4300337 - Lista de exercícios 2

Louis Bergamo Radial
8992822

7 de maio de 2024

Exercício 1

Para que um corpo de massa m tenha uma energia cinética K, sua velocidade v satisfaz

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}-1\right)mc^2 = K.$$

Isolando v, obtemos

$$v = c\sqrt{1-\left(\frac{1}{\frac{K}{mc^2}+1}\right)^2}.$$

Assim, para que uma partícula tenha energia cinética igual a sua energia de repouso, sua velocidade é

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2}c.$$

Pelo mesmo cálculo, para que uma bola de canhão de massa $m = 1\,\mathrm{kg}$ tenha a mesma energia cinética que um próton, de massa $m_p \approx 1.673 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$, de um raio cósmico em movimento com fator de Lorentz $\gamma = 10^{11}$, sua velocidade deve ser

$$\begin{aligned} v &= c\sqrt{1-\left(\frac{1}{\frac{(\gamma-1)m_p c^2}{mc^2}+1}\right)^2} \\ &= c\sqrt{1-\left(\frac{1}{\frac{(\gamma-1)m_p}{m}+1}\right)^2} \\ &\approx 5.483\,\mathrm{m\,s^{-1}}. \end{aligned}$$

Exercício 2

No referencial do centro de massa, o 4-momento do sistema é dado por

$$P^\mu = \left(m_1 c^2, \vec{0}\right)^\mu ,$$

visto que antes do decaimento a partícula de massa m_1 está em repouso neste referencial. Notaremos por $\left(P_{m_i}\right)^\mu$ a componente (neste caso contravariante) μ do 4-momento da partícula de massa m_i. Por conservação do 4-momento, temos

$$\left(P_{m_1}\right)^\mu = \left(P_{m_2}\right)^\mu + \left(P_{m_3}\right)^\mu ,$$

com P_{m_1} dado acima.

Assim, temos

$$\begin{aligned}
\left(P_{m_2}\right)_\mu \left(P_{m_2}\right)^\mu &= \left(P_{m_1} - P_{m_3}\right)_\mu \left(P_{m_1} - P_{m_3}\right)^\mu \\
&= \left(P_{m_1}\right)_\mu \left(P_{m_1}\right)^\mu + \left(P_{m_2}\right)_\mu \left(P_{m_2}\right)^\mu - 2\left(P_{m_1}\right)_\mu \left(P_{m_3}\right)^\mu .
\end{aligned}$$

Como $\left(P_{m_i}\right)_\mu \left(P_{m_i}\right)^\mu = -m_i^2 c^2$, obtemos a energia da partícula de massa m_3

$$-m_2^2 c^2 = -m_1^2 c^2 - m_3^2 c^2 + 2 m_1 E_3 \implies E_3 = \frac{m_1^2 - m_2^2 + m_3^2}{2m_1} c^2.$$

Pelo mesmo argumento, obtemos a energia da outra partícula

$$-m_3^2 c^2 = -m_1^2 c^2 - m_2 c^2 + 2 m_1 E_2 \implies E_2 = \frac{m_1^2 + m_2^2 - m_3^2}{2m_1} c^2.$$

Exercício 3

O processo de propulsão certamente deve respeitar a conservação de energia e momento, neste caso, temos

$$p - \gamma m v = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(pc + \gamma m c^2\right) = 0$$

onde p é o momento do fóton. Desta forma, temos

$$d\left(\gamma m c + \gamma m v\right) = 0.$$

Notemos que

$$d\gamma = \gamma^3 \frac{v}{c^2} dv,$$

portanto

$$\gamma(v+c)dm + m\gamma\left(\gamma^2 \frac{v(v+c)}{c^2} + 1\right)dv = 0.$$

Dividindo por $\gamma m(v+c)$, obtemos

$$\frac{dm}{m} + \frac{\gamma^2}{c} dv = 0.$$

Em termos de $\beta = \frac{v}{c}$, temos

$$\frac{dm}{m} + \frac{d\beta}{1-\beta^2} = 0.$$

Se o foguete parte do repouso com massa inicial M, temos

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{m}{M}\right) &= -\int_0^\beta \frac{\mathrm{d}\xi}{1-\xi^2} \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^\beta \left(\frac{1}{\xi+1} - \frac{1}{\xi-1}\right)\mathrm{d}\xi \\
&= -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\beta+1}{1-\beta}\right) \\
&= \ln\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}.
\end{aligned}$$

