4300337 - Lista de exercícios 2

Louis Bergamo Radial
8992822

19 de março de 2024

Exercício 1

Para que um corpo de massa m tenha uma energia cinética K, sua velocidade v satisfaz

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}-1\right)mc^2 = K.$$

Isolando v, obtemos

$$v = c\sqrt{1-\left(\frac{1}{\frac{K}{mc^2}+1}\right)^2}.$$

Assim, para que uma partícula tenha energia cinética igual a sua energia de repouso, sua velocidade é

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2}c.$$

Pelo mesmo cálculo, para que uma bola de canhão de massa $m = 1\,\mathrm{kg}$ tenha a mesma energia cinética que um próton, de massa $m_p \approx 1.673\times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$, de um raio cósmico em movimento com fator de Lorentz $\gamma = 10^{11}$, sua velocidade deve ser

$$\begin{aligned} v &= c\sqrt{1-\left(\frac{1}{\frac{(\gamma-1)m_pc^2}{mc^2}+1}\right)^2} \\ &= c\sqrt{1-\left(\frac{1}{\frac{(\gamma-1)m_p}{m}+1}\right)^2} \\ &\approx 5.483\,\mathrm{m\,s^{-1}}. \end{aligned}$$

Exercício 2

No referencial do centro de massa, o 4-momento do sistema é dado por

$$P^\mu = \left(m_1c^2, \vec{0}\right)^\mu,$$

visto que antes do decaimento a partícula de massa m_1 está em repouso neste referencial. Notaremos por $(P_{m_i})^\mu$ a componente (neste caso contravariante) μ do 4-momento da partícula de massa m_i. Por conservação do 4-momento, temos

$$(P_{m_1})^\mu = (P_{m_2})^\mu + (P_{m_3})^\mu,$$

com P_{m_1} dado acima.

Assim, temos

$$\begin{aligned} (P_{m_2})_\mu (P_{m_2})^\mu &= (P_{m_1} - P_{m_3})_\mu (P_{m_1} - P_{m_3})^\mu \\ &= (P_{m_1})_\mu (P_{m_1})^\mu + (P_{m_2})_\mu (P_{m_2})^\mu - 2\,(P_{m_1})_\mu (P_{m_3})^\mu. \end{aligned}$$

Como $(P_{m_i})_\mu (P_{m_i})^\mu = -m_i^2 c^2$, obtemos a energia da partícula de massa m_3

$$-m_2^2 c^2 = -m_1^2 c^2 - m_3^2 c^2 + 2m_1 E_3 \implies E_3 = \frac{m_1^2 - m_2^2 + m_3^2}{2m_1} c^2.$$

Pelo mesmo argumento, obtemos a energia da outra partícula

$$-m_3^2 c^2 = -m_1^2 c^2 - m_2 c^2 + 2m_1 E_2 \implies E_2 = \frac{m_1^2 + m_2^2 - m_3^2}{2m_1} c^2.$$

Exercício 3

O processo de propulsão certamente deve respeitar a conservação de energia e momento, neste caso, temos

$$d(\gamma m v) = -dp \quad \text{e} \quad d(\gamma m c^2) = c dp,$$

onde p é o momento do fóton. Desta forma, temos

$$d\left(\gamma m c + \gamma m v\right) = 0.$$

Notemos que

$$d\gamma = \gamma^3 \frac{v}{c^2} dv,$$

portanto

$$\gamma(v + c) dm + m\gamma \left(\gamma^2 \frac{v(v + c)}{c^2} + 1\right) dv = 0.$$

Dividindo por $\gamma m(v + c)$, obtemos

$$\frac{dm}{m} + \frac{\gamma^2}{c} dv = 0.$$

Em termos de $\beta = \frac{v}{c}$, temos

$$\frac{dm}{m} + \frac{d\beta}{1 - \beta^2} = 0.$$

Se o foguete parte do repouso com massa inicial M, temos

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{m}{M}\right) &= -\int_0^\beta \frac{\mathrm{d}\xi}{1 - \xi^2} \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^\beta \left(\frac{1}{\xi + 1} - \frac{1}{\xi - 1}\right) \mathrm{d}\xi \\
&= -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{\beta + 1}{1 - \beta}\right) \\
&= \ln\sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}.
\end{aligned}$$

Desse modo, o foguete tem massa

$$m = M\sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}$$

quando sua velocidade é igual a βc.

