

# 4300337 - Lista de Exercícios 5

Louis Bergamo Radial  
8992822

24 de maio de 2024

## Exercício 1

Relembremos o resultado obtido para os coeficientes da conexão de Levi-Civita no caso de uma métrica diagonal

$$\Gamma^\lambda_{\lambda\lambda} = \frac{\partial_\lambda g_{\lambda\lambda}}{2g_{\lambda\lambda}}, \quad \Gamma^\lambda_{\mu\lambda} = \frac{\partial_\mu g_{\lambda\lambda}}{2g_{\lambda\lambda}}, \quad \Gamma^\lambda_{\mu\mu} = -\frac{\partial_\lambda g_{\mu\mu}}{2g_{\lambda\lambda}}, \quad \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = 0,$$

em que não utilizamos a convenção de soma de Einstein, portanto não há nenhuma soma nos termos acima. A métrica de Schwarzschild é dada por

$$g_{tt} = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \quad g_{rr} = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \quad g_{\theta\theta} = r^2 \quad g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2 \theta,$$

com as outras componentes nulas. Utilizando as expressões para os coeficientes da conexão, vemos que os termos  $\Gamma^\lambda_{t\lambda} = \Gamma^\lambda_{\phi\lambda} = \Gamma^t_{\mu\mu} = \Gamma^\phi_{\mu\mu} = 0$ , visto que estes termos envolvem derivadas em relação a  $t$  ou a  $\phi$  e que as componentes da métrica não têm dependência com essas variáveis. Temos também que os termos  $\Gamma^\theta_{\nu\nu} = \Gamma^\theta_{\mu\theta} = 0$  se anulam para  $\nu \neq \phi$  e  $\mu \neq r$ .

Consideremos a componente  $t$  da equação da geodésica,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 t}{d\lambda^2} + \Gamma^t_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} &= 0 \implies \frac{d^2 t}{d\lambda^2} + 2\Gamma^t_{tr} \frac{dt}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} = 0 \\ &\implies \frac{d^2 t}{d\lambda^2} + \frac{\partial_r g_{tt}}{g_{tt}} \frac{dt}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} = 0 \\ &\implies \frac{1}{g_{tt}} \left( g_{tt} \frac{d^2 t}{d\lambda^2} + \frac{dg_{tt}}{d\lambda} \frac{dt}{d\lambda} \right) = 0 \\ &\implies \frac{1}{g_{tt}} \frac{d}{d\lambda} \left( g_{tt} \frac{dt}{d\lambda} \right) = 0. \end{aligned}$$

Como  $g_{tt} \neq 0$ , temos a seguinte lei de conservação

$$\frac{d}{d\lambda} \left[ \frac{dt}{d\lambda} \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right) \right] = 0,$$

pela componente temporal da equação da geodésica.

Analogamente, para a componente  $\phi$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \phi}{d\lambda^2} + \Gamma^\phi_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} &= 0 \implies \frac{d^2 \phi}{d\lambda^2} + 2\Gamma^\phi_{r\phi} \frac{d\phi}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} + 2\Gamma^\phi_{\theta\phi} \frac{d\phi}{d\lambda} \frac{d\theta}{d\lambda} = 0 \\ &\implies \frac{d^2 \phi}{d\lambda^2} + \frac{\partial_r g_{\phi\phi}}{g_{\phi\phi}} \frac{d\phi}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} + \frac{\partial_\theta g_{\phi\phi}}{g_{\phi\phi}} \frac{d\phi}{d\lambda} \frac{d\theta}{d\lambda} = 0 \\ &\implies \frac{1}{g_{\phi\phi}} \left[ g_{\phi\phi} \frac{d^2 \phi}{d\lambda^2} + \left( \frac{\partial_r g_{\phi\phi}}{\partial r} \frac{dr}{d\lambda} + \frac{\partial_\theta g_{\phi\phi}}{\partial \theta} \frac{d\theta}{d\lambda} \right) \frac{d\phi}{d\lambda} \right] = 0 \\ &\implies \frac{1}{g_{\phi\phi}} \frac{d}{d\lambda} \left[ g_{\phi\phi} \frac{d\phi}{d\lambda} \right] = 0. \end{aligned}$$

Como  $g_{\phi\phi} \neq 0$ , temos a lei de conservação

$$\frac{d}{d\lambda} \left( r^2 \frac{d\phi}{d\lambda} \sin^2 \theta \right) = 0,$$

pela componente azimutal da equação da geodésica.

