

# 4300337 - Lista de exercícios 3

Louis Bergamo Radial  
8992822

18 de abril de 2024

## Exercício 1

No contexto da mecânica Newtoniana, a massa inercial  $m_i$  de uma partícula é relacionada à força resultante que age nela pela segunda lei de Newton,  $F = m_i a$ . Com sua lei de gravitação, temos que a força gravitacional é dada por  $F_g = -m_g \nabla \Phi$ , onde  $m_g$  é a massa gravitacional e  $\Phi$  é o potencial gravitacional. O Princípio de Equivalência Fraco diz que a massa inercial inercial e a massa gravitacional são iguais, de modo que qualquer partícula em queda livre tem aceleração dada por  $a = -\nabla \Phi$ . A série de experimentos por Eötvös no fim do século XIX verificou o Princípio de Equivalência Fraco com precisão de  $5 \times 10^{-9}$ , enquanto que atualmente a precisão é da ordem de  $10^{-15}$ .

Ainda, em uma região suficientemente pequena, podemos aproximar o gradiente  $-\nabla \Phi$  para uma constante  $g$ , de modo que nesta região todas as partículas em queda livre têm aceleração uniforme igual a  $g$ . Assim, um campo gravitacional homogêneo é equivalente à uma aceleração do sistema de referência. O Princípio de Equivalência de Einstein diz que, em regiões suficientemente pequenas do espaço-tempo, vale a Relatividade Restrita e e que é impossível detectar a existência de um campo gravitacional por experimentos locais. Isto é, localmente um campo gravitacional é indistinguível à um referencial uniformemente acelerado, ilustrado pelo *Gedankenexperiment* do elevador de Einstein.

O Princípio de Equivalência Forte diz que para uma trajetória de uma partícula massiva em queda livre em um campo gravitacional qualquer, é possível escolher um sistema de coordenadas localmente inercial, de modo que, em uma região do espaço-tempo suficientemente pequena ao redor desta trajetória, todas as leis físicas são equivalentes às suas formulações em sistemas de referência não acelerados na ausência da gravidade.

## Exercício 2

Sobre um espaço vetorial  $V$  de dimensão  $n$ , tensores de segunda ordem têm um total de  $n^2$  componentes. Um tensor antissimétrico  $A_{\omega\rho}$  deve satisfazer  $A_{\omega\rho} = -A_{\rho\omega}$  para todo par de índices  $\omega, \rho$ . Assim, temos que as  $n$  componentes  $A_{\rho\rho}$  são nulas, e a condição das outras  $n^2 - n$  componentes,  $A_{\omega\rho} = -A_{\rho\omega}$  para  $\rho \neq \omega$ , reduz o número de componentes independentes para  $\frac{n^2-n}{2}$ . Semelhantemente, um tensor simétrico  $S^{\mu\nu}$  deve satisfazer  $S^{\mu\nu} = S^{\nu\mu}$  para todo par de índices  $\mu, \nu$ . Para  $\mu = \nu$ , esta condição é trivialmente satisfeita, de modo que o número de componentes independentes é  $\frac{n^2+n}{2}$ . Como exemplo, em um espaço vetorial de dimensão 4, tensores de segunda ordem antissimétricos têm seis componentes independentes e simétricos, dez.

Mostremos que a contração de um tensor simétrico com um tensor antissimétrico tem uma propriedade muito útil,  $S^{\omega\rho} A_{\omega\rho} = 0$ . Por antissimetria e simetria temos

$$S^{\omega\rho} A_{\omega\rho} = -S^{\omega\rho} A_{\rho\omega} = -S^{\rho\omega} A_{\rho\omega}.$$

Como os índices estão sendo somados, podemos renomeá-los. Em particular, podemos renomear na soma à direita  $\omega \rightarrow \rho$  e  $\rho \rightarrow \omega$ , obtendo

$$S^{\omega\rho} A_{\omega\rho} = -S^{\omega\rho} A_{\omega\rho},$$

isto é  $S^{\omega\rho} A_{\omega\rho} = 0$ .

### Exercício 3

#### Coordenadas esféricas em $\mathbb{R}^3$

Consideremos coordenadas esféricas para o espaço tridimensional Euclidiano, dadas por

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \cos \theta = \frac{z}{r}, \quad \text{e} \quad \tan \phi = \frac{y}{x}.$$

