Exercícios de Geometria Diferencial

Louis Bergamo Radial

15 de abril de 2024

1 Espaços topológicos

Definição 1.1: Topologia

Uma topologia no conjunto M é uma coleção $\mathcal{O}_M$ de subconjuntos de M satisfazendo os axiomas

(a) o conjunto vazio e o conjunto M pertencem a $\mathcal{O}_M$;

(b) uma interseção finita de elementos de $\mathcal{O}_M$ pertence a $\mathcal{O}_M$; e

(c) uma união arbitrária de elementos de $\mathcal{O}_M$ pertence a $\mathcal{O}_M$.

O par $(M, \mathcal{O}_M)$ é denominado um *espaço topológico* e subconjuntos de M que pertencem à topologia $\mathcal{O}_M$ são chamados *conjuntos abertos*. Se um subconjunto U é tal que o seu complemento $M \setminus U$ é aberto, então dizemos que U é um *conjunto fechado*. Adicionalmente, dado um elemento $p \in M$, um conjunto aberto V que contém p é dito uma *vizinhança* de p.

Exercício 1.1: Topologia usual do $\mathbb{R}^n$

Definimos a *bola aberta $B_r(p) \subset \mathbb{R}^n$ de raio $r > 0$ centrado no ponto $p = (p^1, \ldots, p^n) \in \mathbb{R}^n$* como o conjunto

$$B_r(p) = \left\{q = (q^1, \ldots, q^n) \in \mathbb{R}^n : \|p - q\| < r\right\},$$

onde $\|p - q\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(p^i - q^i\right)^2}$. Verifique que $\mathcal{O}_{\text{usual}}$ é uma topologia para $\mathbb{R}^n$, onde $U \in \mathcal{O}_{\text{usual}}$ se para todo ponto $x \in U$ existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset U$.

Proposição 1.1: Topologia de subespaço

Dado um espaço topológico $(M, \mathcal{O}_M)$ e um subconjunto $S \subset M$, definimos a *topologia de subespaço $\mathcal{O}_M|_S$* como

$$\mathcal{O}_M|_S = \{U \cap S : U \in \mathcal{O}_M\}.$$

Então $(S, \mathcal{O}_M|_S)$ é um espaço topológico.

Demonstração. Devemos mostrar que os axiomas da Definição 1.1 são satisfeitos.

(a) Como $S = M \cap S$ e $\emptyset = \emptyset \cap S$, temos $S \in \mathcal{O}_M|_S$ e $\emptyset \in \mathcal{O}_M|_S$.

(b) Seja $U, V \in \mathcal{O}_M|_S$. Então, existem $\tilde{U}, \tilde{V} \in \mathcal{O}_M$ tais que $U = \tilde{U} \cap S$ e $V = \tilde{V} \cap S$. Assim, $U \cap V = (\tilde{U} \cap S) \cap (\tilde{V} \cap S) = (\tilde{U} \cap \tilde{V}) \cap S$. Como $\tilde{U} \cap \tilde{V} \in \mathcal{O}_M$, devemos ter $U \cap V \in \mathcal{O}_M|_S$.

(c) Seja $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ uma família de conjuntos abertos de $\mathcal{O}_M|_S$. Para cada $\alpha \in J$, existe $\tilde{U}_\alpha \in \mathcal{O}_M$ tal que $U_\alpha = \tilde{U}_\alpha \cap S$. Então

$$\begin{aligned}
\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha &= \bigcup_{\alpha \in J} \tilde{U}_\alpha \cap S \\
&= \{m \in S : \exists \alpha \in J \text{ tal que } m \in \tilde{U}_\alpha\} \\
&= \{m \in M : \exists \alpha \in J \text{ tal que } m \in \tilde{U}_\alpha\} \cap S \\
&= S \cap \bigcup_{\alpha \in J} \tilde{U}_\alpha .
\end{aligned}$$

Como a união arbitrária de conjuntos abertos é aberta, segue que $\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha \in \mathcal{O}_M|_S$.

