Analyse II

Louis Merlin

March 1, 2016

Contents

Chapitre 1

Équations différentielles ordinaires

1.1 Définitions et exemples

Exemple 1

$$y' = 0 \Rightarrow y(x) = C \quad \text{où} \quad C \in \mathbb{R}$$

$y(x) = 2$ est une solution, et $y(x) = C$, $\forall C \in \mathbb{R}$ est une solution plus générale.

Définition Une **équation différentielle ordinaire** est une expression

$$E(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0$$

où $E : \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$ une fonction donnée, $n \in \mathbb{R}^*$
On cherche un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ et une fonction $y : I \to \mathbb{R}$ de classe C^n telle que l'équation soit satisfaite pour tout $x \in I$.

Applications

EDO $\to$ croissance de la population, désintegration radioactive.

EDP $\to$ prévisions météo, marché financier.

Exemple 2

$$\begin{aligned} y'' = 0 \quad &\Rightarrow \quad y'(x) = C_1 \quad \text{pour} \quad C_1 \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R} \\ y' = C \quad &\Rightarrow \quad y(x) = C_1 x + C_2 \quad \text{pour} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Exemple 3

$$y + y' = 0 \Rightarrow y = y'$$

Rappel : $(a^x)' = a^x \log a$, $\forall a \in \mathbb{R}$

$$\log a = -1 \Rightarrow a = \frac{1}{e} \Rightarrow \left(\left(\frac{1}{e}\right)^x\right)' = -\left(\frac{1}{e}\right)^x$$

$(e^{-x})' = -e^{-x}$ est une solution pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Plus généralement, $(Ce^{-x})' = -Ce^{-x}$ pour $C \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$.

Exemple $y' = -y$ "Équation à variables séparées"
Si on écrit $y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -y$

$\frac{dy}{y} = -dx$	$\int \frac{dy}{y} = -\int dx$
variables séparées	les primitives

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \log|y| = -x + C_1 \\
&\Rightarrow \quad |y| = e^{-x+C_1} = e^{C_1} \times e^{-x} \\
&\Rightarrow \quad |y| = C_2 e^{-x},\ C_2 > 0 \\
&\Rightarrow \quad y(x) = \pm C_2 e^{-x},\ C_2 > 0
\end{aligned}$$

Mais $y(x) = 0$ est aussi une solution.
Finalement on a : $y(x) = Ce^{-x}$, $\forall C \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Terminologie

$$E\left(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \qquad (*)$$

Définition L'**ordre** de l'équation $(*)$ est n si E est une fonction non-constante de $y^{(n)}$

Définition Si $(*)$ est une expression polynomiale de $y^{(n)}$, alors le **degré** de l'équation est le degré du polynôme en $y^{(n)}$. Si le degré est 1, alors l'équation est dite linéaire.

Définition Si l'expression $(*)$ ne dépend pas de de x, l'équation différentielle est dite **autonome**.

Remarque Si l'équation différentielle est autonome, et $y(x) = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une solution, alors $y(x + C)$ l'est aussi pour tout $C \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ (par exemple dans l'Exemple 3 : $y(x) = Ce^{-x} \Rightarrow y(x) = Ce^{-(x+C')}$ est aussi une solution).

Type des équations différentielles

Equation	Ordre	Degré	Autonome
$y' = 0$	1	1	oui
$y'' = 0$	2	1	oui
$y + y' = 5x + 1$	1	1	non
$sin(y') = 0$	1	$\varnothing$	oui
$e^x(y')^2 + y = 0$	1	2	non

Définition La **solution générale** d'une équation différentielle est l'ensemble de toutes les solutions de l'équation.

Exemple $y' = 0 \Rightarrow y(x) = 2$ est une solution sur $\mathbb{R}$, mais ce n'est pas la solution générale. La solution générale est $y(x) = C$ pour tout $C \in \mathbb{R}$.