Alternativamente, temos

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad \text{e} \quad z = r \cos \theta,$$

de modo que os vetores da base no sistema de coordenadas esféricas são dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \frac{\partial x}{\partial r} \mathbf{e}_x + \frac{\partial y}{\partial r} \mathbf{e}_y + \frac{\partial z}{\partial r} \mathbf{e}_z \\ &= \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\theta &= \frac{\partial x}{\partial \theta} \mathbf{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \theta} \mathbf{e}_y + \frac{\partial z}{\partial \theta} \mathbf{e}_z \\ &= r \cos \theta \cos \phi \mathbf{e}_x + r \cos \theta \sin \phi \mathbf{e}_y - r \sin \theta \mathbf{e}_z, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\phi &= \frac{\partial x}{\partial \phi} \mathbf{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \phi} \mathbf{e}_y + \frac{\partial z}{\partial \phi} \mathbf{e}_z \\ &= -r \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_x + r \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_y. \end{aligned}$$

Com os vetores da base desse sistema de coordenadas, podemos obter os coeficientes da métrica por

$$g'_{ij} = g(\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}'_j),$$

utilizando os valores do tensor métrico na base de coordenadas cartesianas, dados por

$$g(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_x) = g(\mathbf{e}_y, \mathbf{e}_y) = g(\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_z) = 1$$

e os demais são iguais a zero. Assim, os coeficientes da métrica Euclidiana nas coordenadas esféricas são dados por

$$g'_{rr} = 1, \quad g'_{\theta\theta} = r^2, \quad \text{e} \quad g'_{\phi\phi} = r^2 \sin^2 \theta,$$

e as outras componentes nulas.

#### Coordenadas em rotação no espaço-tempo de Minkowski

Consideremos agora a métrica da relatividade restrita  $\eta_{\mu\nu}$  e as coordenadas em rotação

$$\begin{cases} t' = t \\ x' = \sqrt{x^2 + y^2} \cos(\phi - \omega t) \\ y' = \sqrt{x^2 + y^2} \sin(\phi - \omega t) \\ z' = z \end{cases}$$

onde  $\tan \phi = \frac{y}{x}$ . Notemos que

$$x' = x \cos \omega t + y \sin \omega t \quad \text{e} \quad y' = -x \sin \omega t + y \cos \omega t$$

então ao tomar combinações lineares das equações acima e utilizando  $t' = t$ , temos

$$\begin{cases} t = t' \\ x = x' \cos \omega t' - y' \sin \omega t' \\ y = x' \sin \omega t' + y' \cos \omega t' \\ z = z' \end{cases}.$$

Assim, os vetores da base são dados por  $e_{\mu'} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\mu'}} e_{\nu}$ , isto é,

$$\begin{cases} e_{0'} = e_0 - \omega(x' \sin \omega t' + y' \cos \omega t') e_1 + \omega(x' \cos \omega t' - y' \sin \omega t') e_2 \\ e_{1'} = \cos \omega t' e_1 + \sin \omega t' e_2 \\ e_{2'} = -\sin \omega t' e_1 + \cos \omega t' e_2 \\ e_{3'} = e_3 \end{cases}.$$

Utilizando a bilinearidade do tensor métrico e que  $g(e_{\mu}, e_{\nu}) = \eta_{\mu\nu}$ , temos que

$$g_{\mu'\nu'} = \begin{pmatrix} -1 + \omega^2(x'^2 + y'^2) & -\omega y' & \omega x' & 0 \\ -\omega y' & 1 & 0 & 0 \\ \omega x' & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{\mu'\nu'}$$

são os componentes da métrica nas coordenadas em rotação. Desse modo, obtemos as componentes da métrica inversa  $g^{\mu'\nu'}$  por escalonamento, resultando em

$$g^{\mu'\nu'} = \begin{pmatrix} -1 & -\omega y' & \omega x' & 0 \\ -\omega y' & 1 - \omega^2 y'^2 & \omega^2 x' y' & 0 \\ \omega x' & \omega^2 x' y' & 1 - \omega^2 x'^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\mu'\nu'}.$$

## Exercício 4

Para uma conexão de Levi-Civita, isto é, simétrica e compatível com o tensor métrico, os seus coeficientes  $\Gamma^{\rho}_{\alpha\beta}$  são dados por

$$\Gamma^{\rho}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_{\sigma} g_{\alpha\beta} - \partial_{\alpha} g_{\beta\sigma} - \partial_{\beta} g_{\sigma\alpha})$$

para todas as triplas de índices  $\rho, \alpha, \beta$ .

