4302305 - Lista de Exercícios VI

Louis Bergamo Radial
8992822

7 de maio de 2024

Exercício 1

Em uma variedade de dimensão n dotada de métrica e uma conexão de Levi-Civita, o tensor de curvatura tem n^4 componentes. Contraindo o tensor de curvatura com o tensor métrico, temos as simetrias dadas por

$$R_{\alpha\rho\mu\nu} = -R_{\alpha\rho\nu\mu} = -R_{\rho\alpha\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\rho},$$

além da identidade de Jacobi,

$$R_{\alpha\rho\mu\nu} + R_{\alpha\mu\nu\rho} + R_{\alpha\nu\rho\mu} = 0.$$

Como o tensor é antissimétrico no primeiro e no último par de índices, temos que cada par pode assumir $m = \binom{n}{2}$ valores diferentes. Desse modo, como podemos trocar os pares de índices, segue que o tensor tem no máximo $\frac{m(m+1)}{2}$ componentes independentes. Na identidade de Jacobi, todos os índices devem ser distintos para que a equação não seja reduzida às condições de antissimetria, portanto temos $\binom{n}{4}$ outros vínculos para as componentes do tensor de curvatura. Assim, o número de componentes independentes do tensor de Riemann é dado por

$$\frac{m(m+1)}{2} - \binom{n}{4} = \frac{n(n-1)}{8}\left(3n^2 - 3n + 6 - (n-2)(n-3)\right) = \frac{n^2(n^2-1)}{12}.$$

Notemos que o tensor de Ricci é um tensor simétrico, portanto um limite superior para o número de suas componentes independentes é dado por $\frac{n(n+1)}{2}$. Desse modo, temos que em $n = 3$ o número de componentes independentes do tensor de Ricci e do tensor de Riemann são iguais!

Já vimos que as componentes do tensor de Riemann são dadas por

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = g_{\mu\sigma}R^{\sigma}{}_{\nu\alpha\beta} = g_{\mu\sigma}\left(\partial_\alpha \Gamma^{\sigma}{}_{\beta\nu} - \partial_\beta \Gamma^{\sigma}{}_{\alpha\nu} + \Gamma^{\sigma}{}_{\alpha\rho}\Gamma^{\rho}{}_{\beta\nu} - \Gamma^{\sigma}{}_{\beta\rho}\Gamma^{\rho}{}_{\alpha\nu}\right)$$

em qualquer sistema de coordenadas. Em coordenadas normais de Riemann, as primeiras derivadas da métrica e os coeficientes da conexão se anulam, de modo que

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu\alpha\beta} &= \frac{1}{2}g_{\mu\sigma}\left[\partial_\alpha\left(g^{\sigma\rho}(\partial_\beta g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\beta} - \partial_\rho g_{\beta\nu})\right) - \partial_\beta\left(g^{\sigma\rho}(\partial_\alpha g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\alpha} - \partial_\rho g_{\alpha\nu})\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}g_{\mu\sigma}g^{\sigma\rho}\left[\partial_\alpha\left(\partial_\beta g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\beta} - \partial_\rho g_{\beta\nu}\right) - \partial_\beta\left(\partial_\alpha g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\alpha} - \partial_\rho g_{\alpha\nu}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\delta^{\rho}{}_{\mu}\left(\partial_\alpha\partial_\beta g_{\rho\nu} + \partial_\alpha\partial_\nu g_{\rho\beta} - \partial_\alpha\partial_\rho g_{\beta\nu} - \partial_\beta\partial_\alpha g_{\rho\nu} - \partial_\beta\partial_\nu g_{\rho\alpha} + \partial_\beta\partial_\rho g_{\alpha\nu}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\partial_\alpha\partial_\nu g_{\mu\beta} - \partial_\alpha\partial_\mu g_{\beta\nu} - \partial_\beta\partial_\nu g_{\mu\alpha} + \partial_\beta\partial_\mu g_{\alpha\nu}\right),
\end{aligned}$$

onde utilizamos que $\partial_\alpha\partial_\beta = \partial_\beta\partial_\alpha$. Assim, ainda nas coordenadas normais de Riemann, temos

