

4302305 - Lista de Exercícios VI

Louis Bergamo Radial
8992822

9 de maio de 2024

Exercício 1

Em uma variedade de dimensão n dotada de métrica e uma conexão de Levi-Civita, o tensor de curvatura tem n^4 componentes. Contraindo o tensor de curvatura com o tensor métrico, temos as simetrias dadas por

$$R_{\alpha\rho\mu\nu} = -R_{\alpha\rho\nu\mu} = -R_{\rho\alpha\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\rho},$$

além da identidade de Jacobi,

$$R_{\alpha\rho\mu\nu} + R_{\alpha\mu\nu\rho} + R_{\alpha\nu\rho\mu} = 0.$$

Como o tensor é antissimétrico no primeiro e no último par de índices, temos que cada par pode assumir $m = \binom{n}{2}$ valores diferentes. Desse modo, como podemos trocar os pares de índices, segue que o tensor tem no máximo $\frac{m(m+1)}{2}$ componentes independentes. Na identidade de Jacobi, todos os índices devem ser distintos para que a equação não seja reduzida às condições de antissimetria, portanto temos $\binom{n}{4}$ outros vínculos para as componentes do tensor de curvatura. Assim, o número de componentes independentes do tensor de Riemann é dado por

$$\frac{m(m+1)}{2} - \binom{n}{4} = \frac{n(n-1)}{8} (3n^2 - 3n + 6 - (n-2)(n-3)) = \frac{n^2(n^2-1)}{12}.$$

Notemos que o tensor de Ricci é um tensor simétrico, portanto um limite superior para o número de suas componentes independentes é dado por $\frac{n(n+1)}{2}$. Desse modo, temos que em $n = 3$ o número de componentes independentes do tensor de Ricci e do tensor de Riemann são iguais!

Já vimos que as componentes do tensor de Riemann são dadas por

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = g_{\mu\sigma} R^{\sigma}_{\nu\alpha\beta} = g_{\mu\sigma} \left(\partial_{\alpha} \Gamma^{\sigma}_{\beta\nu} - \partial_{\beta} \Gamma^{\sigma}_{\alpha\nu} + \Gamma^{\sigma}_{\alpha\rho} \Gamma^{\rho}_{\beta\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\beta\rho} \Gamma^{\rho}_{\alpha\nu} \right)$$

em qualquer sistema de coordenadas. Em coordenadas normais de Riemann, as primeiras derivadas da métrica e os coeficientes da conexão se anulam, de modo que

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\alpha\beta} &= \frac{1}{2} g_{\mu\sigma} \left[\partial_{\alpha} (g^{\sigma\rho} (\partial_{\beta} g_{\rho\nu} + \partial_{\nu} g_{\rho\beta} - \partial_{\rho} g_{\beta\nu})) - \partial_{\beta} (g^{\sigma\rho} (\partial_{\alpha} g_{\rho\nu} + \partial_{\nu} g_{\rho\alpha} - \partial_{\rho} g_{\alpha\nu})) \right] \\ &= \frac{1}{2} g_{\mu\sigma} g^{\sigma\rho} \left[\partial_{\alpha} (\partial_{\beta} g_{\rho\nu} + \partial_{\nu} g_{\rho\beta} - \partial_{\rho} g_{\beta\nu}) - \partial_{\beta} (\partial_{\alpha} g_{\rho\nu} + \partial_{\nu} g_{\rho\alpha} - \partial_{\rho} g_{\alpha\nu}) \right] \\ &= \frac{1}{2} \delta^{\rho}_{\mu} (\partial_{\alpha} \partial_{\beta} g_{\rho\nu} + \partial_{\alpha} \partial_{\nu} g_{\rho\beta} - \partial_{\alpha} \partial_{\rho} g_{\beta\nu} - \partial_{\beta} \partial_{\alpha} g_{\rho\nu} - \partial_{\beta} \partial_{\nu} g_{\rho\alpha} + \partial_{\beta} \partial_{\rho} g_{\alpha\nu}) \\ &= \frac{1}{2} (\partial_{\alpha} \partial_{\nu} g_{\mu\beta} - \partial_{\alpha} \partial_{\mu} g_{\beta\nu} - \partial_{\beta} \partial_{\nu} g_{\mu\alpha} + \partial_{\beta} \partial_{\mu} g_{\alpha\nu}), \end{aligned}$$

onde utilizamos que $\partial_{\alpha} \partial_{\beta} = \partial_{\beta} \partial_{\alpha}$. Assim, ainda nas coordenadas normais de Riemann, temos