Desse modo, o foguete tem massa

$$m = M\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

quando sua velocidade é igual a βc.

Se $\sigma = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\tau}$ é a taxa em que o foguete converte massa em fótons no referencial instantaneamente de repouso do foguete, então a taxa no referencial terreste é $\frac{\sigma}{\gamma} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$. Neste caso, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma}{M} &= \gamma \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \\
&= -\gamma \frac{\frac{1}{(1+\beta)^2}}{\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}} \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} \\
&= -\frac{1}{(1+\beta)^2(1-\beta)} \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t},
\end{aligned}$$

isto é, uma equação diferencial a variáveis separáveis,

$$-\frac{\sigma}{M}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}\beta}{(1+\beta)^2(1-\beta)}.$$

Integrando, obtemos

$$\begin{aligned}
t &= -\frac{M}{\sigma}\int_0^\beta \frac{\mathrm{d}\xi}{(1+\xi)^2(1-\xi)} \\
&= \frac{M}{4\sigma}\int_\beta^0 \left(\frac{2}{(1+\xi)^2} + \frac{1}{1+\xi} - \frac{1}{\xi-1}\right)\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{M}{4\sigma}\left[-2(1+\xi)^{-1} + \ln\left(\frac{1+\xi}{1-\xi}\right)\right]_\beta^0 \\
&= \frac{M}{2\sigma}\left[-(1+\xi)^{-1} + \operatorname{artanh}\xi\right]_\beta^0 \\
&= -\frac{M}{2\sigma}\left(\frac{\beta}{1+\beta} + \operatorname{artanh}\beta\right).
\end{aligned}$$

Exercício 4

Consideremos a força $F^i = \frac{\mathrm{d}p^i}{\mathrm{d}t}$. Em notação vetorial temos $\boldsymbol{p} = \gamma m\boldsymbol{v}$, donde segue

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} &= \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} m\boldsymbol{v} + \gamma m \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} m\boldsymbol{v} + \gamma m\boldsymbol{a},\end{aligned}$$

onde $\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$ é a 3-aceleração da partícula.

Notemos que

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} &= \left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}} \frac{v}{c^2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\gamma^3}{c^2}\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}\rangle,\end{aligned}$$

onde foi utilizada a relação

$$2v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle = 2\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}\rangle.$$

Dessa forma, obtemos

$$\boldsymbol{F} = \gamma m\left(\boldsymbol{a} + \frac{\gamma^2}{c^2}\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}\rangle\boldsymbol{v}\right).$$

No caso particular em que a força é paralela à velocidade, devemos ter que a aceleração é também paralela à velocidade. Assim, $\boldsymbol{v} = v\hat{\boldsymbol{n}}$, $\boldsymbol{a} = a\hat{\boldsymbol{n}}$ e $\boldsymbol{F} = F\hat{\boldsymbol{n}}$ para algum vetor unitário $\hat{\boldsymbol{n}}$, então

$$\begin{aligned}F &= \gamma ma\left(1 + \gamma^2\frac{v^2}{c^2}\right) \\ &= \gamma^3 ma.\end{aligned}$$

Como um exemplo, tomemos uma partícula de carga q com velocidade $\boldsymbol{v} = v\hat{\boldsymbol{\imath}}$ que parte do repouso na origem num campo uniforme $\boldsymbol{E} = E\hat{\boldsymbol{\imath}}$. Assim,

$$qE = \gamma^3 ma.$$

Notemos que isso é uma equação diferencial a variáveis separáveis

$$\left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}} \mathrm{d}v = \frac{qE}{m}\,\mathrm{d}t \implies \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}^2\right)}} = \frac{qEt}{m}.$$