$$\nabla_\lambda R_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\underline{\partial_\lambda\partial_\alpha\partial_\nu g_{\mu\beta}} - \underline{\partial_\lambda\partial_\alpha\partial_\mu g_{\beta\nu}} - \underline{\partial_\lambda\partial_\beta\partial_\nu g_{\mu\alpha}} + \underline{\partial_\lambda\partial_\beta\partial_\mu g_{\alpha\nu}}\right),$$

então ao permutar ciclicamente (α, β, λ), obtemos

$$\nabla_\alpha R_{\mu\nu\beta\lambda} = \frac{1}{2}\left(\underline{\partial_\alpha\partial_\beta\partial_\nu g_{\mu\lambda}} - \underline{\partial_\alpha\partial_\beta\partial_\mu g_{\lambda\nu}} - \underline{\partial_\alpha\partial_\lambda\partial_\nu g_{\mu\beta}} + \underline{\partial_\alpha\partial_\lambda\partial_\mu g_{\beta\nu}}\right)$$

e

$$\nabla_\beta R_{\mu\nu\lambda\alpha} = \frac{1}{2}\left(\underline{\partial_\beta\partial_\lambda\partial_\nu g_{\mu\alpha}} - \underline{\partial_\beta\partial_\lambda\partial_\mu g_{\alpha\nu}} - \underline{\partial_\beta\partial_\alpha\partial_\nu g_{\mu\lambda}} + \underline{\partial_\beta\partial_\alpha\partial_\mu g_{\lambda\nu}}\right),$$

portanto ao somar as três equações obtemos

$$\nabla_\lambda R_{\mu\nu\alpha\beta} + \nabla_\alpha R_{\mu\nu\beta\lambda} + \nabla_\beta R_{\mu\nu\lambda\alpha} = 0.$$

Deste modo, em qualquer outro sistema de coordenadas vale a segunda identidade de Bianchi, expressa acima.

Tornemos nossa atenção para o caso particular bidimensional e consideremos o tensor $X_{\mu\nu\alpha\beta} = g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}$. Notemos que

$$\begin{aligned} X_{\nu\mu\alpha\beta} &= g_{\nu\alpha}g_{\mu\beta} - g_{\nu\beta}g_{\mu\alpha} \\ &= -(g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}) \\ &= -X_{\mu\nu\alpha\beta} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} X_{\mu\nu\beta\alpha} &= g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha} - g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} \\ &= -(g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}) \\ &= -X_{\mu\nu\alpha\beta} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} X_{\alpha\beta\mu\nu} &= g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu} \\ &= g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha} \\ &= X_{\mu\nu\alpha\beta}, \end{aligned}$$

isto é, o tensor $X_{\mu\nu\alpha\beta}$ tem as simetrias do tensor de Riemann. Nesta dimensão há apenas uma componente independente para estes tensores, portanto $R_{\mu\nu\alpha\beta} = KX_{\mu\nu\alpha\beta}$ para alguma constante K. Podemos obter a relação desta constante com o escalar de curvatura $R = g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}R_{\mu\nu\alpha\beta}$ de forma a escrever o tensor de Riemann em termos do tensor métrico e do escalar de curvatura,

$$\begin{aligned} R &= Kg^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}X_{\mu\nu\alpha\beta} \\ &= Kg^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\left(g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}\right) \\ &= Kg^{\mu\alpha}\left(2g_{\mu\alpha} - g_{\mu\alpha}\right) \\ &= 2K, \end{aligned}$$

portanto,

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{R}{2}\left(g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}\right).$$

É interessante notar que a constante $K = \frac{R}{2}$ é a chamada curvatura Gaussiana de uma superfície da teoria clássica de geometria diferencial. O tratamento original feito por Gauss foi inicialmente de modo extrínseco, estudando superfícies imersas no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$ e induzindo uma métrica nesta superfície a partir da métrica Euclidiana, chamada de primeira forma fundamental. Utilizando a abordagem intrínseca obtivemos o mesmo resultado, fato esse relacionado com o teorema de Whitney, que diz sobre a capacidade de imersão de qualquer variedade diferenciável de dimensão n em algum $\mathbb{R}^d$ com $d \geq n$.

