

1 Laboratoire 1 : Régulation du niveau d'eau dans un réservoir

1.1 Manipulation en boucle ouverte

1.1.1 Données

Section du cylindre contenant l'eau : $S_R = 43 \text{ [cm}^2\text{]}$

Valeur locale du champ de pesanteur terrestre : $g = 981 \text{ [cm} \cdot \text{s}^{-2}\text{]}$

1.1.2 Calcul des variables au point d'équilibre

Débit d'eau fournit par la pompe : $\bar{q}p1 = 30 \text{ [ml} \cdot \text{s}^{-1}\text{]}$

Hauteur de la colonne d'eau : $\bar{h} = 26.742 \text{ [cm]}$

Section de la vanne latérale : $S_{VL} = \frac{q_{VL}}{\sqrt{2gh}} = 0.131 \text{ [cm}^2\text{]}$

Section de la vanne frontale : $S_{VF} = S_{VL}$

1.1.3 Signification des colonnes des fichiers de données récupérés

t	/	Hauteur h	Commande q_{p1}
[s]	/	[cm]	[ml]

TABLE 1: Signification des colonnes des fichiers de données récupérés

1.1.4 Linéarisation du modèle

Perturbation $v = S_{VF}$

Commande $u = S_{VL}$

Sortie $y = h$

Point de normalisation $\bar{N} = \bar{h}, \bar{q}, S_{VL}^-, S_{VF}^-$

$$\frac{d(h - \bar{h})}{dt} = 0 + \frac{\partial f}{\partial h}|_{\bar{N}} \cdot (h - \bar{h}) + \frac{\partial f}{\partial q}|_{\bar{N}} \cdot (q - \bar{q}) + \frac{\partial f}{\partial S_{VL}}|_{\bar{N}} \cdot (S_{VL} - S_{VL}^-) + \frac{\partial f}{\partial S_{VF}}|_{\bar{N}} \cdot (S_{VF} - S_{VF}^-)$$

Avec la fonction f étant

$$f = \frac{1}{S_R} (q - (S_{VF} + S_{VL})\sqrt{2gh})$$

On remarque directement que la dérivée par rapport à la section de la vanne latérale est nulle étant donné qu'elle reste constante toute la durée de l'expérience.

On obtient alors les équations

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial h} = -\frac{1}{2} \frac{1}{S_R} \sqrt{2g(S_{VL}^- + S_{VF}^-)} \frac{1}{\sqrt{h}} \\ \frac{\partial f}{\partial q} = \frac{1}{S_R} \\ \frac{\partial f}{\partial S_{VF}} = -\frac{1}{S_R} \sqrt{2g\bar{h}} \end{cases}$$

On obtient alors

$$\frac{d(h - \bar{h})}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{1}{S_R} \sqrt{2g(S_{VL}^- + S_{VF}^-)} \frac{1}{\sqrt{\bar{h}}} (h - \bar{h}) + \frac{1}{S_R} (q - \bar{q}) - \frac{1}{S_R} \sqrt{2g\bar{h}} (S_{VF} - S_{VF}^-)$$

En effectuant le changement de variable suivant

$$\begin{cases} v = S_{VF} - S_{VF}^- \\ u = q - \bar{q} \\ y = h - \bar{h} \end{cases}$$

Il vient

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{1}{S_R} \sqrt{2g}(S_{VL}^- + S_{VF}^-) \frac{1}{\sqrt{h}} y + \frac{1}{S_R} u - \frac{1}{S_R} \sqrt{2g\bar{h}} v$$

On peut dès lors calculer les fonctions de transfert en boucle ouverte $G(s)$ et $H(s)$

$$\begin{cases} G(s) = \frac{y}{u}|_{v=0} = \frac{1}{sS_R + \frac{\sqrt{2g}}{2\sqrt{h}}(S_{VF}^- + S_{VL}^-)} \\ H(s) = \frac{y}{v}|_{u=0} = \frac{-\sqrt{2g\bar{h}}}{sS_R + \frac{\sqrt{2g}}{2\sqrt{h}}(S_{VF}^- + S_{VL}^-)} \end{cases}$$

1.2 Manipulation en boucle fermée (Régulateur PI)

On utilise un régulateur de la forme $C(s) = k_p(\frac{k_i}{s} + 1) = \frac{k_p(s + k_i)}{s}$ (on laisse tomber le prime par la suite pour plus de facilité de lecture). On peut voir le régulateur proposé réalisé à l'aide de *Simulink* à la figure 1. Remarque, on place la perturbation avant la fonction de transfert $G(s)$ dans le but de perturber avec un débit. Si on l'avait mis après, cela voudrait dire qu'on perturbe le système avec une grandeur en centimètres, ce qui paraît impossible à réaliser ici.

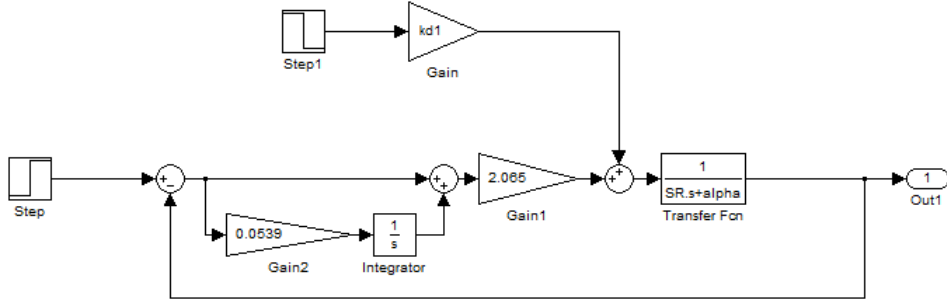


FIGURE 1: Régulateur PI proposé dans l'énoncé

On peut calculer la fonction de transfert en boucle fermée entre la consigne et la sortie quand la perturbation est nulle, à savoir $T_r(s)$

$$\begin{aligned} T_r(s) &= \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} \\ &= \frac{\frac{k_p(s+k_i)}{s} \frac{1}{sS_R + \frac{\sqrt{2g}}{2\sqrt{h}}(S_{VF}^- + S_{VL}^-)}}{1 + \frac{k_p(s+k_i)}{s} \frac{1}{sS_R + \frac{\sqrt{2g}}{2\sqrt{h}}(S_{VF}^- + S_{VL}^-)}} \\ &= \frac{k_p(s+k_i)}{s^2S_R + (\frac{\sqrt{2g}}{2\sqrt{h}}(S_{VF}^- + S_{VL}^-) + k_p)s + k_pk_i} \\ &= \frac{k_p(s+k_i)/S_R}{s^2 + (\frac{\sqrt{2g}}{2\sqrt{h}S_R}(S_{VF}^- + S_{VL}^-) + \frac{k_p}{S_R})s + \frac{k_pk_i}{S_R}} \end{aligned}$$