Resolvendo para v, obtemos

$$\begin{aligned}v^2 = \frac{1}{\left(\frac{m}{qEt}\right)^2 + \left(\frac{1}{c}\right)^2} &\implies v = \sqrt{\frac{c^2}{\left(\frac{mc}{qEt}\right)^2 + 1}} \\ &\implies v = \frac{\frac{qEt}{mc}}{\sqrt{1 + \left(\frac{qEt}{mc}\right)^2}}c.\end{aligned}$$

Integrando em relação ao tempo para obter a posição, temos

$$
\begin{aligned}
x = c\int_0^t \mathrm{d}t\, \frac{\frac{qEt}{mc}}{\sqrt{1+\left(\frac{qEt}{mc}\right)^2}} &\implies x = \frac{mc^2}{2qE}\int_1^{1+\left(\frac{qEt}{mc}\right)^2} \mathrm{d}\zeta\, \zeta^{-\frac{1}{2}} \\
&\implies x = \frac{mc^2}{qE}\left[\sqrt{\zeta}\right]_1^{1+\left(\frac{qEt}{mc}\right)^2} \\
&\implies x = \frac{mc^2}{qE}\left(\sqrt{1+\left(\frac{qEt}{mc}\right)^2} - 1\right),
\end{aligned}
$$

partindo de $x = 0$.

No caso particular em que a força é ortogonal à velocidade, devemos ter

$$
\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{v}\rangle = 0 &\implies \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}\rangle \left(1+\gamma^2\beta^2\right) = 0 \\
&\implies \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}\rangle = 0,
\end{aligned}
$$

de modo que

$$\boldsymbol{F} = \gamma m \boldsymbol{a}.$$

Como um exemplo, tomemos uma partícula de carga q com velocidade $\boldsymbol{v} = v\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ contida no plano xy que se move num campo magnético uniforme $\boldsymbol{B} = B\hat{\boldsymbol{k}}$. Assim,

$$
\begin{aligned}
\gamma m \boldsymbol{a} = q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} &\implies -\gamma m v\dot{\varphi}\hat{\boldsymbol{r}} = qvB\hat{\boldsymbol{r}} \\
&\implies \dot{\varphi} = -\frac{qB}{m\gamma},
\end{aligned}
$$

portanto a frequência f de oscilação do movimento orbital é

$$f = \frac{qB}{2\pi m}\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}.$$

Exercício 5

A transformação de Lorentz de das componentes de um quadrivetor é dada por

$$x'^{\nu} = \Lambda^{\nu}{}_{\mu} x^{\mu} \quad \text{e} \quad x'_{\nu} = \Lambda_{\nu}{}^{\mu} x_{\mu},$$

então temos que as componentes $T^{\mu_1,\ldots,\mu_p}{}_{\nu_1,\ldots,\nu_q}$ de um tensor tipo (p,q) se transformam de acordo com

$$T'^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}{}_{\beta_1,\ldots,\beta_q} = \Lambda^{\alpha_1}{}_{\mu_1} \cdots \Lambda^{\alpha_p}{}_{\mu_p} \Lambda^{\nu_1}{}_{\beta_1} \cdots \Lambda^{\nu_q}{}_{\beta_q} T^{\mu_1,\ldots,\mu_p}{}_{\nu_1,\ldots,\nu_q}\,.$$

Dadas bases $\hat{e}_\mu$ e $\hat{e}'_\nu$, temos

$$x = x^{\mu}\hat{e}_{\mu} = x'^{\nu}\hat{e}'_{\nu},$$

isto é, uma mudança de referencial não muda o vetor em si, apenas os valores das componentes. Assim,

$$x = \left(\Lambda^{\nu}{}_{\sigma} x^{\sigma}\right)\left(\Lambda_{\nu}{}^{\rho}\hat{e}_{\rho}\right) \implies \Lambda^{\nu}{}_{\sigma}\Lambda_{\nu}{}^{\rho} = \delta^{\rho}{}_{\sigma}.$$

