Bilan des débits :

$$\frac{dh_3}{dt} = \frac{1}{S_r} q_{P1} - \frac{1}{S_r}(q_{F30} + q_{L30})$$

Modélisation du débit :

$$q_{F30} = S_{F30}\sqrt{2gh_3}$$

$$q_{L30} = S_{L30}\sqrt{2gh_3}$$

Variables :

$$y = \tilde{h} = h - \overline{h}$$

$$u = \tilde{q_P} = q_P - \overline{q_P}$$

$$v = \tilde{S_F} = S_F - \overline{S_F}$$

Avec $\overline{h} = 28$ cm , $\overline{q_P} = 30$ ml et $\overline{S_F} = 0\ cm^2$

Point de fonctionnement nominal :

$$\frac{d\overline{h}}{dt} = \frac{1}{S_R}\overline{q_P} - \frac{1}{S_R}(S_L\sqrt{2g\overline{h}} + \overline{S_F}\sqrt{2g\overline{h}}) = 0$$

$$\Rightarrow S_L = \frac{\overline{q_P}}{\sqrt{2g\overline{h}}} = 12,8\ mm^2$$

Linéarisation du modèle :

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{S_R}u - \frac{1}{S_R}(S_L\sqrt{2g}\sqrt{y} + v\sqrt{2g}\sqrt{y}) = f(y,u,v)$$

$\Rightarrow A = \frac{\partial f}{\partial y}|_{(y=\overline{h},u=\overline{q_P},v=\overline{S_F}=0)} = -\frac{S_L}{S_R}\sqrt{2g}\frac{1}{2\sqrt{\overline{h}}} = -0,0124\ s^{-1}$

$\Rightarrow B = \frac{\partial f}{\partial u}|_{(y=\overline{h},u=\overline{q_P},v=\overline{S_F}=0)} = \frac{1}{S_R} = 0,023\ cm^{-2}$

$\Rightarrow D = \frac{\partial f}{\partial v}|_{(y=\overline{h},u=\overline{q_P},v=\overline{S_F}=0)} = -\frac{\sqrt{2g\overline{h}}}{S_R} = 0,54\ s^{-1}cm^{-1}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = Ay + Bu + Dv$$

Fonction de transfert :

$$G = (sI - A)^{-1}B = \frac{B}{s-A}$$

$$H = (sI - A)^{-1}D = \frac{D}{s-A}$$

Boucle avec régulateur PI : $C(s) = (1 + \frac{Ki}{s})Kp = \frac{1}{s}(s + Ki)Kp$

$$\Rightarrow Tr(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} = \frac{(s+Ki)KpB}{s(s-A) + (s+Ki)KpB}$$

$$\Rightarrow Tv(s) = \frac{H(s)}{1 + C(s)G(s)} = \frac{Ds}{s(s-A) + (s+Ki)KpB}$$

Réponse du système à une perturbation :

R(s) = 0 et V(s) = $\frac{V^*}{s}$, car échelon de perturbation

$$\Rightarrow Y(s) = Tv(s)V(s) = \frac{DV^*}{s(s-A)+(s+Ki)KpB}$$

<u>Cas Ki = 0</u> : pas de résorption de l'erreur statique car pas d'action intégrale

$\rightarrow$ transformée de Laplace inverse :

$$Y(s) = \frac{DV^*}{s(s-A)+KpB} \overset{!}{=} \frac{a}{s+\alpha} + \frac{b}{s} = \frac{as+bs+b\alpha}{(s+\alpha)s} \quad \text{avec } \alpha = -A+KpB$$

$$\Rightarrow b\alpha = DV^* \Rightarrow b = \frac{DV^*}{\alpha}$$

$$\Rightarrow a+b=0 \quad \Rightarrow a = -\frac{DV^*}{\alpha}$$

$\Rightarrow Y(s) = \frac{a}{s+\alpha} + \frac{b}{s} \quad \overset{tables}{\Longleftrightarrow} \quad \boxed{y(t) = (ae^{-\alpha t}+b)u(t)}$

<u>Cas Ki $\neq$ 0</u> :

$$Y(s) = \frac{DV^*}{s(s-A)+(s+Ki)KpB} \overset{!}{=} \frac{\alpha w}{(s-f)^2+w^2} = \frac{\alpha w}{s^2-2sf+f^2+w^2} \quad \text{avec } \alpha = \frac{DV^*}{w}$$

$$\Rightarrow -A+KpB = -2f \Rightarrow f = \frac{-A+KpB}{-2}$$

$$\Rightarrow f^2+w^2 = KiKpB \Rightarrow w = \sqrt{KiKpB-f^2}$$

$$\overset{tables}{\Longrightarrow} \quad \boxed{y(t) = \alpha \ \exp(ft)\sin(wt)u(t)}$$

Spécifications : pas de dépassement, temps de réponse 3 fois plus court qu'en boucle ouverte pour un échelon de consigne