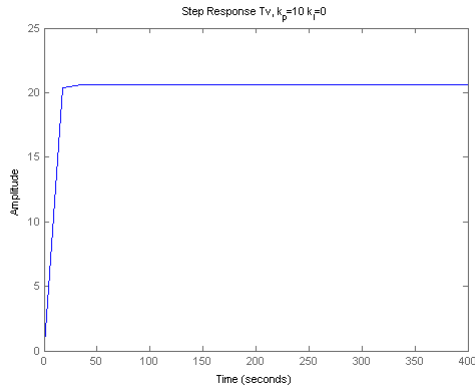
Tandis que la fonction de transfert $T_v(s)$ est représentée par le rapport entre la sortie et la perturbation quand la consigne est nulle

$$\begin{aligned}
T_v(s) &= \frac{H(s)}{1 + C(s)G(s)} \\
&= \frac{-\sqrt{2gh}}{sS_R + \frac{\sqrt{2g}}{2\sqrt{h}}(S_{VF}^- + S_{VL}^-) + \frac{k_p(s+k_i)}{s}} \\
&= \frac{-s\sqrt{2gh}/S_R}{s^2 + (\frac{\sqrt{2g}}{2\sqrt{h}S_R}(S_{VF}^- + S_{VL}^-) + \frac{k_p}{S_R})s + \frac{k_p k_i}{S_R}}
\end{aligned}$$

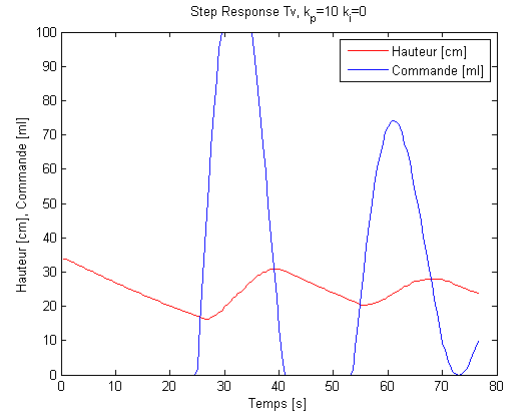
1.3 Réponse du système régulé à un échelon de perturbation

1.3.1 Théorie-Pratique

1. Pour le couple $\{k_p; k_i\} = \{10; 0\}$
 Calcul de la réponse temporelle théorique du système en boucle fermée, à un échelon de perturbation.
 Temps mis par le système régulé pour compenser la perturbation $t_r \rightarrow \infty$
 La valeur de l'instant pour laquelle l'amplitude de l'erreur due à la perturbation est à son maximum est t_{errmax} de 17.7s à l' ∞



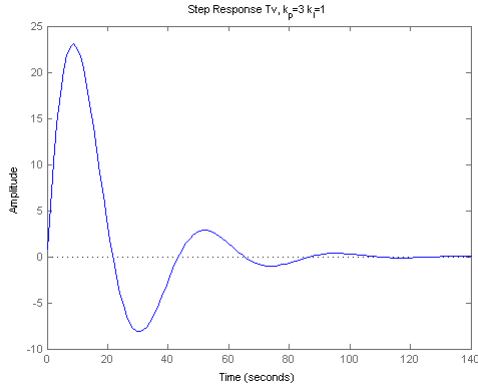
(a) Réponse à un échelon de perturbation théorique



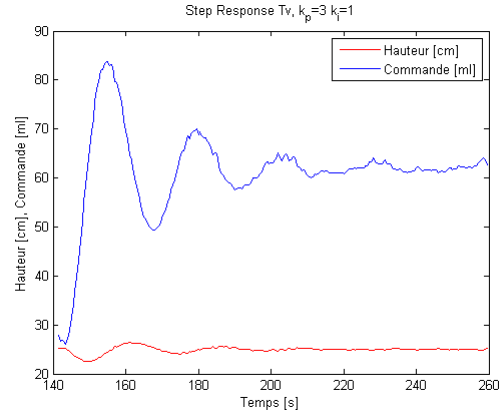
(b) Réponse à un échelon de perturbation expérimental

FIGURE 2: Réponse à un échelon de perturbation pour le couple $\{k_p; k_i\} = \{10; 0\}$

2. Pour le couple $\{k_p; k_i\} = \{3; 1\}$
 Calcul de la réponse temporelle théorique du système en boucle fermée, à un échelon de perturbation.
 Temps mis par le système régulé pour compenser la perturbation $t_r = 140s$
 La valeur de l'instant pour laquelle l'amplitude de l'erreur due à la perturbation est à son maximum est $t_{errmax} = 8.88s$



(a) Réponse à un échelon de perturbation théorique



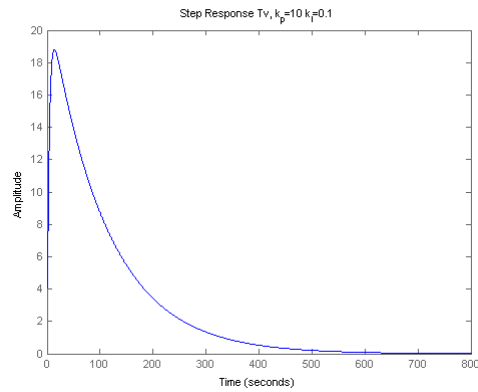
(b) Réponse à un échelon de perturbation expérimental

FIGURE 3: Réponse à un échelon de perturbation pour le couple $\{k_p; k_i\} = \{3; 1\}$

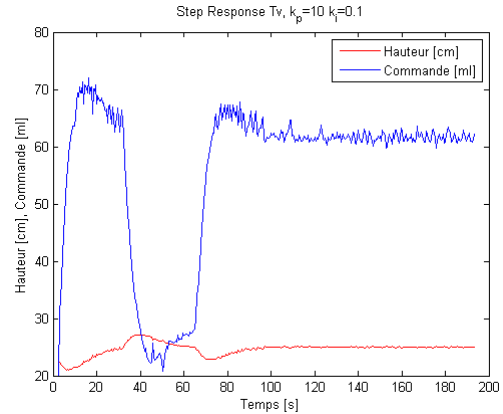
3. Pour le couple $\{k_p; k_i\} = \{10; 0.1\}$

Calcul de la réponse temporelle théorique du système en boucle fermée, à un échelon de perturbation Temps mis par le système régulé pour compenser la perturbation $t_r = 550s$