Podemos mostrar a invariância do intervalo $\mathrm{d}s^2 = \eta_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x^{\alpha}\,\mathrm{d}x^{\beta}$. Pela transformações de tensores, temos

$$\begin{aligned}
\eta'_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x'^{\mu}\,\mathrm{d}x'^{\nu} &= \left(\Lambda_{\mu}{}^{\alpha}\Lambda_{\nu}{}^{\beta}\eta_{\alpha\beta}\right)\left(\Lambda^{\mu}{}_{\sigma}\,\mathrm{d}x^{\sigma}\right)\left(\Lambda^{\nu}{}_{\rho}\,\mathrm{d}x^{\rho}\right) \\
&= \delta^{\alpha}{}_{\sigma}\delta^{\beta}{}_{\rho}\eta_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x^{\sigma}\,\mathrm{d}x^{\rho} \\
&= \eta_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x^{\alpha}\,\mathrm{d}x^{\beta} \\
&= \mathrm{d}s^2.
\end{aligned}$$

Consideremos $\delta^{\mu}{}_{\nu} = \eta^{\mu\sigma}\eta_{\sigma\nu}$, então

$$\begin{aligned}
\delta'^{\alpha}{}_{\beta} &= \Lambda^{\alpha}{}_{\mu}\Lambda_{\beta}{}^{\nu}\delta^{\mu}_{\nu} \\
&= \Lambda^{\alpha}{}_{\nu}\Lambda_{\beta}{}^{\nu} \\
&= \delta^{\alpha}{}_{\beta},
\end{aligned}$$

isto é, o delta de Kronecker é invariante por transformações de Lorentz.

Consideremos o símbolo de Levi-Civita $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$, então

$$\begin{aligned}
\epsilon'^{\alpha\beta\kappa\lambda} &= \Lambda^{\alpha}{}_{\mu}\Lambda^{\beta}{}_{\nu}\Lambda^{\kappa}{}_{\rho}\Lambda^{\lambda}_{\sigma}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \\
&= \det(\Lambda)\epsilon^{\alpha\beta\kappa\lambda}.
\end{aligned}$$

Assim, o símbolo de Levi-Civita é invariante por transformações do grupo restrito de Lorentz.

Exercício 6

Consideremos um tensor $T^{\mu\nu}$, então

$$T'^{\alpha\beta} = \Lambda^{\alpha}{}_{\mu}\Lambda^{\beta}{}_{\nu}T^{\mu\nu}$$

expressa a transformação das componentes sob uma transformação de Lorentz Λ. No caso particular em que a transformação é uma rotação no grupo restrito de Lorentz, segue que as únicas componentes não nulas dessa transformação são

$$\Lambda^{0}{}_{0} = 1 \quad \text{e} \quad \Lambda^{i}{}_{j} = R^{i}{}_{j},$$

para uma dada matriz de rotação $R^{i}{}_{j} \in \mathrm{SO}(3)$. Desse modo, temos

$$\begin{aligned} T'^{00} &= \Lambda^{0}{}_{\mu}\Lambda^{0}{}_{\nu}T^{\mu\nu} \\ &= \Lambda^{0}{}_{0}\Lambda^{0}{}_{\nu}T^{0\nu} + \Lambda^{0}{}_{m}\Lambda^{0}{}_{\nu}T^{m\nu} \\ &= T^{00} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} T'^{i0} &= \Lambda^{i}{}_{\mu}\Lambda^{0}{}_{\nu}T^{\mu\nu} \\ &= \Lambda^{i}{}_{\mu}T^{\mu 0} \\ &= R^{i}{}_{m}T^{m0} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} T'^{0j} &= \Lambda^{0}{}_{\mu}\Lambda^{j}{}_{\nu}T^{\mu\nu} \\ &= \Lambda^{j}{}_{\nu}T^{0\nu} \\ &= R^{j}{}_{n}T^{0n} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} T'^{ij} &= \Lambda^{i}{}_{\mu}\Lambda^{j}{}_{\nu}T^{\mu\nu} \\ &= \Lambda^{i}{}_{m}\Lambda^{j}{}_{n}T^{mn} \\ &= R^{i}{}_{m}R^{j}{}_{n}T^{mn}, \end{aligned}$$