Desse modo, $(S, \mathcal{O}_M|_S)$ é um espaço topológico. □

Definição 1.2: Função contínua e homeomorfismos

Sejam $(M, \mathcal{O}_M)$ e $(N, \mathcal{O}_N)$ espaços topológicos. Uma aplicação $f : M \to N$ é *contínua (em relação às topologias $\mathcal{O}_M$ e $\mathcal{O}_N$)* se para todo aberto $V \in \mathcal{O}_N$ a pre-imagem $\text{preim}_f(V)$ é um conjunto aberto de $\mathcal{O}_M$. Ainda, se f for um isomorfismo contínuo com inversa contínua, então f é dito um *homeomorfismo* e os espaços topológicos são ditos *homeomorfos*.

Observação 1.1. *Convença-se que esta definição é equivalente à definição usual de continuidade para funções de variáveis reais a valores reais.*

Exercício 1.2: Composição de aplicações contínuas

Sejam $(A, \mathcal{O}_A)$, $(B, \mathcal{O}_B)$ e $(C, \mathcal{O}_C)$ espaços topológicos e sejam as aplicações contínuas (em relação às topologias apropriadas) $f : A \to B$ e $g : B \to C$. Mostre que a composição $g \circ f : A \to C$ é contínua em relação à $\mathcal{O}_A$ e $\mathcal{O}_C$.

Corolário 1.1. *A relação*

$$(A, \mathcal{O}_A) \sim (B, \mathcal{O}_B) \iff (A, \mathcal{O}_A) \text{ é homeomorfo a } (B, \mathcal{O}_B)$$

é uma relação de equivalência.

Exercício 1.3: Bola aberta em $\mathbb{R}^n$ é homeomorfa a $\mathbb{R}^n$

Utilize seus conhecimentos de cálculo elementar para mostrar que uma bola aberta qualquer é homeomorfa a $\mathbb{R}^n$ em relação à topologia de subespaço e à topologia usual. Sugestão: mostre que a função

$$\begin{aligned}
f : B_r(0) \subset \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\
x &\mapsto \frac{x}{r - \|x\|}
\end{aligned}$$

é uma bijeção.

Definição 1.3: Espaço topológico localmente Euclidiano

Um espaço topológico $(M, \mathcal{O}_M)$ é *localmente Euclidiano de dimensão n* se para todo $x \in M$, existe uma vizinhança U de x que é homeomorfa a $\mathbb{R}^n$ em relação à topologia de subespaço e à topologia usual.

Observação 1.2. *Pelo Exercício 1.3 e pelo Corolário 1.1 podemos mostrar que as vizinhanças U são homeomorfas à alguma bola aberta de $\mathbb{R}^n$.*

2 Variedades topológicas e diferenciáveis

Definição 2.1: Variedade topológica de dimensão finita

Uma *variedade topológica* é um espaço topológico $(M, \mathcal{O}_M)$ localmente Euclidiano de dimensão n.

Observação 2.1. *Por motivos técnicos, é comum requerer que o espaço topológico seja Hausdorff, paracompacto e segundo contável, de modo que alguns casos patológicos sejam removidos da definição.*

Definição 2.2: Carta local de coordenadas

Seja $(M, \mathcal{O}_M)$ uma variedade topológica de dimensão n. Uma *carta local de coordenadas* é um par (U, x) onde $U \subset M$ é um aberto e $x : U \longrightarrow x(U) \subset \mathbb{R}^n$ é um homeomorfismo. As funções componentes de x, as aplicações $x^i : U \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $p \mapsto \mathrm{proj}_i(x(p))$, são chamadas de *coordenadas do ponto $p \in U$ com respeito à carta (U, x)*.

Definição 2.3: Atlas de uma variedade

Seja $(M, \mathcal{O}_M)$ uma variedade topológica. O *atlas* $\mathscr{A} = \{(U_\alpha, x_\alpha)\}_{\alpha \in J}$ é uma família de cartas locais da variedade tal que $\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha = M$, isto é, as cartas cobrem a variedade.