$$\nabla_{\lambda} R_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\partial_{\lambda} \partial_{\alpha} \partial_{\nu} g_{\mu\beta} - \partial_{\lambda} \partial_{\alpha} \partial_{\mu} g_{\beta\nu} - \partial_{\lambda} \partial_{\beta} \partial_{\nu} g_{\mu\alpha} + \partial_{\lambda} \partial_{\beta} \partial_{\mu} g_{\alpha\nu} \right),$$

então ao permutar ciclicamente (α, β, λ) , obtemos

$$\nabla_{\alpha} R_{\mu\nu\beta\lambda} = \frac{1}{2} \left(\partial_{\alpha} \partial_{\beta} \partial_{\nu} g_{\mu\lambda} - \partial_{\alpha} \partial_{\beta} \partial_{\mu} g_{\lambda\nu} - \partial_{\alpha} \partial_{\lambda} \partial_{\nu} g_{\mu\beta} + \partial_{\alpha} \partial_{\lambda} \partial_{\mu} g_{\beta\nu} \right)$$

e

$$\nabla_\beta R_{\mu\nu\lambda\alpha} = \frac{1}{2} \left(\partial_\beta \partial_\lambda \partial_\nu g_{\mu\alpha} - \partial_\beta \partial_\lambda \partial_\mu g_{\alpha\nu} - \partial_\beta \partial_\alpha \partial_\nu g_{\mu\lambda} + \partial_\beta \partial_\alpha \partial_\mu g_{\lambda\nu} \right),$$

portanto ao somar as três equações obtemos

$$\nabla_\lambda R_{\mu\nu\alpha\beta} + \nabla_\alpha R_{\mu\nu\beta\lambda} + \nabla_\beta R_{\mu\nu\lambda\alpha} = 0.$$

Deste modo, em qualquer outro sistema de coordenadas vale a segunda identidade de Bianchi, expressa acima.

Tornemos nossa atenção para o caso particular bidimensional e consideremos o tensor $X_{\mu\nu\alpha\beta} = g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}$. Notemos que

$$\begin{aligned} X_{\nu\mu\alpha\beta} &= g_{\nu\alpha}g_{\mu\beta} - g_{\nu\beta}g_{\mu\alpha} & X_{\mu\nu\beta\alpha} &= g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha} - g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} & X_{\alpha\beta\mu\nu} &= g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu} \\ &= -(g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}) & &= -(g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}) & &= g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha} \\ &= -X_{\mu\nu\alpha\beta} & &= -X_{\mu\nu\alpha\beta} & &= X_{\mu\nu\alpha\beta}, \end{aligned}$$

isto é, o tensor $X_{\mu\nu\alpha\beta}$ tem as simetrias do tensor de Riemann. Nesta dimensão há apenas uma componente independente para estes tensores, portanto $R_{\mu\nu\alpha\beta} = KX_{\mu\nu\alpha\beta}$ para alguma constante K . Podemos obter a relação desta constante com o escalar de curvatura $R = g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}R_{\mu\nu\alpha\beta}$ de forma a escrever o tensor de Riemann em termos do tensor métrico e do escalar de curvatura,

$$\begin{aligned} R &= Kg^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}X_{\mu\nu\alpha\beta} \\ &= Kg^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}(g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}) \\ &= Kg^{\mu\alpha}(2g_{\mu\alpha} - g_{\mu\alpha}) \\ &= 2K, \end{aligned}$$

portanto,

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{R}{2}(g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}).$$

É interessante notar que a constante $K = \frac{R}{2}$ é a chamada curvatura Gaussiana de uma superfície da teoria clássica de geometria diferencial. O tratamento original feito por Gauss foi inicialmente de modo extrínseco, estudando superfícies imersas no espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 e induzindo uma métrica nesta superfície a partir da métrica Euclidiana, chamada de primeira forma fundamental. Utilizando a abordagem intrínseca obtivemos o mesmo resultado, fato esse relacionado com o teorema de Whitney, que diz sobre a capacidade de imersão de qualquer variedade diferenciável de dimensão n em algum \mathbb{R}^d com $d \geq n$.

