INMA 1510
Laboratoire 3 - Régulateur PID industriel

Antoine Quentin
Buggenhout Nicolas
Heck Adrien

14 mai 2013

1 Présentation du système linéarisé

L'énoncé du laboratoire nous livre le système d'équation suivant

$$\begin{cases} \dfrac{dV_1}{dt} &= \dfrac{-V_1}{C_1}\left(\dfrac{1}{R_p}+\dfrac{1}{R_{12}}\right)+\dfrac{V_2}{C_1R_{12}}+\dfrac{i_{\%}}{5C_1} \\ \dfrac{dV_2}{dt} &= \dfrac{V_1}{C_1R_{12}}-\dfrac{V_2}{C_2R_{12}} \\ V_{A\%} &= 10V_2 \\ V_{B\%} &= -10V_1+20V_2 \end{cases}$$

Avec

$$i_{\%}=5i \qquad V_{A\%}=10V_A \qquad V_{B\%}=10V_B$$

Le système n'est pas linéaire par rapport à la grandeur perturbatrice R_p. On commence donc par linéariser le système autour du point d'équilibre donné, à savoir $\bar{i}_{\%}=50$ et $\overline{R}_p=0.47$. On calcule alors que $\overline{V}_1=\overline{V}_2=4.7$. On adopte les notations suivantes

$$\begin{cases} u &= i_{\%}-\bar{i}_{\%} \\ v &= R_p-\overline{R}_p \\ x_1 &= V_1-\overline{V}_1 \\ x_2 &= V_2-\overline{V}_2 \\ y &= V_{A\%}-\overline{V}_{A\%} \qquad \text{ou} \qquad y=V_{B\%}-\overline{V}_{B\%} \end{cases}$$

Et on trouve le système linéarisé

$$\begin{cases} \dot{x_1} &= -a_{11}x_1+a_{12}x_2+bu+dv \\ \dot{x_2} &= a_{21}x_1-a_{22}x_2 \\ y &= 10x_2 \qquad \text{ou} \qquad y=-10x_1+20x_2 \end{cases}$$

Avec

$$\begin{cases} a_{11} &= \dfrac{1}{C_1}\left(\dfrac{1}{\overline{R}_p}+\dfrac{1}{R_{12}}\right) &= 1.06 \\ a_{12} &= \dfrac{1}{C_1R_{12}} &= 0.097 \\ a_{21} &= \dfrac{1}{C_1R_{12}} &= 0.097 \\ a_{22} &= \dfrac{1}{C_2R_{12}} &= 0.097 \\ b &= \dfrac{1}{5C_1} &= 0.091 \\ d &= \dfrac{\overline{V}_1}{C_1\overline{R}_p^2} &= 9.67 \end{cases}$$

Dans ce qui suit, la lettre A désigne le processus à minimum de phase tandis que la lettre B désigne le processus à non minimum de phase.

2 Le système en boucle ouverte

Système à minimum de phase

A partir du système linéarisé, on calcule

$$\begin{aligned} G_A(s) &= \frac{10ba_{21}}{s^2+(a_{11}+a_{22})s+a_{11}a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}} &= \frac{0.088}{(s+1.072)(s+0.087)} \\ H_A(s) &= \frac{10da_{21}}{s^2+(a_{11}+a_{22})s+a_{11}a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}} &= \frac{9.34}{(s+1.072)(s+0.087)} \end{aligned}$$

On cherche à déterminer le temps de réponse du système suite à un échellon de perturbation. Celui-ci est principalement fixé par le pôle le plus lent du processus à savoir $p = -0.087$. Ce pôle correspond à la constante de temps $\tau = 11.5$ s. Dès lors, le temps de réponse à 98% du système équivaut approximativement à $\tau \cdot ln(50) = 45$ s. Il s'agit bien du temps de réponse que nous avons observé au laboratoire. La figure 1 illustre les résultats théoriques et expérimentaux pour une réponse du système à un échellon de perturbation en boucle ouverte.