La valeur de l'instant pour laquelle l'amplitude de l'erreur due à la perturbation est à son maximum est $t_{err_{max}} = 11.7s$



(a) Réponse à un échelon de perturbation théorique



(b) Réponse à un échelon de perturbation expérimental

FIGURE 4: Réponse à un échelon de perturbation pour le couple $\{k_p; k_i\} = \{10; 0.1\}$

1.4 Réponse du système régulé à un échelon de consigne - Première manière de procéder (moins bonne)

1.4.1 Théorie

Critères qui permettent de déterminer les paramètres k_p et k_i

1. Dépassement nul $\Rightarrow \zeta = 1$
2. Temps de réponse 3 fois plus rapide que le processus non régulé $\Rightarrow 250/3 = 83.3s$

On calcule le temps de réponse naturel du système dans le but de faire une annulation pôle-zéro entre le processus et le régulateur. Le temps de réponse naturel $t_{rep_{naturel}}$

$$G(s) = \frac{1}{43s + 1.1218} = \frac{1/43}{s + 0.026089}$$

On a donc un pôle en -0.026089

Le régulateur est de la forme

$$C(s) = \frac{k_p s + k_i}{s} = \frac{s + \frac{k_i}{k_p}}{\frac{s}{k_p}}$$

On peut faire l'annulation pôle-zéro, on sait donc que $-\frac{k_i}{k_p} = -0.026089$

On calcule désormais le nouveau $T_r(s)$

$$T_r(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} = \frac{\frac{s + \frac{k_i}{k_p}}{\frac{s}{k_p}} \frac{1/43}{s + 0.026089}}{1 + \frac{s + \frac{k_i}{k_p}}{\frac{s}{k_p}} \frac{1/43}{s + 0.026089}} = \frac{1}{\frac{43}{k_p} s + 1}$$

On procède maintenant à l'identification avec le polynôme de Graham-Lathrop d'ordre 1, on a

$$\frac{\frac{k_p}{43}}{s + \frac{k_p}{43}} = \frac{\omega_n}{s + \omega_n}$$

On en retire $\omega_n = \frac{4}{\zeta t_{rep}} = \frac{k_p}{43} = 0.04802$ et on obtient finalement les paramètres

$$\begin{cases} k_p = 43\omega_n = 43 \cdot 0.04802 = 2.065 \\ k_i = k_p \cdot 0.026089 = 0.0539 \end{cases}$$

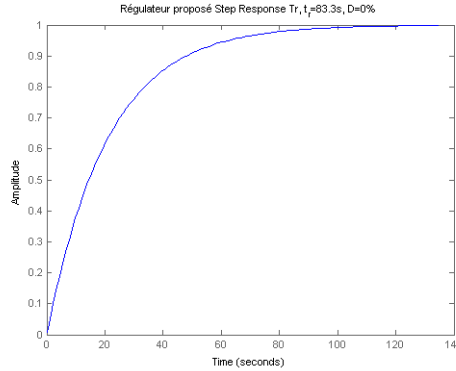


FIGURE 5: Réponse théorique à un échelon de consigne pour le premier régulateur

1.4.2 Pratique

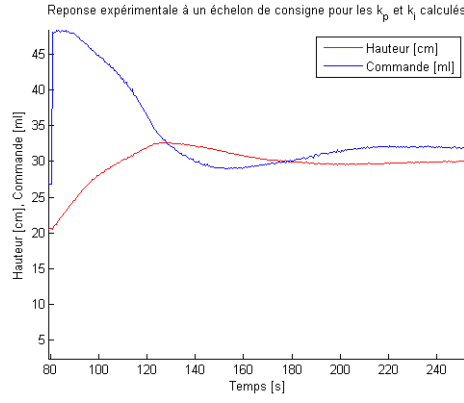


FIGURE 6: Réponse expérimentale à un échelon de consigne pour le premier régulateur

1.4.3 Réponse du système régulé à un échelon de consigne - Calculs de k_p et k_i - Seconde manière de procéder (meilleure)

Comment le dénominateur de notre fonction T_r est du second degré et que le numérateur de cette fonction comporte un zéro stable, nous pouvons utiliser la méthode de résolution suivante :

$$T_r = T_{ref} = \frac{\omega_n^2}{\alpha\zeta\omega_n} \frac{s + \alpha\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

On procède à l'identification avec la fonction de transfert T_r que nous reprenons ici :

$$T_r = \frac{k_p(s + k_i)/S_R}{s^2 + (\frac{\sqrt{2g}}{2\sqrt{h}S_R}(S_{VF}^- + S_{VL}^-) + \frac{k_p}{S_R})s + \frac{k_p k_i}{S_R}}$$

On obtient l'identification suivante

$$\begin{cases} \frac{k_p k_i}{S_R} = \omega_n^2 \\ (\frac{\sqrt{2g}}{2\sqrt{h}S_R}(S_{VF}^- + S_{VL}^-) + \frac{k_p}{S_R}) = 2\zeta\omega_n \end{cases} \quad (1)$$

Comme dit précédemment, on veut un temps de réponse 3 fois plus rapide et donc un $t_r = 83.3s$ et un dépassement D nul. De ce fait, on sait que le temps de réponse peut s'écrire

$$t_r = \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

Comme il n'y a pas de dépassement, on peut approximer ζ à 1 et on peut donc calculer ω_n

$$\omega_n = \frac{4}{t_r} = \frac{4}{83.3} = 0.04802$$

Par la deuxième équation du système 1, on peut calculer k_p

$$k_p = S_R(2\omega_n - \frac{\sqrt{2g}}{2\sqrt{h}S_R}(S_{VF}^- + S_{VL}^-)) = 3.0076$$

Grâce à ce dernier, nous pouvons calculer k_i grâce à la première équation du système 1.

$$k_i = \frac{\omega_n^2 S_R}{k_p} = 0.032968$$

On obtient donc finalement les paramètres

$$\begin{cases} k_p = 3 \\ k_i = 0.033 \end{cases}$$

1.5 Quelles sont les non-linéarités présentes dans le système régulé ? (+brèves descriptions et explications)

1. Le système est non linéaire à la base car il y a la racine de h (Torricelli).
2. La saturation de la pompe. En effet, elle ne peut fonctionner que dans la gamme $[0;100\text{ml}]$ de débit.
3. Le tuyau est une partie non linéaire du système. En effet, on a un retard entre la commande et la mesure dû au fait que l'eau n'est pas incompressible. Cette non linéarité reste cependant négligeable.
4. La vanne car la section efficace de la vanne se réduit quand le débit augmente.
5. Les capteurs sont des éléments non linéaires.
6. Il faut imposer des échelons qui restent proches du point de fonctionnement à l'équilibre obtenu avec la linéarisation, sinon les équations utilisées ne sont plus valables.