$\rightarrow \boxed{Ki = -A} \Longrightarrow$ simplification pôle-zéro, afin d'obtenir une fonction du premier ordre :

$$Tr(s) = \frac{KpB}{s+KpB} = \frac{1}{1+\frac{s}{KpB}}$$

$\Rightarrow$ pas de dépassement et $\tau_{PI} = \frac{1}{KpB}$

or en boucle ouverte : $G = \frac{B}{s-A} = \frac{B/A}{1-\frac{s}{a}} \quad \Rightarrow \tau_{BO} = -\frac{1}{A}$

$\rightarrow$ on veut $\tau_{PI} = \frac{\tau_{BO}}{3} \Rightarrow \frac{1}{KpB} = \frac{-1}{3A} \Rightarrow \boxed{Kp = (\frac{-B}{3A})^{-1}}$

$\boxed{\Rightarrow Ki = 0,0124 \ , \ Kp = 1,617}$

$Y(s) = Tr(s)R(s) = \frac{BKpR^*}{(s+BKp)s} \quad \Longrightarrow Y(s) = \frac{a}{s+BKp} + \frac{b}{s} \quad$ avec $a = -R^*$, $b = R^*$

$\boxed{\Rightarrow y(t) = (ae^{-BKpt}+b)u(t)}$

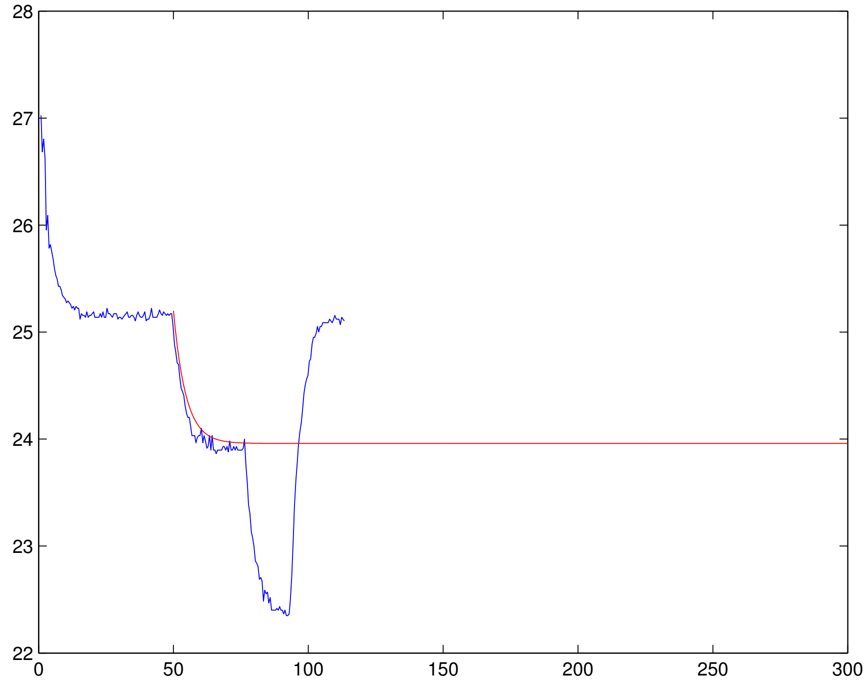

FIGURE 1 – Kp = 10, Ki = 0 et V = -0.5 (rouge) , experimental (bleu)

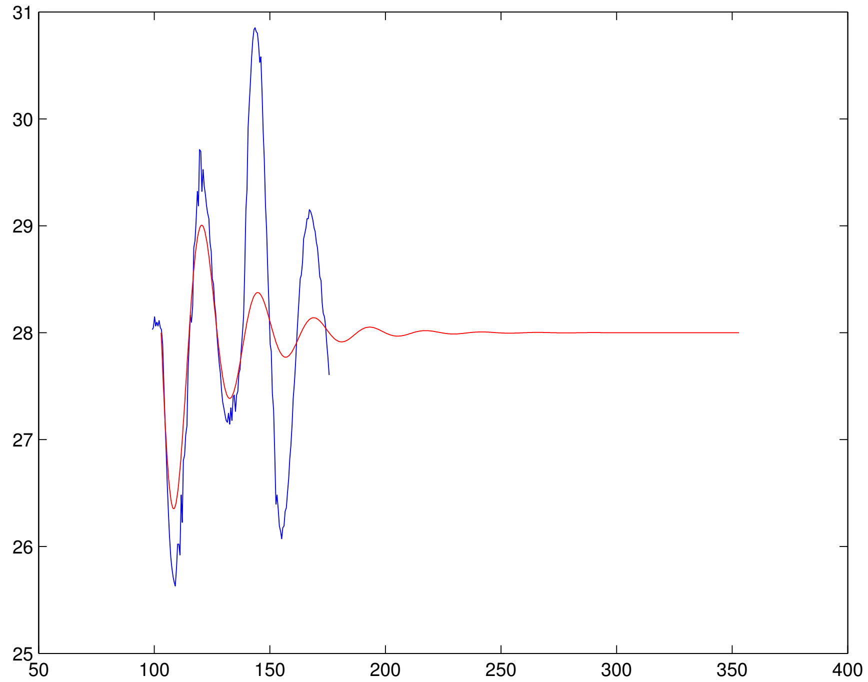

FIGURE 2 – Kp = 3, Ki = 1 et V = -1 (rouge) , experimental (bleu)