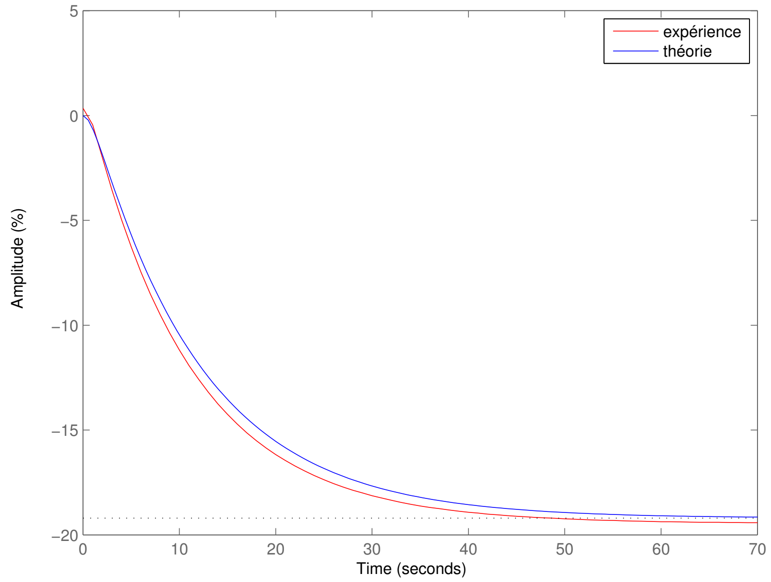

FIGURE 1 – Réponse du système à minimum de phase suite à un échellon de perturbation en boucle ouverte

Système à non minimum de phase

A partir du système linéarisé, on calcule

$$\begin{aligned} G_B(s) &= \frac{-10b(s-2a_{21}+a_{22})}{s^2+(a_{11}+a_{22})s+a_{11}a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}} &= \frac{-0.91(s-0.097)}{(s+1.072)(s+0.087)} \\ H_B(s) &= \frac{-10d(s-2a_{21}+a_{22})}{s^2+(a_{11}+a_{22})s+a_{11}a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}} &= \frac{-96.7(s-0.097)}{(s+1.072)(s+0.087)} \end{aligned}$$

Comme le montre la figure 2, le temps de réponse du système B est le même que celui du système A. Cela s'explique par le fait que les dénominateurs de leurs fonctions H(s) soient identiques. Cependant, on remarque que le système B, à cause du zéro insatble de $H_B(s)$, ne réagit pas initialement de la même façon que le système A. Le système part dans un sens opposé à sa future valeur d'équilibre. Ce comportement est typique d'un système à non minimum de phase.

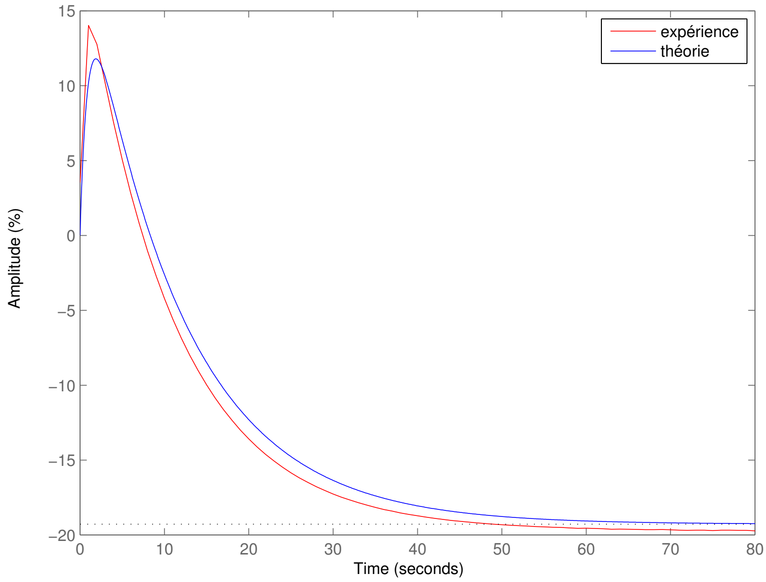

FIGURE 2 – Réponse du système à non minimum de phase suite à un échellon de perturbation en boucle ouverte

