

Ecole Centrale Paris
Séries temporelles appliquées
Février 2017

**TD2 - Processus stochastiques
approches empiriques**

Votre fichier devra s'intituler "NOM1 - CENTRALE - TD2.(pdf)/(doc)" et l'objet du mail de même "NOM1 - CENTRALE - TD2". N'oubliez pas non plus de faire figurer votre nom dans le corps du texte. L'heure limite d'envoi est le 15 mars, 00h00. Une importance particulière sera accordée à la présentation de vos résultats et à la rédaction. Il vous sera également demandé de faire figurer vos codes en annexe de votre document. Veuillez éviter les docx. L'adresse pour l'envoi du document est mabrouk.chetouane@gmail.com. Merci.

Généralités autour des processus stationnaires

Partie A - Simulations de processus AR(p) et MA(q)

Question 1 - Simuler un processus $MA(1)$ puis $AR(1)$ stationnaire¹.

Question 2 - Tracer sur un même graphique les fonctions d'autocorrélations et les fonctions d'autocorrélations partielles des processus simulés. Confronter vos résultats à vos connaissances théoriques (vues en cours).

Question 3 - Une marche aléatoire est un processus stochastique autorégressif qui comporte une racine unitaire. En d'autres termes on a :

$$x_t = x_{t-1} + \epsilon_t$$

avec $\epsilon_t \sim BB(0, \sigma_\epsilon^2)$. Montrer qu'une marche aléatoire peut s'écrire comme une somme cumulée de $BB(0, \sigma_\epsilon^2)$. Simuler une marche aléatoire (minimum 1000 points). Tracer la série simulées.

Question 4 - Tracer le corrélogramme de la marche aléatoire puis comparer le avec ceux obtenus précédemment ($MA(1)$ puis $AR(1)$). Le corrélogramme peut-il être utilisé comme un outil permettant de se prononcer stationnarité d'une série ?

Modèle ARMA(p,q) - Applications à l'inflation

Question 1 - Charger les indices de prix à la consommation pour la France, l'Espagne, les Etats-Unis, la Suède, les Pays-Bas et l'Irlande, l'Italie la Corée, la Pologne, du Chili, le Danemark et la Suisse sur la période 1996-2017. Le taux d'inflation est défini par la variation de l'indice des prix à la consommation. L'inflation mensuelle est donc définie ici par :

$$\pi_t = \frac{I_t}{I_{t-1}} - 1 \approx \pi_t = \log(I_t) - \log(I_{t-1})$$

1. (on supposera $-1 < \Phi_1 < 0$ et $0 < \Phi_1 < 1$, on procédera de même pour θ_1 avec $-1 < \theta_1 < 0$ et $0 < \theta_1 < 1$)

Question 2 - Calculer la variation mensuelle de l'indice de prix à la consommation d'un pays de votre choix. . Tracer le corrélogramme et sa fonction d'autocorrélation partielle de la série d'inflation. Commenter vos résultats. Que constatez vous concernant la périodicité de certaines séries.

Question 3 - Reprenez la question précédente en calculant le glissement annuelle de l'inflation - soit la variation sur 12 mois. Tracer votre glissement annuel ainsi que ses fonctions d'autocorrélation. Quels constats faites-vous ?

On se propose désormais de modéliser le taux d'inflation en France à l'aide d'un processus $ARMA(p, q)$ et de réaliser une prévision d'inflation.

Question 4 - Déterminer l'ordre du processus (autrement dit les valeurs de p et de q) à l'aide du corrélogramme et du corrélogramme partiel.

Question 5 - Confronter vos résultats avec ceux données par les critères d'information AIC². A partir des résultats obtenus, proposer une spécification pour la modélisation de l'inflation française.

Question 6 - A l'aide de la fonction "arima" directement implémentée dans R³, évaluer par maximum de vraisemblance les coefficients du modèle $ARMA(p, q)$ sur les données d'inflation sur la période 1996 - 2017.

Question 7 - Effectuer une simulation de la série l'inflation sur la période d'estimation. Calculer les erreurs de prévision, notée $\hat{e}_t = \pi_t - \hat{\pi}_t$. Tracer le corrélogramme des résidus puis commenter. Peut on envisager un exercice de prévision dans ce cadre.

On souhaite faire une prévision de l'inflation à trois mois, à six mois et à 12 mois? Effectuer ces prévisions sur les différents horizons indiqués (fonction predict). Tracer graphiquement vos prévisions augmentées de leurs intervalles de confiance à 5%?

Question 8 - Quels sont les tests adéquats qui permettent de valider le choix d'un modèle. Calculer et tracer les résidus puis procéder à un test d'autocorrélation des erreurs (tests de Durbin Watson et test de Ljung-Box)⁴. Commenter vos résultats. Que concluez-vous? Les modèles ARMA vous semblent-ils adaptés à nos besoins?