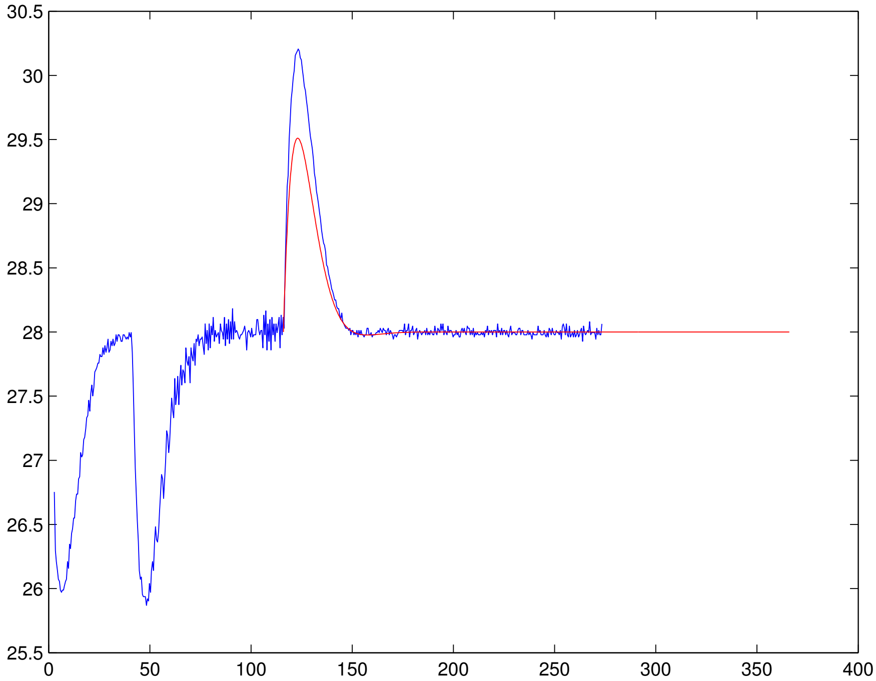

FIGURE 3 – Kp = 10, Ki = 0.1 et V = 1 (rouge) , experimental (bleu)

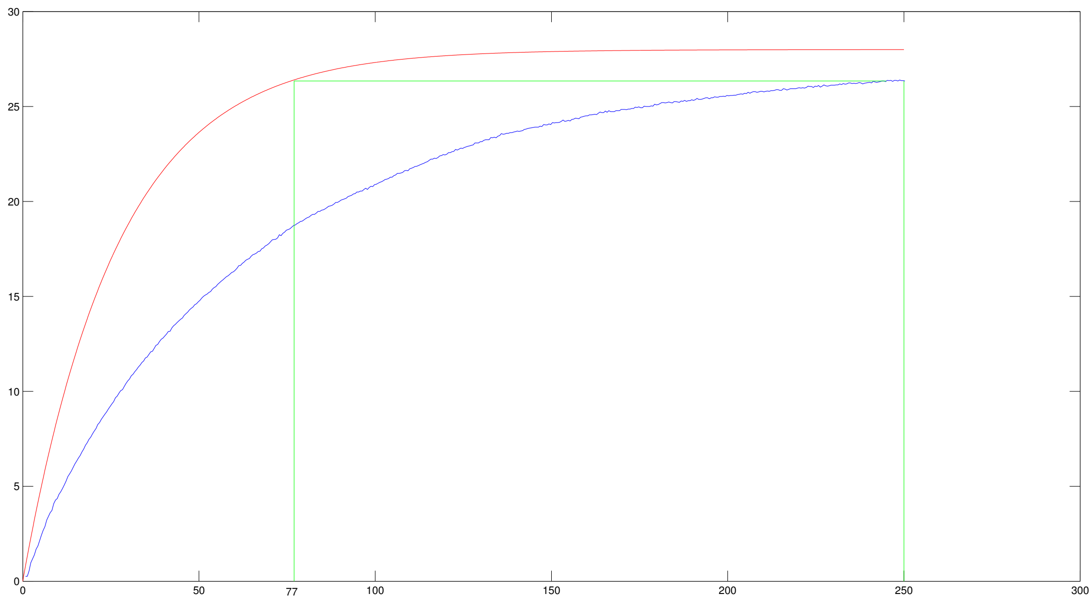

FIGURE 4 – Kp = 1.617, Ki = 0.0124 et R* = 28 (rouge) , boucle ouverte (bleu)