3 Le système en boucle fermée

Le système en boucle fermée se caractérise par l'ajout d'un retour unitaire de sortie et du régulateur PI suivant

$$C(s) = \frac{100}{sPB}(s + \frac{1}{T_i})$$

3.1 Compensation d'un échellon de perturbation

Système à minimum de phase

Avec l'aide de la rêgle de Mason et des résultats précédents, on calcule

$$T_{vA}(s) = \frac{10da_{21}s}{s^3 + (a_{11} + a_{22})s^2 + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} + \frac{10^3}{PB}ba_{21})s + \frac{10^3}{PBT_i}ba_{21}}$$

On cherche à déterminer les paramètres PB et T_i pour que système en boucle fermée ait un temps de réponse semblable au temps de réponse naturel du processus en boucle ouverte. Pour ce faire, on veut imposer à notre fonction de transfert que son pôle le plus lent soit idendique à celui du système en boucle ouverte, à savoir $p = -0.087$. On veut également que les deux autres pôles soient négligeables à coté du premier, c'est à dire que leur constante de temps associée doit être bien inférieure à celle du premier pôle, 11.5 s. Enfin, la réponse doit être sans dépassement. En essayant un pôle double α, on écrit que le dénominateur de T_{vA} est de la forme $(s + 0.087)(s + \alpha)^2$. Grâce à une identification terme à terme, on trouve

$$\begin{cases} \alpha & = & 0.536 \\ PB & = & 30.68 \\ T_i & = & 11.5 \end{cases}$$

La constante de temps assocciée au pôle double α est six fois plus petite que celle introduite par le pôle -0.087. On peut donc considérer que ce dernier pôle est dominant en ce qui concerne le temps de réponse du système. La figure 3 confirme la justesse des calculs. On constate l'absence de dépassement et un temps de réponse proche de 45 s. Si d'aventure une des conditions n'avait pas été respectée, il aurait fallut reprendre les calculs en considérant deux pôles distincts pour T_{vA} en plus du troisième imposé plutôt qu'un pôle double. Cela nous aurait donné un degré de liberté supplémentaire pour déterminer les constantes PB et T_i.

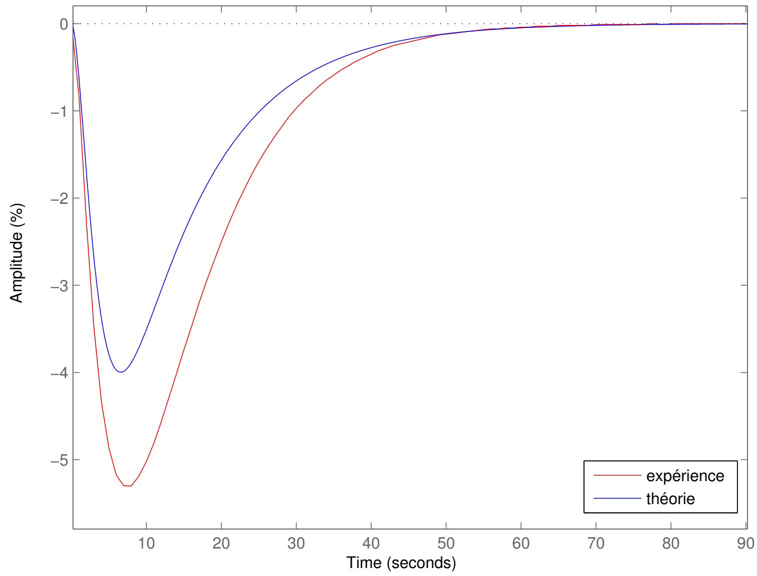

FIGURE 3 – Réponse du système à minimum de phase suite à un échellon de perturbation en boucle fermée

Système à non minimum de phase

Avec l'aide de la rêgle de Mason et des résultats précédents, on calcule

$$T_{vB}(s) = \frac{-10ds(s - 2a_{21} + a_{22})}{s^3 + (a_{11} + a_{22} - \frac{10^3}{PB}b)s^2 + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} + \frac{10^3}{PB}b(2a_{21} - a_{22} - \frac{1}{T_i}))s + \frac{10^3}{PBT_i}b(2a_{21} - a_{22})}$$

En essayant de compenser un échellon de perturbation avec les mêmes paramètres pour le système B, on obtient une réponse instable comme en témoigne la figure 4.