Observação 2.2. *Sempre existe um atlas para uma variedade topológica?*

Definição 2.4: Atlas de classe C^k

Duas cartas (U, x) e (V, y) de uma variedade topológica de dimensão n são C^k-compatíveis se

(a) $U \cap V = \emptyset$; ou

(b) $U \cap V \neq \emptyset$ e a função de transição $y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow y(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n$ é de classe C^k como uma função de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$.

Um atlas $\mathscr{A}$ é de classe C^k se suas cartas são par a par C^k-compatíveis.

Exercício 2.1: Atlas C^0-compatível

Mostre que todo atlas é de classe C^0. A partir disso, pense em como utilizar cartas locais para decidir se uma curva $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$ e se uma aplicação $f : M \longrightarrow N$ são contínuas, onde I é um intervalo na reta real, $(M, \mathcal{O}_M)$ e $(N, \mathcal{O}_N)$ são variedades topológicas.

Observação 2.3. *Este resultado mostra que podemos estudar a continuidade de funções entre variedades por coordenadas locais ou pela definição topológica.*

Definição 2.5: Atlas maximal

Um atlas $\mathscr{A}$ de classe C^k é *maximal* se para toda carta local $(U,x) \in \mathscr{A}$ valer

$$(U,x) \text{ e } (V,y) \text{ são } C^k\text{-compatíveis} \implies (V,y) \in \mathscr{A},$$

isto é, se toda carta compatível com uma de suas cartas já estiver contida no atlas.

Definição 2.6: Variedade diferenciável

Uma variedade diferenciável de classe C^k é uma tripla $(M,\mathcal{O}_M,\mathscr{A}_M)$, onde $(M,\mathcal{O}_M)$ é uma variedade topológica e $\mathscr{A}_M$ é um atlas de classe C^k maximal.

Observação 2.4. *A partir de agora, nos limitaremos ao caso de variedades diferenciáveis de classe* C^∞*, que chamaremos apenas de variedades diferenciáveis.*

Exercício 2.2: Atlas incompatíveis

Mostre que uma mesma variedade topológica pode ter atlas diferenciáveis que não são compatíveis. Para isso, considere a variedade topológica como a reta real e sua topologia usual e os atlas maximais definidos pelo completamento das cartas $(\mathbb{R}, \mathrm{id}_{\mathbb{R}}) \in \mathscr{A}_1$ e $(\mathbb{R}, x) \in \mathscr{A}_2$ aos atlas suaves maximais $\mathscr{A}_1$ e $\mathscr{A}_2$, onde $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a aplicação $p \mapsto p^{\frac{1}{3}}$.

Definição 2.7: Aplicação diferenciável

Seja $\phi : M \to N$ uma aplicação, onde $(M,\mathcal{O}_M,\mathscr{A}_M)$, $(N,\mathcal{O}_N,\mathscr{A}_N)$ variedades diferenciáveis de dimensões m e n, respectivamente.

$$\begin{tikzcd}
U \subset M \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "x"'] & V \subset N \arrow[d, "y"] \\
x(U) \subset \mathbb{R}^m \arrow[r, "y\circ\phi\circ x^{-1}"] & y(V) \subset \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

A aplicação ϕ é *diferenciável em* $p \in M$ se existem cartas $(U,x) \in \mathscr{A}_M$ e $(V,y) \in \mathscr{A}_N$, onde U e V são vizinhanças de p e $\phi(p)$, tais que a *expressão de* ϕ *em relação a essas cartas*, isto é, a aplicação $y \circ \phi \circ x^{-1} : x(U) \to y(V)$, é uma função suave de $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}^n$.

Exercício 2.3: Diferenciabilidade de uma aplicação é bem definida

Mostre que a diferenciabilidade de uma aplicação entre variedades diferenciáveis M e N é bem definida. Isto é, mostre que a diferenciabilidade é independente pela escolha de cartas locais.

