Analyse II

Louis Merlin

February 23, 2016

Contents

Chapitre 1

Équations différentielles ordinaires

1.1 Définitions et exemples

Exemple 1

$$y' = 0 \Rightarrow y(x) = C \quad \text{où} \quad C \in \mathbb{R}$$

$y(x) = 2$ est une solution, et $y(x) = C$, $\forall C \in \mathbb{R}$ est une solution plus générale.

Définition Une équation différentielle ordinaire est une expression

$$E(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0$$

où $E : \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$ une fonction donnée, $n \in \mathbb{R}^*$
On cherche un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ et une fonction $y : I \to \mathbb{R}$ de classe C^n telle que l'équation soit satisfaite pour tout $x \in I$.

Applications

EDO $\to$ croissance de la population, désintegration radioactive.

EDP $\to$ prévisions météo, marché financier.

Exemple 2

$$\begin{array}{lll} y'' = 0 & \Rightarrow & y'(x) = C_1 \quad \text{pour} \quad C_1 \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R} \\ y' = C & \Rightarrow & y(x) = C_1 x + C_2 \quad \text{pour} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R} \end{array}$$

Exemple 3

$$y + y' = 0 \Rightarrow y = y'$$

Rappel : $(a^x)' = a^x \log a$, $\forall a \in \mathbb{R}$

$$\log a = -1 \Rightarrow a = \frac{1}{e} \Rightarrow \left(\left(\frac{1}{e}\right)^x\right)' = -\left(\frac{1}{e}\right)^x$$

$(e^{-x})' = -e^{-x}$ est une solution pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Plus généralement, $(Ce^{-x})' = -Ce^{-x}$ pour $C \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$.

Exemple $y' = -y$ "Équation à variables séparées"
Si on écrit $y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -y$

$\frac{dy}{y} = -dx$	$\int \frac{dy}{y} = -\int dx$
variables séparées	les primitives

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \log|y| = -x + C_1 \\
&\Rightarrow \quad |y| = e^{-x+C_1} = e^{C_1} \times e^{-x} \\
&\Rightarrow \quad |y| = C_2 e^{-x},\ C_2 > 0 \\
&\Rightarrow \quad y(x) = \pm C_2 e^{-x},\ C_2 > 0
\end{aligned}$$

Mais $y(x) = 0$ est aussi une solution.
Finalement on a : $y(x) = Ce^{-x}$, $\forall C \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Terminologie

$$E\left(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \qquad (*)$$

Définition L'ordre de l'équation $(*)$ est n si E est une fonction non-constante de $y^{(n)}$

Définition Si $(*)$ est une expression polynomiale de $y^{(n)}$, alors le degré de l'équation est le degré du polynôme en $y^{(n)}$. Si le degré est 1, alors l'équation est dite linéaire.

Définition Si l'expression $(*)$ ne dépend pas de de x, l'équation différentielle est dite autonome.