2 Laboratoire 2 : Moteur électrique à courant continu

2.1 Première expérience : Identification du modèle

En boucle ouverte, on prend les mesures d'une réponse à un échelon de consigne. On entre ces valeurs dans matlab afin de déterminer le gain K et le temps de réponse τ de la fonction de transfert du processus : $G(s) = \frac{K}{1+s\tau}$.

On obtient le graphe illustré à la figure 7.

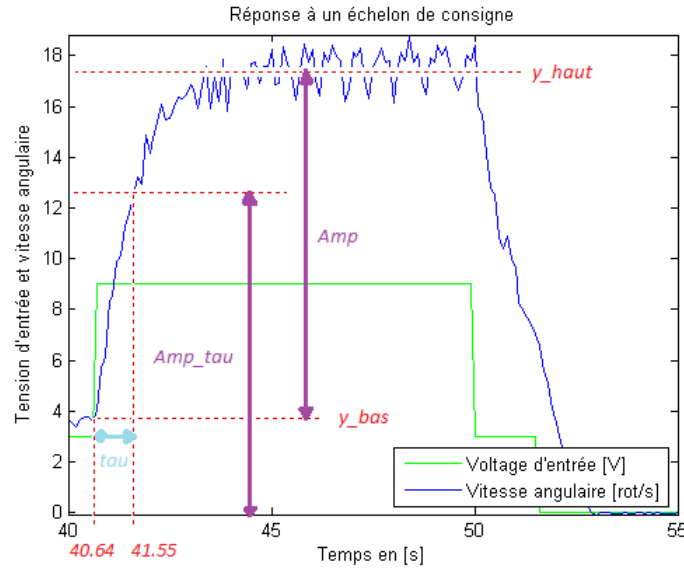


FIGURE 7: Détermination des paramètres du processus, K et τ

A partir de cette figure, on va déterminer les paramètres K et τ de la façon suivante :

$$y_{haut} = 17.431$$

$$y_{bas} = 3.612$$

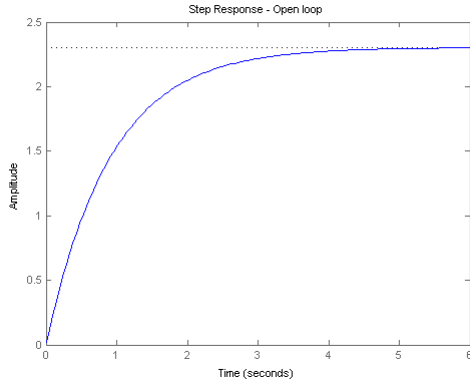
$$Amp = y_{haut} - y_{bas} = 13.819$$

$$Amp_{tau} = 0.63Amp + y_{bas} = 12.318$$

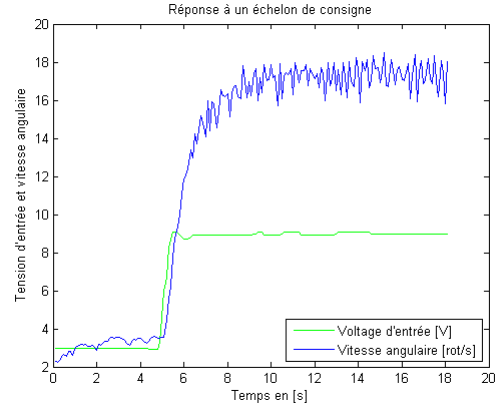
$$\Rightarrow K = \frac{Amp}{(9 - 3)} = 2.3032 \text{ [[Unité de sortie du moteur/Unité d'entrée du moteur]]} = 2.3032 \text{ [rot/s]/[V]}$$

$$\Rightarrow \tau = 41.55 - 40.64 = 0.91s$$

Représentation de la réponse indicielle en boucle ouverte



(a) Représentation théorique de la réponse à un échelon unité en boucle ouverte



(b) Représentation expérimentale de la réponse à un échelon unité en boucle ouverte

On remarque bien que comme c'est un premier degré, on n'a pas de point d'inflexion (qui indiquerait plusieurs constantes de temps) et pas de dépassement.

2.2 Analogie blocs et système réel

Perturbation v [rot/s] ou $[\circ]$

Commande u [V] ou [rot/s] ou $[\circ]$ (dépend si on est en boucle ouverte ou si on veut réguler la vitesse ou la position)

Sortie y [rot/s] ou $[\circ]$ (régulation de vitesse ou de position)

Signification des colonnes des fichiers de données récupérés

t	Rs	Rp	Dirty-cycle	Y3	Yp
[s]	[rot/s]/[V]	$[\circ]$	[1/s]	[rot/s]	$[\circ]$

TABLE 2: Signification des colonnes des fichiers de données récupérés

2.3 Deuxième expérience : régulation de vitesse avec un PI

Voici les critères pour obtenir les paramètres k_0 et k_1

1. Tout d'abord, il faut un temps de réponse légèrement inférieur au système en boucle ouverte $t_{rBO} = 4\tau = 3.64s$, prenons donc par exemple $t_r = 3s$
2. Il faut un dépassement de maximum 2%

2.3.1 Théorie

La figure 8 illustre le système de régulation PI en boucle fermée.

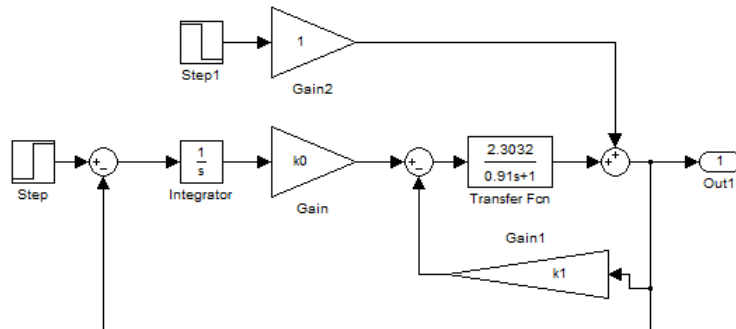


FIGURE 8: Schéma boucle fermée, régulation PI

Ces critères posés, il faut maintenant calculer la fonction de transfert entre la sortie et la consigne à perturbation nulle, $T_r(s)$, pour déterminer les paramètres k_0 et k_1 . Pour rappel : $T_r(s) = \frac{y}{r} \Big|_{v=0} = \frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)}$.

