4300337 - Lista de exercícios 1

Louis Bergamo Radial

15 de março de 2024

Exercício 1

No referencial K, a partícula se move com velocidade $v = 0.998c$ em direção ao chão. Assim, se a produção do múon ocorre à altitude $h \approx 15\,\text{km}$, então o tempo t transcorrido desde o tempo de produção até a chegada da partícula no chão é

$$t = \frac{h}{v} \approx 5.0 \times 10^{-5}\,\text{s}.$$

Se $\tau' = 2.2 \times 10^{-6}\,\text{s}$ é a vida média no referencial K' de repouso do múon, então no referencial K, a vida média é

$$\tau = \gamma(v)\tau' = 3.5 \times 10^{-5}\,\text{s},$$

em que $\gamma(v) = \left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$. Assim, a probabilidade da detecção de um múon no chão neste referencial é

$$p = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \approx 0.24.$$

No referencial K', o chão se move em direção à partícula com velocidade v. Pela contração de Lorentz, se a distância percorrida no referencial K é h, no referencial K' o chão se move uma distância h' dada por

$$h' = \frac{h}{\gamma(v)} \approx 0.95\,\text{km}.$$

Dessa forma, o tempo t' transcorrido desde a produção do múon e a chegada do chão ao múon é

$$t' = \frac{h'}{v} \approx 3.2 \times 10^{-6}\,\text{s}.$$

Assim, a probabilidade da detecção de um múon no chão neste referencial é

$$p' = \exp\left(-\frac{t'}{\tau'}\right) \approx 0.24,$$

o mesmo valor obtido no referencial K.

Exercício 2

Sejam t_1 o instante em que o jato é emitido e $t_2 = t_1 + \Delta t$ um instante posterior. Nestes instantes, sinais luminosos são emitidos em direção ao observador em O, que os recebe nos instantes $t_1' = t_1 + \frac{r + v\Delta t\cos\theta}{c}$ e $t_2' = t_2 + \frac{r}{c}$. Deste modo, os sinais são recebidos em O em um intervalo $\Delta t' = t_2' - t_1'$ dado por

$$\Delta t' = \Delta t\left(1 - \beta\cos\theta\right),$$

em que $\beta = \frac{v}{c}$. A distância percorrida entre as emissões dos sinais luminosos é $v\Delta t \sin\theta$, de modo que a velocidade aparente $v_{\text{ap}} = \frac{v\Delta t \sin\theta}{\Delta t'}$ medida em O é

$$v_{\text{ap}} = \frac{\beta \sin\theta}{1 - \beta\cos\theta} c.$$

O ângulo ϕ que maximiza a velocidade aparente satisfaz

$$\left.\frac{\partial v_{\text{ap}}}{\partial\theta}\right|_{\theta=\phi} = 0 \iff \frac{\beta\cos\phi\,(1-\beta\cos\phi) - \beta^2\sin^2\phi}{(1-\beta\cos\phi)^2} = 0,$$

donde segue

$$\cos\phi = \beta.$$

Neste caso, $\sin\phi = \sqrt{1-\beta^2}$, então

$$v_{\text{ap}}^{\text{max}} = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} c$$

é a velocidade aparente máxima. Ainda, para $\beta > \frac{1}{\sqrt{2}}$, a velocidade aparente máxima é maior do que a velocidade da luz. De fato,

$$\begin{aligned}
\beta > \frac{1}{\sqrt{2}} &\implies 2\beta^2 > 1 \\
&\implies \beta^2 > 1 - \beta^2 \\
&\implies \beta > \sqrt{1-\beta^2} \\
&\implies v_{\text{ap}}^{\text{max}} > c.
\end{aligned}$$

Exercício 3

O grupo de Lorentz $\mathrm{O}(1,3)$ pode ser representado como

$$\mathrm{O}(1,3) = \left\{\Lambda \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^4) : \Lambda^\top \eta \Lambda = \eta\right\},$$

em que η é a matriz dada por

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

representando a métrica de Minkowski.

Notemos que se duas matrizes são iguais, então certamente os seus determinantes também o são. Desse modo, para $\Lambda \in \mathrm{O}(1,3)$ temos

$$\begin{aligned}
\Lambda^\top \eta \Lambda = \eta &\implies \det\left(\Lambda^\top \eta \Lambda\right) = \det\eta \\
&\implies \det\Lambda^\top \det\eta \det\Lambda = \det\eta \\
&\implies (\det\Lambda)^2 = 1 \\
&\implies \det\Lambda = \pm 1,
\end{aligned}$$

já que o determinante da matriz transposta é igual ao determinante da matriz.