Notemos que as quantidades conservadas

$$\epsilon = \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right) \frac{dt}{d\lambda} \quad \text{e} \quad \ell = r^2 \sin^2 \theta \frac{d\phi}{d\lambda}$$

estão relacionadas à energia e ao momento angular da partícula na trajetória geodésica. Para uma partícula de massa  $m$ ,  $m\epsilon$  e  $m\ell$  são a sua energia e seu momento angular, enquanto que  $\hbar\epsilon$  e  $\hbar\ell$  são a energia e o momento angular de um fóton. A expressão  $\ell$  é familiar, enquanto que precisamos motivar a relação de  $\epsilon$  com a energia. Tomemos uma partícula massiva muito distante do centro de atração, isto é,  $r \rightarrow \infty$ , onde temos

$$\lim_{r \rightarrow \infty} m\epsilon = m \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{dt}{d\tau} = m\gamma = E,$$

onde utilizamos as expressões conhecidas da Relatividade Restrita, visto que à grandes distâncias do centro atrativo, a métrica de Schwarzschild se reduz à métrica de Minkowski.

A simetria azimutal da métrica é refletida na conservação do momento angular, portanto podemos considerar uma partícula se movendo em um plano de ângulo polar constante, por exemplo  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . Neste caso, como a trajetória se dá numa geodésica, temos que a “norma” do vetor tangente à trajetória é constante, uma vez que este é paralelo ao longo da geodésica, isto é

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = -\kappa,$$

para a constante  $\kappa$  dada por  $\kappa = 1$  no caso de uma partícula massiva e o parâmetro afim dado pelo tempo próprio, ou  $\kappa = 0$  para uma partícula de massa nula. De forma explícita, temos

$$-\kappa = - \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right) \left( \frac{dt}{d\lambda} \right)^2 + \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-1} \left( \frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + r^2 \left( \frac{d\phi}{d\lambda} \right)^2,$$

portanto ao multiplicar por  $1 - \frac{2GM}{r}$  e utilizar as integrais de movimento, temos

$$-\kappa \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right) = -\epsilon^2 + \left( \frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right) \frac{\ell^2}{r^2}.$$

Assim, obtemos a equação

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dr}{d\lambda} \right)^2 - \kappa \frac{GM}{r} + \frac{\ell^2}{2r^2} - \frac{GM\ell^2}{r^3} = \frac{1}{2} (\epsilon^2 - \kappa)$$

a qual podemos analisar como o movimento unidimensional de uma partícula de massa unitária e energia  $\frac{1}{2} (\epsilon^2 - \kappa)$ , sob a ação de um potencial efetivo clássico  $V_{\text{ef}}$  dado por

$$V_{\text{ef}}(r) = -\kappa \frac{GM}{r} + \frac{\ell^2}{2r^2} - \frac{GM\ell^2}{r^3},$$

isto é,

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + V_{\text{ef}}(r) = \frac{\epsilon^2 - \kappa}{2}.$$

Para o caso particular de partículas não massivas,  $\kappa = 0$ , e ainda nessa analogia com Mecânica Clássica, podemos multiplicar a equação de movimento por  $\frac{2}{\ell^2}$ , obtendo

$$\frac{1}{\ell^2} \left( \frac{dr}{d\lambda} \right)^2 - \frac{2GM}{r^3} + \frac{1}{r^2} = \frac{\epsilon^2}{\ell^2},$$

deixando evidente a forma

$$\left(\frac{dr}{d\sigma}\right)^2 + U_{\text{ef}}(r) = \frac{1}{b^2},$$

com

$$U_{\text{ef}}(r) = -\frac{2GM}{r^3} + \frac{1}{r^2} = \frac{2}{\ell^2} V_{\text{ef}}(r) \quad \text{e} \quad b = \frac{\ell}{\epsilon},$$

onde  $b$  é o parâmetro de impacto, ou distância de visada, e reparametrizamos a geodésica utilizando  $\sigma = \ell\lambda$ .

