/2$ est plus petite, égale ou plus grande que 0. Dans le cas où $\mu + \sigma^2/2 = 0$, la suite $\{Y(t)\}_{t \geq 0}$ est une martingale. On fait souvent cette hypothèse en supposant un ajustement du marché comme résultat du jeu de l'offre et de la demande.

5.2.2 Exemple : Seuil d'exercice d'une option d'achat

Une option américaine peut être exercée en tout temps avant l'échéance. Ici on suppose qu'il n'y a pas d'échéance.

On considère une option d'achat d'un actif à un prix $Y(0)A$ fixé qui est exercée lorsque la valeur de l'actif atteint un certain niveau $Y(0)a > Y(0)A$. Ce niveau est à déterminer pour que le gain espéré soit maximum. On suppose que la valeur de l'actif, en dollars du temps 0, est décrite par un mouvement brownien géométrique $Y(t) = Y(0)e^{X(t)}$ avec dérive μ et volatilité σ satisfaisant $\sigma^2/2 + \mu < 0$, de telle sorte que la tendance est à la baisse. C'est le cas, par exemple, lorsque $\mu = -1$ et $\sigma = 1$.

On calcule d'abord

$$\begin{aligned} Pr(Y(t) \text{ atteint } Y(0)a) &= Pr(X(t) \text{ atteint } \log(a)) \\ &= e^{2\mu \log(a)/\sigma^2} \\ &= a^{2\mu/\sigma^2}. \end{aligned}$$

Ici, on a utilisé la remarque de la section 5.1.4. Ainsi, le gain espéré en fonction de a est de la forme

$$G(a) = Y(0)(a - A)a^{2\mu/\sigma^2} + 0 \cdot (1 - a^{2\mu/\sigma^2}).$$

La dérivée première par rapport à a est donnée par

$$\frac{d}{da}G(a) = Y(0)a^{2\mu/\sigma^2-1} (a + (2\mu/\sigma^2)(a - A)).$$

La dérivée est nulle si et seulement si

$$a = \frac{2A\mu/\sigma^2}{1 + 2\mu/\sigma^2}.$$

Cela donne le point critique, en fait le point de maximum, car la dérivée seconde est négative sous la condition $\sigma^2/2 + \mu < 0$. Dans le cas $\sigma = 1$ et $\mu = -1$, par exemple, le point de maximum est $a = 2A$. On a cependant supposé que le taux d'intérêt sans risque est nul.

Avec un taux d'intérêt sans risque $r > 0$, un dollars au temps 0 vaut e^{rt} dollars au temps $t \geq 0$. L'option doit alors être exercée lorsque la valeur de l'actif en dollars courants atteint $Y(0)ae^{rt}$.

5.2.3 Formule de Black-Scholes

Une option européenne peut être exercée seulement à la date d'échéance fixe. On s'intéresse donc au prix juste à payer au temps 0 pour une option d'achat d'un actif exercée à un temps $t \geq 0$ fixé à un prix $Y(0)A$ fixé, en dollars du temps 0. Ici, on suppose que la valeur de l'actif, en dollars du temps 0, est décrite par un mouvement brownien géométrique $Y(t)$ avec dérive μ et volatilité σ satisfaisant $\sigma^2/2 + \mu = 0$, de telle sorte que la tendance est neutre.

Ce prix juste correspond au gain espéré donné par la formule de Black-Scholes, soit

$$C(t) = E((Y(t) - Y(0)A)^+) = Y(0) \left[\Phi(\sigma\sqrt{t} - \alpha_t) - A\Phi(-\alpha_t) \right],$$

où

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

et

$$\alpha_t = \frac{\log(A)}{\sigma\sqrt{t}} + \frac{\sigma\sqrt{t}}{2}.$$

Ici, on définit

$$(Y(t) - Y(0)A)^+ = \begin{cases} Y(t) - Y(0)A & \text{si positif,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour tenir compte d'un taux d'intérêt sans risque $r > 0$ par unité de temps, on prend

$$A = Be^{-rt},$$

où $Y(0)B$ est le prix en dollars du temps $t \geq 0$ fixé par l'option.