Para uma métrica diagonal, isto é,  $g_{\mu\nu} = 0 \iff \mu \neq \nu$ , temos  $g^{\mu\nu} = 0 \iff \mu \neq \nu$ , de modo que os coeficientes da conexão são dados por

$$\Gamma^{\rho}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2g_{\rho\rho}} (\partial_{\rho} g_{\alpha\beta} - \partial_{\alpha} g_{\beta\rho} - \partial_{\beta} g_{\rho\alpha})$$

neste caso, e nesta expressão índices repetidos não são somados. Podemos simplificar adiante separando em casos: sejam  $\mu, \nu, \lambda$  índices todos distintos, então

$$\begin{aligned} \Gamma^{\lambda}_{\lambda\lambda} &= -\frac{1}{2g_{\lambda\lambda}} (\partial_{\lambda} g_{\lambda\lambda} - \partial_{\lambda} g_{\lambda\lambda} - \partial_{\lambda} g_{\lambda\lambda}) & \Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda} &= -\frac{1}{2g_{\lambda\lambda}} (\partial_{\lambda} g_{\mu\lambda} - \partial_{\mu} g_{\lambda\lambda} - \partial_{\lambda} g_{\lambda\mu}) \\ &= \frac{\partial_{\lambda} g_{\lambda\lambda}}{2g_{\lambda\lambda}} = \partial_{\lambda} \ln \sqrt{|g_{\lambda\lambda}|} & &= \frac{\partial_{\mu} g_{\lambda\lambda}}{2g_{\lambda\lambda}} = \partial_{\mu} \ln \sqrt{|g_{\lambda\lambda}|} \\ \Gamma^{\lambda}_{\mu\mu} &= -\frac{1}{2g_{\lambda\lambda}} (\partial_{\lambda} g_{\mu\mu} - \partial_{\mu} g_{\mu\lambda} - \partial_{\mu} g_{\lambda\mu}) & \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} &= -\frac{1}{2g_{\lambda\lambda}} (\partial_{\lambda} g_{\mu\nu} - \partial_{\mu} g_{\nu\lambda} - \partial_{\nu} g_{\lambda\mu}) \\ &= -\frac{\partial_{\lambda} g_{\mu\mu}}{2g_{\lambda\lambda}} & &= 0 \end{aligned}$$

são todos os coeficientes da conexão para o caso de uma métrica diagonal.

## Exercício 5

Utilizando os resultados do exercício anterior, os coeficientes da conexão de Levi-Civita para as coordenadas esféricas no espaço Euclidiano são dados por

$$\begin{aligned}\Gamma^r_{\theta\theta} &= -\frac{\partial_r(r^2)}{2} = -r & \Gamma^r_{\phi\phi} &= -\frac{\partial_r(r^2 \sin^2 \theta)}{2} = -r \sin^2 \theta \\ \Gamma^\theta_{\theta r} &= \frac{\partial_r(r^2)}{2r^2} = \frac{1}{r} & \Gamma^\theta_{\phi\phi} &= -\frac{\partial_\theta(r^2 \sin^2 \theta)}{2r^2} = -\sin \theta \cos \theta \\ \Gamma^\phi_{\phi r} &= \frac{\partial_r(r^2 \sin^2 \theta)}{r^2 \sin^2 \theta} = \frac{1}{r} & \Gamma^\phi_{\phi\theta} &= \frac{\partial_\theta(r^2 \sin^2 \theta)}{r^2 \sin^2 \theta} = \cot \theta,\end{aligned}$$

e os outros termos são ou nulos ou obtidos pela simetria da conexão.

Seja uma curva

$$\begin{aligned}\gamma : I \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \lambda &\mapsto (x^r(\lambda), x^\theta(\lambda), x^\phi(\lambda)).\end{aligned}$$

Assim, para que  $\gamma$  seja uma geodésica, devemos ter

$$\frac{d^2 x^k}{d\lambda^2} + \Gamma^k_{ij} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda} = 0$$

para  $k$  igual a  $r$ ,  $\theta$  e  $\phi$ . Assim, de forma explícita, as equações da geodésica são dadas por

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta = 0 \\ \ddot{\theta} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta} - \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta = 0 \\ \ddot{\phi} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\phi} + 2\dot{\phi}\dot{\theta} \cot \theta = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta = 0 \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta = 0 \\ r\ddot{\phi} \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\phi} + 2\dot{\phi}\dot{\theta} \cos \theta = 0 \end{cases},$$

onde, para simplificar, denotamos  $r = x^r$ ,  $\theta = x^\theta$  e  $\phi = x^\phi$  e os pontos sobre as variáveis denotam que estas funções componente foram derivadas em relação ao parâmetro afim  $\lambda$ .

Em analogia ao movimento de uma partícula em mecânica clássica, sabemos que as equações acima especificam uma partícula se movendo ao longo de uma curva  $\gamma$  com aceleração nula, isto é, cada equação é uma componente da aceleração desta partícula. Desse modo, como o parâmetro  $\lambda$  é afim, uma vez que buscamos uma geodésica, sabemos que o vetor tangente à curva é constante. Integrando mais uma vez, obtemos que a solução deste sistema de equações é uma reta.