isto é, a componente T^{00} é inalterada, as componentes T^{i0} e T^{0j} se transformam como componentes de 3--vetores, e as componentes T^{ij} se transformam como componentes de um 3-tensor.

Exercício 7

A ação para uma partícula de massa m é dada por

$$\begin{aligned} S &= -\int mc\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu} \\ &= -\int \mathrm{d}t\; mc\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu} \\ &= -\int \mathrm{d}t\;\frac{mc^2}{\gamma(\dot{\boldsymbol{x}})}, \end{aligned}$$

portanto a lagrangiana é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}}) &= -mc\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu} \\ &= -\frac{mc^2}{\gamma(\dot{\boldsymbol{x}})}. \end{aligned}$$

Deste modo, o momento canônico é dado por

$$\begin{aligned} p_i = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^i} &= -mc\frac{\partial}{\partial\dot{x}^i}\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu} \\ &= \frac{mc}{2\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}}\frac{\partial}{\partial\dot{x}^i}\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu \\ &= \frac{mc}{\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}}\eta_{\mu\nu}\delta^\mu{}_i\dot{x}^\nu \\ &= m\gamma(\dot{\boldsymbol{x}})\delta^\mu_i\dot{x}_\mu \\ &= m\gamma(\dot{\boldsymbol{x}})\dot{x}_i, \end{aligned}$$

e a Hamiltoniana por

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = p_i\dot{x}^i - \mathcal{L} &= m\gamma(\dot{\boldsymbol{x}})\dot{x}_i\dot{x}^i + \frac{mc^2}{\gamma(\dot{\boldsymbol{x}})} \\ &= \gamma(\dot{\boldsymbol{x}})mc^2\left(\frac{\dot{x}_i\dot{x}^i}{c^2} + \frac{1}{\gamma^2(\dot{\boldsymbol{x}})}\right) \\ &= \gamma(\dot{\boldsymbol{x}})mc^2, \end{aligned}$$

uma vez que $\frac{1}{\gamma^2} = 1 - \frac{\dot{x}_i\dot{x}^i}{c^2}$.

Consideremos a ação

$$\tilde{S} = -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}\zeta\left[\sigma(\zeta)\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\zeta}\right)^2 + \frac{m^2}{\sigma(\zeta)}\right]$$

então pela equação de Euler-Lagrange para σ, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\sigma}\left[\sigma\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\zeta}\right)^2 + \frac{m^2}{\sigma}\right] = 0 &\implies \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\zeta}\right)^2 - \frac{m^2}{\sigma^2} = 0 \\ &\implies \frac{m^2}{\sigma^2} = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\zeta}\right)^2. \end{aligned}$$

Assim, substituindo na ação, obtemos

$$\tilde{S} = -\int \mathrm{d}\zeta\,\sigma(\zeta)\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\zeta}\right)^2 = -\int \mathrm{d}\zeta\, m\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\zeta} = -m\int \mathrm{d}x\,,$$

que seria a mesma ação para a partícula de massa m em unidades naturais e se $\mathrm{d}x = \mathrm{d}s$.

Exercício 8

Consideremos as equações de Maxwell em sua forma covariante

$$\partial_\mu F^{\nu\mu} = \mu_0 J^\nu \quad \text{e} \quad \partial^\rho \epsilon_{\rho\sigma\mu\nu} F^{\mu\nu} = 0,$$

onde o tensor de Faraday $F^{\mu\nu}$ tem suas componentes dadas por

$$F^{0i} = \frac{E^i}{c} \quad \text{e} \quad F^{ij} = \epsilon^{ijk} B_k,$$

com as demais dadas pela propriedade antissimétrica do tensor, isto é, $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$.