Démonstration :

La démonstration utilise simplement le fait que

$$Y(t) = Y(0)e^{X(t)},$$

où $X(t)$ est de loi $N(\mu t, \sigma^2 t)$ où $\mu = -\sigma^2/2$. On a alors

$$\begin{aligned} E\left((e^{X(t)} - A)^+\right) &= \int_{\log(A)}^{\infty} (e^x - A) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{(x-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}} dx \\ &= \int_{\alpha_t}^{\infty} (e^{\mu t + z\sigma\sqrt{t}} - A) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \end{aligned}$$

où

$$\alpha_t = \frac{\log(A) - \mu t}{\sigma\sqrt{t}} = \frac{\log(A)}{\sigma\sqrt{t}} + \frac{\sigma\sqrt{t}}{2}.$$

Finalement, on obtient que

$$E\left((e^{X(t)} - A)^+\right) = e^{\mu t + \sigma^2 t/2} \int_{\alpha_t - \sigma\sqrt{t}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - A \int_{\alpha_t}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Cela donne le résultat énoncé, car $\mu t + \sigma^2 t/2 = 0$ et la fonction $\Phi(z)$ est symétrique par rapport à $z = 0$.

5.2.4 Exemple : Prix juste d'une option d'Apple

Le 13 mars 2012 l'action d'Apple (AAPL) vaut 568 dollars à la cloture du Nasdaq. Une option d'achat à 600 dollars à être exercée le 15 juin 2012, soit trois mois plus tard, est offerte au prix de 20 dollars. La volatilité historique de l'action d'Apple est estimée à $\sigma = 0,20$ par an. Cela implique notamment que la variation de sa valeur sur une année est d'au plus 20 % en plus ou en moins avec probabilité d'environ 0,68. D'autre part le taux d'intérêt sans risque sur les bons du trésor américains pour une période de trois mois est pratiquement nul, à 0,08 %.

La formule de Black-Scholes donne alors

$$C(1/4) = 568 \left[\Phi \left(0,2\sqrt{1/4} - \alpha_{1/4} \right) - \frac{600}{568} \Phi(-\alpha_{1/4}) \right],$$

où

$$\alpha_{1/4} = \frac{\log(600) - \log(568)}{0,2\sqrt{1/4}} + \frac{0,2\sqrt{1/4}}{2} = 0,65.$$

Finalement, on obtient que

$$C(1/4) = 568 [\Phi(-0,55) - 1,06\Phi(-0,65)] = 9,58.$$

C'est bien moins que les 20 dollars demandés.

5.3 *Exercices

1. Déterminer la covariance entre $B(s)$ et $B(t)$, où $B(t)$ pour $t \geq 0$ désigne un mouvement brownien standard.
2. En utilisant la formule de Black-Scholes, déterminer le prix juste d'une option d'achat à 50 dollars dans 6 mois sur une action qui en vaut aujourd'hui 55 et dont la volatilité est estimée à 0,4 alors que le taux d'intérêt sans risque est de 5 pour-cent par an.

Références

- [1] Durrett, R. Essentials of Stochastic Processes, Springer-Verlag, New York, 1999, 289 pages.
- [2] Foata, D., Fuchs, A. Processus stochastiques, Dunod, Paris, 2004, 236 pages.
- [3] Freedman, D. A. Markov Chains, Springer-Verlag, New York, 1983, 382 pages.
- [4] Grimmett, G., Stirzaker, D. Probability and Random Processes, Oxford University Press, Third Edition, Oxford, 2001, 608 pages.
- [5] Hein, J., Schierup, M. H., Wiuf, C. Gene Genealogies, Variation and Evolution : A Primer in Coalescent Theory, Oxford University Press, Oxford, 2005, 290 pages.
- [6] Mehdi, J. Stochastic Models in Queuing Theory, Academic Press, Second Edition, San Diego, 2003, 450 pages.
- [7] Rosenthal, J. S. A First Look at Rigorous Probability Theory, Second Edition, World Scientific, Singapore, 2006, 219 pages.
- [8] Ross, S. Introduction to Probability Models, Academic Press, Seventh Edition, San Diego, 2000, 693 pages.
- [9] Ross, S. Stochastic Processes, John Wiley and Sons, Second Edition, New York, 1996, 510 pages.
- [10] Ruegg, A. Processus stochastiques, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, 1989, 164 pages.
- [11] Society of Actuaries, Past Exam Questions and Solutions, Archives, <http://www.soa.org/education/exam-req/syllabus-study-materials/edu-multiple-choice-exam.aspx>.
- [12] Taylor, H. M., Karlin, S. An Introduction to Stochastic Modeling, Academic Press, Third Edition, San Diego, 1998, 631 pages.
- [13] Taylor, H. M., Karlin, S. A First Course in Stochastic Processes, Academic Press, Second Edition, San Diego, 1975, 557 pages.
- [14] Taylor, H. M., Karlin, S. A Second Course in Stochastic Processes, Academic Press, San Diego, 1981, 542 pages.
- [15] Williams, D. Probability with Martingales, Cambridge University Press, Cambridge, 1991, 251 pages.