Exercício 2

Exercício 3

Exercício 4

Consideremos a ação de Einstein-Hilbert com uma constante cosmológica Λ,

$$S_{\text{EH}} = \kappa_G \int_M \mathrm{d}^4x \,\sqrt{-g}\,(R - 2\Lambda)\,,$$

onde $\kappa_G = \frac{1}{16\pi G}$. A variação da ação devido à variação $g^{\mu\nu} \longrightarrow g^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu}$ é dada por

$$\begin{aligned}
\delta S_{\text{EH}} &= \kappa_G \int_M \mathrm{d}^4x \,\left[(R-2\Lambda)\delta\sqrt{-g} + \sqrt{-g}\delta R\right] \\
&= \kappa_G \int_M \mathrm{d}^4x \,\sqrt{-g}\left[\left(\frac{1}{2}R - \Lambda\right)\frac{\delta g}{g} + R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\right],
\end{aligned}$$

portanto precisamos determinar as variações δg e $\delta R_{\mu\nu}$.

Em uma carta de coordenadas $g_{\mu\nu}$ pode ser considerada como uma matriz invertível, de modo que pela fórmula de Jacobi[1] temos

$$\delta g = g g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = -g g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}.$$

Assim, temos

$$\delta S_{\text{EH}} = \kappa_G \int_M \mathrm{d}^4x \,\sqrt{-g}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}\right)\delta g^{\mu\nu} + \kappa_G \int_M \mathrm{d}^4x \,\sqrt{-g} g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu},$$

e nos resta mostrar que a segunda integral se anula.

Como consideramos conexões de Levi-Civita, a variação da métrica acarreta uma variação dos coeficientes da conexão $\Gamma^\sigma{}_{\nu\mu} \longrightarrow \Gamma^\sigma{}_{\nu\mu} + \delta\Gamma^\sigma{}_{\nu\mu}$. Como $\delta\Gamma^\sigma{}_{\nu\mu}$ é uma componente do **tensor** dado pela diferença entre duas conexões, podemos escrever a sua derivada covariante por

$$\nabla_\rho \delta\Gamma^\sigma{}_{\nu\mu} = \partial_\rho \delta\Gamma^\sigma{}_{\nu\mu} + \Gamma^\sigma{}_{\rho\lambda}\delta\Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} - \Gamma^\lambda{}_{\rho\nu}\delta\Gamma^\sigma{}_{\lambda\mu} - \Gamma^\lambda{}_{\rho\mu}\delta\Gamma^\sigma{}_{\nu\lambda},$$

em relação à conexão de coeficientes $\Gamma^\sigma{}_{\nu\mu}$. Como o tensor de curvatura é definido a partir da conexão, isto é,

$$R^\sigma{}_{\mu\rho\nu} = \partial_\rho \Gamma^\sigma{}_{\nu\mu} - \partial_\nu \Gamma^\sigma{}_{\rho\mu} + \Gamma^\sigma{}_{\rho\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} - \Gamma^\sigma{}_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\rho\mu},$$

sua variação é dada por

$$\begin{aligned}
\delta R^\sigma{}_{\mu\rho\nu} &= \partial_\rho \delta\Gamma^\sigma{}_{\nu\mu} - \partial_\nu \delta\Gamma^\sigma{}_{\rho\mu} + \delta\Gamma^\sigma{}_{\rho\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} + \Gamma^\sigma{}_{\rho\lambda}\delta\Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} - \delta\Gamma^\sigma{}_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\rho\mu} - \Gamma^\sigma{}_{\nu\lambda}\delta\Gamma^\lambda{}_{\rho\mu} \\
&= \left(\partial_\rho \delta\Gamma^\sigma{}_{\nu\mu} + \Gamma^\sigma{}_{\rho\lambda}\delta\Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} - \delta\Gamma^\sigma{}_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\rho\mu}\right) - \left(\partial_\nu \delta\Gamma^\sigma{}_{\rho\mu} + \Gamma^\sigma{}_{\nu\lambda}\delta\Gamma^\lambda{}_{\rho\mu} - \delta\Gamma^\sigma{}_{\rho\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\nu\mu}\right) \\
&= \left(\nabla_\rho \delta\Gamma^\sigma{}_{\nu\mu} + \Gamma^\lambda{}_{\rho\nu}\delta\Gamma^\sigma{}_{\lambda\mu}\right) - \left(\nabla_\nu \delta\Gamma^\sigma{}_{\rho\mu} + \Gamma^\lambda{}_{\nu\rho}\delta\Gamma^\sigma{}_{\lambda\mu}\right) \\
&= \nabla_\rho \delta\Gamma^\sigma{}_{\nu\mu} - \nabla_\nu \delta\Gamma^\sigma{}_{\rho\mu}.
\end{aligned}$$