## Exercício 6

Um espaço topológico é uma dupla  $(M, \mathcal{O}_M)$  composta por um conjunto  $M$  e uma topologia  $\mathcal{O}_M$ . Um subconjunto  $U$  de  $M$  é dito ser aberto em relação a este espaço topológico se  $U \in \mathcal{O}_M$ . Uma aplicação  $f : M \rightarrow N$  entre espaços topológicos  $(M, \mathcal{O}_M)$  e  $(N, \mathcal{O}_N)$  é dita contínua se sua pré-imagem de um aberto é aberta, e é dita um homeomorfismo se for bijetiva e tanto  $f$  quanto  $f^{-1}$  forem contínuas. Se existe um homeomorfismo entre dois espaços topológicos, estes são ditos homeomorfos.

Se existe um número inteiro  $n$  tal que todo aberto  $U \in \mathcal{O}_M$  é homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ , em relação à topologia usual do espaço Euclidiano, dizemos que  $(M, \mathcal{O}_M)$  é um espaço topológico localmente Euclidiano de dimensão  $n$ . Ainda, para cada aberto  $U \in \mathcal{O}_M$  existe um homeomorfismo  $x : U \rightarrow x(U) \subset \mathbb{R}^n$ , e chamamos o par  $(U, x)$  de carta local. Um atlas  $\mathcal{A}_M$  é uma coleção de cartas locais tal que a união dos abertos cobre o conjunto  $M$ .

Consideremos agora duas cartas  $(U, x), (V, y) \in \mathcal{A}_M$  tal que  $U \cap V \neq \emptyset$ .

$$\begin{array}{ccc} & U \cap V & \\ x \swarrow & & \searrow y \\ x(U \cap V) & \xrightarrow{y \circ x^{-1}} & y(U \cap V) \end{array}$$

Como uma composição de homeomorfismos, segue que a aplicação de transição  $y \circ x^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um homeomorfismo, isto é, contínua. Como uma função em  $\mathbb{R}^n$ , podemos utilizar análise usual para decidir se esta função é diferenciável. Duas cartas locais  $(U, x), (V, y)$  são ditas  $C^k$ -compatíveis se ou  $U \cap V \neq \emptyset$  e a aplicação de transição  $y \circ x^{-1}$  é de classe  $C^k$  ou se  $U \cap V = \emptyset$ . Ainda, um atlas é dito  $C^k$ -compatível se todo par de cartas locais são  $C^k$ -compatíveis.

Uma variedade diferenciável  $(M, \mathcal{O}_M, \mathcal{A}_M)$  é um espaço topológico  $(M, \mathcal{O}_M)$  localmente Euclidiano munido de um atlas maximal suave  $\mathcal{A}_M$ , isto é, um atlas  $C^\infty$ -compatível com a propriedade de que se uma carta  $(U, x)$  é compatível com uma carta  $(V, y) \in \mathcal{A}_M$ , então  $(U, x) \in \mathcal{A}_M$ . A estrutura diferencial dada pelo atlas permite definir em todo ponto  $p \in M$  um espaço vetorial  $T_p M$ , chamado de espaço tangente no ponto  $p$ , cujos elementos são derivações na álgebra  $C^\infty(M)$  de funções suaves  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Geometricamente, cada elemento  $X \in T_p M$  é um operador de derivada direcional ao longo de alguma curva suave  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  que passa por  $p = \gamma(0)$ . O espaço dual  $T_p^* M$  é chamado de espaço cotangente no ponto  $p$ , cujos elementos são relacionados com as curvas de nível de funções suaves  $C^\infty(M)$ .

Utilizando o atlas da variedade, podemos definir um atlas para a união disjunta dos espaços tangentes, construindo assim o fibrado tangente  $TM$ , que é também uma variedade diferenciável. Uma aplicação suave  $p \mapsto X_p$  que associa um ponto  $p$  da variedade a um vetor  $X_p \in T_p M \subset TM$  do fibrado tangente é chamada de campo de vetores. Analogamente, definimos o fibrado cotangente  $T^*M$ , em que uma aplicação suave  $p \mapsto \omega_p$  que associa um ponto  $p \in M$  a um elemento  $\omega_p \in T_p^* M \subset T^*M$  é chamada de 1-forma diferencial, ou campo de covetores. Uma função multilinear de campos de vetores e de 1-formas diferenciais é chamada de tensor na variedade.

Resumindo de forma mais informal, uma variedade diferenciável é um conjunto  $M$  que localmente se parece com algum espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^n$ , e no qual podemos definir ponto a ponto um espaço vetorial, que é intimamente relacionado à estrutura diferencial fornecida à  $M$  por um atlas de cartas de coordenadas locais. Um tensor no contexto de uma variedade diferenciável é uma função multilinear de vetores e 1-formas definida em todo ponto da variedade.