Exercício 2

Exercício 3

Exercício 4

Consideremos a ação de Einstein-Hilbert com uma constante cosmológica Λ ,

$$S_{\text{EH}} = \kappa_G \int_M d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda),$$

onde $\kappa_G = \frac{1}{16\pi G}$. A variação da ação devido à variação $g^{\mu\nu} \rightarrow g^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu}$ é dada por

$$\begin{aligned} \delta S_{\text{EH}} &= \kappa_G \int_M d^4x \left[(R - 2\Lambda) \delta \sqrt{-g} + \sqrt{-g} \delta R \right] \\ &= \kappa_G \int_M d^4x \sqrt{-g} \left[\left(\frac{1}{2} R - \Lambda \right) \frac{\delta g}{g} + R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \right], \end{aligned}$$

portanto precisamos determinar as variações δg e $\delta R_{\mu\nu}$.

Em uma carta de coordenadas $g_{\mu\nu}$ pode ser considerada como uma matriz invertível, de modo que pela fórmula de Jacobi¹ temos

$$\delta g = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = -g g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}.$$

Assim, temos

$$\delta S_{\text{EH}} = \kappa_G \int_M d^4x \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} + \kappa_G \int_M d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu},$$

e nos resta mostrar que a segunda integral se anula.

Como consideramos conexões de Levi-Civita, a variação da métrica acarreta uma variação dos coeficientes da conexão $\Gamma^\sigma_{\nu\mu} \rightarrow \Gamma^\sigma_{\nu\mu} + \delta \Gamma^\sigma_{\nu\mu}$. Como $\delta \Gamma^\sigma_{\nu\mu}$ é uma componente do **tensor** dado pela diferença entre duas conexões, podemos escrever a sua derivada covariante por

$$\nabla_\rho \delta \Gamma^\sigma_{\nu\mu} = \partial_\rho \delta \Gamma^\sigma_{\nu\mu} + \Gamma^\sigma_{\rho\lambda} \delta \Gamma^\lambda_{\nu\mu} - \Gamma^\lambda_{\rho\nu} \delta \Gamma^\sigma_{\lambda\mu} - \Gamma^\lambda_{\rho\mu} \delta \Gamma^\sigma_{\nu\lambda},$$

em relação à conexão de coeficientes $\Gamma^\sigma_{\nu\mu}$. Como o tensor de curvatura é definido a partir da conexão, isto é,

$$R^\sigma_{\mu\rho\nu} = \partial_\rho \Gamma^\sigma_{\nu\mu} - \partial_\nu \Gamma^\sigma_{\rho\mu} + \Gamma^\sigma_{\rho\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\mu} - \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\rho\mu},$$

sua variação é dada por

$$\begin{aligned} \delta R^\sigma_{\mu\rho\nu} &= \partial_\rho \delta \Gamma^\sigma_{\nu\mu} - \partial_\nu \delta \Gamma^\sigma_{\rho\mu} + \delta \Gamma^\sigma_{\rho\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\mu} + \Gamma^\sigma_{\rho\lambda} \delta \Gamma^\lambda_{\nu\mu} - \delta \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\rho\mu} - \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} \delta \Gamma^\lambda_{\rho\mu} \\ &= \left(\partial_\rho \delta \Gamma^\sigma_{\nu\mu} + \Gamma^\sigma_{\rho\lambda} \delta \Gamma^\lambda_{\nu\mu} - \delta \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\rho\mu} \right) - \left(\partial_\nu \delta \Gamma^\sigma_{\rho\mu} + \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} \delta \Gamma^\lambda_{\rho\mu} - \delta \Gamma^\sigma_{\rho\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \right) \\ &= \left(\nabla_\rho \delta \Gamma^\sigma_{\nu\mu} + \Gamma^\lambda_{\rho\nu} \delta \Gamma^\sigma_{\lambda\mu} \right) - \left(\nabla_\nu \delta \Gamma^\sigma_{\rho\mu} + \Gamma^\lambda_{\nu\rho} \delta \Gamma^\sigma_{\lambda\mu} \right) \\ &= \nabla_\rho \delta \Gamma^\sigma_{\nu\mu} - \nabla_\nu \delta \Gamma^\sigma_{\rho\mu}. \end{aligned}$$