## Exercício 2

Como obtido no exercício anterior, o potencial efetivo é dado por

$$V_{\text{ef}}(r) = -\kappa \frac{GM}{r} + \frac{\ell^2}{2r^2} - \frac{GM\ell^2}{r^3},$$

cujo possível gráfico é apresentado na [Figura 1](#), a depender das relações entre os parâmetros  $M$  e  $\ell$ .

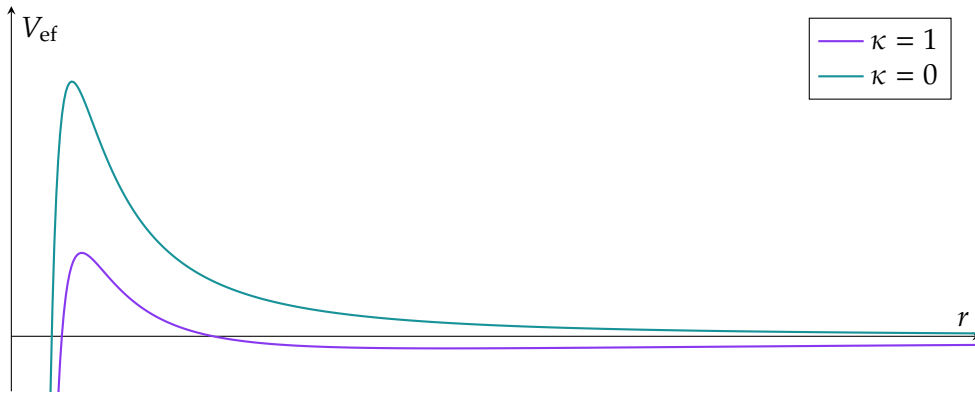


Figura 1: Potencial efetivo radial

Determinemos os pontos críticos do potencial efetivo. Temos

$$\frac{dV_{\text{ef}}}{dr} = \frac{\kappa GM r^2 - \ell^2 r + 3GM\ell^2}{r^4},$$

portanto um ponto crítico do potencial efetivo satisfaz a equação polinomial

$$\kappa GM r^2 - \ell^2 r + 3GM\ell^2 = 0.$$

Para partículas massivas, temos as raízes

$$2GM r_{\pm} = \ell^2 \pm \ell^2 \sqrt{1 - 3 \left(\frac{2GM}{\ell}\right)^2},$$

para  $|\ell| \geq 2\sqrt{3}GM$  e nenhuma raiz real caso contrário. Isto é, podemos escrever

$$\frac{dV_{\text{ef}}}{dr} = \frac{GM(r - r_-)(r - r_+)}{r^4},$$

evidenciando que

$$0 < r < r_- \implies \frac{dV_{\text{ef}}}{dr} > 0 \quad r_- < r < r_+ \implies \frac{dV_{\text{ef}}}{dr} < 0 \quad r_+ < r \implies \frac{dV_{\text{ef}}}{dr} > 0,$$

isto é, se  $r_- \neq r_+$ , o potencial efetivo é crescente antes de  $r_-$  e depois de  $r_+$ , e decrescente entre  $r_-$  e  $r_+$ . Dessa forma, como o potencial efetivo é suave para  $0 < r < \infty$ , segue que  $r_-$  e  $r_+$  são pontos de máximo e de