## Exercício 7

Consideremos duas cartas locais de coordenadas locais  $(U, x)$  e  $(U, x')$ , com

$$\partial_\alpha = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \partial'_\mu \quad \text{e} \quad g_{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} g'_{\mu\nu}.$$

Pela definição dos coeficientes da conexão de Levi-Civita em uma carta  $\tilde{x}$ ,

$$\tilde{\Gamma}^\lambda_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} \tilde{g}^{\lambda\omega} \left( \tilde{\partial}_\rho \tilde{g}_{\omega\sigma} + \tilde{\partial}_\sigma \tilde{g}_{\omega\rho} - \tilde{\partial}_\omega \tilde{g}_{\rho\sigma} \right),$$

podemos obter a transformação destes coeficientes. Temos

$$\begin{aligned} \partial_\gamma g_{\alpha\beta} &= \partial_\gamma \left( \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} g'_{\mu\nu} \right) \\ &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \partial_\gamma g'_{\mu\nu} + g'_{\mu\nu} \partial_\gamma \left( \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \right) \\ &= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \partial'_\lambda g'_{\mu\nu} + g'_{\mu\nu} \left( \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\gamma \partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\gamma \partial x^\beta} \right) \end{aligned}$$

portanto, por permutações cíclicas de  $\alpha, \beta, \gamma$  e renomeando alguns índices que estão sendo somados, temos

$$\begin{aligned} \partial_\alpha g_{\beta\gamma} &= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\gamma} \partial'_\lambda g'_{\mu\nu} + g'_{\mu\nu} \left( \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta} \frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} \right) \\ &= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \partial'_\mu g'_{\nu\lambda} + g'_{\nu\mu} \left( \frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} \right) \\ &= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \partial'_\mu g'_{\nu\lambda} + g'_{\mu\nu} \left( \frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} \right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\partial_\beta g_{\gamma\alpha} &= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\beta} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\alpha} \partial'_\lambda g'_{\mu\nu} + g'_{\mu\nu} \left( \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\gamma} \frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} \right) \\
&= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \partial'_\nu g'_{\lambda\mu} + g'_{\nu\mu} \frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} + g'_{\mu\nu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\gamma} \frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} \\
&= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \partial'_\nu g'_{\lambda\mu} + g'_{\mu\nu} \left( \frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\gamma} \frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} \right),
\end{aligned}$$

onde utilizamos que as componentes da métrica são simétricos. Utilizando o guia dos termos sublinhados, obtemos a transformação dos coeficientes da conexão sob mudança de cartas,

$$\begin{aligned}
\Gamma^\rho_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} g^{\rho\gamma} (\partial_\alpha g_{\beta\gamma} + \partial_\beta g_{\gamma\alpha} - \partial_\gamma g_{\alpha\beta}) \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\xi} g'^{\sigma\xi} \right) \left[ \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \left( \partial'_\mu g'_{\nu\lambda} + \partial'_\nu g'_{\lambda\mu} - \partial'_\lambda g'_{\mu\nu} \right) + 2g'_{\mu\nu} \left( \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\gamma} \right) \right] \\
&= \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\xi} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} g'^{\sigma\xi} \left( \partial'_\mu g'_{\nu\lambda} + \partial'_\nu g'_{\lambda\mu} - \partial'_\lambda g'_{\mu\nu} \right) + \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\xi} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\gamma} g'^{\sigma\xi} g'_{\mu\nu} \left( \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \right) \right] \\
&= \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \delta^\lambda_\xi g'^{\sigma\xi} \left( \partial'_\mu g'_{\nu\lambda} + \partial'_\nu g'_{\lambda\mu} - \partial'_\lambda g'_{\mu\nu} \right) + \delta^\nu_\xi g'^{\sigma\xi} g'_{\mu\nu} \left( \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \right) \right] \\
&= \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \left[ \frac{1}{2} g'^{\sigma\lambda} \left( \partial'_\mu g'_{\nu\lambda} + \partial'_\nu g'_{\lambda\mu} - \partial'_\lambda g'_{\mu\nu} \right) \right] + \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} g'^{\sigma\nu} g'_{\mu\nu} \left( \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \right) \\
&= \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \Gamma'^\sigma_{\mu\nu} + \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial^2 x'^\sigma}{\partial x^\alpha \partial x^\beta},
\end{aligned}$$

então pela presença do termo afim  $\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial^2 x'^\sigma}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}$  não necessariamente nulo, estes coeficientes não se transformam como tensores.

Para um vetor  $V^\rho$ , consideremos o objeto  $\partial_\alpha V^\rho$  na carta local de coordenadas  $x$ . Em outra carta de coordenadas  $x'$ , temos

$$V^\rho = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} V'^\nu,$$

de modo que

$$\begin{aligned}
\partial_\alpha V^\rho &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \partial'_\mu \left( \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} V'^\sigma \right) \\
&= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \partial'_\mu V'^\sigma + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu \partial x'^\sigma} V'^\sigma,
\end{aligned}$$

e por conta do termo afim  $\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu \partial x'^\sigma} V'^\sigma$  não necessariamente nulo, este objeto não se transforma como um tensor.