Dans ce cas-ci on va partir du schéma figure 8

$$\begin{aligned}
((r - y)\frac{k_0}{s} - k_1 y)G(s) &= y \\
T_r(s) &= \frac{k_0 G(s)}{s + s k_1 G(s) + k_0 G(s)} \\
&= \frac{k_0 K}{(1 + s\tau)s + s k_0 K + k_0 K} \\
&= \frac{k_0 K}{s^2 \tau + (1 + k_1 K)s + k_0 K} \\
&= \frac{(k_0 K)/\tau}{s^2 + \frac{1+k_1 K}{\tau}s + \frac{k_0 K}{\tau}}
\end{aligned}$$

A partir du dépassement on peut calculer le ζ correspondant

$$\begin{aligned}
D &= 100 \exp\left(\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \\
\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} &= \frac{-\ln(2/100)}{\pi} \\
\zeta &= +0.7797
\end{aligned}$$

On peut désormais calculer ω_n

$$\begin{aligned}
tr &= \frac{4}{\zeta\omega_n} \\
\omega_n &= 1.71
\end{aligned}$$

Et maintenant on peut procéder à l'identification de la fonction de transfert

$$\frac{(k_0 K)/\tau}{s^2 + \frac{1+k_1 K}{\tau}s + \frac{k_0 K}{\tau}} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Ce qui nous permet d'enfin déterminer les paramètres

$$\begin{aligned}
\omega_n^2 &= \frac{k_0 K}{\tau} & \Rightarrow & & k_0 &= \frac{1.71^2 \tau}{K} = 1.1553 \\
2\zeta\omega_n &= \frac{1 + k_1 K}{\tau} & \Rightarrow & & k_1 &= \frac{2\tau\zeta\omega_n - 1}{K} = 0.62
\end{aligned}$$

Les paramètres sont donc

$$\begin{cases} k_0 = 1.1553 \\ k_1 = 0.62 \end{cases}$$

La réponse du système avec ces paramètres précis est illustrée figure 9.

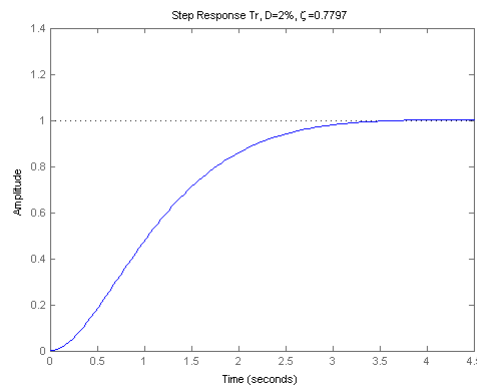


FIGURE 9: Réponse à un échelon de consigne, régulation PI.

2.4 Troisième expérience : régulation de position par retour d'état + action intégrale (première méthode, moins bonne)

Voici les critères pour obtenir les paramètres k_0 , k_1 et k_2

1. Tout d'abord, il faut un temps de réponse de 5 secondes $\Rightarrow t_r = 5s$
2. Il faut un dépassement d' $\simeq 5\%$

2.4.1 Théorie

Le schéma proposé est représenté à la figure 10.

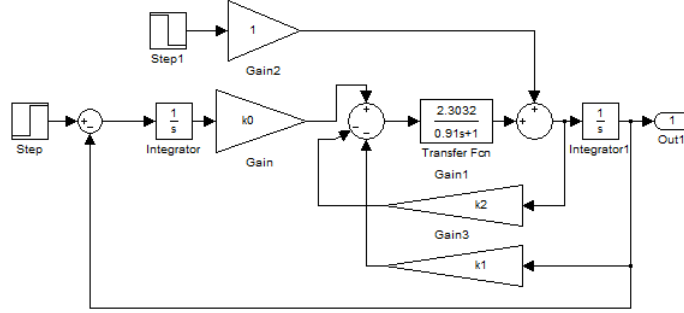


FIGURE 10: Schéma du régulateur avec retour d'état + action intégrale

On peut commencer par calculer la fonction de transfert entre la sortie et la consigne quand la perturbation est nulle à partir du schéma figure 10

$$\begin{aligned}
 ((r - y) \frac{k_0}{s} - k_1 y - k_2 y s) \frac{G(s)}{s} &= y \\
 T_r(s) &= \frac{k_0 G(s)}{s^2 + k_0 G(s) + s k_1 G(s) + s^2 k_2 G(s)} \\
 &= \frac{k_0 K}{s^2(1 + s\tau + k_2 K) + k_1 K s + k_0 K} \\
 &= \frac{k_0 K / \tau}{s^3 + s^2(\frac{1+k_2 K}{\tau}) + s \frac{k_1 K}{\tau} + \frac{k_0 K}{\tau}}
 \end{aligned}$$

Il faut, dans ce cas-ci comme nous avons un dénominateur de la fonction de transfert de degré 3, utiliser une méthode qui consiste à imposer un pôle lent au système. La fonction de transfert à laquelle on doit s'identifier est la suivante

$$T_r = \frac{10\omega_n}{s + 10\omega_n} \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{10\omega_n^3}{s^3 + (10\omega_n + 2\zeta\omega_n)s^2 + (\omega_n^2 + 20\zeta\omega_n^2)s + 10\omega_n^3}$$

$-10\omega_n$ est donc le pôle le plus lent du système, de ce fait, la constante de temps correspondante est la plus grande par rapport aux autres pôles et il ne modifie donc pas le temps de réponse du système (à l'inverse, si on n'enlève pas le pôle le plus lent, on pourra observer que la réponse sera beaucoup plus lente). Dans ce cas précis, on sait avec $D = 5\%$ que $\zeta = 0.69$, et comme $t_r = 5s$, on peut calculer ω_n

$$\omega_n = \frac{4}{\zeta t_r} = \frac{4}{0.69 \cdot 5} = 1.15924$$

On sait également que $K = 2.3032[tr/s/V]$ et $\tau = 0.91s$

On peut maintenant procéder à l'identification des deux fonctions de transfert et on trouve

$$\begin{cases} 10\omega_n^3 = \frac{k_0 K}{\tau} & \Rightarrow k_0 = 6.155 \\ \omega_n^2 + 20\zeta\omega_n^2 = \frac{k_1 K}{\tau} & \Rightarrow k_1 = 7.858 \\ 10\omega_n + 2\zeta\omega_n = \frac{1 + k_2 K}{\tau} & \Rightarrow k_2 = 4.778 \end{cases}$$

