Variação de Palatini

Louis Bergamo Radial
8992822

6 de julho de 2024

Lema 1: A diferença entre conexões é um tensor

Seja (M, g) uma variedade Lorentziana. Se $\nabla, \tilde{\nabla} : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$ são conexões afins, então a aplicação

$$\begin{aligned} D : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\to \Gamma(TM) \\ (X, Y) &\mapsto \nabla_X Y - \tilde{\nabla}_X Y \end{aligned}$$

é um campo tensorial de ordem $(1, 2)$. Ainda, se os coeficientes das conexões em uma dada carta local são ${\Gamma^k}_{ij}$ e ${\tilde{\Gamma}^k}_{ij}$, então ${D^k}_{ij} = {\Gamma^k}_{ij} - {\tilde{\Gamma}^k}_{ij}$ é a expressão em coordenadas locais deste tensor.

Demonstração. Consideremos $f, g \in C^\infty(M)$ e $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ e mostremos que D é linear na dependência nos dois campos vetoriais. Utilizando a linearidade no primeiro argumento de uma conexão, segue que

$$\begin{aligned} D(fX + gY, Z) &= \nabla_{fX+gY} Z - \tilde{\nabla}_{fX+gY} Z \\ &= f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z - f\nabla_X Z - g\nabla_Y Z \\ &= fD(X, Z) + gD(Y, Z), \end{aligned}$$

logo D é linear em seu primeiro argumento. Pela aditividade e pela regra de Leibniz, obtemos

$$\begin{aligned} D(X, fY + gZ) &= \nabla_X(fY) + \nabla_X(gZ) - \tilde{\nabla}_X(fY) - \tilde{\nabla}_X(gZ) \\ &= \left[(Xf)Y + f\nabla_X Y\right] + \left[(Xg)Z + g\nabla_X Z\right] - \left[(Xf)Y + f\tilde{\nabla}_X Y\right] - \left[(Xg)Z + g\tilde{\nabla}_X Z\right] \\ &= fD(X, Y) + gD(X, Z), \end{aligned}$$

portanto D é linear em seu segundo argumento. Por fim, notando que $D(X, Y)$ é a combinação linear de dois campos vetoriais, segue que $D(X, Y) \in \Gamma(TM)$ para todo $X, Y \in \Gamma(TM)$, portanto concluímos que D é um tensor de ordem $(1, 2)$.

Seja $(U, x) \in \mathscr{A}_M$ uma carta de coordenadas locais, então

$$\begin{aligned} {D^k}_{ij} &= \left\langle \mathrm{d}x^k, D\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\right\rangle \\ &= \left\langle \mathrm{d}x^k, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} - \tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle \\ &= \left\langle \mathrm{d}x^k, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle - \left\langle \mathrm{d}x^k, \tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle \\ &= {\Gamma^k}_{ij} - {\tilde{\Gamma}^k}_{ij}, \end{aligned}$$

como desejado. □

Proposição 1: Expressão em coordenadas locais do tensor de curvatura

Seja (M,g) uma variedade Lorentziana dotada de uma conexão ∇. O tensor de curvatura de Riemann, definido pela aplicação

$$\begin{aligned} R : \Gamma(TM)\times\Gamma(TM)\times\Gamma(TM) &\to \Gamma(TM) \\ (X,Y,Z) &\mapsto R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z, \end{aligned}$$

tem componentes em coordenadas locais dadas por

$$R^\ell{}_{kij} = \partial_i\Gamma^\ell{}_{jk} - \partial_j\Gamma^\ell{}_{ik} + \Gamma^m{}_{jk}\Gamma^\ell{}_{im} - \Gamma^m{}_{ik}\Gamma^\ell{}_{jm},$$

onde $\Gamma^k{}_{ij}$ são os coeficientes da conexão em coordenadas locais.

Demonstração. Seja $(U,x)\in\mathscr{A}_M$ uma carta de coordenadas locais, então