Assim, contraindo σ e ρ , obtemos a variação do tensor de Ricci,

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\sigma \delta \Gamma^\sigma_{\nu\mu} - \nabla_\nu \delta \Gamma^\sigma_{\sigma\mu},$$

conhecida como a identidade de Palatini. Desse modo, temos

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} \nabla_\sigma \delta \Gamma^\sigma_{\nu\mu} - g^{\mu\nu} \nabla_\nu \delta \Gamma^\sigma_{\sigma\mu} \\ &= \nabla_\sigma \left(g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\sigma_{\nu\mu} \right) - \nabla_\nu \left(g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\sigma_{\sigma\mu} \right) \\ &= \nabla_\sigma \left(g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\sigma_{\nu\mu} - g^{\mu\sigma} \delta \Gamma^\nu_{\nu\mu} \right), \end{aligned}$$

onde utilizamos a propriedade de que a conexão de Levi-Civita é uma conexão métrica e permutamos os índices ν e σ no segundo termo. Por fim, temos

$$\kappa_G \int_M d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \kappa_G \int_M d^4x \sqrt{-g} \nabla_\sigma \left(g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\sigma_{\nu\mu} - g^{\mu\sigma} \delta \Gamma^\nu_{\nu\mu} \right),$$

¹Para uma matriz quadrada invertível M , vale $\delta(\det M) = (\det M) \text{tr} \left(A^{-1} \delta M \right)$.

que se anula ao impormos que a variação na borda ∂M é nula, pelo teorema de Stokes.

Por fim, obtemos a variação da ação com uma constante cosmológica, dada por

$$\delta S_{\text{EH}} = \kappa_G \int_M d^4x \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu}.$$

Assim, pelo lema fundamental do cálculo de variações, se $\delta S_{\text{EH}} = 0$, devemos ter

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0.$$

Exercício 5

Consideremos a ação

$$S_M = \int_M d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_M,$$

para uma densidade de lagrangiana \mathcal{L}_M que depende da métrica. Assim, a variação dessa ação para uma variação do tensor métrico $g^{\mu\nu} \rightarrow g^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu}$ é dada por

$$\delta S_M = \int_M d^4x \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}_M)}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu}.$$

Definindo o tensor de energia e momento por

$$T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}_M)}{\partial g^{\mu\nu}},$$

temos

$$\delta S_M = -\frac{1}{2} \int_M d^4x \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}.$$

Consideremos o caso particular do eletromagnetismo, com a ação dada por

$$S_{EM} = \int_M d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{4} g^{\rho\alpha} g^{\sigma\beta} F_{\rho\sigma} F_{\alpha\beta} \right),$$

onde $F_{\mu\nu}$ é o tensor de Faraday. Assim, variando a métrica e lembrando que o tensor de Faraday é antissimétrico, temos

$$\begin{aligned} \delta S_{EM} &= -\frac{1}{4} \int_M d^4x \sqrt{-g} \delta (g^{\rho\alpha} g^{\sigma\beta} F_{\rho\sigma} F_{\alpha\beta}) - \frac{1}{4} \int_M d^4x F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \delta \sqrt{-g} \\ &= -\frac{1}{4} \int_M d^4x \sqrt{-g} \left(\delta^\rho_\mu \delta^\alpha_\nu g^{\sigma\beta} + g^{\rho\alpha} \delta^\sigma_\mu \delta^\beta_\nu \right) F_{\rho\sigma} F_{\alpha\beta} \delta g^{\mu\nu} + \frac{1}{8} \int_M d^4x \sqrt{-g} g_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \delta g^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{2} \int_M d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} (g^{\sigma\beta} F_{\mu\sigma} F_{\nu\beta} + g^{\rho\alpha} F_{\rho\mu} F_{\alpha\nu}) - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \right] \delta g^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{2} \int_M d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} (g^{\kappa\lambda} F_{\mu\kappa} F_{\nu\lambda} + g^{\kappa\lambda} F_{\kappa\mu} F_{\lambda\nu}) - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \right] \delta g^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{2} \int_M d^4x \sqrt{-g} \left(g^{\kappa\lambda} F_{\kappa\mu} F_{\lambda\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \right) \delta g^{\mu\nu}, \end{aligned}$$

então o tensor de energia e momento é

$$T_{\mu\nu} = F^\kappa_\nu F_{\kappa\mu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma},$$

ou então, com índices contravariantes,

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} T_{\alpha\beta} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \left(F^\kappa_\beta F_{\kappa\alpha} - \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \right) \\ &= F^\mu_\kappa F^{\nu\kappa} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma}. \end{aligned}$$

Consideremos as coordenadas normais de Riemann, em que podemos tomar os resultados conhecidos da Relatividade Restrita.

