

# 4300337 - Lista de exercícios 2

Louis Bergamo Radial  
8992822

28 de março de 2024

## Exercício 1

Para que um corpo de massa  $m$  tenha uma energia cinética  $K$ , sua velocidade  $v$  satisfaz

$$\left( \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1 \right) mc^2 = K.$$

Isolando  $v$ , obtemos

$$v = c \sqrt{1 - \left( \frac{1}{\frac{K}{mc^2} + 1} \right)^2}.$$

Assim, para que uma partícula tenha energia cinética igual a sua energia de repouso, sua velocidade é

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2} c.$$

Pelo mesmo cálculo, para que uma bola de canhão de massa  $m = 1 \text{ kg}$  tenha a mesma energia cinética que um próton, de massa  $m_p \approx 1.673 \times 10^{-27} \text{ kg}$ , de um raio cósmico em movimento com fator de Lorentz  $\gamma = 10^{11}$ , sua velocidade deve ser

$$\begin{aligned} v &= c \sqrt{1 - \left( \frac{1}{\frac{(\gamma-1)m_p c^2}{mc^2} + 1} \right)^2} \\ &= c \sqrt{1 - \left( \frac{1}{\frac{(\gamma-1)m_p}{m} + 1} \right)^2} \\ &\approx 5.483 \text{ m s}^{-1}. \end{aligned}$$

## Exercício 2

No referencial do centro de massa, o 4-momento do sistema é dado por

$$P^\mu = \left( m_1 c^2, \vec{0} \right)^\mu,$$

visto que antes do decaimento a partícula de massa  $m_1$  está em repouso neste referencial. Notaremos por  $(P_{m_i})^\mu$  a componente (neste caso contravariante)  $\mu$  do 4-momento da partícula de massa  $m_i$ . Por conservação do 4-momento, temos

$$(P_{m_1})^\mu = (P_{m_2})^\mu + (P_{m_3})^\mu,$$

com  $P_{m_1}$  dado acima.

Assim, temos

$$\begin{aligned} (P_{m_2})_\mu (P_{m_2})^\mu &= (P_{m_1} - P_{m_3})_\mu (P_{m_1} - P_{m_3})^\mu \\ &= (P_{m_1})_\mu (P_{m_1})^\mu + (P_{m_2})_\mu (P_{m_2})^\mu - 2 (P_{m_1})_\mu (P_{m_3})^\mu. \end{aligned}$$

Como  $(P_{m_i})_\mu (P_{m_i})^\mu = -m_i^2 c^2$ , obtemos a energia da partícula de massa  $m_3$

$$-m_3^2 c^2 = -m_1^2 c^2 - m_2^2 c^2 + 2m_1 E_3 \implies E_3 = \frac{m_1^2 - m_2^2 + m_3^2}{2m_1} c^2.$$

Pelo mesmo argumento, obtemos a energia da outra partícula

$$-m_3^2 c^2 = -m_1^2 c^2 - m_2^2 c^2 + 2m_1 E_2 \implies E_2 = \frac{m_1^2 + m_2^2 - m_3^2}{2m_1} c^2.$$

### Exercício 3

O processo de propulsão certamente deve respeitar a conservação de energia e momento, neste caso, temos

$$d(\gamma m v) = -dp \quad \text{e} \quad d(\gamma m c^2) = c dp,$$

onde  $p$  é o momento do fóton. Desta forma, temos

$$d(\gamma m c + \gamma m v) = 0.$$

Notemos que

$$d\gamma = \gamma^3 \frac{v}{c^2} dv,$$

portanto

$$\gamma(v+c)dm + m\gamma \left( \gamma^2 \frac{v(v+c)}{c^2} + 1 \right) dv = 0.$$

Dividindo por  $\gamma m(v+c)$ , obtemos

$$\frac{dm}{m} + \frac{\gamma^2}{c} dv = 0.$$

Em termos de  $\beta = \frac{v}{c}$ , temos

$$\frac{dm}{m} + \frac{d\beta}{1-\beta^2} = 0.$$

Se o foguete parte do repouso com massa inicial  $M$ , temos

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{m}{M}\right) &= - \int_0^\beta \frac{d\xi}{1-\xi^2} \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^\beta \left( \frac{1}{\xi+1} - \frac{1}{\xi-1} \right) d\xi \\ &= -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{\beta+1}{1-\beta}\right) \\ &= \ln \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}. \end{aligned}$$

Desse modo, o foguete tem massa

$$m = M \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

quando sua velocidade é igual a  $\beta c$ .

