

4300337 - Lista de Exercícios VI

Louis Bergamo Radial
8992822

29 de junho de 2024

Exercício 4

Relembremos o resultado obtido para os coeficientes da conexão de Levi-Civita no caso de uma métrica diagonal

$$\Gamma^\lambda_{\lambda\lambda} = \frac{\partial_\lambda g_{\lambda\lambda}}{2g_{\lambda\lambda}}, \quad \Gamma^\lambda_{\mu\lambda} = \frac{\partial_\mu g_{\lambda\lambda}}{2g_{\lambda\lambda}}, \quad \Gamma^\lambda_{\mu\mu} = -\frac{\partial_\lambda g_{\mu\mu}}{2g_{\lambda\lambda}}, \quad \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = 0,$$

em que não utilizamos a convenção de soma de Einstein, portanto não há nenhuma soma nos termos acima. Recordemos também que, utilizando a convenção de soma, vale

$$\Gamma^\mu_{\mu\nu} = \frac{\partial_\nu \sqrt{-g}}{\sqrt{-g}},$$

onde g é o determinante da métrica.

Consideremos a métrica dada por $ds^2 = -dt^2 + a^2(t) dx^i dx_i$, com $-g = a^6(t)$. Utilizando as expressões para os coeficientes da conexão, vemos que os termos $\Gamma^0_{0\lambda} = \Gamma^\lambda_{\lambda\lambda} = \Gamma^i_{\lambda\lambda} = \Gamma^i_{ij} = 0$, visto que estes termos envolvem derivadas em relação às coordenadas espaciais e que as componentes da métrica não têm dependência com essas variáveis. Resta apenas os coeficientes dados por

$$\Gamma^0_{ij} = a\dot{a}\delta_{ij} \quad \text{e} \quad \Gamma^i_{j0} = \frac{\dot{a}}{a}\delta^i_j,$$

onde $\dot{a} = \frac{da}{dt}$. Da expressão para o tensor de curvatura de Riemann em coordenadas locais,

$$R^\sigma_{\mu\rho\nu} = \partial_\rho \Gamma^\sigma_{\nu\mu} - \partial_\nu \Gamma^\sigma_{\rho\mu} + \Gamma^\sigma_{\rho\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\mu} - \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\rho\mu},$$

e das simetrias encontradas para os coeficientes da conexão, segue que o tensor de Ricci é

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= R^\sigma_{\mu\sigma\nu} = \partial_\sigma \Gamma^\sigma_{\nu\mu} - \partial_\nu \Gamma^\sigma_{\sigma\mu} + \Gamma^\sigma_{\sigma\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\mu} - \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\sigma\mu} \\ &= \partial_t \Gamma^0_{\nu\mu} - \delta_\nu^0 \partial_t \left(\frac{\partial_\mu \sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} \right) + \frac{\partial_\lambda \sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} \Gamma^\lambda_{\nu\mu} - \Gamma^0_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{0\mu} - \Gamma^i_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{i\mu} \\ &= \delta_\mu^m \delta_\nu^n \delta_{mn} \frac{d}{dt} (a\dot{a}) - \delta_\mu^0 \delta_\nu^0 \frac{d}{dt} \left(\frac{3\dot{a}}{a} \right) + \frac{3\dot{a}}{a} \delta_\mu^m \delta_\nu^n \delta_{mn} a\dot{a} - \Gamma^0_{\nu j} \Gamma^j_{0\mu} - \Gamma^i_{\nu 0} \Gamma^0_{i\mu} - \Gamma^i_{\nu j} \Gamma^j_{i\mu} \\ &= \delta_\mu^m \delta_\nu^n \delta_{mn} (4\dot{a}^2 + a\ddot{a}) - \delta_\mu^0 \delta_\nu^0 \left(\frac{3\ddot{a}}{a} - \frac{3\dot{a}^2}{a^2} \right) - \delta_\nu^n \delta_\mu^m \delta_{mn} \dot{a}^2 - \delta_\nu^n \delta_\mu^m \delta_{mn} \dot{a}^2 - \delta_\nu^0 \delta_\mu^0 \frac{3\dot{a}^2}{a^2} \\ &= \delta_\mu^m \delta_\nu^n \delta_{mn} (2\dot{a}^2 + a\ddot{a}) - \delta_\mu^0 \delta_\nu^0 \left(\frac{3\ddot{a}}{a} \right), \end{aligned}$$

isto é

$$R_{00} = -\frac{3\ddot{a}}{a}, \quad \text{e} \quad R_{ii} = a\ddot{a} + 2\dot{a}^2,$$

e todas as outras componentes nulas. Assim, o escalar de Ricci é dado por

$$\begin{aligned} R &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \frac{3\ddot{a}}{a} + 3 \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2}{a^2} \\ &= 6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right), \end{aligned}$$

logo o tensor de Einstein, $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$, tem suas componentes não nulas dadas por

$$G_{00} = 3 \frac{\dot{a}^2}{a^2} \quad \text{e} \quad G_{ii} = -2a\ddot{a} - \dot{a}^2.$$