Em termos das componentes, temos

$$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\rho\sigma} \Lambda^\rho{}_\mu \Lambda^\sigma{}_\nu,$$

utilizando a notação de Einstein. Em particular, para $\mu = \nu = 0$,

$$\eta_{\rho\sigma}\Lambda^{\rho}{}_{0}\Lambda^{\sigma}{}_{0} = \eta_{00},$$

ou de forma mais explícita,

$$\left(\Lambda^{0}{}_{0}\right)^2 = 1 + \left(\Lambda^{1}{}_{0}\right)^2 + \left(\Lambda^{2}{}_{0}\right)^2 + \left(\Lambda^{3}{}_{0}\right)^2.$$

Assim, como os elementos de Λ são números reais, devemos ter $\left|\Lambda^{0}{}_{0}\right| \geq 1$.

Notemos que uma reflexão dos eixos espaciais como $(ct, x, y, z) \mapsto (ct, -x, y, z)$ é uma transformação ortogonal em relação à métrica de Minkowski, já que uma reflexão dos eixos em $\mathbb{R}^3$ é uma transformação ortogonal em relação à métrica Euclidiana. O determinante de transformações deste tipo é sempre igual a -1. Semelhantemente, transformações que refletem o eixo temporal $(ct, x, y, z) \mapsto ((-ct, x, y, z))$ também é ortogonal em relação à métrica de Minkowski e tem determinante -1. Deste modo, para ignorar transformações deste tipo, devemos adicionar a restrição $\det \Lambda = 1$. Definimos o grupo

$$\mathrm{SO}(1,3) = \{\Lambda \in \mathrm{O}(1,3) : \det \Lambda = 1\}$$

das transformações ortogonais em relação à métrica de Minkowski, exceto as reflexões espaciais e temporais.

Entretanto, uma composição de uma reflexão espacial e de uma reflexão temporal tem determinante unitário. Nestes casos, a componente $\Lambda^{0}{}_{0}$ deve ser negativa, portanto podemos restringir o grupo de Lorentz para conter apenas *boosts* e rotações com o grupo

$$\mathrm{SO}^{\uparrow}(1,3) = \left\{\Lambda \in \mathrm{SO}(1,3) : \Lambda^{0}{}_{0} \geq 1\right\},$$

chamado de grupo de Lorentz restrito.

Mostremos que o conjunto $\mathrm{SO}(1,3)$ é um grupo sob composição de transformações lineares, isto é, sob multiplicação matricial. Notemos que a identidade $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4} \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^4)$ pertence a $\mathrm{SO}^{\uparrow}(1,3) \subset \mathrm{SO}(1,3)$, já que $\det \mathrm{id}_{\mathbb{R}^4} = 1$ e ${\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}}^{0}{}_{0} = 1$. Como um subconjunto do grupo $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^4)$, a composição de transformações de Lorentz é certamente associativa portanto devemos mostrar que esta composição é também um elemento de $\mathrm{SO}^{\uparrow}(1,3)$. De fato, sejam $\Lambda, M \in \mathrm{SO}(1,3)$, então para $N = \Lambda \cdot M$ temos

$$\begin{aligned} N^{\top} \cdot \eta \cdot N &= (\Lambda \cdot M)^{\top} \cdot \eta \cdot (\Lambda \cdot M) \\ &= M^{\top} \cdot \Lambda^{\top} \cdot \eta \cdot \Lambda \cdot M \\ &= M^{\top} \cdot \eta \cdot M \\ &= \eta, \end{aligned}$$

logo $N \in \mathrm{O}(1,3)$;

$$\det N = \det \Lambda \det M = 1,$$

logo $N \in \mathrm{SO}(1,3)$; vale notar que caso $\Lambda, M \in \mathrm{SO}^{\uparrow}(1,3)$, então é possível (mas não tão direto) mostrar que $N \in \mathrm{SO}^{\uparrow}(1,3)$. Resta mostrar que para todo $\Lambda \in \mathrm{SO}(1,3)$ temos $\Lambda^{-1} \in \mathrm{SO}(1,3)$. De $\Lambda \in \mathrm{O}(1,3)$, temos