Les paramètres sont donc

$$\begin{cases} k_0 = 6.155 \\ k_1 = 7.858 \\ k_2 = 4.778 \end{cases}$$

Réponse indicielle

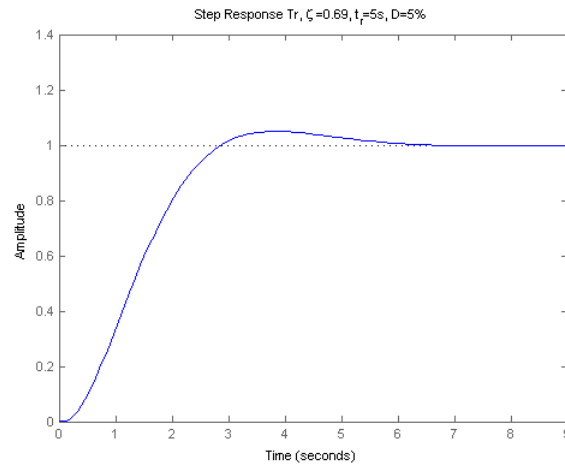


FIGURE 11: Réponse indicielle du système de régulation avec retour d'état et action intégrale

2.5 Lister et expliquer les non-linéarités

1. Les principales non-linéarités viennent de la mécanique, les transitoires sont beaucoup plus importants que les transitoires électriques.
2. Saturation des éléments magnétiques du moteur (noyau magnétique) en $\pm 12V$.
3. Les frottements statiques et dynamiques.
4. Les transitions entre les deux types de frottement, quand le moteur démarre par exemple.

3 Laboratoire 3 : Régulation de la tension aux bornes d'un circuit électrique à l'aide d'un régulateur industriel

3.1 Linéarisation

3.1.1 Détermination des paramètres

Changement de variable

Commande u : $i\%$

Perturbation v : R_p via le Switch S_{w_p}

Etat x_1 : \bar{V}_1

Etat x_2 : \bar{V}_2

Sortie y : $V_{A\%}$ ou $B\%$ via le Switch S_{w_m}

Paramètres connus

$$C_1 = C_2 = 2.2 \text{ [mF]}$$

$$R_1 = 0.47 \text{ [k}\Omega\text{]}$$

$$R'_1 = 0.68 \text{ [k}\Omega\text{]}$$

$$R_{12} = 4.7 \text{ [k}\Omega\text{]}$$

Equations d'états

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + bu + dv \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 - a_{22}x_2 \\ y = 10x_2 \text{ ou } -10x_1 + 20x_2 \end{cases} \quad (2)$$

Point d'équilibre

Rappelons qu'à l'équilibre, les dérivées par rapport au temps et la perturbation sont nulles.

$$\begin{cases} \bar{i}_{\%} = 50\% \Rightarrow \bar{i}_{mA} = \frac{20 \cdot 50}{100} = 10 \text{ [mA]} \\ \bar{R}_p = R_1 = 0.47 \text{ [k}\Omega\text{]} \\ a_{11} = 1.063829 \text{ [k}\Omega\text{mF]}^{-1} \\ a_{12} = a_{21} = a_{22} = 0.096711799 \text{ [k}\Omega\text{mF]}^{-1} \\ b = 0.09090909 \text{ [mF]}^{-1} \\ d = \frac{\bar{V}_1}{C_1 \bar{R}_p^2} = 9.67117988 \text{ [}\frac{V}{M\Omega\text{mF}}\text{]} \end{cases}$$

Les tensions à l'équilibre se calculent comme suit

$$\begin{cases} \bar{V}_1 = \frac{a_{22}\bar{V}_2}{a_{21}} = \bar{V}_2 \\ \bar{V}_1 = \frac{a_{12}\bar{V}_2 + bu}{a_{11}} \Rightarrow a_{12}\bar{V}_2 - \frac{a_{22}a_{11}}{a_{21}}\bar{V}_2 = -bu \Rightarrow \bar{V}_2 = 4.7V \end{cases}$$

Signification des colonnes des fichiers de données récupérés, où SP est la valeur de la consigne, MV est l'état de la commande et PV est l'état de la mesure

t	SP	MV	PV
[s]	[%]	[%]	[%]

TABLE 3: Signification des colonnes des fichiers de données récupérés

3.2 Mesure des temps d'établissement

Comme le processus est naturellement stable, il est utile de connaître une de ses caractéristiques importantes, son temps de réponse (Remarque : un système à "minimum de phase" → sans zéro, un système à "non minimum de phase" → avec un zéro instable)

3.3 Compensation d'un échelon de perturbation

3.3.1 Système à "minimum de phase"

Il faut tout d'abord effectuer des calculs préliminaires dans le but de calculer le temps de réponse naturel du processus. Pour ce faire, on va calculer les fonctions de transferts $G(s)$ et $H(s)$ du schéma 12.

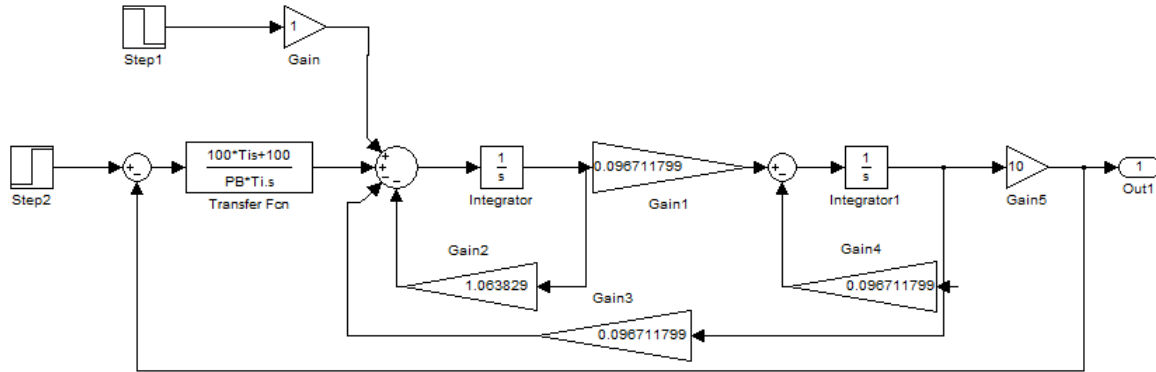


FIGURE 12: Schéma en boucle fermée

On part du système 2 et on en déduit

$$\begin{cases} x_1 = \frac{a_{12}y/10 + bu}{s + a_{11}} \\ x_2 = \frac{y}{10} \end{cases}$$

On isole $\frac{y}{u}|_{v=0}$ et on en déduit la fonction de transfert $G(s)$

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{y}{u}|_{v=0} \\ &= \frac{b/(s + a_{11})}{\frac{s+a_{22}}{10a_{21}} - \frac{a_{12}}{10(s+a_{11})}} \\ &= \frac{10ba_{21}}{(s + a_{22})(s + a_{11}) - a_{12}a_{21}} \\ &= \frac{10ba_{21}}{s^2 + s(a_{22} + a_{11}) + a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}} \end{aligned}$$