mínimo, respectivamente, a não ser que se igualem, caso em que são um ponto de inflexão. Ou seja, para  $|\ell| > 2\sqrt{3}GM$  temos as órbitas circulares em

$$r_{\max} = \frac{\ell^2}{2GM} \left[ 1 - \sqrt{1 - 3 \left( \frac{2GM}{\ell} \right)^2} \right] \quad \text{e} \quad r_{\min} = \frac{\ell^2}{2GM} \left[ 1 + \sqrt{1 - 3 \left( \frac{2GM}{\ell} \right)^2} \right],$$

que são instável e estável, respectivamente. Sejam  $V_{\min} = V_{\text{ef}}(r_{\min})$  e  $V_{\max} = V_{\text{ef}}(r_{\max})$  os potenciais efetivos das órbitas circulares, então para  $V_{\min} < \frac{\epsilon^2 - 1}{2} < 0$  temos órbitas limitadas não circulares, enquanto que para  $0 \leq \frac{\epsilon^2 - 1}{2} < V_{\max}$  temos órbitas abertas, com  $r > r_{\max}$  indo ao infinito e  $r < r_{\max}$  indo à origem. Notemos que para o limite  $\ell \rightarrow 2\sqrt{3}GM$ , temos

$$\lim_{\ell \rightarrow 2\sqrt{3}GM} r_{\min} = \frac{\ell^2}{2GM} = 6GM,$$

portanto o raio da órbita circular mais interna  $r_{\text{ISCO}}$  é igual a três vezes o raio de Schwarzschild.

Para partículas de massa nula, temos a única raiz  $r_0 = 3GM$ . Escrevemos

$$\frac{dU_{\text{ef}}}{dr} = \frac{2}{\ell^2} \frac{dV_{\text{ef}}}{dr} = -2 \frac{r - r_0}{r^4},$$

portanto temos que  $U_{\text{ef}}$  cresce em  $0 < r < r_0$  e decresce em  $r > r_0$ , isto é,  $r_0$  é um ponto de máximo local. Assim, fótons podem percorrer órbitas circulares instáveis de raio igual a três meios do raio de Schwarzschild. Nesta órbita, temos  $U_{\text{ef}}(r_0) = \frac{1}{27G^2M^2}$ , portanto o parâmetro de impacto deve ser tal que  $\frac{1}{b^2} = \frac{1}{27G^2M^2}$ . Para parâmetros de impacto que não satisfazem esta relação, temos órbitas abertas, com  $r < r_0$  tendendo à origem e com  $r > r_0$  tendendo ao infinito.

## Exercício 4

Utilizando o potencial efetivo encontrado para partículas massivas,

$$V_{\text{ef}}(r) = -\frac{GM}{r} + \frac{\ell^2}{2r^2} - \frac{GM\ell^2}{r^3},$$

segue que

$$\left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 - \frac{GM}{r} = -\frac{GM}{r_0}$$

para uma partícula que parte do repouso de uma posição  $r_0$  e cai radialmente em direção à origem. Desse modo, temos a equação separável

$$\frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}}} = \pm \sqrt{2GM} d\tau.$$

Como a partícula cai em direção à origem, podemos escolher o sinal negativo e integrar da posição inicial  $r_0$  até a origem, obtendo

$$\sqrt{2GM} \Delta\tau = \int_0^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}}} = \sqrt{r_0} \int_0^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{\frac{r_0}{r} - 1}}.$$

Com a substituição de variáveis  $\rho = \frac{r_0}{r}$ , temos

$$\frac{\Delta\tau}{r_0} \sqrt{\frac{2GM}{r_0}} = \int_1^\infty \frac{d\rho}{\rho^2 \sqrt{\rho - 1}}.$$

Tomando  $\sqrt{\rho - 1} = \tan \psi$ , temos  $\rho = \sec^2 \psi$ , portanto

$$\frac{\Delta\tau}{2r_0} \sqrt{\frac{2GM}{r_0}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 \psi d\psi}{\sec^4 \psi} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \cos^2 \psi = \frac{\pi}{4}.$$

Isto é, o tempo próprio desde a posição  $r_0$  até a singularidade é

$$\Delta\tau = \frac{\pi r_0}{2} \sqrt{\frac{r_0}{2GM}}.$$

Por exemplo, para  $r_0 = 10GM$ , temos  $\Delta\tau = 5\pi\sqrt{5}GM$ .