Consideremos as equações de Einstein no vácuo com uma constante cosmológica positiva Λ ,

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0 \implies 3\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \Lambda = 0 \quad \text{e} \quad -2a\ddot{a} - \dot{a}^2 + \Lambda a^2 = 0.$$

Utilizando a primeira equação para eliminar o termo \dot{a}^2 na segunda equação, obtemos

$$-2a\left(\ddot{a} - \frac{\Lambda}{3}a\right) = 0.$$

Como $a \neq 0$ para que a métrica não seja singular, devemos ter que

$$a(t) = A \exp(Ht) + B \exp(-Ht),$$

onde $H = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}$ e $A, B \in \mathbb{R}$ são constantes não todas nulas. No caso particular de $B = 0$, a métrica seria, portanto,

$$ds^2 = -dt^2 + A^2 e^{2Ht} dx^i dx_i,$$

representando um Universo em expansão.

Neste caso, definimos o tempo conforme $\eta = -\frac{\exp(-Ht)}{H}$, que satisfaz $\dot{\eta} = -H\eta$, isto é,

$$dt = -\frac{d\eta}{H\eta} \implies dt^2 = \frac{d\eta^2}{H^2\eta^2}.$$

Deste modo, como $\exp(2Ht) = (H\eta)^{-2}$, temos

$$ds^2 = \frac{-d\eta^2 + dx^i dx_i}{H^2\eta^2},$$

se tomarmos $A = 1$.

Interpretando $-\frac{\Lambda}{\kappa}g_{\mu\nu}$ como o tensor de energia e momento $T_{\mu\nu}$ das equações de Einstein sem constante cosmológica, temos de

$$T^\mu_\nu = (\rho + p)U^\mu U_\nu + p\delta^\mu_\nu,$$

com $U^0 = H\eta$ e $U^i = 0$, que

$$\begin{aligned} \left(p + \frac{\Lambda}{\kappa}\right)\delta^\mu_\nu &= -(\rho + p)U^\mu U_\nu \\ &= (\rho + p)\delta^\mu_0 \delta^0_\nu. \end{aligned}$$

Recordando que $\Lambda = 3H^2$, obtemos

$$\rho = \frac{3H^2}{\kappa} \quad \text{e} \quad p = -\frac{3H^2}{\kappa},$$

isto é, uma constante cosmológica positiva pode ser interpretada como um fluido com pressão negativa.

Exercício 5

Para a métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker,

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\gamma_{ij} dx^i dx^j, \text{ com } \gamma_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{\left[1 + \frac{\kappa}{4}(x^2 + y^2 + z^2)\right]^2},$$

onde κ é a curvatura da seção espacial, o tensor de Einstein é dado por

$$G_{00} = 3\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 3\frac{\kappa}{a^2}, \quad G_{0i} = 0, \quad \text{e} \quad G_{ij} = -\left(2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\kappa}{a^2}\right)g_{ij},$$

e os coeficientes da conexão de Levi-Civita por

$$\Gamma^0_{ij} = a\dot{a}\gamma_{ij}, \quad \Gamma^i_{0j} = \frac{\dot{a}}{a}\delta^i_j, \quad \text{e} \quad \Gamma^k_{ij} = 2\kappa \frac{\delta_{ij}x^k - \delta_{ik}x^j - \delta_{jk}x^i}{4 + \kappa(x^2 + y^2 + z^2)},$$

com os outros coeficientes ou nulos ou dados pela simetria da conexão. Consideremos um tensor de energia e momento homogêneo e isotrópico

$$T^\mu_\nu = [\rho(t) + p(t)] U^\mu U_\nu + p(t)\delta^\mu_\nu,$$

com $U^0 = 1$ e $U^i = 0$, e calculemos a divergência $\nabla_\mu T^\mu_\nu$ explicitamente. Notemos que

$$\nabla_\mu U^\mu = \frac{\partial_\mu(\sqrt{-g}U^\mu)}{\sqrt{-g}} = \frac{\partial_t \sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} = 3\frac{\dot{a}}{a}$$

e que

$$U^\mu \nabla_\mu U_\nu = U^\mu \Gamma^\sigma_{\mu\nu} U_\sigma = -\Gamma^0_{0\nu} = 0,$$

logo a divergência procurada é dada por

$$\begin{aligned} \nabla_\mu T^\mu_\nu &= (\dot{\rho} + \dot{p})U_\nu + (\rho + p)(U_\nu \nabla_\mu U^\mu + U^\mu \nabla_\mu U_\nu) + \dot{p}\delta^0_\nu \\ &= \left[\dot{\rho} + \dot{p} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p)\right]U_\nu + \dot{p}\delta^0_\nu. \end{aligned}$$

Da conservação do tensor de energia e momento, $\nabla_\mu T^\mu_\nu = 0$, temos

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0,$$

equação a qual nos referiremos por equação de continuidade.