Se  $\sigma = \frac{dm}{d\tau}$  é a taxa em que o foguete converte massa em fótons no referencial instantaneamente de repouso do foguete, então a taxa no referencial terrestre é  $\frac{\sigma}{\gamma} = \frac{dm}{dt}$ . Neste caso, temos

$$\begin{aligned} \frac{\sigma}{M} &= \gamma \frac{d}{dt} \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \\ &= -\gamma \frac{\frac{1}{(1+\beta)^2} d\beta}{\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}} \frac{d\beta}{dt} \\ &= -\frac{1}{(1+\beta)^2(1-\beta)} \frac{d\beta}{dt}, \end{aligned}$$

isto é, uma equação diferencial a variáveis separáveis,

$$-\frac{\sigma}{M} dt = \frac{d\beta}{(1+\beta)^2(1-\beta)}.$$

Integrando, obtemos

$$\begin{aligned} t &= -\frac{M}{\sigma} \int_0^\beta \frac{d\xi}{(1+\xi)^2(1-\xi)} \\ &= -\frac{M}{4\sigma} \int_0^\beta \left( \frac{2}{(1+\xi)^2} + \frac{1}{1+\xi} - \frac{1}{\xi-1} \right) d\xi \\ &= \frac{M}{4\sigma} \left[ 2(1+\xi)^{-1} + \ln \left( \frac{1-\xi}{1+\xi} \right) \right]_0^\beta \\ &= \frac{M}{4\sigma} \left[ -\frac{2\beta}{1+\beta} + \ln \left( \frac{1-\beta}{1+\beta} \right) \right]. \end{aligned}$$

## Exercício 4

Consideremos a força  $F^i = \frac{dp^i}{dt}$ . Em notação vetorial temos  $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$ , donde segue

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{d\gamma}{dt} m \vec{v} + \gamma m \frac{d\vec{v}}{dt} \\ &= \frac{d\gamma}{dt} m \vec{v} + \gamma m \vec{a}, \end{aligned}$$

onde  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$  é a 3-aceleração da partícula.

Notemos que

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{dt} &= \left[ 1 - \left( \frac{v}{c} \right)^2 \right]^{-\frac{3}{2}} \frac{v}{c^2} \frac{dv}{dt} \\ &= \frac{\gamma^3}{c^2} \langle \vec{v}, \vec{a} \rangle, \end{aligned}$$

onde foi utilizada a relação

$$2v \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 2 \langle \vec{v}, \vec{a} \rangle.$$

Dessa forma, obtemos

$$\vec{F} = \gamma m \left( \vec{a} + \frac{\gamma^2}{c^2} \langle \vec{v}, \vec{a} \rangle \vec{v} \right).$$

No caso particular em que a força é paralela à velocidade, devemos ter que a aceleração é também paralela à velocidade. Assim,  $\vec{v} = v\hat{n}$ ,  $\vec{a} = a\hat{n}$  e  $\vec{F} = F\hat{n}$  para algum vetor unitário  $\hat{n}$ , então

$$\begin{aligned} F &= \gamma m a \left( 1 + \gamma^2 \frac{v^2}{c^2} \right) \\ &= \gamma^3 m a. \end{aligned}$$

Como um exemplo, tomemos uma partícula de carga  $q$  com velocidade  $\vec{v} = v\hat{x}$  que parte do repouso na origem num campo uniforme  $\vec{E} = E\hat{x}$ . Assim,

$$qE = \gamma^3 m a.$$

Notemos que isso é uma equação diferencial a variáveis separáveis

$$\left[ 1 - \left( \frac{v}{c} \right)^2 \right]^{-\frac{3}{2}} dv = \frac{qE}{m} dt \implies \frac{v}{\sqrt{1 - \left( \frac{v}{c} \right)^2}} = \frac{qEt}{m}.$$

