4300337 - Lista de Exercícios 5

Louis Bergamo Radial
8992822

16 de maio de 2024

Exercício 1

Relembremos o resultado obtido para os coeficientes da conexão de Levi-Civita no caso de uma métrica diagonal

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\lambda\lambda} = \frac{\partial_\lambda g_{\lambda\lambda}}{2g_{\lambda\lambda}}, \qquad \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\lambda} = \frac{\partial_\mu g_{\lambda\lambda}}{2g_{\lambda\lambda}}, \qquad \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\mu} = -\frac{\partial_\lambda g_{\mu\mu}}{2g_{\lambda\lambda}}, \qquad \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} = 0,$$

em que não utilizamos a convenção de soma de Einstein, portanto não há nenhuma soma nos termos acima.

A métrica de Schwarzschild é dada por

$$g_{tt} = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \qquad g_{rr} = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \qquad g_{\theta\theta} = r^2 \qquad g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2\theta,$$

com as outras componentes nulas. Utilizando as expressões para os coeficientes da conexão, vemos que os termos $\Gamma^{\lambda}{}_{t\lambda} = \Gamma^{\lambda}{}_{\phi\lambda} = \Gamma^{t}{}_{\mu\mu} = \Gamma^{\phi}{}_{\mu\mu} = 0$, visto que estes termos envolvem derivadas em relação a t ou a ϕ e que as componentes da métrica não têm dependência com essas variáveis. Temos também que os termos $\Gamma^{\theta}{}_{\nu\nu} = \Gamma^{\theta}{}_{\mu\theta} = 0$ se anulam para $\nu \neq \phi$ e $\mu \neq r$.

Consideremos a componente t da equação da geodésica,

$$\begin{aligned}
\frac{d^2t}{d\lambda^2} + \Gamma^{t}{}_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0 &\implies \frac{d^2t}{d\lambda^2} + 2\Gamma^{t}{}_{tr}\frac{dt}{d\lambda}\frac{dr}{d\lambda} = 0 \\
&\implies \frac{d^2t}{d\lambda^2} + \frac{\partial_r g_{tt}}{g_{tt}}\frac{dt}{d\lambda}\frac{dr}{d\lambda} = 0 \\
&\implies \frac{1}{g_{tt}}\left(g_{tt}\frac{d^2t}{d\lambda^2} + \frac{dg_{tt}}{d\lambda}\frac{dt}{d\lambda}\right) = 0 \\
&\implies \frac{1}{g_{tt}}\frac{d}{d\lambda}\left(g_{tt}\frac{dt}{d\lambda}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Como $g_{tt} \neq 0$, temos a seguinte lei de conservação

$$\frac{d}{d\lambda}\left[\frac{dt}{d\lambda}\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\right] = 0,$$

pela componente temporal da equação da geodésica.

Analogamente, para a componente ϕ, temos

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\phi}{d\lambda^2} + \Gamma^{\phi}{}_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0 &\implies \frac{d^2\phi}{d\lambda^2} + 2\Gamma^{\phi}{}_{r\phi}\frac{d\phi}{d\lambda}\frac{dr}{d\lambda} + 2\Gamma^{\phi}{}_{\theta\phi}\frac{d\phi}{d\lambda}\frac{d\theta}{d\lambda} = 0 \\
&\implies \frac{d^2\phi}{d\lambda^2} + \frac{\partial_r g_{\phi\phi}}{g_{\phi\phi}}\frac{d\phi}{d\lambda}\frac{dr}{d\lambda} + \frac{\partial_\theta g_{\phi\phi}}{g_{\phi\phi}}\frac{d\phi}{d\lambda}\frac{d\theta}{d\lambda} = 0 \\
&\implies \frac{1}{g_{\phi\phi}}\left[g_{\phi\phi}\frac{d^2\phi}{d\lambda^2} + \left(\frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial r}\frac{dr}{d\lambda} + \frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial\theta}\frac{d\theta}{d\lambda}\right)\frac{d\phi}{d\lambda}\right] = 0 \\
&\implies \frac{1}{g_{\phi\phi}}\frac{d}{d\lambda}\left[g_{\phi\phi}\frac{d\phi}{d\lambda}\right] = 0.
\end{aligned}$$

Como $g_{\phi\phi} \neq 0$, temos a lei de conservação

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(r^2\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\lambda}\sin^2\theta\right) = 0,$$

pela componente azimutal da equação da geodésica.

Notemos que as quantidades conservadas

$$\epsilon = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\lambda} \quad \text{e} \quad \ell = r^2\sin^2\theta\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\lambda}$$

estão relacionadas à energia e ao momento angular da partícula na trajetória geodésica. Para uma partícula de massa m, $m\epsilon$ e $m\ell$ são a sua energia e seu momento angular, enquanto que $\hbar\epsilon$ e $\hbar\ell$ são a energia e o momento angular de um fóton. A expressão ℓ é familiar, enquanto que precisamos motivar a relação de ϵ com a energia. Tomemos uma partícula massiva muito distante do centro de atração, isto é, $r \to \infty$, onde temos

$$\lim_{r\to\infty} m\epsilon = m\lim_{r\to\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = m\gamma = E,$$

onde utilizamos as expressões conhecidas da Relatividade Restrita, visto que à grandes distâncias do centro atrativo, a métrica de Schwarzschild se reduz à métrica de Minkowski.

A simetria azimutal da métrica é refletida na conservação do momento angular, portanto podemos considerar uma partícula se movendo em um plano de ângulo polar constante, por exemplo $\theta = \frac{\pi}{2}$. Neste caso, como a trajetória se dá numa geodésica, temos que a "norma" do vetor tangente à trajetória é constante, uma vez que este é paralelo ao longo da geodésica, isto é

$$g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda} = -\kappa,$$

para a constante κ dada por $\kappa = 1$ no caso de uma partícula massiva e o parâmetro afim dado pelo tempo próprio, ou $\kappa = 0$ para uma partícula de massa nula. De forma explícita, temos

$$-\kappa = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2 + r^2\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2,$$

portanto ao multiplicar por $1 - \frac{2GM}{r}$ e utilizar as integrais de movimento, temos

$$-\kappa\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) = -\epsilon^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\frac{\ell^2}{r^2}.$$

Assim, obtemos a equação

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2 - \kappa\frac{GM}{r} + \frac{\ell^2}{2r^2} - \frac{GM\ell^2}{r^3} = \frac{1}{2}\left(\epsilon^2 - \kappa\right)$$

a qual podemos analisar como o movimento unidimensional de uma partícula de massa unitária e energia $\frac{1}{2}\left(\epsilon^2 - \kappa\right)$, sob a ação de um potencial efetivo clássico V_{ef} dado por

$$V_{\text{ef}}(r) = -\kappa\frac{GM}{r} + \frac{\ell^2}{2r^2} - \frac{GM\ell^2}{r^3}.$$