Substituindo $\nu = 0$ na primeira equação obtemos

$$\begin{aligned}
\partial_\mu F^{0\mu} = \mu_0 J^0 &\iff \partial_i F^{0i} = \mu_0 \rho c \\
&\iff \partial_i E^i = \mu_0 \rho c^2 \\
&\iff \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.
\end{aligned}$$

Para os outros índices, isto é, $\nu = j$, obtemos

$$\begin{aligned}
\partial_\mu F^{j\mu} = \mu_0 J^j &\iff \partial_0 F^{j0} + \partial_i F^{ji} = \mu_0 J^j \\
&\iff -\frac{1}{c^2}\frac{\partial E^j}{\partial t} + \partial_i \epsilon^{jik} B_k = \mu_0 J^j \\
&\iff -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E^j}{\partial t} - \partial_i \epsilon^{ijk} B_k = \mu_0 J^j \\
&\iff (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B})^j = \mu_0 \left(\boldsymbol{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \right)^j \\
&\iff \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \left(\boldsymbol{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \right).
\end{aligned}$$

Assim, mostramos que a primeira equação é equivalente à lei de Ampère-Maxwell e à lei de Gauss elétrica.

Substituindo $\sigma = 0$ na segunda equação obtemos

$$\begin{aligned}
\partial^\rho \epsilon_{\rho 0 \mu\nu} F^{\mu\nu} = 0 &\iff \partial^r \epsilon_{r0mn} F^{mn} = 0 \\
&\iff -\partial^r \epsilon_{0rmn} \epsilon^{mnl} B_l = 0 \\
&\iff \partial^r \epsilon_{rmn} \epsilon^{mnl} B_l = 0 \\
&\iff 2\partial^r \delta^l{}_r B_l = 0 \\
&\iff \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0.
\end{aligned}$$

Para os outros índices, $\sigma = s$, obtemos

$$\begin{aligned}
\partial^\rho \epsilon_{\rho s \mu\nu} F^{\mu\nu} = 0 &\iff \partial^0 \epsilon_{0smn} F^{mn} + \partial^r \epsilon_{rs\mu\nu} F^{\mu\nu} = 0 \\
&\iff 2\partial^0 \delta^k{}_s B_k + \partial^r \epsilon_{rs0\nu} F^{0\nu} + \partial^r \epsilon_{rsm\nu} F^{m\nu} = 0 \\
&\iff -\frac{2}{c}\frac{\partial B_s}{\partial t} + \partial^r \epsilon_{rs0n} F^{0n} + \partial^r \epsilon_{rsm0} F^{m0} + \partial^r \epsilon_{rsmn} F^{mn} = 0 \\
&\iff -\frac{2}{c}\frac{\partial B_s}{\partial t} + \frac{2}{c}\partial^r \epsilon_{rs0n} E^n = 0 \\
&\iff -\partial^r \epsilon_{srn} E^n = \frac{\partial B_s}{\partial t} \\
&\iff -(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E})_s = \frac{\partial B_s}{\partial t} \\
&\iff \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}.
\end{aligned}$$

Isto é, a segunda equação é equivalente à lei de Faraday e à lei de Gauss magnética.