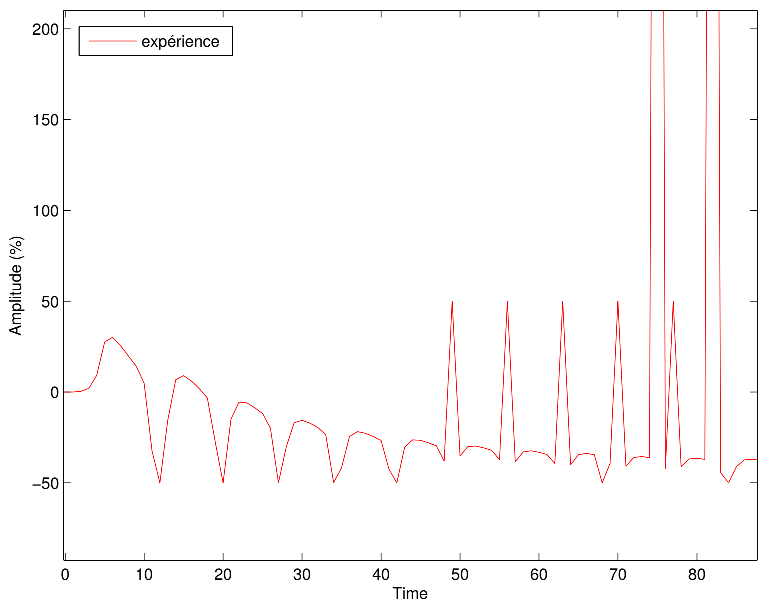

FIGURE 4 – Réponse du système à non minimum de phase suite à un échellon de perturbation en boucle fermée avec les paramètres du système à minimum de phase

Cela est dû à la présence de deux pôles instables dans la fonction de transfert T_{vB}. En effet, avec ces paramètres on trouve

$$T_{vB}(s) = \frac{-96.7s(s-0.097)}{(s+0.087)(s-0.166)(s-1.73)}$$

Dès lors, il n'est pas étonnant de constater que le système B est instable. Il faut donc procéder autrement afin de déterminer les paramètres du régulateur. On commence par écrire la fonction de transfert sans tenir compte du retour unitaire de sortie, soit uniquement la chaîne principale

$$C(s)\cdot G_B(s) = \frac{100}{sPB}(s+\frac{1}{T_i})\cdot\frac{-0.91(s-0.097)}{(s+1.072)(s+0.087)}$$

On peut alors profiter du zéro de $C(s)$ pour annuler le pôle le plus lent de $G_B(s)$ en fixant que $T_i = 11.5$. Cette opération ne perturbe pas le système car on annule un pôle stable avec un zéro stable. Il faut à présent déterminer PB pour que la réponse du système soit stable et sans dépassement. Pour cela, bien que l'on s'intéresse à la perturbation, on va vérifier la stabiliter de T_{rB}. En effet, grâce à l'annulation pôle/zéro, le dénominateur de T_{rB} n'est plus que du deuxième ordre, ce qui facilite les calculs. Comme on a annulé un pôle stable, il est équivalent de regarder la stabilité de T_{rB} ou de T_{vB}. On commence donc par écrire que

$$T_{rB}(s) = \frac{\frac{1}{PB}(-91s+8.23)}{s^2+(1.072-\frac{91}{PB})s+\frac{8.23}{PB}}$$

En comparant cette fonction de transfert à celle de référence, on trouve

$$\begin{cases} \omega_n^2 & = & \dfrac{8.23}{PB} \\ 2\xi\omega_n & = & \dfrac{-91}{PB}+1.072 \end{cases}$$

Pour éviter un quelconque dépassement, on pose $\xi = 1$. On trouve alors que $PB = 156$ ou $PB = 49$. Or, la condition de stabilité impose que $PB > 85$. On choisit donc la première solution et on trouve la fonction de transfert suivante

$$T_{vB}(s) = \frac{s(s-0.097)}{(s+0.278)(s+0.213)(s+0.083)}$$

On constate que les trois pôles de cette fonction sont à présent stables. La figure 5 illustre les résultats obtenus avec les nouveaux paramètres.