Como mostrado na [Figura 3](#), os cones de luz futuros do observador apontam em direção à origem e são limitados inferiormente pela reta  $v = v_0$  constante, enquanto que os cones de luz passados apontam na direção do horizonte de eventos e são limitados superiormente pela reta  $v = v_0$  constante. Dessa forma, o observador pode receber informações de fora do horizonte, mas não consegue ver a região de fora do buraco negro dada por  $r > 2GM \cap v > v_0$ .

## Exercício 5

Ao longo de geodésicas radiais para a luz na métrica de Schwarzschild, temos

$$-\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 = 0,$$

de modo que nestas trajetórias temos

$$\left(\frac{dt}{dr}\right)^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^2 \implies \frac{dt}{dr} = \pm \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}.$$

No limite  $r \rightarrow \infty$ , temos  $\frac{dt}{dr} \rightarrow \pm 1$ , isto é, as trajetórias da luz têm como assíntotas a família de retas  $t = t_0 \pm r$ , para constantes  $t_0$ . Essa família de retas é a mesma família de geodésicas para o espaço-tempo de Minkowski, isto é, o espaço-tempo dado pela métrica de Schwarzschild é assintoticamente Minkowski.

Resolvendo a equação diferencial, obtemos

$$t = \pm r_*(r) + t_0,$$

em que  $t_0$  é uma constante de integração e  $r_*(r)$  é conhecida como a coordenada tartaruga, dada por

$$r_*(r) = r + 2GM \ln \left| \frac{r}{2GM} - 1 \right|.$$

De fato, temos

$$\frac{dr_*}{dr} = 1 + 2GM \frac{\frac{1}{2GM}}{\frac{r}{2GM} - 1} = 1 + \frac{2GM}{r - 2GM} = \frac{r}{r - 2GM} = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1},$$

portanto a coordenada tartaruga é solução.

Podemos utilizar a trajetória geodésica encontrada para estender a métrica de Schwarzschild e remover a singularidade das coordenadas em  $r = 2GM$ . Primeiro, notemos que

$$\lim_{r \rightarrow 2GM} r_* = \lim_{r \rightarrow 2GM} \left( r + 2GM \ln \left| \frac{r}{2GM} - 1 \right| \right) = -\infty,$$

portanto a coordenada tartaruga associa o horizonte de eventos  $r = 2GM$  com  $r_* = -\infty$ . Vamos utilizar a trajetória encontrada para a geodésica radial para definir coordenadas

$$\begin{cases} v = r_*(r) + t \\ \rho = r \end{cases} \iff \begin{cases} t = v - r_*(\rho) \\ r = \rho \end{cases},$$

com as mesmas coordenadas angulares. Nesse caso temos

$$\frac{\partial t}{\partial v} = 1, \quad \frac{\partial t}{\partial \rho} = -\frac{dr_*}{dr} = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}, \quad \frac{\partial r}{\partial \rho} = 1, \quad \frac{\partial r}{\partial v} = 0,$$

