Analyse II

Louis Merlin

February 23, 2016

Contents

Chapitre 1

Équations différentielles ordinaires

1.1 Définitions et exemples

Exemple 1

$$y' = 0 \Rightarrow y(x) = C \quad \text{où} \quad C \in \mathbb{R}$$

$y(x) = 2$ est une solution, et $y(x) = C$, $\forall C \in \mathbb{R}$ est une solution plus générale.

Définition Une **équation différentielle ordinaire** est une expression

$$E(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0$$

où $E : \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$ une fonction donnée, $n \in \mathbb{R}^*$
On cherche un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ et une fonction $y : I \to \mathbb{R}$ de classe C^n telle que l'équation soit satisfaite pour tout $x \in I$.

Applications

EDO $\to$ croissance de la population, désintegration radioactive.

EDP $\to$ prévisions météo, marché financier.

Exemple 2

$$\begin{aligned} y'' = 0 \quad &\Rightarrow \quad y'(x) = C_1 \quad \text{pour} \quad C_1 \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R} \\ y' = C \quad &\Rightarrow \quad y(x) = C_1 x + C_2 \quad \text{pour} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Exemple 3

$$y + y' = 0 \Rightarrow y = y'$$

Rappel : $(a^x)' = a^x \log a$, $\forall a \in \mathbb{R}$

$$\log a = -1 \Rightarrow a = \frac{1}{e} \Rightarrow \left(\left(\frac{1}{e}\right)^x\right)' = -\left(\frac{1}{e}\right)^x$$

$(e^{-x})' = -e^{-x}$ est une solution pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Plus généralement, $(Ce^{-x})' = -Ce^{-x}$ pour $C \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$.

Exemple $y' = -y$ "Équation à variables séparées"
Si on écrit $y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -y$

$$\underset{\text{variables séparées}}{\frac{dy}{y} = -dx} \qquad \underset{\text{les primitives}}{\int \frac{dy}{y} = -\int dx}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \log|y| = -x + C_1 \\ &\Rightarrow \quad |y| = e^{-x+C_1} = e^{C_1} \times e^{-x} \\ &\Rightarrow \quad |y| = C_2 e^{-x},\ C_2 > 0 \\ &\Rightarrow \quad y(x) = \pm C_2 e^{-x},\ C_2 > 0 \end{aligned}$$

Mais $y(x) = 0$ est aussi une solution.
Finalement on a : $y(x) = Ce^{-x}$, $\forall C \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Terminologie

$$E\left(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \qquad (*)$$

Définition L'**ordre** de l'équation $(*)$ est n si E est une fonction non-constante de $y^{(n)}$

Définition Si $(*)$ est une expression polynomiale de $y^{(n)}$, alors le **degré** de l'équation est le degré du polynôme en $y^{(n)}$. Si le degré est 1, alors l'équation est dite linéaire.

Définition Si l'expression $(*)$ ne dépend pas de de x, l'équation différentielle est dite **autonome**.

Remarque Si l'équation différentielle est autonome, et $y(x) = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une solution, alors $y(x + C)$ l'est aussi pour tout $C \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ (par exemple dans l'Exemple 3 : $y(x) = Ce^{-x} \Rightarrow y(x) = Ce^{-(x+C')}$ est aussi une solution).

Type des équations différentielles

Equation	Ordre	Degré	Autonome
$y' = 0$	1	1	oui
$y'' = 0$	2	1	oui
$y + y' = 5x + 1$	1	1	non
$sin(y') = 0$	1	$\varnothing$	oui
$e^x(y')^2 + y = 0$	1	2	non

Définition La **solution générale** d'une équation différentielle est l'ensemble de toutes les solutions de l'équation.

Exemple $y' = 0 \Rightarrow y(x) = 2$ est une solution sur $\mathbb{R}$, mais ce n'est pas la solution générale. La solution générale est $y(x) = C$ pour tout $C \in \mathbb{R}$.

Définition **Problème de Cauchy**
Résoudre l'équation $E\left(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}\right) = 0$ et trouver l'intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ et une fonction $y(x) : I \to \mathbb{R}$ de classe $C^n(I)$ telle que $y(x_0) = b_0$, $y(x_1) = b_1$, *etc.* Le nombre de conditions initiales dépend du type de l'équation.

Exemple $y'' = 0 \Rightarrow$ la solution générale est $y(x) = C_1x + C_2$, $\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
Si on a : $y(0) = 1$ et $y(2) = 4$ comme conditions initiales, alors $y(0) = C_2 = 1$ et $y(2) = C_1 \times 2 + C_2 = 2C_1 + 1 = 4 \Rightarrow C_1 = \frac{3}{2}$.
La solution particulière satisfaisant les conditions initiales est $y(x) = \frac{3}{2}x + 1$.

1.2 Equations différentielles à variables séparées (EDVS) (du premier ordre)

Définition $f(y) \times y'(x) = g(x)$ où $\begin{array}{l} f : I \to \mathbb{R} \text{ est une fonction continue sur } I \\ g : I \to \mathbb{R} \text{ est une fonction continue sur } J \end{array}$
est une **équation différentielle à variables séparées** (EDVS).

Explication

$$f(y)\frac{dy}{dx} = g(x) \Leftrightarrow \int f(y)dy = \int g(x)dx$$

Une fonction $y : J' \subset J \to I$ qui satisfait l'équation est une solution de classe C'.

Théorème **Existence et unicité d'une solution de EDVS**
Soit $\begin{array}{l} f : I \to \mathbb{R} \text{ une fonction continue telle que } f(y) \neq 0 \text{ sur } I. \\ g : I \to \mathbb{R} \text{ une fonction continue.} \end{array}$
Alors pour tout couple ($x_0 \in J$, $b_0 \in I$) l'équation

$$f(y)y'(x) = y(x) \qquad (**)$$

admet une solution $y : J' \to I$ vérifiant les conditions initiales $y(x_0) = b_0$.
Si $y_1 : J_1 \to I$ et $y_2 : J_2 \to I$ sont deux solutions telles que $y_1(x_0) = y_2(x_0) = b_0$, alors $y_1(x) = y_2(x)$ pour $x \in J_1 \cap J_2$.

Démonstration Soit :

$$\begin{aligned} F(y) = \int_{b_0}^{y} f(s)ds \quad &\Rightarrow \quad F(y) \text{ est monotone} \\ &\Rightarrow \quad F(y) \text{ est inversible et } F(b_0) = 0 \\ &\Rightarrow \quad f(y) \neq 0 \text{ sur } I \end{aligned}$$

Soit :

$$G(x) = \int_{x_0}^{x} g(s)ds \to G(x_0) = 0 \quad x_0, x \in J$$

Soit $y(x) = F^{-1}(G(x))$ sur un voisinage de $x_0 \in J$:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad F(y(x)) = G(x) \\ &\Rightarrow \quad F'(y(x)) \times y'(x) = G'(x) \\ &\Rightarrow \quad f(y(x)) \times y'(x) = g'(x) \\ &\Rightarrow \quad y(x) = F^{-1}(G(x)) \text{ est une solution} \\ &\Rightarrow \quad y(x_0) = F^{-1}(G(x_0)) = F^{-1}(0) = b_0 \\ &\Rightarrow \quad y(x) \text{ satisfait les conditions initiales} \end{aligned}$$

<u>Unicité :</u> Soient $y_1(x)$ et $y_2(x)$.

$$\begin{aligned} y_1(x_0) = y_2(x_0) = b_0 \quad &\Rightarrow \quad F(y_1(x)) = F(y_2(x)) \\ &\Rightarrow \quad y_1(x) = y_2(x) \end{aligned}$$