Variação de Palatini

Louis Bergamo Radial
8992822

4 de julho de 2024

Lema 1: A diferença entre conexões é um tensor

Seja (M, g) uma variedade Lorentziana. Se $\nabla, \nabla' : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$ são conexões afins, então a aplicação

$$\begin{aligned} D : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\to \Gamma(TM) \\ (X, Y) &\mapsto \nabla_X Y - \nabla'_X Y \end{aligned}$$

é um campo tensorial de ordem $(1, 2)$.

Demonstração. Consideremos $f, g \in C^\infty(M)$ e $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ e mostremos que D é linear na dependência nos dois campos vetoriais. Utilizando a linearidade no primeiro argumento de uma conexão, segue que

$$\begin{aligned} D(fX + gY, Z) &= \nabla_{fX+gY} Z - \nabla'_{fX+gY} Z \\ &= f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z - f\nabla_X Z - g\nabla_Y Z \\ &= fD(X, Z) + gD(Y, Z), \end{aligned}$$

logo D é linear em seu primeiro argumento. Pela aditividade e pela regra de Leibniz, obtemos

$$\begin{aligned} D(X, fY + gZ) &= \nabla_X(fY) + \nabla_X(gZ) - \nabla'_X(fY) - \nabla'_X(gZ) \\ &= \left[(Xf)Y + f\nabla_X Y\right] + \left[(Xg)Z + g\nabla_X Z\right] - \left[(Xf)Y + f\nabla'_X Y\right] - \left[(Xg)Z + g\nabla'_X Z\right] \\ &= fD(X, Y) + gD(X, Z), \end{aligned}$$

portanto D é linear em seu segundo argumento. Por fim, notando que $D(X, Y)$ é a combinação linear de dois campos vetoriais, segue que $D(X, Y) \in \Gamma(TM)$ para todo $X, Y \in \Gamma(TM)$, o que conclui a demonstração. □