

4300337 - Lista de Exercícios 5

Louis Bergamo Radial
8992822

24 de maio de 2024

Exercício 1

Relembremos o resultado obtido para os coeficientes da conexão de Levi-Civita no caso de uma métrica diagonal

$$\Gamma^\lambda_{\lambda\lambda} = \frac{\partial_\lambda g_{\lambda\lambda}}{2g_{\lambda\lambda}}, \quad \Gamma^\lambda_{\mu\lambda} = \frac{\partial_\mu g_{\lambda\lambda}}{2g_{\lambda\lambda}}, \quad \Gamma^\lambda_{\mu\mu} = -\frac{\partial_\lambda g_{\mu\mu}}{2g_{\lambda\lambda}}, \quad \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = 0,$$

em que não utilizamos a convenção de soma de Einstein, portanto não há nenhuma soma nos termos acima. A métrica de Schwarzschild é dada por

$$g_{tt} = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \quad g_{rr} = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \quad g_{\theta\theta} = r^2 \quad g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2 \theta,$$

com as outras componentes nulas. Utilizando as expressões para os coeficientes da conexão, vemos que os termos $\Gamma^\lambda_{t\lambda} = \Gamma^\lambda_{\phi\lambda} = \Gamma^t_{\mu\mu} = \Gamma^\phi_{\mu\mu} = 0$, visto que estes termos envolvem derivadas em relação a t ou a ϕ e que as componentes da métrica não têm dependência com essas variáveis. Temos também que os termos $\Gamma^\theta_{\nu\nu} = \Gamma^\theta_{\mu\theta} = 0$ se anulam para $\nu \neq \phi$ e $\mu \neq r$.

Consideremos a componente t da equação da geodésica,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 t}{d\lambda^2} + \Gamma^t_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} &= 0 \implies \frac{d^2 t}{d\lambda^2} + 2\Gamma^t_{tr} \frac{dt}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} = 0 \\ &\implies \frac{d^2 t}{d\lambda^2} + \frac{\partial_r g_{tt}}{g_{tt}} \frac{dt}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} = 0 \\ &\implies \frac{1}{g_{tt}} \left(g_{tt} \frac{d^2 t}{d\lambda^2} + \frac{dg_{tt}}{d\lambda} \frac{dt}{d\lambda} \right) = 0 \\ &\implies \frac{1}{g_{tt}} \frac{d}{d\lambda} \left(g_{tt} \frac{dt}{d\lambda} \right) = 0. \end{aligned}$$

Como $g_{tt} \neq 0$, temos a seguinte lei de conservação

$$\frac{d}{d\lambda} \left[\frac{dt}{d\lambda} \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) \right] = 0,$$

pela componente temporal da equação da geodésica.

Analogamente, para a componente ϕ , temos

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \phi}{d\lambda^2} + \Gamma^\phi_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} &= 0 \implies \frac{d^2 \phi}{d\lambda^2} + 2\Gamma^\phi_{r\phi} \frac{d\phi}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} + 2\Gamma^\phi_{\theta\phi} \frac{d\phi}{d\lambda} \frac{d\theta}{d\lambda} = 0 \\ &\implies \frac{d^2 \phi}{d\lambda^2} + \frac{\partial_r g_{\phi\phi}}{g_{\phi\phi}} \frac{d\phi}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} + \frac{\partial_\theta g_{\phi\phi}}{g_{\phi\phi}} \frac{d\phi}{d\lambda} \frac{d\theta}{d\lambda} = 0 \\ &\implies \frac{1}{g_{\phi\phi}} \left[g_{\phi\phi} \frac{d^2 \phi}{d\lambda^2} + \left(\frac{\partial_r g_{\phi\phi}}{\partial r} \frac{dr}{d\lambda} + \frac{\partial_\theta g_{\phi\phi}}{\partial \theta} \frac{d\theta}{d\lambda} \right) \frac{d\phi}{d\lambda} \right] = 0 \\ &\implies \frac{1}{g_{\phi\phi}} \frac{d}{d\lambda} \left[g_{\phi\phi} \frac{d\phi}{d\lambda} \right] = 0. \end{aligned}$$

Como $g_{\phi\phi} \neq 0$, temos a lei de conservação

$$\frac{d}{d\lambda} \left(r^2 \frac{d\phi}{d\lambda} \sin^2 \theta \right) = 0,$$

pela componente azimutal da equação da geodésica.

Notemos que as quantidades conservadas

$$\epsilon = \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) \frac{dt}{d\lambda} \quad \text{e} \quad \ell = r^2 \sin^2 \theta \frac{d\phi}{d\lambda}$$

estão relacionadas à energia e ao momento angular da partícula na trajetória geodésica. Para uma partícula de massa m , $m\epsilon$ e $m\ell$ são a sua energia e seu momento angular, enquanto que $\hbar\epsilon$ e $\hbar\ell$ são a energia e o momento angular de um fóton. A expressão ℓ é familiar, enquanto que precisamos motivar a relação de ϵ com a energia. Tomemos uma partícula massiva muito distante do centro de atração, isto é, $r \rightarrow \infty$, onde temos

$$\lim_{r \rightarrow \infty} m\epsilon = m \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{dt}{d\tau} = m\gamma = E,$$

onde utilizamos as expressões conhecidas da Relatividade Restrita, visto que à grandes distâncias do centro atrativo, a métrica de Schwarzschild se reduz à métrica de Minkowski.