Définition Problème de Cauchy
Résoudre l'équation $E\left(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}\right) = 0$ et trouver l'intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ et une fonction $y(x) : I \to \mathbb{R}$ de classe $C^n(I)$ telle que $y(x_0) = b_0$, $y(x_1) = b_1$, *etc.* Le nombre de conditions initiales dépend du type de l'équation.

Exemple $y'' = 0 \Rightarrow$ la solution générale est $y(x) = C_1x + C_2$, $\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
Si on a : $y(0) = 1$ et $y(2) = 4$ comme conditions initiales, alors $y(0) = C_2 = 1$ et $y(2) = C_1 \times 2 + C_2 = 2C_1 + 1 = 4 \Rightarrow C_1 = \frac{3}{2}$.
La solution particulière satisfaisant les conditions initiales est $y(x) = \frac{3}{2}x + 1$.

1.2 Equations différentielles à variables séparées (EDVS) (du premier ordre)

Définition $f(y) \times y'(x) = g(x)$ où $\begin{array}{l} f : I \to \mathbb{R} \text{ est une fonction continue sur } I \\ g : I \to \mathbb{R} \text{ est une fonction continue sur } J \end{array}$
est une **équation différentielle à variables séparées** (EDVS).

Explication

$$f(y)\frac{dy}{dx} = g(x) \Leftrightarrow \int f(y)dy = \int g(x)dx$$

Une fonction $y : J' \subset J \to I$ qui satisfait l'équation est une solution de classe C'.

Théorème Existence et unicité d'une solution de EDVS
Soit $\begin{array}{l} f : I \to \mathbb{R} \text{ une fonction continue telle que } f(y) \neq 0 \text{ sur } I. \\ g : I \to \mathbb{R} \text{ une fonction continue.} \end{array}$
Alors pour tout couple ($x_0 \in J$, $b_0 \in I$) l'équation

$$f(y)y'(x) = y(x) \qquad (**)$$

admet une solution $y : J' \to I$ vérifiant les conditions initiales $y(x_0) = b_0$.
Si $y_1 : J_1 \to I$ et $y_2 : J_2 \to I$ sont deux solutions telles que $y_1(x_0) = y_2(x_0) = b_0$, alors $y_1(x) = y_2(x)$ pour $x \in J_1 \cap J_2$.

Démonstration Soit :

$$\begin{aligned} F(y) = \int_{b_0}^{y} f(s)ds \quad &\Rightarrow \quad F(y) \text{ est monotone} \\ &\Rightarrow \quad F(y) \text{ est inversible et } F(b_0) = 0 \\ &\Rightarrow \quad f(y) \neq 0 \text{ sur } I \end{aligned}$$

Soit :

$$G(x) = \int_{x_0}^{x} g(s)ds \to G(x_0) = 0 \quad x_0, x \in J$$

Soit $y(x) = F^{-1}(G(x))$ sur un voisinage de $x_0 \in J$:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad F(y(x)) = G(x) \\ &\Rightarrow \quad F'(y(x)) \times y'(x) = G'(x) \\ &\Rightarrow \quad f(y(x)) \times y'(x) = g'(x) \\ &\Rightarrow \quad y(x) = F^{-1}(G(x)) \text{ est une solution} \\ &\Rightarrow \quad y(x_0) = F^{-1}(G(x_0)) = F^{-1}(0) = b_0 \\ &\Rightarrow \quad y(x) \text{ satisfait les conditions initiales} \end{aligned}$$

<u>Unicité :</u> Soient $y_1(x)$ et $y_2(x)$.

$$\begin{aligned} y_1(x_0) = y_2(x_0) = b_0 \quad &\Rightarrow \quad F(y_1(x)) = F(y_2(x)) \\ &\Rightarrow \quad y_1(x) = y_2(x) \end{aligned}$$

Définition La **solution maximale** de l'EDVS avec la condition initiale $y(x_0) = b_0$, $x_0 \in J$ et $b_0 \in I$, est une fonction $y(x)$ de classe C' qui satisfait l'équation, la condition initiale, et qui est définie sur le plus grand intervalle possibe.
Le théorème sur les EDVS dit qu'il existe une solution maximale de l'EDVS pour la condition initiale $y(x_0) = b_0$ pour tout couple $x_0 \in J$, $b_0 \in I$.
Toute autre solution $y(x)$ qui satisfait $y(x_0) = b_0$ est une restriction de la solution maximale.