Se $\sigma = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\tau}$ é a taxa em que o foguete converte massa em fótons no referencial instantaneamente de repouso do foguete, então a taxa no referencial terreste é $\frac{\sigma}{\gamma} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$. Neste caso, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma}{M} &= \gamma \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \\
&= -\gamma \frac{\frac{1}{(1+\beta)^2}}{\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}} \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} \\
&= -\frac{1}{(1 + \beta)^2 (1 - \beta)} \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t},
\end{aligned}$$

isto é, uma equação diferencial a variáveis separáveis,

$$-\frac{\sigma}{M}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}\beta}{(1+\beta)^2(1-\beta)}.$$

Integrando, obtemos

$$\begin{aligned} t &= -\frac{M}{\sigma}\int_0^\beta \frac{\mathrm{d}\xi}{(1+\xi)^2(1-\xi)} \\ &= -\frac{M}{4\sigma}\int_0^\beta \left(\frac{2}{(1+\xi)^2} + \frac{1}{1+\xi} - \frac{1}{\xi-1}\right)\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{M}{4\sigma}\left[2(1+\xi)^{-1} + \ln\left(\frac{1-\xi}{1+\xi}\right)\right]_0^\beta \\ &= \frac{M}{4\sigma}\left[-\frac{2\beta}{1+\beta} + \ln\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)\right]. \end{aligned}$$

Exercício 4

Consideremos a força $F^i = \frac{\mathrm{d}p^i}{\mathrm{d}t}$. Em notação vetorial temos $\vec{p} = \gamma m\vec{v}$, donde segue

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}m\vec{v} + \gamma m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}m\vec{v} + \gamma m\vec{a}, \end{aligned}$$

onde $\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$ é a 3-aceleração da partícula.

Notemos que

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} &= \left[1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}}\frac{v}{c^2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\gamma^3}{c^2}\langle\vec{v},\vec{a}\rangle, \end{aligned}$$

onde foi utilizada a relação

$$2v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\vec{v},\vec{v}\rangle = 2\langle\vec{v},\vec{a}\rangle.$$

Dessa forma, obtemos

$$\vec{F} = \gamma m\left(\vec{a} + \frac{\gamma^2}{c^2}\langle\vec{v},\vec{a}\rangle\vec{v}\right).$$

No caso particular em que a força é paralela à velocidade, devemos ter que a aceleração é também paralela à velocidade. Assim, $\vec{v} = v\hat{n}$, $\vec{a} = a\hat{n}$ e $\vec{F} = F\hat{n}$ para algum vetor unitário $\hat{n}$, então

$$\begin{aligned} F &= \gamma ma\left(1+\gamma^2\frac{v^2}{c^2}\right) \\ &= \gamma^3 ma. \end{aligned}$$

Como um exemplo, tomemos uma partícula de carga q com velocidade $\vec{v} = v\hat{x}$ que parte do repouso na origem num campo uniforme $\vec{E} = E\hat{x}$. Assim,

$$qE = \gamma^3 ma.$$

Notemos que isso é uma equação diferencial a variáveis separáveis

$$\left[1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}v = \frac{qE}{m}\,\mathrm{d}t \implies \frac{v}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}^2\right)}} = \frac{qEt}{m}.$$

Resolvendo para v, obtemos

$$v^2 = \frac{1}{\left(\frac{m}{qEt}\right)^2 + \left(\frac{1}{c}\right)^2} \implies v = \sqrt{\frac{c^2}{\left(\frac{mc}{qEt}\right)^2 - 1}}.$$