Mostremos que  $\nabla_\alpha V^\rho = \partial_\alpha V^\rho + \Gamma^\rho_{\alpha\beta} V^\beta$  se transforma como um tensor. Notemos que

$$\begin{aligned}
\Gamma^\rho_{\alpha\beta} V^\beta &= \left( \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \Gamma'^\sigma_{\mu\nu} + \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial^2 x'^\sigma}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \right) V^\beta \\
&= \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \Gamma'^\sigma_{\mu\nu} V'^\nu + \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial^2 x'^\sigma}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} V^\beta.
\end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}
\nabla_\alpha V^\rho &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \left( \partial'_\mu V'^\sigma + \Gamma'^\sigma_{\mu\nu} V'^\nu \right) + \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial^2 x'^\sigma}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} V^\beta + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu \partial x'^\sigma} V'^\sigma \\
&= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \nabla'_\mu V'^\sigma + \left( \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial^2 x'^\sigma}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} + \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\beta} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu \partial x'^\sigma} \right) V^\beta \\
&= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \nabla'_\mu V'^\sigma + \left( \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\beta} + \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\beta} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \right) V^\beta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \nabla'_\mu V'^\sigma + \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left( \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\beta} \right) V^\beta \\
&= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \nabla'_\mu V'^\sigma + \left( \partial_\alpha \delta^\rho_\beta \right) V^\beta \\
&= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \nabla'_\mu V'^\sigma,
\end{aligned}$$

já que o  $\partial_\alpha \delta^\rho_\beta = 0$ . Segue que este objeto se transforma como um tensor.

Para um tensor  $Q^\rho_\tau$ , a sua derivada covariante é dada por

$$\nabla_\alpha Q^\rho_\tau = \partial_\alpha Q^\rho_\tau + \Gamma^\rho_{\alpha\beta} Q^\beta_\tau - \Gamma^\gamma_{\alpha\tau} Q^\rho_\gamma.$$

Em relação à carta de coordenadas  $x'$ , temos

$$\begin{aligned}
\partial_\alpha Q^\rho_\tau &= \partial_\alpha \left( \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\xi}{\partial x^\tau} Q'^\sigma_\xi \right) \\
&= \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\xi}{\partial x^\tau} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \partial'_\mu Q'^\sigma_\xi + \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial^2 x'^\xi}{\partial x^\alpha \partial x^\tau} Q'^\sigma_\xi + \frac{\partial x'^\xi}{\partial x^\tau} Q'^\sigma_\xi \partial_\alpha \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \\
&= \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\xi}{\partial x^\tau} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \partial'_\mu Q'^\sigma_\xi + \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial^2 x'^\xi}{\partial x^\alpha \partial x^\tau} Q'^\sigma_\xi + \frac{\partial x'^\xi}{\partial x^\tau} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\xi} Q^\beta_\delta \partial_\alpha \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \\
&= \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\xi}{\partial x^\tau} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \partial'_\mu Q'^\sigma_\xi + \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial^2 x'^\xi}{\partial x^\alpha \partial x^\tau} Q'^\sigma_\xi + \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\beta} Q^\beta_\tau \partial_\alpha \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^\rho_{\alpha\beta} Q^\beta_\tau &= \left( \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \Gamma'^\sigma_{\mu\nu} + \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial^2 x'^\sigma}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \right) Q^\beta_\tau \\
&= \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \Gamma'^\sigma_{\mu\nu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x'^\xi}{\partial x^\tau} Q'^\lambda_\xi + \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial^2 x'^\sigma}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} Q^\beta_\tau \\
&= \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\xi}{\partial x^\tau} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \Gamma'^\sigma_{\mu\nu} Q'^\nu_\xi + \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} Q^\beta_\tau \partial_\alpha \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\beta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^\gamma_{\alpha\tau} Q^\rho_\gamma &= \left( \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\omega} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\xi}{\partial x^\tau} \Gamma'^\omega_{\mu\xi} + \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\omega} \frac{\partial^2 x'^\omega}{\partial x^\alpha \partial x^\tau} \right) \left( \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\zeta}{\partial x^\gamma} Q'^\sigma_\zeta \right) \\
&= \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\omega} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\xi}{\partial x^\tau} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\zeta}{\partial x^\gamma} \Gamma'^\omega_{\mu\xi} Q'^\sigma_\zeta + \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\omega} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\zeta}{\partial x^\gamma} Q'^\sigma_\zeta \frac{\partial^2 x'^\omega}{\partial x^\alpha \partial x^\tau} \\
&= \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\xi}{\partial x^\tau} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \Gamma'^\sigma_{\mu\xi} Q'^\sigma_\zeta + \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} Q'^\sigma_\zeta \frac{\partial^2 x'^\omega}{\partial x^\alpha \partial x^\tau}
\end{aligned}$$