Exemple 1

$$\frac{y'(x)}{y^2(x)} = 1 \quad \text{EDVS: } f(y) = \frac{1}{y^2}$$

Pour donner la solution générale :

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{y^2} = \int dx \quad &\Rightarrow \quad -\frac{1}{y} = x + C, \forall C \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow \quad y = -\frac{1}{x+C}, \forall C \in \mathbb{R}, x \neq -C \end{aligned}$$

Supposons qu'on cherche une solution telle que $y(0) = b_0$

$$\begin{aligned} y(0) = \frac{1}{C} = b_0 \quad &\Rightarrow \quad C = -\frac{1}{b_0} \\ &\Rightarrow \quad y(x) = -\frac{1}{x - \frac{1}{b_0}} = \frac{b_0}{1 - xb_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 - xb_0 > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{b_0} > x \\ 1 - xb_0 < 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{b_0} < x \end{aligned}$$

1.3 Equations différentielles linéaires du premier ordre (EDL1)

Définition Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert. Une équation de la forme $y'(x) + p(x) \cdot y(x) = f(x)$, où $p, f : I \to \mathbb{R}$ sont continues est une équation différentielle linéaire du premier ordre (EDL1). La solution est une fonction $y : I \to \mathbb{R}$ de classe C' qui satisfait l'équation.

Proposition Considérons l'équation $y'(x) + p(x)y = 0$
Alors la fonction $y(x) = Ce^{-P(x)}, y : I \to \mathbb{R}$ est la solution générale de cette équation pour tout $C \in \mathbb{R}$.
Ici $P(x)$ est une primitive de $p(x)$ sur I.

Démonstration

$$\begin{aligned} y'(x) = -p(x)y \quad &\Rightarrow \quad \frac{y'(x)}{y(x)} = -p(x) \quad (EDVS) \\ &\Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int -p(x)dx \\ &\Rightarrow \quad log|y| = P(x) + C_1 \quad C_1 \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow \quad |y| = e^{-P(x)+C_1} = e^{C_1} \cdot e^{-P(x)} \\ &\Rightarrow \quad y(x) = Ce^{-P(x)},\ C = Ie^{C_1} \end{aligned}$$

Mais y(x)=0 est une solution, ainsi $y(x) = Ce^{-P(x),\, x \in I,\, C \in \mathbb{R}}$ est la solution générale de l'équation $y'(x) + p(x)y = 0$.

Remarque

Vérification

$$y'(x) + p(x)y = Ce^{-P(x)}(-p(x)) + p(x)Ce^{-P(x)} = 0$$

On a : $y'(x) + p(x)y(x) = 0$
Ainsi la solution générale est $y(x) = Ce^{-P(x)}$, $C \in \mathbb{R}$, $x \in I$ où $P(x)$ est une primitive de $p(x)$.

Principe de superposition des solutions Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $f_1, f_2 : I \to \mathbb{R}$ continues.
Supposons que $v_1(x) : I \to \mathbb{R}$ et $v_2(x) : I \to \mathbb{R}$ sont des solutions particulières des équations

$$\begin{array}{ll} & y' + p(x)y = f_1(x) \to v_1(x) \\ \text{et} & y' + p(x)y = f_2(x) \to v_2(x) \quad \text{respectivement.} \end{array}$$

Alors la fonction $v(x) = v_1(x) + v_2(x)$ est une solution particulière de l'équation $y' + p(x)y = f_1(x) + f_2(x)$.