Exercício 6

No exercício 1, mostramos que vale

$$R_{\lambda\mu\rho\nu} = \frac{1}{2}R (g_{\lambda\rho}g_{\mu\nu} - g_{\lambda\nu}g_{\mu\rho})$$

no caso particular de variedades bidimensionais. Assim, o tensor de Riemann é dado por

$$R^{\sigma}_{\mu\rho\nu} = g^{\sigma\lambda}R_{\lambda\mu\rho\nu} = \frac{1}{2}Rg^{\sigma\lambda}(g_{\lambda\rho}g_{\mu\nu} - g_{\lambda\nu}g_{\mu\rho}) = \frac{1}{2}R(\delta^{\sigma}_{\rho}g_{\mu\nu} - \delta^{\sigma}_{\nu}g_{\mu\rho}),$$

de modo que o tensor de Ricci é obtido pela contração de σ e ρ ,

$$R_{\mu\nu} = R^{\sigma}_{\mu\sigma\nu} = \frac{1}{2}R(2g_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}) = \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}.$$

Dessa forma, o tensor de Einstein em duas dimensões é identicamente nulo,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 0.$$

Dessa forma, as equações de Einstein $G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$, implicam que o tensor de energia e momento é nulo em toda a variedade.

Exercício 7

Consideremos um campo gravitacional fraco, em que podemos tomar a métrica como uma perturbação da métrica de Minkowski $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, onde $h_{\mu\nu}$ é “pequeno”, isto é, consideraremos efeitos dessa perturbação em até primeira ordem. Por exemplo, os isomorfismos musicais são feitos em relação à métrica de Minkowski e tomaremos

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu},$$

com $h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}h_{\alpha\beta}$, de modo que $g_{\mu\nu}g^{\nu\lambda} = \delta^\lambda_\mu + O(h^2)$. É importante ressaltar que, como $g_{\mu\nu}$ e $\eta_{\mu\nu}$ são simétricos, $h_{\mu\nu}$ também o deve ser.

Os coeficientes da conexão de Levi-Civita para essa métrica são dados por

$$\begin{aligned}\Gamma^\sigma_{\nu\mu} &= \frac{1}{2}g^{\sigma\lambda}(\partial_\nu g_{\lambda\mu} + \partial_\mu g_{\lambda\nu} - \partial_\lambda g_{\nu\mu}) \\ &= \frac{1}{2}\eta^{\sigma\lambda}(\partial_\nu h_{\lambda\mu} + \partial_\mu h_{\lambda\nu} - \partial_\lambda h_{\nu\mu}) + O(h^2),\end{aligned}$$

de modo que o tensor de Riemann é dado por

$$\begin{aligned}R^\sigma_{\mu\rho\nu} &= \partial_\rho \Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\sigma_{\mu\rho} + \Gamma^\sigma_{\rho\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\sigma_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\rho\nu} \\ &= \partial_\rho \Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\sigma_{\mu\rho} + O(h^2) \\ &= \frac{1}{2}\eta^{\sigma\lambda}(\partial_\rho \partial_\mu h_{\lambda\nu} + \partial_\rho \partial_\nu h_{\lambda\mu} - \partial_\rho \partial_\lambda h_{\mu\nu}) - \frac{1}{2}\eta^{\sigma\lambda}(\partial_\mu \partial_\rho h_{\lambda\nu} + \partial_\mu \partial_\nu h_{\lambda\rho} - \partial_\mu \partial_\lambda h_{\rho\nu}) \\ &= \frac{1}{2}\eta^{\sigma\lambda}(\partial_\rho \partial_\nu h_{\lambda\mu} - \partial_\rho \partial_\lambda h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h_{\lambda\rho} + \partial_\mu \partial_\lambda h_{\rho\nu}).\end{aligned}$$

Definindo o traço $h = h^\sigma_\sigma = \eta^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}$ e $\bar{h}_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}h$, temos que o tensor de Ricci é dado por