Assim, ao somar os dois primeiros termos e subtrair o terceiro, os termos sublinhados em verde são cancelados e os termos sublinhados em laranja também uma vez que

$$\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\beta} \partial_\alpha \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} + \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \partial_\alpha \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\beta} = \partial_\alpha \delta^\rho_\beta = 0,$$

portanto segue que restam apenas os termos sublinhados em rosa, obtendo

$$\nabla_\alpha Q^\rho_\tau = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\xi}{\partial x^\tau} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \left( \partial'_\mu Q'^\sigma_\xi + \Gamma'^\sigma_{\mu\nu} Q'^\nu_\xi + \Gamma'^\zeta_{\mu\xi} Q'^\sigma_\zeta \right) = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\xi}{\partial x^\tau} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \nabla'_\alpha Q'^\sigma_\xi.$$

Dessa forma, verificamos a transformação tensorial da derivada covariante de um tensor  $Q^\rho_\tau$ .

## Exercício 8

Consideremos a  $D$ -forma  $dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^{D-1}$ , então em outra carta de coordenadas  $x'$ , temos

$$\begin{aligned} dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^{D-1} &= \left( \frac{\partial x^0}{\partial x'^{\mu_0}} dx'^{\mu_0} \right) \wedge \cdots \wedge \left( \frac{\partial x^{D-1}}{\partial x'^{\mu_{D-1}}} dx'^{\mu_{D-1}} \right) \\ &= \epsilon^{\mu_0 \cdots \mu_{D-1}} \left( \frac{\partial x^0}{\partial x'^{\mu_0}} \cdots \frac{\partial x^{D-1}}{\partial x'^{\mu_{D-1}}} \right) dx'^0 \wedge \cdots \wedge dx'^{D-1} \\ &= J dx'^0 \wedge \cdots \wedge dx'^{D-1}, \end{aligned}$$

onde  $J$  é o determinante do jacobiano  $\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta}$ , isto é,  $J = \epsilon^{\mu_0 \cdots \mu_{D-1}} \frac{\partial x^0}{\partial x'^{\mu_0}} \cdots \frac{\partial x^{D-1}}{\partial x'^{\mu_{D-1}}}$ .

Consideremos agora a transformação da métrica  $g_{\mu\nu}$  das coordenadas  $x$  para as coordenadas  $x'$

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} g'_{\alpha\beta}.$$

Notemos que podemos arranjar esta última equação como uma multiplicação matricial

$$(g_{\mu\nu}) = \left( \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \right)^\top (g'_{\alpha\beta}) \left( \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} \right),$$

donde segue que

$$g = J^{-2} g',$$

onde  $g$  e  $g'$  são os valores absolutos dos determinantes das matrizes que representam a métrica nas cartas de coordenadas locais  $x$  e  $x'$ . Desse modo, o objeto  $\sqrt{g}$  se transforma de forma inversa à  $D$ -forma considerada. Nesse caso, obtemos a regra de transformação

$$\sqrt{g} dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^{D-1} = \sqrt{g'} dx'^0 \wedge \cdots \wedge dx'^{D-1},$$

isto é,  $\sqrt{g} dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^{D-1}$  se transforma como um escalar, então podemos utilizar este objeto como uma medida invariante para integrais em uma variedade.

Por exemplo, consideremos o círculo unitário submerso no plano Euclidiano  $S^1 \subset \mathbb{R}^2$  e a carta

$$\begin{aligned} \psi : S^1 \setminus \{(1, 0)\} &\subset \mathbb{R}^2 \rightarrow (0, 2\pi) \\ (\cos \theta, \sin \theta) &\mapsto \theta. \end{aligned}$$

Então o vetor da base induzida por esta carta é  $e_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta)$ , que é unitário em relação à métrica Euclidiana. Isto é, a métrica induzida em  $S^1$  é dada por seu único elemento  $g_{\theta\theta} = 1$ , e cujo determinante é  $g = 1$ . Desse modo, o elemento de linha para o círculo unitário é  $ds = \sqrt{g} d\theta = d\theta$ , como esperado.

Com a medida invariante podemos também determinar volumes invariantes **TODO preciso entender o enunciado melhor**.

## Exercício 9

Notemos que a derivada direcional  $W^\mu \partial_\mu \phi$  para um campo escalar  $\phi$  na direção dada pelo campo vetorial  $W$  é um escalar. De fato, em relação à outra carta de coordenadas temos

$$W^\mu \partial_\mu \phi = \left( \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} W'^\alpha \right) \left( \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\mu} \partial'_\beta \right) \phi = W'^\alpha \partial'_\alpha \phi,$$

uma vez que o campo escalar é independente da escolha de cartas.

