Tarea-Examen 4: Combinatoria

Grupo: 4010
Luis Gonzalo Ochoa Rivera

Cada ejercicio tiene un valor de 2.5 puntos.

1 Conteste lo siguiente, justificando sus respuestas:

(a) ¿Cuántas placas distintas se pueden asignar en la Ciudad de México sabiendo que las placas tienen 3 números (del 0 al 9) y tres letras (contando 26 en el abecedario)?.

La cantidad de placas distintas está dada por:

$$\begin{aligned} OR_{10}^{3}\, OR_{26}^{3} &= |\, {}^{I_3}\{0, \dots, 9\} \,|\, |\, {}^{I_3}\{a, \dots, z\} \,| && \textit{Por la Definición } 5.24 \\ &= 10^3\, 26^3 && \textit{Por el Teorema } 5.26 \\ &= 17576000 \end{aligned}$$

(b) ¿Cuántas placas distintas se pueden asignar en la Ciudad de México tales que la sección de números no empiecen con cero?.
La cantidad de placas distintas está dada por:

$$\binom{9}{1} OR_{10}^{2}\, OR_{26}^{3} = 9 \cdot 10^2 \cdot 26^3 = 15818400$$

2 Sabemos que un grupo de 10 personas cenará en una mesa rectangular con 10 lugares. Conteste las siguientes preguntas, justificando sus respuestas:

(a) ¿Cuántas maneras distintas hay de sentar a la mesa rectangular las 10 personas?.

$$P_{10} = 10! \quad \textit{Por el Corolario } 5.33$$

(b) Si la mesa es rectangular y se quiere sentar a la dueña de la casa en alguna de las cabeceras, ¿Cuántas maneras distintas hay de sentar a la mesa a las 10 personas?.
Entonces de las 2 cabeceras elegimos 1 para la dueña y permutamos a las otras 9 personas en los 9 lugares restantes:

$$\binom{2}{1} P_9 = 2 \cdot 9! \quad \textit{Por el Corolario } 5.33$$

3 Supongamos que tenemos 12 libros, 4 de Matemáticas, 3 de Química, 3 de Biología y 2 de Física. Conteste las siguientes preguntas, justificando sus respuestas:

(a) ¿Cuántas maneras hay de arreglar los libros en un estante si se quiere acomodarlos por materias?.

Permutamos los libros de cada materia por separado y después permutamos las materias:

$$P_4(P_4 \cdot P_3 \cdot P_3 \cdot P_2) = 4! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 2! = 41472$$

(b) ¿Cuántas maneras hay de arreglar los libros en un estante si se quiere acomodarlos por materias y que los de Física queden junto a los de Matemáticas?.

Similarmente al anterior, pero esta vez consideraremos que los de Matemáticas y Física son de la misma materia, aunque debemos permutarlos antes:

$$P_3(P_2(P_4 \cdot P_2) \cdot P_3 \cdot P_3) = 4! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 3! = 20736$$

4 Conteste las siguientes preguntas:

(a) ¿Cuántas palabras (sucesiones de letras) distintas se pueden formar revolviendo las letras de la palabra “MATEMATICA”?.

La palabra “MATEMATICA” tiene 10 letras, entonces todas las permutaciones son P_{10}, pero las letras M, A y T tienen repeticiones, por lo que debemos descontarlas y para hacer esto, dividimos entre sus respectivas permutaciones:

$$\frac{P_{10}}{P_2P_3P_2} = \frac{P_{10}}{P_4} = \frac{10!}{4!} = 151200 = \frac{10!}{(10-6)!} = O^6_{10}$$

(b) ¿Cuántas palabras (sucesiones de letras) distintas se pueden formar de 5 letras con las letras de la palabra “MATEMATICA” de tal manera que una letra se use a lo más cuantas veces aparece en “MATEMATICA”?.

Análogamente a una mano de póker, consideremos los siguientes casos:

·) Ninguna letra se repite.
Entonces de las 6 letras diferentes, tomamos 5 y las permutamos:

$$P_5\binom{6}{5} = 5! \cdot 6 = 6! = 720$$

· ·) Sólo una letra se repite. *i.e.* tenemos un par (de letras).
Para que una se repita, tomamos 1 de las 3 opciones: M, A o T. Entonces de las 5 letras diferentes restantes, tomamos 3. Finalmente, permutamos las 5 letras resultantes y descontamos la repetición:

$$\frac{P_5}{P_2}\binom{5}{3}\binom{3}{1} = 1800$$

$\cdots$) Dos letras se repiten. *i.e.* tenemos 2 pares de letras.
Para que dos se repitan, tomamos 2 de las 3 opciones: M, A o T. Entonces de las 4 letras diferentes restantes, tomamos 1. Finalmente, permutamos las 5 letras resultantes y descontamos las repeticiones:

$$\frac{P_5}{P_2 P_2}\binom{4}{1}\binom{3}{2} = 360$$

$\cdot v$) Una letra se repite dos veces. *i.e.* tenemos 1 tercia de letras.
La A es la única que se puede repetir dos veces, entonces es la única opción. Entonces de las 5 letras diferentes restantes, tomamos 2. Finalmente, permutamos las 5 letras resultantes y descontamos las repeticiones:

$$\frac{P_5}{P_3}\binom{5}{2} = 200$$

v) Una letra se repite dos veces y otra una. *i.e.* tenemos full: 1 tercia y 1 par de letras.
La A es la única que se puede repetir dos veces, entonces esa es nuestra tercia. El par debe ser alguna de las letras restantes que se pueden repetir: M o T. Finalmente, permutamos las 5 letras resultantes y descontamos las repeticiones:

$$\frac{P_5}{P_2 P_3}\binom{2}{1} = 20$$

Considerando nuestras letras repetidas, esos son los únicos casos posibles.

Sumando las soluciones de los 5 casos, el total de palabras distintas de 5 letras es:

$$P_5\binom{6}{5} + \frac{P_5}{P_2}\binom{5}{3}\binom{3}{1} + \frac{P_5}{P_2 P_2}\binom{4}{1}\binom{3}{2} + \frac{P_5}{P_3}\binom{5}{2} + \frac{P_5}{P_2 P_3}\binom{2}{1} = 720 + 1800 + 360 + 200 + 20 = 3100$$