Vérification

$$\begin{aligned} v'(x) + p(x)v(x) &= (v_1'(x) + v_2'(x)) + p(x)(v_1(x) + v_2(x)) \\ &= v_1'(x) + p(x)v_1(x) + v_2'(x) + p(x)v_2(x) \\ &= f_1(x) + f_2(x) \end{aligned}$$

Méthode de la variation des constantes On cherche une solution particulière de $y'(x) + p(x)y(x) = f(x), \quad p, f : I \to$ continues.
(Ansatz) On cherche une solution de la forme

$$v(x) = C(x) \cdot e^{-P(x)} \quad \text{où P(x) est une primitive de p(x).}$$

Alors on obtient :

$$\begin{array}{ll} & v'(x) + p(x)v(x) = f(x) \\ \Rightarrow & C'(x)e^{-P(x)} - p(x) \cdot C(x)e^{-P(x)} + p(x) \cdot C(x)e^{-P(x)} = f(x) \\ \Rightarrow & C'(x)e^{-P(x)} = f(x) \\ \Rightarrow & C'(x) = f(x)e^{P(x)} \\ \Rightarrow & C(x) = \displaystyle\int f(x)e^{P(x)}dx \end{array}$$

Une situation particulière de l'équation $y' + p(x)y = f(x)$ est $v(x) = (\int f(x)e^{P(x)}dx)e^{-P(x)}$, où $P(x)$ est une primitive de $p(x)$, et $v(x) : I \to \mathbb{R}$.

Exemple 1

$$y' + y = 5x + 1 \quad \text{EDL1: } p(x) = 1,\ f(x) = 5x + 1,\ p, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$P(x) = \int 1dx = x \quad \text{(une primitive)}$$

La solution générale de $y' + y = 0$ est :

$$y(x) = Ce^{-P(x)} = Ce^{-x} \quad C \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} C(x) &= \int f(x)e^{P(x)}dx = \int (5x+1)e^x dx \\ &= \int 5xe^x dx + \int e^x dx = \int 5xd(e^x) + \int e^x dx \\ &= 5xe^x - 5\int e^x dx + \int e^x dx = 5xe^x - 4\int e^x dx \\ &= 5xe^x - 4e^x + C \end{aligned}$$

Une solution de $y' + y + 5x + 1$ est :

$$v(x) = (5xe^x - 4e^x + C)e^{-x} = 5x - 4 + Ce^{-x}$$

Vérification

$$v'(x) + v(x) = 5 - Ce^{-x} + 5x - 4 + Ce^{-x} = 5x + 1$$

En effet c'est la solution générale.

Proposition Soient $f, p : I \to \mathbb{R}$ des fonctiosns continues. Supposons que $v_0 : I \to \mathbb{R}$ est une solution particulière de $y'(x) + p(x)y(x) = f(x)$.
Alors la solution générale de cette équation est $v(x) = v_0(x) + Ce^{-P(x)}$ pour tout $C \in \mathbb{R}$ où $P(x)$ est une primitive de $p(x)$ particulière.

Démonstration Si $v_1(x)$ est une solution de $y'(x) + p(x)y = f(x)$, on a que $v_0(x)$ est une solution aussi de la même équation.
Donc par le principe de superposition, la fonction $v_1(x) - v_0(x)$ est une solution de $y'(x) + p(x)y(x) = 0$ (sans second membre).
Ainsi $v_1(x) - v_0(x)$ est de la forme $Ce^{-P(x)}$ $C \in \mathbb{R}$, $P(x)$ une primitive de $p(x)$.
Ainsi la solution est $v_1(x) = v_0(x) + Ce^{-P(x)}$.