Consideremos uma carga pontual estacionária em um referencial inercial S, em que o campo elétrico é dado por

$$\boldsymbol{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{\boldsymbol{r}},$$

então o tensor de Faraday neste referencial tem componentes

$$F^{0i} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(x_k x^k\right)^{-\frac{3}{2}} x^i \quad \text{e} \quad F^{ji} = 0.$$

Em um referencial S', que se move com velocidade $\boldsymbol{v} = v\hat{\boldsymbol{\imath}}$ em relação à S, o tensor de Faraday tem componentes dados por

$$\begin{aligned}
F'^{\sigma\rho} &= \Lambda^{\sigma}{}_{\mu}\Lambda^{\rho}{}_{\nu}F^{\mu\nu} \\
&= \Lambda^{\sigma}{}_{0}\Lambda^{\rho}{}_{n}F^{0n} + \Lambda^{\sigma}{}_{m}\Lambda^{\rho}{}_{0}F^{m0} + \Lambda^{\sigma}{}_{m}\Lambda^{\rho}{}_{n}F^{mn} \\
&= \left(\Lambda^{\sigma}{}_{0}\Lambda^{\rho}{}_{k} - \Lambda^{\sigma}{}_{k}\Lambda^{\rho}{}_{0}\right)F^{0k}.
\end{aligned}$$

Calculando-os explicitamente, obtemos

$$\begin{aligned}
F'^{01} &= \left(\gamma\Lambda^{1}{}_{k} + \gamma\beta\Lambda^{0}{}_{k}\right)F^{0k} \\
&= \left(\gamma^2 - \gamma^2\beta^2\right)F^{01} \\
&= F^{01}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
F'^{02} &= \left(\Lambda^{0}{}_{0}\Lambda^{2}{}_{k} - \Lambda^{0}{}_{k}\Lambda^{2}{}_{0}\right)F^{0k} \\
&= \gamma\Lambda^{2}{}_{k}F^{0k} \\
&= \gamma F^{02}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
F'^{03} &= \left(\Lambda^{0}{}_{0}\Lambda^{3}{}_{k} - \Lambda^{0}{}_{k}\Lambda^{3}{}_{0}\right)F^{0k} \\
&= \gamma\Lambda^{3}{}_{k}F^{0k} \\
&= \gamma F^{03}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F'^{12} &= \left(\Lambda^{1}{}_{0}\Lambda^{2}{}_{k} - \Lambda^{1}{}_{k}\Lambda^{2}{}_{0}\right)F^{0k} \\
&= -\gamma\beta\Lambda^{2}{}_{k}F^{0k} \\
&= -\gamma\beta F^{02}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
F'^{13} &= \left(\Lambda^{1}{}_{0}\Lambda^{3}{}_{k} - \Lambda^{1}{}_{k}\Lambda^{3}{}_{0}\right)F^{0k} \\
&= -\gamma\beta\Lambda^{3}{}_{k}F^{0k} \\
&= -\gamma\beta F^{03}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
F'^{23} &= \left(\Lambda^{2}{}_{0}\Lambda^{3}{}_{k} - \Lambda^{2}{}_{k}\Lambda^{3}{}_{0}\right)F^{0k} \\
&= 0
\end{aligned}$$

portanto os campos elétrico e magnético nesse referencial são dados por

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}' &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(x_k x^k\right)^{-\frac{3}{2}}\left(x^1\hat{\boldsymbol{\imath}} + \gamma x^2\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \gamma x^3\hat{\boldsymbol{k}}\right) \\
&= \frac{\gamma Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\gamma^2(x'+vt')^2 + (y')^2 + (z')^2\right)^{-\frac{3}{2}}\left((x'+vt')\hat{\boldsymbol{\imath}} + y'\hat{\boldsymbol{\jmath}} + z'\hat{\boldsymbol{k}}\right)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B}' &= \frac{\gamma v Q}{4\pi\epsilon_0 c^2}\left(x_k x^k\right)^{-\frac{3}{2}}\left(x^3\hat{\boldsymbol{\jmath}} - x^2\hat{\boldsymbol{k}}\right) \\
&= \frac{\mu_0\gamma v Q}{4\pi}\left(\gamma^2(x'+vt')^2 + (y')^2 + (z')^2\right)^{-\frac{3}{2}}\left(z'\hat{\boldsymbol{\jmath}} - y'\hat{\boldsymbol{k}}\right).
\end{aligned}$$