Definição 2.8: Difeomorfismo e variedades difeomorfas

Sejam $(M, \mathcal{O}_M, \mathscr{A}_M)$ e $(N, \mathcal{O}_N, \mathscr{A}_N)$ duas variedades diferenciáveis. Uma bijeção $\phi : M \to N$ é um difeomorfismo se tanto ϕ quanto ϕ^{-1} são diferenciáveis. Se existir um difeomorfismo $\phi : M \to N$, dizemos que M e N são difeomorfas.

Exercício 2.4: Composição de aplicações diferenciáveis

Sejam $(A, \mathcal{O}_A, \mathscr{A}_A)$, $(B, \mathcal{O}_B, \mathscr{A}_B)$ e $(C, \mathcal{O}_C, \mathscr{A}_C)$ variedades diferenciáveis e sejam as aplicações diferenciáveis $f : A \to B$ e $g : B \to C$. Mostre que a composição $g \circ f : A \to C$ é diferenciável.

Corolário 2.1. *A relação*

$$(A, \mathcal{O}_A, \mathscr{A}_A) \sim (B, \mathcal{O}_B, \mathscr{A}_B) \iff (A, \mathcal{O}_A, \mathscr{A}_A) \text{ é difeomorfa a } (B, \mathcal{O}_B, \mathscr{A}_B)$$

é uma relação de equivalência.

3 Espaço tangente

Consideremos uma variedade diferenciável $(M, \mathcal{O}_M, \mathscr{A}_M)$ de dimensão d.

Definição 3.1: Álgebra

Uma *álgebra* $\mathcal{A}$ é um espaço vetorial $(\mathcal{A}, \oplus, \odot)$ sobre o corpo $\mathbb{K}$ munido de uma aplicação bilinear $\bullet : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ chamada de produto.

Observação 3.1. *O produto de uma álgebra é usualmente denotada apenas por justaposição.*

Exercício 3.1: Álgebra das funções em uma variedade diferenciável

Seja M uma variedade diferenciável. Convença-se que o conjunto $C^\infty(M)$ de funções suaves $f : M \to \mathbb{R}$ é uma álgebra sobre $\mathbb{R}$ com as operações definidas por

$$(f \oplus g)(x) = f(x) + g(x) \qquad (\lambda \odot f)(x) = \lambda \cdot f(x) \qquad (f \bullet g)(x) = f(x) \cdot g(x),$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e $x \in M$.

Definição 3.2: Derivação em uma álgebra

Uma *derivação* em uma álgebra $\mathcal{A}$ é uma aplicação linear $D : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ que satisfaz a regra de Leibniz, isto é

$$D(f \bullet g) = (Df) \bullet g + f \bullet (Dg),$$

para todo $f, g \in \mathcal{A}$.

Observação 3.2. *Para o caso de álgebra de funções a valores reais, definimos* derivações em um ponto. *A aplicação linear $X : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ é uma derivação no ponto $p \in M$ se*

$$X(fg) = g(p)Xf + f(p)Xg$$

para todo $f, g \in C^\infty(M)$.

Definição 3.3: Vetor tangente a uma curva em um ponto

Seja $I = (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto para algum $\varepsilon > 0$ e seja $\gamma : I \to M$ uma curva suave que passa pelo ponto $p = \gamma(0) \in M$. O *operador de derivada direcional no ponto p ao longo da curva γ* é a aplicação linear

$$\begin{aligned} [\gamma]_p : C^\infty(M) &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto (f \circ \gamma)'(0). \end{aligned}$$

Em geometria diferencial, o operador $[\gamma]_p$ é chamado de *vetor tangente à curva γ no ponto p*.

Observação 3.3. *Note que duas curvas distintas podem ter o mesmo vetor tangente. Por este motivo, denotamos o operador associado à curva com a notação comumente utilizada para classes de equivalência: a relação*

$$\gamma \sim \eta \iff \text{o vetor tangente em } p \text{ ao longo de } \gamma \text{ é igual ao vetor tangente em } p \text{ ao longo de } \eta$$

é uma relação de equivalência.