Exemple 2

$$y' + y = 5x + 1$$

Solution associée sans second membre : $y(x) = Ce^{-x}$, $C \in \mathbb{R}$.
Solution particulière : $y(x) = 5x - 4$.
Solution générale : $y(x) = 5x - 4 + Ce^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

1.3.1 Equation de Bernoulli

Définition Une équation différentielle de la forme

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha} \quad p, q : I \to \mathbb{R} \text{ fonctions continues} \quad \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0, \alpha \neq 1$$

est dite **équation de Bernoulli**.
On peut transformer en EDL1 par le changemeent de variables :

$$z(x) = (y(x))^{1-\alpha}$$

Alors $z'(x) = (1-\alpha)(y(x))^{-\alpha}y'(x) = (1-\alpha)\frac{y'}{y^{\alpha}}$
$\frac{y'}{y^{\alpha}} + p(x)y^{1-\alpha} = q(x)$ (vérifier si $y(x) = 0$ est une solution de l'équation originale). Ainsi $\frac{1}{1-\alpha}z' + y(x)z = q(x)$ c'est une EDL1.

Exemple 1 é

$$y' = \frac{4}{x} + x\sqrt{y} \Leftrightarrow y' - \frac{4}{x}y = x\sqrt{y}$$

C'est une équation de Bernoulli avec $\alpha = \frac{1}{2}, y(x) \geq 0, x \neq 0$. Changement de variable : $z(x) = (y(x))^{1-\frac{1}{2}} = \sqrt{y(x)}$. $z'(x) = \frac{1}{2\sqrt{y}}y'$ en supposant $y(x) \neq 0$.

$$\begin{aligned} \frac{y'}{\sqrt{y}} - \frac{4}{x}\sqrt{y} = x \quad &\Rightarrow \quad 2z' - \frac{4}{x}z = x \quad \text{EDL1} \\ &\Rightarrow \quad z' - \frac{2}{x}z = \frac{x}{2} \end{aligned}$$

(1) On cherche la solution générale de l'équation associée ssm : $z' - \frac{2}{x}z = 0$.

$$\begin{aligned} p(x) = -\frac{2}{x} \quad &\Rightarrow \quad P(x) = \int -\frac{2}{x}dx = -2\log|x| = -\log x^2,\ x \neq 0 \\ &\Rightarrow \quad y_{ssm} = Ce^{-P(x)} = Ce^{\log x^2} = Cx^2,\ x \neq 0 \end{aligned}$$

Vérification : $(Cx^2)' - \frac{2}{x}(Cx^2) = 2Cx - 2Cx = 0 \quad \checkmark$

(2) On cherche une solution particulière de l'équation complète.

$$\begin{aligned} C(x) &= \int f(x)e^{P(x)}dx = \int \frac{x}{2}e^{-\log x^2}dx \\ &= \int \frac{x}{2}\frac{1}{x^2}dx = \int \frac{1}{2}\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\log|x|,\ x \neq 0 \end{aligned}$$

(on supprime la constante).

$$z_{part}(x) = \frac{1}{2}\log|x|e^{\log x^2} = x^2\frac{1}{2}\log|x|,\ x \neq 0$$

Vérification : Soit $x < 0 \Rightarrow z_{part}(x) = x^2 \frac{1}{2} \log -x$

$$\begin{aligned} z' - \frac{2}{x} z &= (\frac{x^2}{2} \log -x)' - \frac{2}{x}(\frac{x^2}{2} \log(-x)) \\ &= x \log(-x) + \frac{x^2}{2} \frac{1}{-x}(-1) - x \log(-x) = \frac{x}{2} \end{aligned}$$

On vérifie d'une manière similaire la solution pour $x > 0$. **Solution générale :**

$$z(x) = \begin{cases} Cx^2 + \frac{x^2}{2} \log x\,, & x \in]0, \infty[, \, C \in \mathbb{R} \\ Cx^2 + \frac{x^2}{2} \log -x\,, & x \in]-\infty, 0[, \, C \in \mathbb{R} \end{cases}$$