Resolvendo para  $v$ , obtemos

$$v^2 = \frac{1}{\left(\frac{m}{qEt}\right)^2 + \left(\frac{1}{c}\right)^2} \implies v = \sqrt{\frac{c^2}{\left(\frac{mc}{qEt}\right)^2 - 1}}.$$

No caso particular em que a força é ortogonal à velocidade, devemos ter

$$\begin{aligned} \langle \vec{F}, \vec{v} \rangle = 0 &\implies \langle \vec{a}, \vec{v} \rangle (1 + \gamma^2 \beta^2) = 0 \\ &\implies \langle \vec{a}, \vec{v} \rangle = 0, \end{aligned}$$

de modo que

$$\vec{F} = \gamma m \vec{a}.$$

Como um exemplo, tomemos uma partícula de carga  $q$  com velocidade  $\vec{v} = v\hat{\phi}$  contida no plano  $xy$  que se move num campo magnético uniforme  $\vec{B} = B\hat{z}$ . Assim,

$$\begin{aligned} \gamma m \vec{a} &= q \vec{v} \times \vec{B} \implies -\gamma m v \dot{\phi} \hat{r} = q v B \hat{r} \\ &\implies \dot{\phi} = -\frac{qB}{m\gamma}, \end{aligned}$$

portanto a frequência  $f$  de oscilação do movimento orbital é

$$f = \frac{qB}{2\pi m} \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}.$$

## Exercício 5

A transformação de Lorentz de das componentes de um quadrivetor é dada por

$$x'^\nu = \Lambda^\nu_\mu x^\mu \quad \text{e} \quad x'_\nu = \Lambda_\nu^\mu x_\mu,$$

então temos que as componentes  $T^{\mu_1, \dots, \mu_p}_{\nu_1, \dots, \nu_q}$  de um tensor tipo  $(p, q)$  se transformam de acordo com

$$T'^{\alpha_1, \dots, \alpha_p}_{\beta_1, \dots, \beta_q} = \Lambda^{\alpha_1}_{\mu_1} \cdots \Lambda^{\alpha_p}_{\mu_p} \Lambda^{\nu_1}_{\beta_1} \cdots \Lambda^{\nu_q}_{\beta_q} T^{\mu_1, \dots, \mu_p}_{\nu_1, \dots, \nu_q}.$$

Dadas bases  $\hat{e}_\mu$  e  $\hat{e}'_\nu$ , temos

$$x = x^\mu \hat{e}_\mu = x'^\nu \hat{e}'_\nu,$$

isto é, uma mudança de referencial não muda o vetor em si, apenas os valores das componentes. Assim,

$$x = (\Lambda^\nu_\sigma x^\sigma) (\Lambda_\nu^\rho \hat{e}_\rho) \implies \Lambda^\nu_\sigma \Lambda_\nu^\rho = \delta^\rho_\sigma.$$

Podemos mostrar a invariância do intervalo  $ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ . Pela transformações de tensores, temos

$$\begin{aligned} \eta'_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu &= \left( \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta \eta_{\alpha\beta} \right) \left( \Lambda^\mu_\sigma dx^\sigma \right) \left( \Lambda^\nu_\rho dx^\rho \right) \\ &= \delta^\alpha_\sigma \delta^\beta_\rho \eta_{\alpha\beta} dx^\sigma dx^\rho \\ &= \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \\ &= ds^2. \end{aligned}$$

Consideremos  $\delta^\mu_\nu = \eta^{\mu\sigma} \eta_{\sigma\nu}$ , então

$$\begin{aligned} \delta'^\alpha_\beta &= \Lambda^\alpha_\mu \Lambda_\beta^\nu \delta^\mu_\nu \\ &= \Lambda^\alpha_\nu \Lambda_\beta^\nu \\ &= \delta^\alpha_\beta, \end{aligned}$$

isto é, o delta de Kronecker é invariante por transformações de Lorentz.

Consideremos o símbolo de Levi-Civita  $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ , então

$$\begin{aligned} \epsilon'^{\alpha\beta\kappa\lambda} &= \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu \Lambda^\kappa_\rho \Lambda^\lambda_\sigma \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \\ &= \det(\Lambda) \epsilon^{\alpha\beta\kappa\lambda}. \end{aligned}$$

Assim, o símbolo de Levi-Civita é invariante por transformações do grupo restrito de Lorentz.