Un raisonnement similaire est effectué pour calculer la fonction de transfert $H(s)$ en mettant u à zéro, on obtient

$$H(s) = \frac{10da_{21}}{s^2 + s(a_{22} + a_{11}) + a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}$$

Si on ajoute au schéma figure 2 une consigne, un retour d'état unitaire et une commande, on peut calculer

les fonctions de transfert en boucle fermée $T_r(s)$ et $T_v(s)$

$$\begin{aligned}
T_r(s) &= \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} \\
&= \frac{\frac{100}{PB}(1 + \frac{1}{sT_i})10ba_{21}}{s^2 + s(a_{22} + a_{11}) + a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21} + \frac{100}{PB}(1 + \frac{1}{sT_i})10ba_{21}} \\
&= \frac{1000ba_{21}(sT_i + 1)}{s^3PBT_i + s^2(a_{22} + a_{11})PBT_i + s((a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21})PB + 1000ba_{21})T_i + 1000ba_{21}} \\
T_v(s) &= \frac{H(s)}{1 + C(s)G(s)} \\
&= \frac{10da_{21}}{s^2 + s(a_{22} + a_{11}) + a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21} + \frac{100}{PB}(\frac{sT_i + 1}{sT_i})10ba_{21}} \\
&= \frac{PB10da_{21}T_i s}{s^3PBT_i + s^2(a_{22} + a_{11})PBT_i + s((a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21})PB + 1000ba_{21})T_i + 1000ba_{21}}
\end{aligned}$$

(On remarque bien que $T_r(0) = 1$ et $T_v(0) = 0$ ce qui signifie que les erreurs statiques et perturbations constantes sont nulles)

On peut désormais calculer le temps de réponse naturel du processus à partir de la fonction de transfert $G(s)$.

on procède à l'identification de son dénominateur

$$s^2 + s(a_{22} + a_{11}) + a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21} = s^2 + 1.1605s + 0.0935 = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$$

On en déduit

$$\begin{cases} \omega_n = 0.3058 \\ \zeta = \frac{1.1605}{2\omega_n} = 1.897 \Rightarrow D = 0 \\ t_{rep_{naturel}} = \frac{4}{\omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})} = 45.903s \end{cases}$$

Afin de déterminer les paramètres PB et T_i du système en boucle fermée, étant donné que le dénominateur de $T_r(s)$ est de degré 3, il peut être judicieux d'effectuer une annulation pôle-zéro avec le pôle le plus lent, mais stable, de la fonction de transfert $G(s)$.

Calculons dès lors les pôles de cette dernière

$$\begin{cases} s_{1,2} = \frac{-1.160547 \pm \sqrt{1.160547^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0.0935}}{2} \\ s_1 = -0.0939 \\ s_2 = -1.0666 \end{cases}$$

Le pôle le plus lent, ou pôle dominant (celui qui domine la réponse indicielle) est celui qui est le plus près de l'axe imaginaire \Im , soit ici le plus proche de 0 étant donné qu'ils sont tous réels. On remarque donc que c'est s_1 .

L'un des pôles de $T_v(s)$ correspond donc à ce pôle s_1 .

$$\begin{aligned}
d_{T_v(s)} &= s^3PBT_i + s^2(a_{22} + a_{11})PBT_i + s((a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21})PB + 1000ba_{21})T_i + 1000ba_{21} \\
&= (s + 0.0939)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)
\end{aligned}$$

Comme on n'a pas de dépassement on peut fixer ζ à 1

$$d_{T_v(s)} = (s + 0.0939)(s^2 + 2\omega_n s + \omega_n^2) = (s + 0.0939)(s + \omega_n)^2$$

On développe ce dénominateur dans le but de procéder à l'identification, on trouve

$$s^3 + s^2 1.160547 + s(0.0935 + \frac{8.792}{PB}) + \frac{8.792}{PBT_i} = s^3 + s^2(0.0939 + 2\omega_n) + s(\omega_n^2 + 2\omega_n 0.0939) + 0.0393\omega_n^2$$

On trouve les paramètres

$$\begin{cases} 1.160547 = 0.0939 + 2\omega_n & \Rightarrow \quad \omega_n = 0.5333 \\ 0.0935 + \frac{8.792}{PB} = \omega_n^2 + 2\omega_n 0.0939 & \Rightarrow \quad PB = 30.2086[-] \\ \frac{8.792}{PBT_i} = 0.0939\omega_n^2 & \Rightarrow \quad T_i = 10.8965[s] \end{cases}$$

Les paramètres sont donc

$$\begin{cases} PB = 30.2086[-] \\ T_i = 10.8965[s] \end{cases}$$

3.3.2 Système à "non minimum de phase" stable

En prenant maintenant $y = -10x_1 + 20x_2$ dans les équations d'états, on procède de la même façon pour calculer les fonctions de transfert $G(s)$, $H(s)$, $T_r(s)$ et $T_v(s)$, on trouve

$$\begin{cases} G(s) = \frac{10b(2a_{21} - (s + a_{22}))}{s^2 + s(a_{22} + a_{11}) + a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}} \\ H(s) = \frac{10d(2a_{21} - (s + a_{22}))}{s^2 + s(a_{22} + a_{11}) + a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}} \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned} T_r(s) &= \frac{1000b(-s^2T_i + s(2T_ia_{21} - T_ia_{22} - 11) + 2a_{21} - a_{22})}{s^3PBT_i + s^2(PBT_i(a_{11} + a_{22}) - 1000T_ib) + s(PBT_i(a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}) + 1000b(2T_ia_{21} - T_ia_{22} - 1)) + 1000b(2a_{21} - a_{22})} \\ T_v(s) &= \frac{s(-10ds + 20da_{21} - 10da_{22})}{s^3 + s^2(a_{11} + a_{22} - \frac{1000b}{PB}) + s(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} + \frac{2000b}{PB}a_{21} - \frac{1000b}{PB}a_{22} - \frac{1000b}{PBT_i}) + \frac{1000b}{PBT_i}(2a_{21} - a_{22})} \end{aligned}$$

Maintenant, il faut utiliser le zéro du régulateur pour supprimer un de deux pôles du processus $G(s)$. On choisit le pôle le plus lent

$$C(s)G(s) = \frac{100}{PB} \frac{(sT_i + 1)}{sT_i} \frac{10b(-s + 2a_{21} - a_{22})}{(s - s_1)(s - s_2)}$$