Observação 3.4. *É fácil verificar que um operador de derivada direcional é uma derivação em um ponto da álgebra $C^\infty(M)$ de funções suaves na variedade.*

Observação 3.5. *Intuitivamente, $[\gamma]_p$ é a velocidade de uma curva em um ponto. Dada uma curva $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, considere uma curva $\eta : \left(-\frac{1}{2}\varepsilon, \frac{1}{2}\varepsilon\right) \to M$ dada por $\eta(\lambda) = \gamma(2\lambda)$, para $|\lambda| < \frac{1}{2}\varepsilon$, e obtemos $[\eta]_p f = 2[\gamma]_p f$, para toda função $f \in C^\infty(M)$.*

Definição 3.4: Espaço tangente em um ponto

O *espaço tangente em um ponto $p \in M$* é o conjunto T_pM de todos os operadores de derivada direcional no ponto p ao longo de curvas suaves, munido das operações de adição

$$\begin{aligned} + : T_pM \times T_pM &\to T_pM \\ (X, Y) &\mapsto X + Y \end{aligned}$$

e multiplicação por escalar

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times T_pM &\to T_pM \\ (\lambda, X) &\mapsto \lambda X \end{aligned}$$

definidas ponto a ponto, isto é,

$$(X + Y)f = Xf + Yf \quad \text{e} \quad (\lambda X)f = \lambda \cdot (Xf)$$

para todo $f \in C^\infty(M)$.

Exercício 3.2: As operações com vetores tangentes são fechadas no espaço tangente.

A definição anterior afirma que as operações definidas produzem elementos do espaço tangente. Entretanto, isso não é claro de imediato, portanto precisamos verificar que as operações são de fato fechadas no espaço tangente. Seja $I = (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e sejam $\gamma, \eta : I \to M$ curvas suaves passando por $p = \gamma(0) = \eta(0)$. Sejam $X, Y \in T_pM$ os operadores de derivada direcional em p ao longo das curvas γ e η respectivamente. Mostre que existem curvas suaves $\phi : I_\phi \to M$ e $\psi : I_\psi \to M$, onde I_ϕ e I_ψ são intervalos abertos da reta real, com $\phi(0) = \psi(0) = p$, tal que $X + Y$ e λX são os vetores tangentes em p ao longo de ϕ e ψ, respectivamente. Isto é, $X + Y \in T_pM$ e $\lambda X \in T_pM$.

Observação 3.6. *Convença-se que T_pM é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.*

Exercício 3.3: Funções componentes são suaves

Seja $(M, \mathcal{O}_M, \mathscr{A}_M)$ uma variedade diferenciável de dimensão d e seja $(U, x) \in \mathscr{A}_M$ uma carta local. Pelas definições de cartas locais e de atlas, é exigido que a aplicação $x : U \to x(U)$ seja um homeomorfismo e que as aplicações $y \circ x^{-1} : x(U) \to y(U)$ e $x \circ y^{-1} : y(U) \to x(U)$ sejam suaves, onde $(U, y) \in \mathscr{A}_M$ é uma outra carta local. Note que nada é dito sobre a classe de diferenciabilidade da aplicação x ou suas funções componentes x^i. Mostre que as funções componentes $x^i : U \to \mathbb{R}$ são suaves.

Observação 3.7. *Este resultado justifica uma importante construção do espaço tangente, que será utilizada na demonstração do Teorema 3.1 para definir uma base para o espaço tangente T_pM.*

Teorema 3.1: Dimensão do espaço tangente

Seja M uma variedade diferenciável de dimensão d. Então $\dim T_pM = d$ para todo ponto $p \in M$.

