

Analyse II

Louis Merlin

February 22, 2016

Contents

1	Équations différentielles ordinaires	2
1.1	Définitions et exemples	2

Chapitre 1

Équations différentielles ordinaires

1.1 Définitions et exemples

Exemple 1

$$y' = 0 \Rightarrow y(x) = C \quad \text{où } C \in \mathbb{R}$$

$y(x) = 2$ est une solution, et $y(x) = C, \forall C \in \mathbb{R}$ est une solution plus générale.

Définition Une équation différentielle ordinaire est une expression

$$E(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

où $E : \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction donnée, $n \in \mathbb{R}^*$

On cherche un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ et une fonction $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^n telle que l'équation soit satisfaite pour tout $x \in I$.

Applications

EDO \rightarrow croissance de la population, désintégration radioactive.

EDP \rightarrow prévisions météo, marché financier.

Exemple 2

$$\begin{aligned} y'' = 0 &\Rightarrow y'(x) = C_1 \quad \text{pour } C_1 \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R} \\ y' = C &\Rightarrow y(x) = C_1 x + C_2 \quad \text{pour } C_1, C_2 \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Exemple 3

$$y + y' = 0 \Rightarrow y = y'$$

Rappel : $(a^x)' = a^x \log a, \forall a \in \mathbb{R}$

$$\log a = -1 \Rightarrow a = \frac{1}{e} \Rightarrow \left(\left(\frac{1}{e} \right)^x \right)' = - \left(\frac{1}{e} \right)^x$$

$(e^{-x})' = -e^{-x}$ est une solution pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Plus généralement, $(Ce^{-x})' = -Ce^{-x}$ pour $C \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$.

Exemple $y' = -y$ "Équation à variables séparées"

Si on écrit $y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{y} = -dx$

$$\begin{array}{ll} \frac{dy}{y} = -dx & \int \frac{dy}{y} = - \int dx \\ \text{variables séparées} & \text{les primitives} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \log |y| &= -x + C_1 \\ \Rightarrow |y| &= e^{-x+C_1} = e^{C_1} \times e^{-x} \\ \Rightarrow |y| &= C_2 e^{-x}, C_2 > 0 \\ \Rightarrow y(x) &= \pm C_2 e^{-x}, C_2 > 0 \end{aligned}$$

Mais $y(x) = 0$ est aussi une solution.

Finalement on a : $y(x) = Ce^{-x}, \forall C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$.