4300337 - Lista de Exercícios VI

Louis Bergamo Radial
8992822

28 de junho de 2024

Exercício 4

Relembremos o resultado obtido para os coeficientes da conexão de Levi-Civita no caso de uma métrica diagonal

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\lambda\lambda} = \frac{\partial_\lambda g_{\lambda\lambda}}{2g_{\lambda\lambda}}, \qquad \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\lambda} = \frac{\partial_\mu g_{\lambda\lambda}}{2g_{\lambda\lambda}}, \qquad \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\mu} = -\frac{\partial_\lambda g_{\mu\mu}}{2g_{\lambda\lambda}}, \qquad \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} = 0,$$

em que não utilizamos a convenção de soma de Einstein, portanto não há nenhuma soma nos termos acima. Recordemos também que, utilizando a convenção de soma, vale

$$\Gamma^{\mu}{}_{\mu\nu} = \frac{\partial_\nu\sqrt{-g}}{\sqrt{-g}},$$

onde g é o determinante da métrica.

Consideremos a métrica dada por $\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + a^2(t)\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x_i$, com $-g = a^6(t)$. Utilizando as expressões para os coeficientes da conexão, vemos que os termos $\Gamma^0{}_{0\lambda} = \Gamma^\lambda{}_{\lambda\lambda} = \Gamma^i{}_{\lambda\lambda} = \Gamma^i{}_{ij} = 0$, visto que estes termos envolvem derivadas em relação às coordenadas espaciais e que as componentes da métrica não têm dependência com essas variáveis. Resta apenas os coeficientes dados por

$$\Gamma^0{}_{ij} = a\dot{a}\delta_{ij} \quad \text{e} \quad \Gamma^i{}_{j0} = \frac{\dot{a}}{a}\delta^i_j,$$

onde $\dot{a} = \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}$. Da expressão para o tensor de curvatura de Riemann em coordenadas locais,

$$R^\sigma{}_{\mu\rho\nu} = \partial_\rho\Gamma^\sigma{}_{\nu\mu} - \partial_\nu\Gamma^\sigma{}_{\rho\mu} + \Gamma^\sigma{}_{\rho\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} - \Gamma^\sigma{}_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\rho\mu},$$

e das simetrias encontradas para os coeficientes da conexão, segue que o tensor de Ricci é

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu} = R^\sigma{}_{\mu\sigma\nu} &= \partial_\sigma\Gamma^\sigma{}_{\nu\mu} - \partial_\nu\Gamma^\sigma{}_{\sigma\mu} + \Gamma^\sigma{}_{\sigma\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} - \Gamma^\sigma{}_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\sigma\mu} \\
&= \partial_t\Gamma^0{}_{\nu\mu} - \delta^0_\nu\partial_t\left(\frac{\partial_\mu\sqrt{-g}}{\sqrt{-g}}\right) + \frac{\partial_\lambda\sqrt{-g}}{\sqrt{-g}}\Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} - \Gamma^0{}_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda{}_{0\mu} - \Gamma^i{}_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda{}_{i\mu} \\
&= \delta^m_\mu\delta^n_\nu\delta_{mn}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a\dot{a}) - \delta^0_\mu\delta^0_\nu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{3\dot{a}}{a}\right) + \frac{3\dot{a}}{a}\delta^m_\mu\delta^n_\nu\delta_{mn}a\dot{a} - \Gamma^0{}_{\nu j}\Gamma^j{}_{0\mu} - \Gamma^i{}_{\nu 0}\Gamma^0{}_{i\mu} - \Gamma^i{}_{\nu j}\Gamma^j{}_{i\mu} \\
&= \delta^m_\mu\delta^n_\nu\delta_{mn}\left(4\dot{a}^2 + a\ddot{a}\right) - \delta^0_\mu\delta^0_\nu\left(\frac{3\ddot{a}}{a} - \frac{3\dot{a}^2}{a^2}\right) - \delta^n_\nu\delta^m_\mu\delta_{mn}\dot{a}^2 - \delta^n_\nu\delta^m_\mu\delta_{mn}\dot{a}^2 - \delta^0_\nu\delta^0_\mu\frac{3\dot{a}^2}{a^2} \\
&= \delta^m_\mu\delta^n_\nu\delta_{mn}\left(2\dot{a}^2 + a\ddot{a}\right) - \delta^0_\mu\delta^0_\nu\left(\frac{3\ddot{a}}{a}\right),
\end{aligned}$$

isto é

$$R_{00} = -\frac{3\ddot{a}}{a}, \quad \text{e} \quad R_{ii} = a\ddot{a} + 2\dot{a}^2,$$

e todas as outras componentes nulas. Assim, o escalar de Ricci é dado por

$$\begin{aligned}
R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} &= \frac{3\ddot{a}}{a} + 3\frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2}{a^2} \\
&= 6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right),
\end{aligned}$$

logo o tensor de Einstein, $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$, tem suas componentes não nulas dadas por

$$G_{00} = 3\frac{\dot{a}^2}{a^2} \quad \text{e} \quad G_{ii} = -2a\ddot{a} - \dot{a}^2.$$

Consideremos as equações de Einstein no vácuo com uma constante cosmológica positiva Λ,

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0 \implies 3\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \Lambda = 0 \quad \text{e} \quad -2a\ddot{a} - \dot{a}^2 + \Lambda a^2 = 0.$$

Utilizando a primeira equação para eliminar o termo $\dot{a}^2$ na segunda equação, obtemos

$$-2a\left(\ddot{a} - \frac{\Lambda}{3}a\right) = 0.$$

Como $a \neq 0$ para que a métrica não seja singular, devemos ter que

$$a(t) = A\exp{(Ht)} + B\exp{(-Ht)},$$

onde $H = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}$ e $A, B \in \mathbb{R}$ são constantes não todas nulas. No caso particular de $B = 0$, a métrica seria, portanto,

$$\mathrm{d}s^2 = -\,\mathrm{d}t^2 + A^2 e^{2Ht}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x_i,$$

representando um Universo em expansão.

Neste caso, definimos o tempo conforme $\eta = -\frac{\exp(-Ht)}{H}$, que satisfaz $\dot{\eta} = -H\eta$, isto é,

$$\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}\eta}{H\eta} \implies \mathrm{d}t^2 = \frac{\mathrm{d}\eta^2}{H^2\eta^2}.$$

Deste modo, como $\exp{(2Ht)} = \left(H\eta\right)^{-2}$, temos

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{-\,\mathrm{d}\eta^2 + \,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x_i}{H^2\eta^2},$$

se tomarmos $A = 1$.

Interpretando $-\frac{\Lambda}{\kappa}g_{\mu\nu}$ como o tensor de energia e momento $T_{\mu\nu}$ das equações de Einstein sem constante cosmológica, temos de

$$T^{\mu}{}_{\nu} = (\rho + p)U^{\mu}U_{\nu} + p\delta^{\mu}{}_{\nu},$$

com $U^0 = H\eta$ e $U^i = 0$, que

$$\begin{aligned}\left(p + \frac{\Lambda}{\kappa}\right)\delta^{\mu}{}_{\nu} &= -(\rho + p)U^{\mu}U_{\nu} \\ &= (\rho + p)\delta^{\mu}_{0}\delta^{0}_{\nu}.\end{aligned}$$

Recordando que $\Lambda = 3H^2$, obtemos

$$\rho = \frac{3H^2}{\kappa} \quad \text{e} \quad p = -\frac{3H^2}{\kappa},$$

isto é, uma constante cosmológica positiva pode ser interpretada como um fluido com pressão negativa.