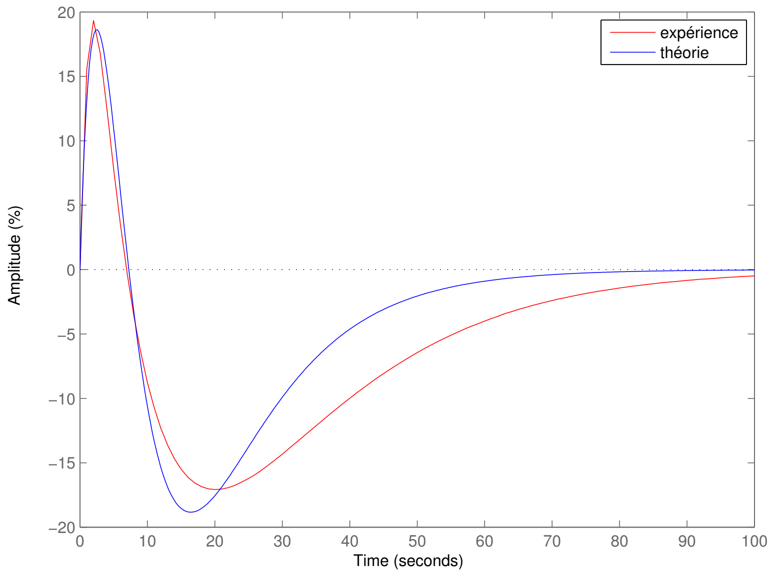

FIGURE 5 – Réponse du système à non minimum de phase suite à un échellon de perturbation en boucle fermée avec les nouveaux paramètres

3.2 Réaction à un échellon de consigne

Avec ces paramètres, la fonction T_{rB} devient quant à elle

$$T_{rB}(s) = \frac{-0.583(s - 0.091)}{(s + 0.162)(s + 0.327)}$$

La figure 6 illustre la réaction du système pour une consigne à 40%. On observe que cette réponse est bien stable.

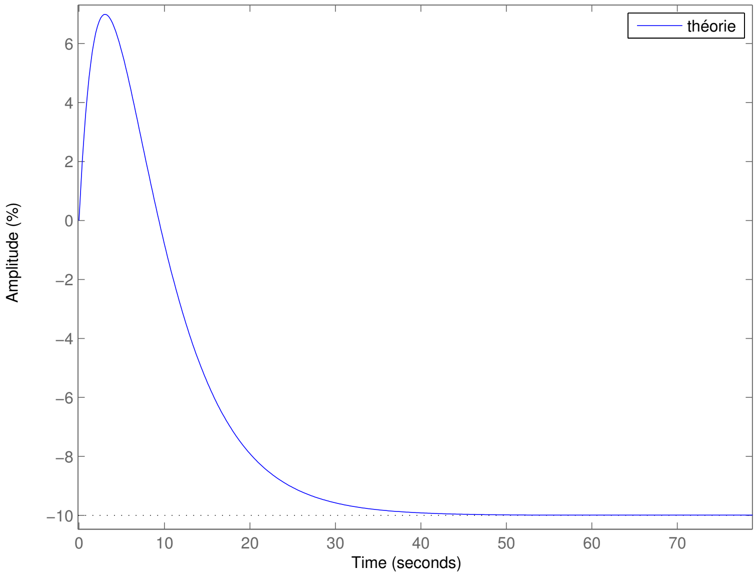

FIGURE 6 – Réponse du système à non minimum de phase suite à un échellon de consigne en boucle fermée