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right] = 0$$

para quaisquer i,j. Dessa forma, temos

$$\begin{aligned} R^\ell{}_{kij} &= \left\langle dx^\ell, R\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^k}\right\rangle \\ &= \left\langle dx^\ell, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^k} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^k} - \nabla_{\left[\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right]}\frac{\partial}{\partial x^k}\right\rangle \\ &= \left\langle dx^\ell, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\left(\Gamma^m{}_{jk}\frac{\partial}{\partial x^m}\right) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\left(\Gamma^m{}_{ik}\frac{\partial}{\partial x^m}\right)\right\rangle \\ &= \left\langle dx^\ell, \partial_i\Gamma^m{}_{jk}\frac{\partial}{\partial x^m} + \Gamma^m{}_{jk}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^m} - \partial_j\Gamma^m{}_{ik}\frac{\partial}{\partial x^m} - \Gamma^m{}_{ik}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^m}\right\rangle \\ &= \left\langle dx^\ell, \partial_i\Gamma^m{}_{jk}\frac{\partial}{\partial x^m} + \Gamma^m{}_{jk}\Gamma^n{}_{im}\frac{\partial}{\partial x^n} - \partial_j\Gamma^m{}_{ik}\frac{\partial}{\partial x^m} - \Gamma^m{}_{ik}\Gamma^n{}_{jm}\frac{\partial}{\partial x^n}\right\rangle \\ &= \partial_i\Gamma^\ell{}_{jk} + \Gamma^m{}_{jk}\Gamma^\ell{}_{im} - \partial_j\Gamma^\ell{}_{ik} - \Gamma^m{}_{ik}\Gamma^\ell{}_{jm}, \end{aligned}$$

como queríamos mostrar. □

Lema 2: Identidade de Palatini

Seja (M,g) uma variedade Lorentziana dotada de uma conexão livre de torção ∇, cujos coeficientes em uma carta local de coordenadas são $\Gamma^k{}_{ij}$. Uma variação $\delta\Gamma^k{}_{ij}$ nos coeficientes da conexão resulta na variação do tensor de curvatura de Riemann $\delta R^{\ell_{kij}}$ e no tensor de Ricci δR_{kj} dadas por

$$\delta R^\ell{}_{kij} = \nabla_i\delta\Gamma^\ell{}_{jk} - \nabla_j\delta\Gamma^\ell{}_{ik} \quad \text{e} \quad \delta R_{kj} = \nabla_i\delta\Gamma^i{}_{jk} - \nabla_j\delta\Gamma^i{}_{ik}.$$

Demonstração. Consideremos o tensor de curvatura de Riemann, com expressão em coordenadas locais dadas por

$$R^\ell{}_{kij} = \partial_i\Gamma^\ell{}_{jk} - \partial_j\Gamma^\ell{}_{ik} + \Gamma^m{}_{jk}\Gamma^\ell{}_{im} - \Gamma^m{}_{ik}\Gamma^\ell{}_{jm},$$

então uma transformação $\Gamma^k{}_{ij} \to \Gamma^k{}_{ij} + \delta\Gamma^k_{ij}$ resulta na transformação $R^\ell{}_{kij} \to R^\ell{}_{kij} + \delta R^\ell{}_{kij}$, onde

$$\delta R^\ell{}_{kij} = \partial_i\delta\Gamma^\ell{}_{jk} - \partial_j\delta\Gamma^\ell{}_{ik} + \Gamma^m{}_{jk}\delta\Gamma^\ell{}_{im} + \Gamma^\ell{}_{im}\delta\Gamma^m{}_{jk} - \Gamma^m{}_{ik}\delta\Gamma^\ell{}_{jm} - \Gamma^\ell{}_{jm}\delta\Gamma^m{}_{ik}.$$

Pelo Lema 1, segue que $\delta\Gamma^k{}_{ij}$ é um tensor, portanto sua derivada covariante está bem definida e é dada em coordenadas locais por

$$\nabla_i \delta\Gamma^\ell{}_{jk} = \partial_i \delta\Gamma^\ell{}_{jk} + \Gamma^\ell{}_{im}\delta\Gamma^m{}_{jk} - \Gamma^m{}_{ij}\delta\Gamma^\ell{}_{mk} - \Gamma^m{}_{ik}\delta\Gamma^\ell{}_{jm}.$$

Podemos escrever a variação dos componentes do tensor de curvatura como

$$\begin{aligned}
\delta R^\ell{}_{kij} &= \left(\partial_i \delta\Gamma^\ell{}_{jk} + \Gamma^\ell{}_{im}\delta\Gamma^m{}_{jk} - \Gamma^m{}_{ik}\delta\Gamma^\ell{}_{jm}\right) - \left(\partial_j \delta\Gamma^\ell{}_{ik} + \Gamma^\ell{}_{jm}\delta\Gamma^m{}_{ik} - \Gamma^m{}_{jk}\delta\Gamma^\ell{}_{im}\right) \\
&= \left(\nabla_i \delta\Gamma^\ell{}_{jk} + \Gamma^m{}_{ij}\delta\Gamma^\ell{}_{mk}\right) - \left(\nabla_j \delta\Gamma^\ell{}_{ik} + \Gamma^m{}_{ji}\delta\Gamma^\ell{}_{mk}\right) \\
&= \nabla_i \delta\Gamma^\ell{}_{jk} - \nabla_j \delta\Gamma^\ell{}_{ik},
\end{aligned}$$