Desse modo, com o resultado do exercício anterior, segue que a integral

$$\int_M d^D x \sqrt{g} W^\mu \partial_\mu \phi$$



é invariante. Suponhamos agora que o suporte de  $\phi$  é contido no domínio de uma carta  $x$ , então por integração por partes temos

$$\begin{aligned}\int_M d^D x \sqrt{g} W^\mu \partial_\mu \phi &= \int_{\partial M} d^{D-1} x \sqrt{g} n_\mu W^\mu \phi - \int_M d^D x \phi \partial_\mu (\sqrt{g} W^\mu) \\ &= \int_{\partial M} d^{D-1} x \sqrt{g} n_\mu W^\mu \phi - \int_M d^D x \sqrt{g} \phi \frac{\partial_\mu (\sqrt{g} W^\mu)}{\sqrt{g}}\end{aligned}$$

onde  $n_\mu$  é a 1-forma definida pela fronteira  $\partial M$ . Equivalentemente temos

$$\int_{\partial M} d^{D-1} x \sqrt{g} n_\mu W^\mu \phi = \int_M d^D x \sqrt{g} \left[ W^\mu \partial_\mu \phi + \phi \frac{\partial_\mu (\sqrt{g} W^\mu)}{\sqrt{g}} \right],$$

então pelo teorema do divergente,

$$\int_{\partial M} d^{D-1} x \sqrt{g} n_\mu W^\mu \phi = \int_M d^D x \sqrt{g} \operatorname{div}(\phi W),$$

segue que

$$\operatorname{div}(\phi W) = W^\mu \partial_\mu \phi + \phi \frac{\partial_\mu (\sqrt{g} W^\mu)}{\sqrt{g}}.$$

Pela propriedade do divergente

$$\operatorname{div}(\phi W) = W^\mu \partial_\mu \phi + \phi \operatorname{div}(W) = W^\mu \partial_\mu \phi + \phi \operatorname{div}(W),$$

obtemos

$$\underline{W^\mu \partial_\mu \phi} + \phi \operatorname{div}(W) = \underline{W^\mu \partial_\mu \phi} + \phi \frac{\partial_\mu (\sqrt{g} W^\mu)}{\sqrt{g}} \implies \phi \left[ \operatorname{div}(W) - \frac{\partial_\mu (\sqrt{g} W^\mu)}{\sqrt{g}} \right] = 0.$$

Como o campo escalar é arbitrário, temos

$$\operatorname{div}(W) = \frac{\partial_\mu (\sqrt{g} W^\mu)}{\sqrt{g}}.$$

Notemos que

$$\operatorname{div}(W) = \partial_\mu W^\mu + \frac{\partial_\nu \sqrt{g}}{\sqrt{g}} W^\nu.$$

Nas coordenadas normais de Riemann, temos  $\tilde{g} = 1$  e  $\tilde{\partial}_\mu \tilde{g} = 0$ , portanto

$$\operatorname{div}(W) = \tilde{\partial}_\mu \tilde{W}^\mu.$$

Assim, em uma carta de coordenadas arbitrária temos

$$\operatorname{div}(W) = \nabla_\mu W^\mu.$$

Comparando  $\nabla_\mu W^\mu = \partial_\mu W^\mu + \Gamma^\mu_{\mu\nu} W^\nu$  com a expressão para o divergente, temos

$$\Gamma^\mu_{\mu\nu} = \frac{\partial_\nu \sqrt{g}}{\sqrt{g}}.$$

Substituindo  $W^\mu$  pelo gradiente de um campo escalar  $(\operatorname{grad} \psi)^\mu = g^{\mu\nu} \partial_\nu \psi$ , obtemos a expressão para o seu laplaciano, dado por

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \psi = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu (\sqrt{g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \psi).$$

Podemos utilizar estas identidades para encontrar as expressões para o divergente e laplaciano em coordenadas esféricas para o espaço Euclidiano,

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2,$$

onde a métrica tem determinante dado por  $g = r^4 \sin^2 \theta$ . Para um campo de vetores  $W = W^r \mathbf{e}_r + r W^\theta \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} + r \sin \theta W^\varphi \mathbf{e}_\varphi$ , temos

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(W) &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\mu (r^2 \sin \theta W^\mu) \\ &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_r (r^2 \sin \theta W^r) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta (r^2 \sin \theta W^\theta) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\varphi (r^2 \sin \theta W^\varphi) \\ &= \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 W^r) + \frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta W^\theta) + \partial_\varphi W^\varphi \end{aligned}$$

## Exercício 10