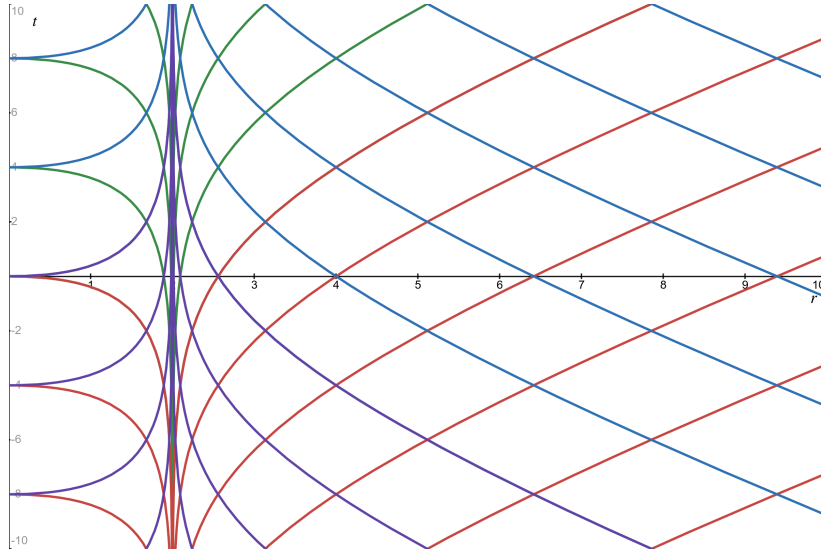


Figura 2: Diagrama de espaço-tempo nas coordenadas de Schwarzschild com massa unitária.

de forma que a métrica nessas coordenadas é dada pelas componentes

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{vv} &= \left(\frac{\partial t}{\partial v}\right)^2 g_{tt} + \left(\frac{\partial r}{\partial v}\right)^2 g_{rr} = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \\ \tilde{g}_{v\rho} &= \frac{\partial t}{\partial v} \frac{\partial t}{\partial \rho} g_{tt} + \frac{\partial r}{\partial v} \frac{\partial r}{\partial \rho} g_{rr} = -1 \\ \tilde{g}_{\rho\rho} &= \left(\frac{\partial t}{\partial \rho}\right)^2 g_{tt} + \left(\frac{\partial r}{\partial \rho}\right)^2 g_{rr} = 0.\end{aligned}$$

Por motivos psicológicos, renomearemos  $\rho$  para  $r$ , de forma que a métrica é dada por

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dv^2 + 2 dv dr + r^2 d\Omega^2,$$

nessas novas coordenadas, chamadas de métrica de Eddington-Finkelstein. Notemos que, nessas coordenadas, temos  $\tilde{g} = \det \tilde{g}_{\mu\nu} = r^4 \sin^2 \theta$ , portanto a métrica não é singular em  $r = 2GM$ .

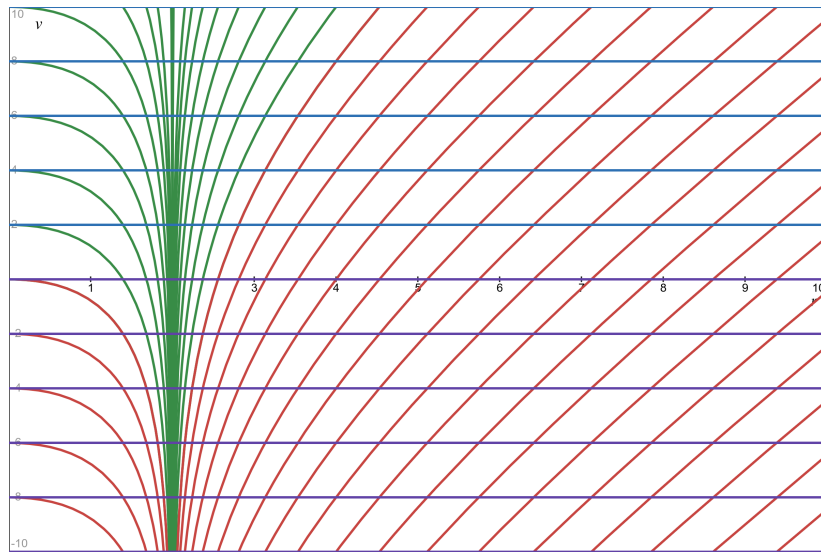


Figura 3: Diagrama de espaço-tempo nas coordenadas de Eddington-Finkelstein com massa unitária.