já que a conexão é simétrica. □

Teorema 1: Variação de Palatini

Seja (M, g) uma variedade Lorentziana dotada de uma conexão livre de torção ∇, cujos coeficientes em uma carta local de coordenadas são $\Gamma^k{}_{ij}$. As equações de Euler-Lagrange para a ação

$$S[g_{ij}, \Gamma^k{}_{ij}] = \int_M \sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x \left(\frac{1}{2\kappa}R + \mathcal{L}_\mathrm{m}\right),$$

em que $R = g^{ij}R_{ij}$ é o escalar de Ricci com R_{ij} o tensor de Ricci, κ é uma constante, e $\mathcal{L}_\mathrm{m}$ é uma densidade de lagrangiana para a matéria que não depende da conexão, são dadas por

$$R_{ij} - \frac{1}{2}Rg_{ij} = \kappa T_{ij} \quad \text{e} \quad \Gamma^k{}_{ij} = \frac{1}{2}g^{k\ell}\left(\partial_i g_{\ell j} + \partial_j g_{\ell i} - \partial_\ell g_{ij}\right),$$

onde

$$T_{ij} = \frac{-2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_\mathrm{m})}{\delta g^{ij}}$$

é o tensor de energia e momento.

Demonstração. Pela variação da métrica, temos

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int_M \mathrm{d}^4x \left[\frac{1}{2\kappa}\left(R\frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{ij}} + \sqrt{-g}\frac{\delta R}{\delta g^{ij}}\right) + \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_\mathrm{m})}{\delta g^{ij}}\right]\delta g^{ij} \\
&= \int_M \sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x \left[\frac{1}{2\kappa}\left(\frac{R}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{ij}} + \frac{\delta R}{\delta g^{ij}}\right) + \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_\mathrm{m})}{\delta g^{ij}}\right]\delta g^{ij},
\end{aligned}$$

isto é, a derivada funcional da ação em relação à métrica é

$$\begin{aligned}
\frac{\delta S}{\delta g^{ij}} &= \frac{1}{2\kappa}\left(\frac{R}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{ij}} + \frac{\delta R}{\delta g^{ij}} + \frac{2\kappa}{\sqrt{-g}}\frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_\mathrm{m})}{\delta g^{ij}}\right) \\
&= \frac{1}{2\kappa}\left(\frac{R}{2g}\frac{\delta g}{\delta g^{ij}} + R_{ij} - \kappa T_{ij}\right),
\end{aligned}$$

em que utilizamos a independência do tensor de Ricci com a métrica. Pela fórmula de Jacobi, temos

$$\delta g = g g^{ij}\delta g_{ij},$$

portanto, como $g^{ij}\delta g_{ij} + g_{ij}\delta g^{ij} = 0$, temos

$$\frac{\delta S}{\delta g^{ij}} = \frac{1}{2\kappa}\left(R_{ij} - \frac{1}{2}Rg_{ij} - \kappa T_{ij}\right).$$

Pela variação dos coeficientes da conexão, temos

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa}\int_M \sqrt{-g}\mathrm{d}^4x\, g^{ij}\left(\nabla_m \delta\Gamma^m{}_{ji} - \nabla_j \delta\Gamma^m{}_{mi}\right),$$

pelo Lema 2 e pela densidade de lagrangiana da matéria ser independente da conexão. Consideremos a conexão de Levi-Civita $\tilde{\nabla}$, então pelo Lema 1, existe um tensor D tal que para todos $X, Y \in \Gamma(TM)$

$$\nabla_X Y = \tilde{\nabla}_X Y + D(X, Y),$$

de modo que

$$\begin{aligned}
2\kappa\delta S = \int_M \sqrt{-g}\mathrm{d}^4x\, g^{ij}\Big[&\left(\tilde{\nabla}_m \delta\Gamma^m{}_{ji} + D^m{}_{mn}\delta\Gamma^n{}_{ji} - D^n{}_{mj}\delta\Gamma^m{}_{ni} - D^n{}_{mi}\delta\Gamma^m{}_{jn}\right)\\
&- \left(\tilde{\nabla}_j \delta\Gamma^m{}_{mi} + D^m{}_{jn}\delta\Gamma^n{}_{mi} - D^n{}_{jm}\delta\Gamma^m{}_{ni} - D^n{}_{ji}\delta\Gamma^m{}_{mn}\right)\Big]\\
= \int_M \sqrt{-g}\mathrm{d}^4x\, \Big[&\tilde{\nabla}_m\left(g^{ij}\delta\Gamma^m{}_{ji} - g^{im}\delta\Gamma^n{}_{ni}\right) + g^{ij}\left(D^n{}_{jm} - D^n{}_{mj}\right)\delta\Gamma^m{}_{ni}\\
&+ g^{ij}\left(D^m{}_{mn}\delta\Gamma^n{}_{ji} - D^n{}_{mi}\delta\Gamma^m{}_{jn} - D^m{}_{jn}\delta\Gamma^n{}_{mi} + D^n{}_{ji}\delta\Gamma^m{}_{mn}\right)\Big].
\end{aligned}$$