Pour rappel, le pôle le plus lent était s_1 . Le zéro du régulateur est donc

$$\frac{1}{T_i} = 0.0939 \quad \Rightarrow \quad T_i = 10.64816[s]$$

On peut trouver les nouvelles fonctions de transfert $T_r(s)$ et $T_v(s)$

$$\begin{aligned} T_r(s) &= \frac{1000b(-s + 2a_{21} - a_{22})}{sPB(s - s_2) + 1000b(-s + 2a_{21} - a_{22})} \\ T_v(s) &= \frac{10d(-s + 2a_{21} - a_{22})}{(s - s_1)(s - s_2) + \frac{100(s - s_1)}{sPB}10b(-s + 2a_{21} - a_{22})} \end{aligned}$$

En multipliant par s le dénominateur de $T_v(s)$, on peut étudier la stabilité du système et imposer des conditions sur PB

$$\begin{aligned} sd(s) &= (s - s_1)[s^2 - s_2 + \frac{1000b}{PB}(-s + 2a_{21} - a_{22})] \\ &= (s - s_1)[s^2 + s(-s_2 - \frac{1000b}{PB}) + \frac{1000b}{PB}(2a_{21} - a_{22})] \end{aligned}$$

Pour être stable, il faut que tous les pôles de ce polynôme soient à partie réelle négative et que tous les coefficients de toutes les puissances du polynôme soient supérieurs à zéro (condition nécessaire et suffisante pour un polynôme de degré 2).

On remarque que tout est respecté, et on en retire la condition sur PB

$$PB > 85.23$$

Les racines doivent également être purement réelles, il suffit donc de calculer le discriminant ρ et regarder qu'il soit bien ≥ 0 . On trouve les racines

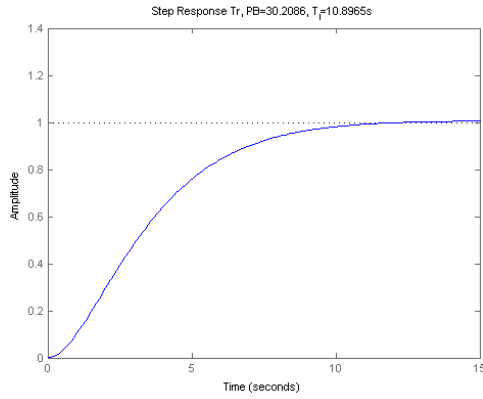
$$\begin{cases} r_{1,2} = \frac{229.103 \pm 121.9765}{2} \\ r_1 = 53.5635 \\ r_2 = 175.54 \end{cases}$$

Comme c'est une inéquation d'un polynôme d'ordre 2, il faut étudier les signes avec un tableau de signe. On en retire les conditions

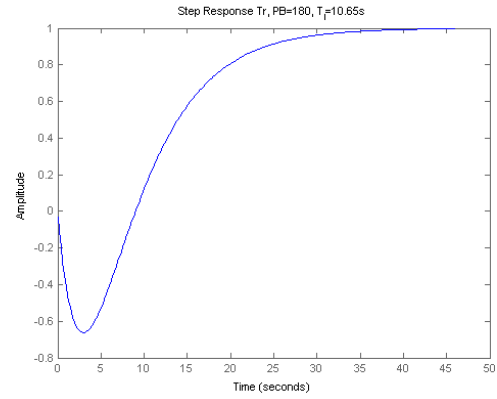
$$\begin{cases} PB < 53.56 \\ PB \geq 175.54 \end{cases}$$

Mais on a toujours la condition précédente qui dit $PB > 85.23$, c'est pourquoi on peut choisir le couple de paramètre suivant

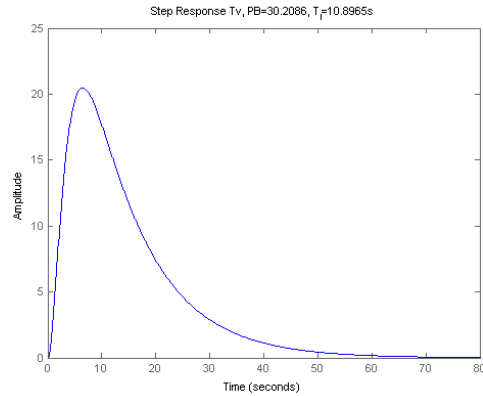
$$\begin{cases} T_i = 10.65[s] \\ PB = 180[-] \end{cases}$$



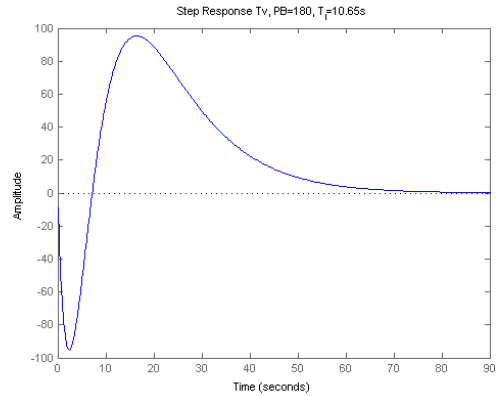
(a) Minimum de phase - Réponse à un échelon de consigne pour $PB = 30.2086$ et $T_i = 10.8965$



(b) Non minimum de phase stable - Réponse à un échelon de consigne pour $PB = 180$ et $T_i = 10.65$



(c) Minimum de phase Réponse à un échelon de perturbation pour $PB = 30.2086$ et $T_i = 10.8965$



(d) Non minimum de phase stable - Réponse à un échelon de perturbation pour $PB = 180$ et $T_i = 10.65$

3.4 Système à "non minimum de phase" instable

Dans le cas du non-minimum de phase instable et donc avec un zéro instable on obtient la figure 13

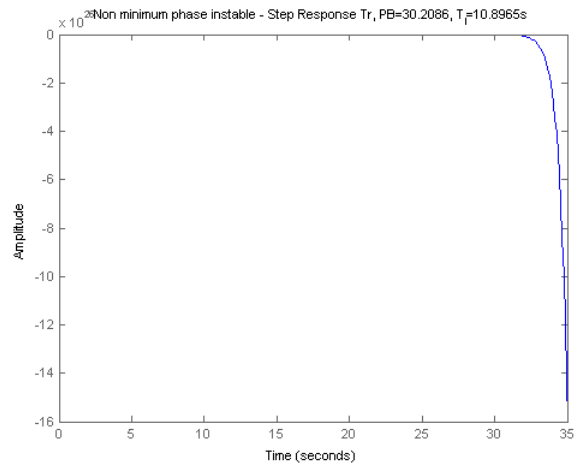


FIGURE 13: Non-minimum de phase instable - Réponse à un échelon de consigne pour $PB = 180$ [-] et $T_i = 10.65$ [s]