Assim, contraindo σ e ρ, obtemos a variação do tensor de Ricci,

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\sigma \delta\Gamma^\sigma{}_{\nu\mu} - \nabla_\nu \delta\Gamma^\sigma{}_{\sigma\mu},$$

conhecida como a identidade de Palatini. Desse modo, temos

$$\begin{aligned}
g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} &= g^{\mu\nu}\nabla_\sigma \delta\Gamma^\sigma{}_{\nu\mu} - g^{\mu\nu}\nabla_\nu \delta\Gamma^\sigma{}_{\sigma\mu} \\
&= \nabla_\sigma\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\sigma{}_{\nu\mu}\right) - \nabla_\nu\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\sigma{}_{\sigma\mu}\right) \\
&= \nabla_\sigma\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\sigma{}_{\nu\mu} - g^{\mu\sigma}\delta\Gamma^\nu{}_{\nu\mu}\right),
\end{aligned}$$

onde utilizamos a propriedade de que a conexão de Levi-Civita é uma conexão métrica e permutamos os índices ν e σ no segundo termo. Por fim, temos

$$\kappa_G \int_M \mathrm{d}^4x \,\sqrt{-g} g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \kappa_G \int_M \mathrm{d}^4x \,\sqrt{-g}\nabla_\sigma\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\sigma{}_{\nu\mu} - g^{\mu\sigma}\delta\Gamma^\nu{}_{\nu\mu}\right),$$

[1] Para uma matriz quadrada invertível M, vale $\delta(\det M) = (\det M)\,\mathrm{tr}\left(A^{-1}\delta M\right)$.

que se anula ao impormos que a variação na borda ∂M é nula, pelo teorema de Stokes.

Por fim, obtemos a variação da ação com uma constante cosmológica, dada por

$$\delta S_{\mathrm{EH}} = \kappa_G \int_M \mathrm{d}^4x \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu}.$$

Assim, pelo lema fundamental do cálculo de variações, se $\delta S_{\mathrm{EH}} = 0$, devemos ter

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0.$$

Exercício 5

Exercício 6

No exercício 1, mostramos que vale

$$R_{\lambda\mu\rho\nu} = \frac{1}{2} R \left(g_{\lambda\rho} g_{\mu\nu} - g_{\lambda\nu} g_{\mu\rho} \right)$$

no caso particular de variedades bidimensionais. Assim, o tensor de Riemann é dado por

$$R^{\sigma}{}_{\mu\rho\nu} = g^{\sigma\lambda} R_{\lambda\mu\rho\nu} = \frac{1}{2} R g^{\sigma\lambda} \left(g_{\lambda\rho} g_{\mu\nu} - g_{\lambda\nu} g_{\mu\rho} \right) = \frac{1}{2} R \left(\delta^{\sigma}{}_{\rho} g_{\mu\nu} - \delta^{\sigma}{}_{\nu} g_{\mu\rho} \right),$$

de modo que o tensor de Ricci é obtido pela contração de σ e ρ,

$$R_{\mu\nu} = R^{\sigma}{}_{\mu\sigma\nu} = \frac{1}{2} R \left(2 g_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} \right) = \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}.$$

Dessa forma, o tensor de Einstein em duas dimensões é identicamente nulo,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0.$$

Dessa forma, as equações de Einstein $G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$, implicam que o tensor de energia e momento é nulo em toda a variedade.

Exercício 7

Exercício 8