Tarea-Examen 3: Números naturales

Grupo: 4010
Luis Gonzalo Ochoa Rivera

Resuelve los siguientes ejercicios justificando tu respuesta.

1. (2.5 puntos) Dado $m \in \mathbb{N}$ se define el factorial de m como $m! := m(m-1)(m-2)\ldots(1)$ si $m \neq 0$ y $0! = 1$. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}^+$ se tiene que:

$$(1)1! + (2)2! + \ldots + (n)n! = (n+1)! - 1.$$

Demostración. Sea $A := \{n \in \mathbb{N}^+ : (1)1! + (2)2! + \ldots + (n)n! = (n+1)! - 1\} \subseteq \mathbb{N}^+$.
Queremos ver que $A = \mathbb{N}^+$. Hacemos la prueba por inducción sobre n.

1. Paso base. Veamos que el resultado es cierto para $n = 1$.
   $(1+1)! - 1 = 2! - 1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1 = 1 \cdot 1 = (1)1!$, entonces el resultado se cumple para $n = 1$.
2. Paso inductivo. Demostremos que si para n es cierto el resultado, entonces para $s(n) = n + 1$ también es cierto.

   (HI): Supongamos que $n \in A$. Veamos que $s(n) \in A$.

$$\begin{aligned}
(s(n)+1)! - 1 &= s(n+1)! - 1 && (conmutatividad\ de\ +), (definición\ de\ Sumar),\\
&= ((n+1)+1)! - 1 && (Observación\ 4.6),\\
&= ((n+1)+1)(n+1)! - 1 && (definición\ de\ factorial),\\
&= (n+1)(n+1)! + (n+1)! - 1 && (distributividad),\\
&= (n+1)(n+1)! + (n)n! + \ldots + (2)2! + (1)1! && (HI),\\
&= s(n)s(n)! + (n)n! + \ldots + (2)2! + (1)1! && (Observación\ 4.6).
\end{aligned}$$

   i.e. $s(n) \in A$.

Por lo tanto, por el Axioma 5 concluimos que $A = \mathbb{N}^+$.

□

2. (2.5 puntos) Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que: $2^{2n} - 1$ es divisible por 3.

Definición. Sean $a, b, n \in \mathbb{Z}$ y $n \neq 0$, decimos que $n | a - b \iff \exists k \in \mathbb{Z}(nk = a - b)$.

Observación. Si $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, entonces tomando $k = 0$, tenemos que $n \cdot k = 0$. *i.e.* $n|0$.

Demostración. Sea $A := \{n \in \mathbb{N} : 3|2^{2n} - 1\} \subseteq \mathbb{N}$.
Queremos ver que $A = \mathbb{N}$. Hacemos la prueba por inducción sobre n.

1. Paso base. Veamos que el resultado es cierto para $n = 0$.
   $2^{2(0)} - 1 = 2^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ y tenemos que $\forall m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}(m|0)$, en particular $3|0$, entonces el resultado se cumple para $n = 0$.
2. Paso inductivo. Demostremos que si para n es cierto el resultado, entonces para $s(n) = n + 1$ también es cierto.

   (HI): Supongamos que $n \in A$. Veamos que $s(n) \in A$.
   Entonces $3|2^{2n} - 1$, *i.e.* $\exists k \in \mathbb{Z}(3k + 1 = 2^{2n})$.

$$\begin{aligned} 2^{2s(n)} - 1 &= (2^2)^{s(n)} - 1 \\ &= 2^2 \cdot (2^2)^n - 1 \quad (\textit{definición de Exponenciar}), \\ &= 4(3k + 1) - 1 \quad (HI), (\textit{definición de divisor}), \\ &= 4 \cdot 3k + 4 - 1 \quad (\textit{distributividad}), \\ &= 3 \cdot 4k + 3 \qquad (\textit{conmutatividad de } \cdot), \\ &= 3(4k + 1) \qquad (\textit{distributividad}). \end{aligned}$$

   i.e. $3|2^{2s(n)} - 1$, pues $4k + 1 \in \mathbb{Z}$.
   Entonces $s(n) \in A$.

Por lo tanto, por el Axioma 5 concluimos que $A = \mathbb{N}$.