O termo dado por uma derivada covariante em relação à métrica de Levi-Civita resulta em um termo de fronteira e o termo dada pela antissimetrização do tensor simétrico D se anula, portanto a variação da ação em relação aos coeficientes da conexão só é dado pelo último termo, isto é,

$$\begin{aligned}
\delta S &= \frac{1}{2\kappa}\int_M \sqrt{-g}\mathrm{d}^4x\, g^{ij}\left(D^m{}_{mn}\delta\Gamma^n{}_{ji} - D^n{}_{mi}\delta\Gamma^m{}_{jn} - D^m{}_{jn}\delta\Gamma^n{}_{mi} + D^n{}_{ji}\delta\Gamma^m{}_{mn}\right)\\
&= \frac{1}{2\kappa}\int_M \sqrt{-g}\mathrm{d}^4x\, g^{ij}\left(D^\ell{}_{\ell k}\delta^r{}_j\delta^s{}_i - D^\ell{}_{ki}\delta^r{}_j\delta^s{}_\ell - D^\ell{}_{jk}\delta^r{}_\ell\delta^s{}_i + D^\ell{}_{ji}\delta^r{}_k\delta^s{}_\ell\right)\delta\Gamma^k{}_{rs}\\
&= \frac{1}{2\kappa}\int_M \sqrt{-g}\mathrm{d}^4x\, \left(D^\ell{}_{\ell k}g^{sr} - D^s{}_{ki}g^{ir} - D^r{}_{jk}g^{sj} + D^s{}_{ji}\delta^r{}_k g^{ij}\right)\delta\Gamma^k{}_{rs}.
\end{aligned}$$

Assim, a derivada funcional da ação em relação aos coeficientes da conexão é dada por

$$\begin{aligned}
\frac{\delta S}{\delta\Gamma^k{}_{ij}} &= \frac{1}{2\kappa}\left(D^\ell{}_{\ell k}g^{ji} - D^j{}_{k\ell}g^{\ell i} - D^i{}_{\ell k}g^{j\ell} + D^j{}_{m\ell}\delta^i{}_k g^{\ell m}\right)\\
&= \frac{1}{2\kappa}\left(D^\ell{}_{\ell k}g^{ij} - D^{ji}{}_k - D^{ij}{}_k + D^{j\ell}{}_\ell\delta^i{}_k\right),
\end{aligned}$$

utilizando a simetria da métrica e do tensor D.

A partir de $\delta S = 0$ e da independência da variação em relação a métrica e à conexão, obtemos as equações de movimento

$$R_{ij} - \frac{1}{2}Rg_{ij} = \kappa T_{ij} \quad \text{e} \quad D^\ell{}_{\ell k}g^{ij} - D^{ji}{}_k - D^{ij}{}_k + D^{j\ell}{}_\ell\delta^i{}_k = 0.$$

Para completar a demonstração, devemos mostrar que D é o tensor nulo, isto é, que a conexão ∇ deve ser igual à conexão de Levi-Civita. Contraímos os índices i e k na equação para D, obtendo

$$D^\ell{}_\ell{}^j + 3D^{j\ell}{}_\ell - D^{\ell j}{}_\ell = 0.$$

Da simetria do tensor, temos

$$D^\ell{}_\ell{}^j = g^{ij}D^\ell{}_{\ell i} = g^{ij}D^\ell{}_{i\ell} = D^{\ell j}{}_\ell,$$

portanto $D^{j\ell}{}_\ell = 0$. Contraímos a equação de movimento para D com g_{ij}, obtendo

$$2D^\ell{}_{\ell k} + D_k{}^\ell{}_\ell = 0,$$

portanto, como $D_k{}^\ell{}_\ell = g_{kj} D^{j\ell}{}_\ell$, segue que $D^\ell{}_{\ell k} = 0$. Substituindo na equação de movimento, temos

$$D^{ij}{}_k + D^{ji}{}_k = 0$$

portanto contraindo com g^{kn} e tomando permutações cíclicas de $\{i, j, n\}$, temos

$$\begin{cases} D^{ijn} + D^{jin} = 0 \\ D^{jni} + D^{nji} = 0 \\ D^{nij} + D^{inj} = 0 \end{cases} .$$

Somando as duas primeiras equações e subtraindo a terceira, temos

$$\left(D^{ijn} - D^{inj}\right) + \left(D^{jin} + D^{jni}\right) + \left(D^{nji} - D^{nij}\right) = 0,$$

portanto pela simetria do último par de índices, temos $D^{jin} = 0$, isto é, D é o tensor nulo. $\square$