Tarea-Examen 2: Relaciones y funciones.

Grupo: 4010
Luis Gonzalo Ochoa Rivera

Resuelve los siguientes ejercicios justificando tu respuesta.

1. (5 puntos) Diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando su respuesta.

   (a) Si R y S son relaciones definidas sobre $A \neq \emptyset$ tales que $R \cup S$ es una relación de equivalencia sobre A, entonces tanto R y S son relaciones de equivalencia sobre A.

   (b) Si R y S son relaciones definidas sobre $A \neq \emptyset$ tales que $R \cap S$ es una relación de equivalencia sobre A, entonces tanto R y S son relaciones de equivalencia sobre A.

   Ambas afirmaciones son falsas, veamos un contraejemplo.

   Sean $A = \{1,2\}$, $R = \{(1,1),(1,2),(2,2)\}$ y $S = \{(1,1)(2,1),(2,2)\}$;
   entonces $R \cup S = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$.
   La cual, es una relación de equivalencia; ya que es reflexiva ($1 \sim 1$ y $2 \sim 2$), simétrica ($1 \sim 2$ y $2 \sim 1$) y transitiva ($1 \sim 2$, $2 \sim 1$ y $1 \sim 1$; $2 \sim 1$, $1 \sim 2$ y $2 \sim 2$). Pero R no es simétrica porque $(2,1) \notin R$ y análogamente S no es simétrica.
   Por lo tanto R y S no son relaciones de equivalencia.

   Similarmente, notemos que $R \cap S = \{(1,1),(2,2)\}$ es una relación de equivalencia. Y como ya vimos, R y S no son relaciones de equivalencia.

2. (5 puntos) Sean A, B, C, D conjuntos cualesquiera y sean $f : A \to B$, $g : B \to C$ y $h : C \to D$ funciones. Demuestre lo siguiente:

   (a) Si f y g son biyectivas, entonces $g \circ f$ es biyectiva.
   Supongamos f y g son biyectivas.
   Entonces f^{-1} y g^{-1} son funciones, por el Corolario 3.53 y $f^{-1} \circ g^{-1}$ es una función por la Definición 3.40.
   Entonces

$$
\begin{aligned}
(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) &= g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} \ \ \textit{por el Lema } 3.48. \\
&= g \circ id_B \circ g^{-1} \ \ \textit{por la Proposición } 3.52. \\
&= g \circ g^{-1} \ \ \textit{por la Observación } 3.43. \\
&= id_C \ \ \textit{por la Proposición } 3.52.
\end{aligned}
$$

$i.e.$ $(f^{-1} \circ g^{-1})$ es el inverso derecho de $g \circ f$ por la Definición 3.44.

Similarmente,

$$\begin{aligned}
(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) &= f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f \\
&= f^{-1} \circ id_B \circ f \\
&= f^{-1} \circ f \\
&= id_A
\end{aligned}$$

$i.e.$ $(f^{-1} \circ g^{-1})$ es el inverso izquierdo de $g \circ f$.

Entonces por la Definición 3.50, $g \circ f$ es invertible.
Y por el Corolario 3.53, $g \circ f$ es biyectiva.

Además, por la Proposición 3.52, $(g \circ f)^{-1}$ es función y es el inverso derecho e izquierdo de $g \circ f$.
Y por el Teorema 3.49, $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

$\square$

(b) Si $g \circ f$ y $h \circ g$ son biyectivas, entonces f, g y h son biyectivas. Sugerencia: demuestre primero que g y h son suprayectivas, luego que f y g son inyectivas, después que h es inyectiva y finalmente que f es sobre.

Supongamos $g \circ f$ y $h \circ g$ son biyectivas.

En particular, $g \circ f$ y $h \circ g$ son suprayectivas.
Sea $c \in C$, entonces $\exists a \in A$ tal que $c = g \circ f(a) = g(f(a))$.
Como f es función, entonces $\exists b \in B$ t.q. $b = f(a)$ y $c = g(b)$.
$i.e.$ g es suprayectiva (ya que $\forall c \in C$ $\exists b \in B$ t.q. $c = g(b)$).

Análogamente h es suprayectiva.

$g \circ f$ y $h \circ g$ también son inyectivas.

Sean $b_1, b_2 \in B$ tales que $g(b_1) = g(b_2)$
entonces $h(g(b_1)) = h(g(b_2))$, porque h es función.
entonces $b_1 = b_2$, ya que $h \circ g$ es inyectiva.
Se sigue que g es inyectiva.

Análogamente f es inyectiva.

Sean $c_1, c_2 \in C$ tales que $h(c_1) = h(c_2)$.
Como g es suprayectiva, $\exists b_1, b_2 \in B$ tales que $c_1 = g(b_1)$ y $c_2 = g(b_2)$.
Entonces $h(g(b_1)) = h(c_1) = h(c_2) = h(g(b_2))$, ya que h es función.
Entonces $b_1 = b_2$, ya que $h \circ g$ es inyectiva.
Como g es función, entonces $c_1 = g(b_1) = g(b_2) = c_2$

$i.e.$ h es inyectiva.

Sea $b \in B$, como g es función, entonces $\exists c \in C$ t.q. $c = g(b)$.
Como $g \circ f$ es suprayectiva, $\exists a \in A$ t.q. $g(b) = c = g(f(a))$.
Como g es inyectiva, entonces $b = f(a)$.
Se sigue que f es suprayectiva.

Como f, g y h son suprayectivas e inyectivas, entonces son biyectivas por la Definición 3.25.

$\square$