A simetria azimutal da métrica é refletida na conservação do momento angular, portanto podemos considerar uma partícula se movendo em um plano de ângulo polar constante, por exemplo $\theta = \frac{\pi}{2}$. Neste caso, como a trajetória se dá numa geodésica, temos que a “norma” do vetor tangente à trajetória é constante, uma vez que este é paralelo ao longo da geodésica, isto é

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = -\kappa,$$

para a constante κ dada por $\kappa = 1$ no caso de uma partícula massiva e o parâmetro afim dado pelo tempo próprio, ou $\kappa = 0$ para uma partícula de massa nula. De forma explícita, temos

$$-\kappa = - \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{d\lambda} \right)^2,$$

portanto ao multiplicar por $1 - \frac{2GM}{r}$ e utilizar as integrais de movimento, temos

$$-\kappa \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) = -\epsilon^2 + \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) \frac{\ell^2}{r^2}.$$

Assim, obtemos a equação

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 - \kappa \frac{GM}{r} + \frac{\ell^2}{2r^2} - \frac{GM\ell^2}{r^3} = \frac{1}{2} (\epsilon^2 - \kappa)$$

a qual podemos analisar como o movimento unidimensional de uma partícula de massa unitária e energia $\frac{1}{2} (\epsilon^2 - \kappa)$, sob a ação de um potencial efetivo clássico V_{ef} dado por

$$V_{\text{ef}}(r) = -\kappa \frac{GM}{r} + \frac{\ell^2}{2r^2} - \frac{GM\ell^2}{r^3},$$

isto é,

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + V_{\text{ef}}(r) = \frac{\epsilon^2 - \kappa}{2}.$$

Para o caso particular de partículas não massivas, $\kappa = 0$, e ainda nessa analogia com Mecânica Clássica, podemos multiplicar a equação de movimento por $\frac{2}{\ell^2}$, obtendo

$$\frac{1}{\ell^2} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 - \frac{2GM}{r^3} + \frac{1}{r^2} = \frac{\epsilon^2}{\ell^2},$$

deixando evidente a forma

$$\left(\frac{dr}{d\sigma}\right)^2 + U_{\text{ef}}(r) = \frac{1}{b^2},$$

com

$$U_{\text{ef}}(r) = -\frac{2GM}{r^3} + \frac{1}{r^2} = \frac{2}{\ell^2} V_{\text{ef}}(r) \quad \text{e} \quad b = \frac{\ell}{\epsilon},$$

onde b é o parâmetro de impacto, ou distância de visada, e reparametrizamos a geodésica utilizando $\sigma = \ell\lambda$.

Exercício 2

Como obtido no exercício anterior, o potencial efetivo é dado por

$$V_{\text{ef}}(r) = -\kappa \frac{GM}{r} + \frac{\ell^2}{2r^2} - \frac{GM\ell^2}{r^3},$$

cujo possível gráfico é apresentado na [Figura 1](#), a depender das relações entre os parâmetros M e ℓ .

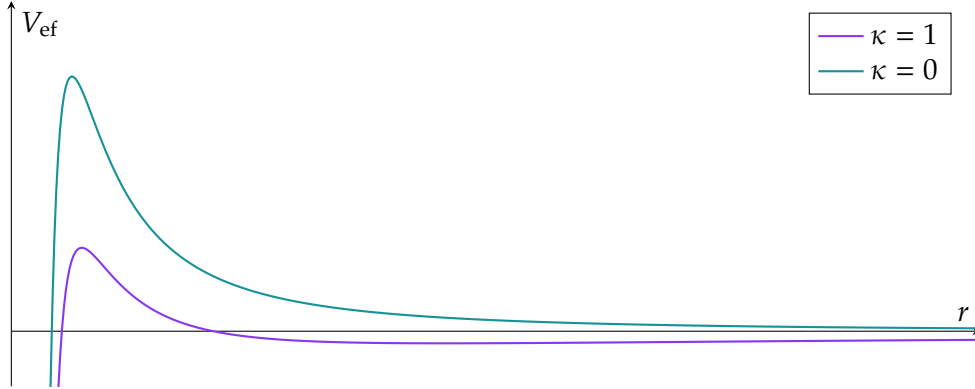


Figura 1: Potencial efetivo radial

Determinemos os pontos críticos do potencial efetivo. Temos

$$\frac{dV_{\text{ef}}}{dr} = \frac{\kappa GM r^2 - \ell^2 r + 3GM\ell^2}{r^4},$$

portanto um ponto crítico do potencial efetivo satisfaz a equação polinomial

$$\kappa GM r^2 - \ell^2 r + 3GM\ell^2 = 0.$$

Para partículas massivas, temos as raízes

$$2GM r_{\pm} = \ell^2 \pm \ell^2 \sqrt{1 - 3 \left(\frac{2GM}{\ell} \right)^2},$$