Demonstração. Seja $(U, x) \in \mathscr{A}_M$ carta em que $p \in U$. Consideremos a família de *curvas coordenadas* $\{\gamma_{(i)} : I \to U\}_{i=1}^{d}$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto, com expressões locais que satisfazem

$$(x^j \circ \gamma_{(i)})(\lambda) = x(p) + \delta^j_i \lambda \quad \text{e} \quad \gamma_{(i)}(0) = p$$

para todo $\lambda \in I$ e $i, j \in \{1, \ldots, d\}$. Intuitivamente, cada curva é a imagem de uma reta em $x(U) \subset \mathbb{R}^d$ sob a aplicação x^{-1}, onde estas retas são paralelas a um dos eixos de $\mathbb{R}^d$.

Seja $e_i \in T_pM$ o vetor tangente em p ao longo de $\gamma_{(i)}$, isto é, $e_i = [\gamma_{(i)}]_p$.

Exercício 3.4: Derivada direcional ao longo de uma curva coordenada

Para uma função suave $f \in C^\infty(M)$, utilize a regra da cadeia para mostrar que

$$e_i f = \partial_i (f \circ x^{-1})(x(p)),$$

onde ∂_i denota a derivada parcial em relação à i-ésima variável de uma função. Dica: considere as aplicações $f \circ x^{-1} : x(U) \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ e $x \circ \gamma_{(i)} : \mathbb{R} \to x(U) \subset \mathbb{R}^d$.

Escrevemos

$$e_i f = \left.\frac{\partial}{\partial x^i} f\right|_p$$

para denotar o resultado obtido no Exercício 3.4, de forma que $e_i = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$. Assim, tornemos nossa atenção ao conjunto

$$\mathcal{B} = \left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x^d}\right|_p \right\}$$

dos operadores de derivada direcional em p ao longo das curvas $\gamma_{(i)}$ induzidas pela carta.

Exercício 3.5: Os vetores tangentes induzidos pela carta geram o espaço tangente

Considere uma curva $\eta : I \to M$ por $\eta(0) = p$ com vetor tangente $X \in T_pM$ em p e calcule Xf para uma função suave $f \in C^\infty(M)$. Com isso, obtenha as componentes X^i tais que $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p$.

Exercício 3.6: Os vetores tangentes induzidos pela carta são linearmente independentes

Prove que $\mathcal{B}$ é linearmente independente. Dica: use o Exercício 3.3.

Pelos Exercícios 3.5 e 3.6, segue que $\mathcal{B}$ é uma base de T_pM com d elementos, isto é, $\dim T_pM = d$. □

Exercício 3.7: Jacobiano e mudança de bases

Sejam $(U, x), (V, \tilde{x}) \in \mathscr{A}_M$ cartas locais de coordenadas em M, onde U e V são vizinhanças de p. Pela construção feita no Teorema 3.1, sejam

$$\mathcal{B}_x = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}\bigg|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^d}\bigg|_p \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{B}_{\tilde{x}} = \left\{ \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^1}\bigg|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^d}\bigg|_p \right\}$$

as bases de T_pM induzidas pelas coordenadas x e $\tilde{x}$, respectivamente. Mostre que

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}\bigg|_p \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j}\bigg|_p,$$

onde as componentes do isomorfismo linear de mudança de bases, chamado de *jacobiano no ponto p*, são dadas por $\frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}\big|_p = \frac{\partial}{\partial x^i}\tilde{x}^j\big|_p$.

Exercício 3.8: Transformação das componentes de um vetor tangente

Sob as mesmas hipóteses do exercício anterior, considere uma curva suave $\eta : I \to M$ com $\eta(0) = p$ cujo vetor tangente em p é $X \in T_pM$. Com os resultados dos Exercícios 3.5 e 3.7, mostre que

$$X^i = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j}\tilde{X}^j,$$

onde X^a e $\tilde{X}^a$ são as componentes de X nas bases induzidas pelas cartas x e $\tilde{x}$, respectivamente. Reflita sobre a diferença para as regras de transformação das componentes de um vetor e dos vetores da base.

4 Espaço cotangente

5 Fibrado tangente