Exercício 5

Utilizando a notação $\mu \to \mu'$ para denotar uma transformação de Lorentz das componentes de um quadrivetor,

$$x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_{\mu} x^{\mu} \quad \text{e} \quad x_{\mu'} = \Lambda^{\mu}{}_{\mu'} x_{\mu'},$$

temos que as componentes $T^{\mu_1,\dots,\mu_p}{}_{\nu_1,\dots,\nu_q}$ de um tensor tipo (p,q) se transformam de acordo com

$$T^{\mu'_1,\dots,\mu'_p}{}_{\nu'_1,\dots,\nu'_q} = \Lambda^{\mu'_1}{}_{\mu_1} \cdots \Lambda^{\mu'_p}{}_{\mu_p} \Lambda^{\nu_1}{}_{\nu'_1} \cdots \Lambda^{\nu_q}{}_{\nu'_q} T^{\mu_1,\dots,\mu_p}{}_{\nu_1,\dots,\nu_q}.$$

Dada uma base $\hat{e}_{(\mu)}$, temos

$$x = x^{\mu}\hat{e}_{(\mu)} = x^{\mu'}\hat{e}_{(\mu')},$$

isto é, uma mudança de referencial não muda o vetor em si, apenas os valores das componentes. Assim,

$$x^{\mu}\hat{e}_{(\mu)} = \Lambda^{\mu'}{}_{\nu} x^{\nu} \Lambda^{\sigma}{}_{\mu'} \hat{e}_{(\sigma)} \implies \Lambda^{\sigma}{}_{\mu'} \Lambda^{\mu'}{}_{\nu} = \delta^{\sigma}{}_{\nu}.$$

Pelo mesmo argumento para o espaço dual, obtemos

$$\Lambda^{\sigma'}{}_{\mu} \Lambda^{\mu}{}_{\nu'} = \delta^{\sigma'}{}_{\nu'}.$$

Podemos mostrar a invariância do intervalo $\mathrm{d}s^2 = \eta_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^{\mu}\,\mathrm{d}x^{\nu}$. Pela transformações de tensores, temos

$$\begin{aligned}
\eta_{\mu'\nu'}\,\mathrm{d}x^{\mu'}\,\mathrm{d}x^{\nu'} &= \Lambda^{\mu}{}_{\mu'}\Lambda^{\nu}{}_{\nu'}\eta_{\mu\nu}\Lambda^{\mu'}{}_{\sigma}\,\mathrm{d}x^{\sigma}\Lambda^{\nu'}{}_{\rho}\,\mathrm{d}x^{\rho} \\
&= \delta^{\mu}{}_{\sigma}\delta^{\nu}{}_{\rho}\eta_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^{\sigma}\,\mathrm{d}x^{\rho} \\
&= \eta_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^{\sigma}\,\mathrm{d}x^{\rho} \\
&= \mathrm{d}s^2.
\end{aligned}$$

Consideremos $\delta^{\mu'}{}_{\nu'} = \eta^{\mu'\sigma'}\eta_{\sigma'\nu'}$, então

$$\begin{aligned}
\delta^{\mu'}{}_{\nu'} &= \Lambda^{\mu'}{}_{\mu}\Lambda^{\sigma'}{}_{\beta}\eta^{\mu\beta}\Lambda^{\rho}{}_{\sigma'}\Lambda^{\nu}{}_{\nu'}\eta_{\rho\nu} \\
&= \Lambda^{\rho}{}_{\sigma'}\Lambda^{\sigma'}{}_{\beta}\Lambda^{\mu'}{}_{\mu}\Lambda^{\nu}{}_{\nu'}\eta^{\mu\beta}\eta_{\rho\nu} \\
&= \delta^{\rho}{}_{\beta}\Lambda^{\mu'}{}_{\mu}\Lambda^{\nu}{}_{\nu'}\eta^{\mu\beta}\eta_{\rho\nu} \\
&= \Lambda^{\mu'}{}_{\mu}\Lambda^{\nu}{}_{\nu'}\eta^{\mu\rho}\eta_{\rho\nu} \\
&= \Lambda^{\mu'}{}_{\mu}\Lambda^{\nu}{}_{\nu'}\delta^{\mu}{}_{\nu}.
\end{aligned}$$

Exercício 6

Exercício 7

Exercício 8