para $|\ell| \geq 2\sqrt{3}GM$ e nenhuma raiz real caso contrário. Isto é, podemos escrever

$$\frac{dV_{\text{ef}}}{dr} = \frac{GM(r - r_-)(r - r_+)}{r^4},$$

evidenciando que

$$0 < r < r_- \implies \frac{dV_{\text{ef}}}{dr} > 0 \quad r_- < r < r_+ \implies \frac{dV_{\text{ef}}}{dr} < 0 \quad r_+ < r \implies \frac{dV_{\text{ef}}}{dr} > 0,$$

isto é, se $r_- \neq r_+$, o potencial efetivo é crescente antes de r_- e depois de r_+ , e decrescente entre r_- e r_+ . Dessa forma, como o potencial efetivo é suave para $0 < r < \infty$, segue que r_- e r_+ são pontos de máximo e de mínimo, respectivamente, a não ser que se igualem, caso em que são um ponto de inflexão. Ou seja, para $|\ell| > 2\sqrt{3}GM$ temos as órbitas circulares em

$$r_{\min} = \frac{\ell^2}{2GM} \left[1 - \sqrt{1 - 3 \left(\frac{2GM}{\ell} \right)^2} \right] \quad \text{e} \quad r_{\max} = \frac{\ell^2}{2GM} \left[1 + \sqrt{1 - 3 \left(\frac{2GM}{\ell} \right)^2} \right],$$

que são instável e estável, respectivamente. Sejam $V_{\min} = V_{\text{ef}}(r_{\max})$ e $V_{\max} = V_{\text{ef}}(r_{\min})$ os potenciais efetivos das órbitas circulares, então para $V_{\min} < \frac{\epsilon^2 - 1}{2} < 0$ temos órbitas limitadas não circulares, enquanto que para $0 \leq \frac{\epsilon^2 - 1}{2} < V_{\max}$ temos órbitas abertas, com $r > r_{\min}$ indo ao infinito e $r < r_{\min}$ indo à origem. Notemos que para o limite $\ell \rightarrow 2\sqrt{3}GM$, temos

$$\lim_{\ell \rightarrow 2\sqrt{3}GM} r_{\max} = \frac{\ell^2}{2GM} = 6GM,$$

portanto o raio da órbita circular mais interna r_{ISCO} é igual a três vezes o raio de Schwarzschild.

Para partículas de massa nula, temos a única raiz $r_0 = 3GM$. Escrevemos

$$\frac{dU_{\text{ef}}}{dr} = \frac{2}{\ell^2} \frac{dV_{\text{ef}}}{dr} = -2 \frac{r - r_0}{r^4},$$

portanto temos que U_{ef} cresce em $0 < r < r_0$ e decresce em $r > r_0$, isto é, r_0 é um ponto de máximo local. Assim, fótons podem percorrer órbitas circulares instáveis de raio igual a três meios do raio de Schwarzschild. Nesta órbita, temos $U_{\text{ef}}(r_0) = \frac{1}{27G^2M^2}$, portanto o parâmetro de impacto deve ser tal que $\frac{1}{b^2} = \frac{1}{27G^2M^2}$. Para parâmetros de impacto que não satisfazem esta relação, temos órbitas abertas, com $r < r_0$ tendendo à origem e com $r > r_0$ tendendo ao infinito.

Exercício 4

Utilizando o potencial efetivo encontrado para partículas massivas,

$$V_{\text{ef}}(r) = -\frac{GM}{r} + \frac{\ell^2}{2r^2} - \frac{GM\ell^2}{r^3},$$

segue que

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \frac{GM}{r} = -\frac{GM}{r_0}$$

para uma partícula que parte do repouso de uma posição r_0 e cai radialmente em direção à origem. Desse modo, temos a equação separável

$$\frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}}} = \pm \sqrt{2GM} d\tau.$$

Como a partícula cai em direção à origem, podemos escolher o sinal negativo e integrar da posição inicial r_0 até a origem, obtendo

$$\sqrt{2GM}\Delta\tau = \int_0^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}}} = \sqrt{r_0} \int_0^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{\frac{r_0}{r} - 1}}.$$

Com a substituição de variáveis $\rho = \frac{r_0}{r}$, temos

$$\frac{\Delta\tau}{r_0} \sqrt{\frac{2GM}{r_0}} = \int_1^\infty \frac{d\rho}{\rho^2 \sqrt{\rho - 1}}.$$

Tomando $\sqrt{\rho - 1} = \tan \psi$, temos $\rho = \sec^2 \psi$, portanto

$$\frac{\Delta\tau}{2r_0} \sqrt{\frac{2GM}{r_0}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 \psi d\psi}{\sec^4 \psi} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \cos^2 \psi = \frac{\pi}{4}.$$

Isto é, o tempo próprio desde a posição r_0 até a singularidade é

$$\Delta\tau = \frac{\pi r_0}{2} \sqrt{\frac{r_0}{2GM}}.$$

Por exemplo, para $r_0 = 10GM$, temos $\Delta\tau = 5\pi\sqrt{5}GM$.