## Exercício 6

Consideremos um tensor  $T^{\mu\nu}$ , então

$$T'^{\alpha\beta} = \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu T^{\mu\nu}$$

expressa a transformação das componentes sob uma transformação de Lorentz  $\Lambda$ . No caso particular em que a transformação é uma rotação no grupo restrito de Lorentz, segue que as únicas componentes não nulas dessa transformação são

$$\Lambda^0_0 = 1 \quad \text{e} \quad \Lambda^i_j = R^i_j,$$

para uma dada matriz de rotação  $R^i_j \in \text{SO}(3)$ . Desse modo, temos

$$\begin{aligned} T'^{00} &= \Lambda^0_\mu \Lambda^0_\nu T^{\mu\nu} & T'^{i0} &= \Lambda^i_\mu \Lambda^0_\nu T^{\mu\nu} & T'^{0j} &= \Lambda^0_\mu \Lambda^j_\nu T^{\mu\nu} & T'^{ij} &= \Lambda^i_\mu \Lambda^j_\nu T^{\mu\nu} \\ &= \Lambda^0_0 \Lambda^0_\nu T^{0\nu} + \Lambda^0_m \Lambda^0_\nu T^{m\nu} & &= \Lambda^i_\mu T^{\mu 0} & &= \Lambda^j_\nu T^{0\nu} & &= \Lambda^i_m \Lambda^j_n T^{mn} \\ &= T^{00} & &= R^i_m T^{m0} & &= R^j_n T^{0n} & &= R^i_m R^j_n T^{mn}, \end{aligned}$$

isto é, a componente  $T^{00}$  é inalterada, as componentes  $T^{i0}$  e  $T^{0j}$  se transformam como componentes de 3-vetores, e as componentes  $T^{ij}$  se transformam como componentes de um 3-tensor.

## Exercício 7

A ação para uma partícula de massa  $m$  é dada por

$$\begin{aligned} S &= - \int mc \sqrt{-\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} \\ &= - \int dt mc \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} \\ &= - \int dt \frac{mc^2}{\gamma(\dot{\vec{x}})}, \end{aligned}$$

portanto a lagrangiana é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) &= -mc \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} \\ &= -\frac{mc^2}{\gamma(\dot{\vec{x}})}. \end{aligned}$$

Deste modo, o momento canônico é dado por

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} = -mc \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} \\ &= \frac{mc}{2\sqrt{-\eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} \eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \\ &= \frac{mc}{\sqrt{-\eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}} \eta_{\mu\nu} \delta^\mu_i \dot{x}^\nu \\ &= m\gamma(\dot{\vec{x}}) \delta^\mu_i \dot{x}_\mu \\ &= m\gamma(\dot{\vec{x}}) \dot{x}_i, \end{aligned}$$

e a Hamiltoniana por

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= p_i \dot{x}^i - \mathcal{L} = m\gamma \dot{x}_i \dot{x}^i + \frac{mc^2}{\gamma} \\ &= \gamma mc^2 \left( \frac{\dot{x}_i \dot{x}^i}{c^2} + \frac{1}{\gamma^2} \right) \\ &= \gamma mc^2, \end{aligned}$$

uma vez que  $\frac{1}{\gamma^2} = 1 - \frac{\dot{x}_i \dot{x}^i}{c^2}$ .

Consideremos a ação

$$\tilde{S} = -\frac{1}{2} \int d\zeta \left[ \sigma(\zeta) \left( \frac{dx}{d\zeta} \right)^2 + \frac{m^2}{\sigma(\zeta)} \right]$$

então pela equação de Euler-Lagrange para  $\sigma$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[ \sigma \left( \frac{dx}{d\zeta} \right)^2 + \frac{m^2}{\sigma} \right] &= 0 \implies \left( \frac{dx}{d\zeta} \right)^2 - \frac{m^2}{\sigma^2} = 0 \\ &\implies \frac{m^2}{\sigma^2} = \left( \frac{dx}{d\zeta} \right)^2. \end{aligned}$$

Assim, substituindo na ação, obtemos

$$\tilde{S} = - \int d\zeta \sigma(\zeta) \left( \frac{dx}{d\zeta} \right)^2.$$

## Exercício 8