Exercice 2: Le modèle du Capital Asset Pricing model (CAPM) - estimation par des méthodes standards et flexibles

Partie A : CAPM et approche standard

Préambule: Le modèle d'évaluation d'actifs financiers (Sharpe, 1965 puis Lintner, 1965) suppose que l'excès de rentabilité d'un actif r_i dépend de la capacité du gérant à générer du rendement (α) et de l'écart entre le taux de rendement du marché $r_{M,t}$ et le taux sans risque que l'on nomme également prime de marché. L'équation ci-dessous décrit cette relation:

$$\mathbb{E}(r_t^i) - r_t^f = \alpha + \beta \cdot [\mathbb{E}(r_t^M) - r_t^f] \quad (1)$$

Le modèle économétrique sous-jacent reprend la formulation de Sharpe (1965) et Lintner (1965) et est donné par la relation ci-dessous:

$$\mathbb{E}(r_t^i) - r_t^f = \alpha_i + \beta_i \cdot [\mathbb{E}(r_{M,t}) - r_{f,t}] + \epsilon_{i,t} \quad (2)$$

2. Pour ce faire, plusieurs possibilités sont envisageables. D'une part, on peut estimer, via une boucle "for", plusieurs modèles en retenant un nombre croissant de retards puis utiliser la fonction AIC dans R afin de conclure sur la meilleure spécification. Une autre méthode consiste à charger le package "ar", puis à utiliser la fonction `ar(aic=TRUE, order.max=NULL, method=c(,))`

3. Si cette fonction ne figure pas dans le logiciel, vous pouvez la télécharger directement sur le site de R/CRAN **arima package**.

4. Pour cela on chargera le package **car**

avec $\epsilon_{i,t}$ la perturbation que l'on suppose distribuée selon une loi normale centrée de paramètre σ^2

1 - Calculer le rendement du titre⁵, sachant que celui-ci ne verse aucun dividende. Tracer la densité empirique des rendements d'un actif de votre choix ainsi que celui de l'indice de marché. Que conclure? Tracer un quantile plot . Que conclure sur la normalité de ces distributions.

2- Calculer les écarts de rendement aux taux sans risque⁶. Tracer un nuage de points où figurent la variable à expliquée et la variable explicative - cf. équation 2. (Utiliser `ts.plot`) . L'utilisation de la méthode des MCO vous paraît-elle pertinente?

4 - A l'aide la fonction "`lm`" du logiciel R, estimer par les MCO les coefficients de l'équation 2. Commenter vos résultats en particulier le signe des coefficients et leur significativité. Qu'indiquent les statistiques de Student et de Fisher? Le modèle du CAPM peut-il être utiliser pour analyser voire prédire le rendement d'un actif financier?

5 - Calculer les résidus du modèle. Tracer le corrélogramme des résidus puis commenter vos résultats. Proposer un test statistique permettant de détecter la présence d'autocorrélation dans les résidus. Quelle conclusion peut-on en tirer?

6 - Identifier le modèle ARMA le plus adapté pour la série de rendements à l'étude. Comparer la performance d'une approche naïve à celle d'une approche structurale en utilisant les mesures implémentées au premier Td.

Partie B : Modèle espace état

1 - Qu'est ce qu'un modèle espace-état. Donner un exemple de modèle espace-état en vous appuyant sur les exemples vus en cours. Commenter chacune des équations du système.

2 - Les coefficients d'un modèle espace-état peuvent être estimés à l'aide du filtre de Kalman. Rappeler les trois grandes étapes sous jacentes à l'utilisation du filtre dans le cadre de l'estimation d'un modèle espace-état. En utilisant une représentation espace-état, réécrire le modèle du CAPM autrement dit le système d'équations permettant l'application de l'algorithme de Kalman.

3 - Initialiser le filtre c'est à dire déterminer les conditions initiales ainsi que le ratio signal-bruit en les calibrant de manière intuitive (ou en utilisant une autre méthode). Estimer les coefficients du modèle espace-état par maximum de vraisemblance à l'aide du package `d1m`⁷. Choisir plusieurs valeurs d'étalement pour le ratio signal bruit et observer l'impact sur vos résultats d'estimation. Que peut-on en déduire?

4 - A l'aide des outils du package `d1m` tracer les coefficients issus du lissage. Calculer les intervalles de confiance à $\pm 5\%$ pour chaque coefficient. Tracer la valeur du coefficient β issus par les MCO ainsi que celui dérivé de la méthode par filtrage/lissage. Peut-on conclure sur la stabilité temporelle du coefficient β d'une part et sur l'utilisation du *beta* du CAPM comme principe de classification des titres et de construction de stratégie d'investissement.

Bon courage

5. Le rendement d'un titre financier est donné par $r_{i,t} = \frac{P_{t+1} - P_t + D_t}{P_t}$ avec $D_t = 0$

6. Attention, le taux de rendement de l'actif sans risque (r_f) est exprimé sur une base annuelle alors que le taux de rendement de l'actif financier est exprimé sur une base journalière. Procéder aux ajustements nécessaires

7. D'autres packages peuvent être utilisés comme `kfas` par exemple