$\square$

3. (2.5 puntos) Demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}^+$ se tiene que:

$$\left[1 - \frac{1}{4}\right] \cdot \left[1 - \frac{1}{9}\right] \cdot \left[1 - \frac{1}{16}\right] \cdot \ldots \cdot \left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right] = \frac{n+2}{2(n+1)}.$$

Demostración. Sea $A := \{n \in \mathbb{N}^+ : \left[1 - \frac{1}{4}\right] \cdot \left[1 - \frac{1}{9}\right] \cdot \left[1 - \frac{1}{16}\right] \cdot \ldots \cdot \left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right] = \frac{n+2}{2(n+1)}\} \subseteq \mathbb{N}^+$.
Queremos ver que $A = \mathbb{N}^+$. Hacemos la prueba por inducción sobre n.

1. Paso base. Veamos que el resultado es cierto para $n = 1$.
   $1 - \frac{1}{(1+1)^2} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = \frac{1+2}{2(1+1)}$, entonces el resultado se cumple para $n = 1$.
2. Paso inductivo. Demostremos que si para n es cierto el resultado, entonces para $s(n) = n+1$ también es cierto.

   (HI): Supongamos que $n \in A$. Veamos que $s(n) \in A$.
   Entonces $\left[1 - \frac{1}{4}\right] \cdot \left[1 - \frac{1}{9}\right] \cdot \left[1 - \frac{1}{16}\right] \cdot \ldots \cdot \left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right] = \frac{n+2}{2(n+1)}$.

$$
\begin{aligned}
\left[1-\frac{1}{4}\right]\cdot\ldots\cdot\left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]\cdot\left[1-\frac{1}{(s(n)+1)^2}\right] &= \frac{n+2}{2(n+1)}\cdot\left[1-\frac{1}{(s(n+1))^2}\right] \quad (HI), (definición\ de\ Sumar),\\
&= \frac{n+2}{2(n+1)}\left(1-\frac{1}{((n+1)+1)^2}\right) \quad (Observación\ \ 4.6),\\
&= \frac{n+2}{2(n+1)}\left(1-\frac{1}{(n+2)^2}\right)\\
&= \frac{n+2}{2(n+1)}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)} \quad (distributividad),\\
&= \frac{(n+2)^2-1}{2(n+1)(n+2)}\\
&= \frac{(n^2+4n+4)-1}{2(n+1)(n+2)}\\
&= \frac{n^2+4n+3}{2(n+1)(n+2)}\\
&= \frac{(n+1)(n+3)}{2(n+1)(n+2)}\\
&= \frac{(n+3)}{2(n+2)} \qquad (Cancelación\ \ de\ \ la\ \ multiplicación),\\
&= \frac{(n+1)+2}{2((n+1)+1)}\\
&= \frac{s(n)+2}{2(s(n)+1)} \qquad (Observación\ \ 4.6).
\end{aligned}
$$

$i.e.\ \ s(n) \in A$

Por lo tanto, por el Axioma 5 concluimos que $A = \mathbb{N}^+$.

□

4. (2.5 puntos) Demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que:

$$0^3 + 1^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Demostración. Sea $A := \{n \in \mathbb{N} : 0^3 + 1^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}\} \subseteq \mathbb{N}$.
Queremos ver que $A = \mathbb{N}$. Hacemos la prueba por inducción sobre n.

1. Paso base. Veamos que el resultado es cierto para $n = 0$.
   $\frac{0^2(0+1)^2}{4} = \frac{0\cdot 1^2}{4} = \frac{0}{4} = 0 = 0^3$, entonces el resultado se cumple para $n = 0$.
2. Paso inductivo. Demostremos que si para n es cierto el resultado, entonces para $s(n) = n + 1$ también es cierto.

   (HI): Supongamos que $n \in A$. Veamos que $s(n) \in A$. Entonces $0^3 + 1^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

$$
\begin{aligned}
0^3 + 1^3 + \ldots + n^3 + s(n)^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \qquad (HI),\ (\textit{Observación}\ \ 4.6),\\
&= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4}\\
&= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)(n+1)^2}{4}\\
&= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4(n+1))}{4} \qquad (\textit{distributividad}),\\
&= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4n + 4)}{4}\\
&= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}\\
&= \frac{(n+1)^2((n+1)+1)^2}{4}\\
&= \frac{s(n)^2(s(n)+1)^2}{4} \qquad (\textit{Observación}\ \ 4.6).
\end{aligned}
$$

i.e. $s(n) \in A$.

Por lo tanto, por el Axioma 5 concluimos que $A = \mathbb{N}$.

$\square$