$$\begin{aligned}R_{\mu\nu} &= R^\sigma_{\mu\sigma\nu} = \frac{1}{2}\eta^{\sigma\lambda}(\partial_\sigma \partial_\nu h_{\lambda\mu} - \partial_\sigma \partial_\lambda h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h_{\lambda\sigma} + \partial_\mu \partial_\lambda h_{\sigma\nu}) \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\sigma \partial_\nu h^\sigma_\mu - \partial^\sigma \partial_\sigma h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h + \partial_\mu \partial^\sigma h_{\sigma\nu}) \\ &= \frac{1}{2}(\partial^\sigma \partial_\nu h_{\mu\sigma} + \partial^\sigma \partial_\mu h_{\nu\sigma} - \partial^\sigma \partial_\sigma h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h) \\ &= \frac{1}{2}(\partial^\sigma \partial_\nu \bar{h}_{\mu\sigma} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\sigma} \partial^\sigma \partial_\nu h + \partial^\sigma \partial_\mu \bar{h}_{\nu\sigma} + \frac{1}{2}\eta_{\nu\sigma} \partial^\sigma \partial_\nu h - \partial^\sigma \partial_\sigma h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h) \\ &= \frac{1}{2}(\partial^\sigma \partial_\nu \bar{h}_{\mu\sigma} + \partial^\sigma \partial_\mu \bar{h}_{\nu\sigma} - \partial^\sigma \partial_\sigma h_{\mu\nu})\end{aligned}$$

e o escalar de curvatura por

$$\begin{aligned}R &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + O(h^2) \\ &= \frac{1}{2}(\partial^\sigma \partial^\mu \bar{h}_{\mu\sigma} + \partial^\sigma \partial^\mu \bar{h}_{\mu\sigma} - \partial^\sigma \partial_\sigma \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}) \\ &= \partial^\sigma \partial^\mu \bar{h}_{\mu\sigma} - \frac{1}{2}\partial^\sigma \partial_\sigma h.\end{aligned}$$

Desse modo, obtemos a linearização do tensor de Einstein, dada por

$$\begin{aligned}G_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R \eta_{\mu\nu} + O(h^2) \\ &= \frac{1}{2}\left(\partial^\sigma \partial_\nu \bar{h}_{\mu\sigma} + \partial^\sigma \partial_\mu \bar{h}_{\nu\sigma} - \partial^\sigma \partial_\sigma h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \partial^\sigma \partial^\rho \bar{h}_{\rho\sigma} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} \partial^\sigma \partial_\sigma h\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\partial^\sigma \partial_\nu \bar{h}_{\mu\sigma} + \partial^\sigma \partial_\mu \bar{h}_{\nu\sigma} - \partial^\sigma \partial_\sigma h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \partial^\sigma \partial^\rho \bar{h}_{\rho\sigma}\right).\end{aligned}$$

Pela simetria por difeomorfismos, temos liberdade de escolha de calibre para $g_{\mu\nu}$, de forma que podemos escolher o calibre $\partial^\nu h_{\mu\nu} = 0$, de forma que o tensor de Einstein se torna apenas $G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\partial^\sigma \partial_\sigma \bar{h}_{\mu\nu}$. Neste caso, as equações de Einstein são dadas por

$$\partial^\sigma \partial_\sigma \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi G T_{\mu\nu}.$$

Consideremos o caso quase-estático em que o tensor de energia e momento pode ser tomado em primeira aproximação como identicamente nulo exceto por sua componente $T_{00} = \rho$ que só depende das coordenadas espaciais. Neste caso temos

$$\nabla^2 \bar{h}_{00} = -16\pi G\rho,$$

portanto em paralelo com a equação de Poisson, $\nabla^2 \Phi = 4\pi G\rho$, escolhemos $\bar{h}_{00} = -4\Phi$. Além disso, como as outras componentes do tensor de energia e momento são nulas, podemos tomar $\bar{h}_{\mu\nu} = 0$ para todos μ e ν , exceto para $\mu = \nu = 0$. Deste modo o traço de $\bar{h}_{\mu\nu}$ é

$$\bar{h} = g^{\mu\nu} \bar{h}_{\mu\nu} = 4\Phi + O(h^2),$$

e podemos relacioná-lo com o traço de $h_{\mu\nu}$ ao tomar o traço da definição do tensor $\bar{h}_{\mu\nu}$,

$$h = g^{\mu\nu} h_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} \left(\bar{h}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} h \eta_{\mu\nu} \right) + O(h^2) = \bar{h} + 2h \implies h = -\bar{h} = -4\Phi.$$

Assim, obtemos $h_{\mu\nu}$,

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} h \eta_{\mu\nu} = -4\Phi \delta_{\mu}^0 \delta_{\nu}^0 - 2\Phi \eta_{\mu\nu} \implies h_{00} = -2\Phi, \quad h_{ij} = -2\Phi \delta_{ij}, \quad \text{e} \quad h_{0j} = 0,$$

e, portanto, a métrica do campo gravitacional fraco é dada por

$$ds^2 = -(1 + 2\Phi) dt^2 + (1 - 2\Phi) (dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

Exercício 8