Considerando as equações de Einstein com constante cosmológica, $G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$, obtemos as equações de Friedmann,

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 3\frac{\kappa}{a^2} - \Lambda = 8\pi G\rho \quad \text{e} \quad -2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\kappa}{a^2} + \Lambda = 8\pi Gp.$$

Somando a primeira equação dividida por três à segunda equação, obtemos

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{\Lambda}{3} - \frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p),$$

que podemos substituir de volta na segunda equação, resultando em

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= \Lambda - \frac{\kappa}{a^2} - 8\pi Gp - 2\left[\frac{\Lambda}{3} - \frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p)\right] \\ &= \frac{\Lambda}{3} - \frac{\kappa}{a^2} + \frac{8\pi G}{3}\rho. \end{aligned}$$

Definindo $\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}$ e $\rho_\kappa = -\frac{3\kappa}{8\pi G}a^{-2}$ e utilizando o parâmetro de Hubble, $H = \frac{\dot{a}}{a}$, podemos escrever esta última equação como

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} (\rho_\Lambda + \rho_\kappa + \rho).$$

Nesta forma, podemos interpretar o efeito da constante cosmológica e da curvatura da seção espacial como densidades de energia fictícias.

Utilizando a equação de continuidade e a equação obtida a partir das equações de Friedmann, podemos obter a evolução do fator de escala para diferentes cenários de constante cosmológica, curvatura, e densidade de energia. Para um universo com apenas matéria fria, isto é, cuja pressão é desprezível, temos da equação de continuidade que

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0 \implies \rho = \rho_0 a^{-3}$$

portanto

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho_0}{3a^3} \implies \dot{a} = \sqrt{\frac{8\pi G\rho_0}{3a}} \implies a(t) \implies a(t) = \left[\frac{3}{2} \left(a_0 + t\sqrt{\frac{8\pi G\rho_0}{3}} \right) \right]^{\frac{2}{3}},$$

onde a_0 e ρ_0 são constantes de integração, logo a evolução do fator de escala é da ordem de $t^{\frac{2}{3}}$. Para um universo com apenas radiação, temos pela isotropia e homogeneidade que $p = \frac{1}{3}\rho$, portanto

$$\dot{\rho} + 4\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0 \implies \rho = \rho_0 a^{-4},$$

então

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho_0}{3a^4} \implies \dot{a} = \sqrt{\frac{8\pi G\rho_0}{3}}a^{-1} \implies a(t) \implies a(t) = \sqrt{2 \left(a_0 + t\sqrt{\frac{8\pi G\rho_0}{3}} \right)},$$

isto é, o fator de escala evolui como $t^{\frac{1}{2}}$. Para um universo com apenas constante cosmológica e/ou apenas curvatura espacial, segue da equação de continuidade que $\rho(t) = \rho_0$. Para um universo com apenas curvatura, temos

$$\dot{a} = \sqrt{-\kappa} \implies a(t) = t\sqrt{-\kappa} + a_0,$$

isto é, o fator de escala muda linearmente, e a curvatura espacial deve ser negativa. Para um universo com apenas constante cosmológica, vimos no exercício 4 que o fator de escala muda exponencialmente.

Para um universo com geometria plana com as abundâncias de matéria $\Omega_m = 0.3$ e energia escura $\Omega_\Lambda = 0.7$, a equação para o parâmetro de Hubble é

$$H^2 = H_0^2 (\Omega_\Lambda + \Omega_m a^{-3})$$

onde $H_0 \approx 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ é o parâmetro de Hubble atual. Notemos que

$$H = \frac{\dot{a}}{a} \implies \frac{da}{aH} = dt,$$

então integrando em $[0, 1]$ em a e em $[0, T]$ em t , temos a expressão para a idade do universo T ,

$$T = \frac{1}{H_0\sqrt{\Omega_m}} \int_0^1 \frac{da}{a\sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m} + a^{-3}}}.$$

Para calcular esta integral, consideremos a mudança de variáveis

$$\frac{\Omega_m}{\Omega_\Lambda} \xi^2 = a^3 \implies \frac{da}{a} = \frac{2 d\xi}{3\xi},$$

de modo que

$$T = \frac{2}{3H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}} \int_0^{\sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m}}} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 + 1}} = \frac{2}{3H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}} \operatorname{arsinh} \left(\sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m}} \right) \approx 13.467 \times 10^9 \text{ anos.}$$

Exercício 6

Para a métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker,

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\gamma_{ij} dx^i dx^j, \text{ com } \gamma_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{\left[1 + \frac{\kappa}{4}(x^2 + y^2 + z^2)\right]^2},$$

onde κ é a curvatura da seção espacial, o escalar de Ricci é dado por

$$R = 6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\kappa}{a^2} \right).$$

Para um fator de escala com comportamento do tipo $a(t) = a_0 t^n$, temos

$$R = 6 \left(\frac{n(n-1)}{t^2} + \frac{n^2}{t^2} + \frac{\kappa}{a_0^2 t^{2n}} \right) \implies \lim_{t \rightarrow 0^+} |R| = \infty,$$

isto é, $t \rightarrow 0$ é uma singularidade em que a curvatura do espaço-tempo é divergente, não importando o tipo de curvatura da seção espacial.