$$\Lambda^{\top} \cdot \eta \cdot \Lambda = \eta \implies \Lambda^{-1} = \eta \cdot \Lambda^{\top} \cdot \eta,$$

então é claro que $\det\left(\Lambda^{-1}\right) = 1$, e

$$\begin{aligned} \left(\Lambda^{-1}\right)^{\top} \cdot \eta \cdot \Lambda^{-1} &= (\eta \cdot \Lambda \cdot \eta) \cdot \eta \cdot \left(\eta \cdot \Lambda^{\top} \cdot \eta\right) \\ &= \eta \cdot \left(\Lambda^{\top} \cdot \eta \cdot \Lambda\right)^{\top} \cdot \eta \\ &= \eta, \end{aligned}$$

isto é, $\Lambda^{-1} \in \mathrm{SO}(1,3)$. Deste modo, mostramos que $\mathrm{SO}(1,3)$ é um grupo. Relaxando a condição do determinante unitário, mostramos com o mesmo argumento que $\mathrm{O}(1,3)$ é um grupo.

Exercício 4

Seja S o referencial do observador O, em que os observadores A e B se movem com velocidade v e u, respectivamente. Seja S' o referencial de A, se $(ct, x, 0, 0)$ é a 4-posição de B em S, com $x = ut$, então $(ct', x', 0, 0)$ é a 4-posição de B em S', em que

$$\begin{aligned} x' &= \gamma\,(x - vt) \\ &= \gamma(u - v)t. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \\ &= \gamma\left(1 - \frac{uv}{c^2}\right)t. \end{aligned}$$

Desse modo, a velocidade w de B no referencial S' é dada por

$$w = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}.$$

É conveniente introduzir a rapidez $\tanh\phi_u = \frac{u}{c}$ e $\tanh\phi_v = \frac{v}{c}$, donde segue

$$\begin{aligned} \tanh\phi_w &= \frac{\tanh\phi_u - \tanh\phi_v}{1 - \tanh\phi_u \tanh\phi_v} \\ &= \tanh\left(\phi_u - \phi_v\right). \end{aligned}$$

Logo, como a tangente hiperbólica é uma função injetora,

$$\phi_w = \phi_u - \phi_v,$$

isto é, a rapidez simplifica a adição relativística de velocidades.

Ainda, para uma rapidez arbitrária ϕ, temos $\gamma = \left(1 - \tanh^2\phi\right)^{-\frac{1}{2}} = \cosh\phi$, e $\gamma\beta = \sinh\phi$ de modo que a matriz de uma transformação de Lorentz para um *boost* ao longo da direção x pode ser dada por

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh\phi & -\sinh\phi & 0 & 0 \\ -\sinh\phi & \cosh\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tornemos nossa atenção ao bloco superior esquerdo da matriz acima

$$H(\phi) = \begin{pmatrix} \cosh\phi & -\sinh\phi \\ -\sinh\phi & \cosh\phi \end{pmatrix}.$$

Assim como rotações preservam a métrica euclidiana, isto é, mapeiam pontos de um círculo no mesmo círculo, a transformação linear $H(\phi)$ preserva a métrica de Minkowski, isto é, mapeia pontos da hipérbole $(ct)^2 - x^2 = s^2$ em pontos na mesma hipérbole. De fato, consideramos um ponto (ct, x) nesta hipérbole e computamos a ação desta transformação neste ponto, obtendo o ponto (ct', x') dado por

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} ct' \\ x' \end{bmatrix} &= H(\phi)\begin{bmatrix} ct \\ x \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ct\cosh\phi - x\sinh\phi \\ -ct\sinh\phi + x\cosh\phi \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

que pertence à mesma hipérbole do ponto original, visto que

$$\begin{aligned}(ct')^2 - (x')^2 &= (ct\cosh\phi - x\sinh\phi)^2 - (-ct\sinh\phi + x\cosh\phi)^2 \\ &= (ct)^2\left(\cosh^2\phi - \sinh^2\phi\right) + x^2\left(\sinh^2\phi - \cosh^2\phi\right) \\ &= (ct)^2 - x^2.\end{aligned}$$

Deste modo, a rapidez representa uma parametrização para "rotações hiperbólicas".

Exercício 5

Consideremos os referenciais Σ de repouso do túnel e Σ' de repouso do trem. Em Σ, como tanto o túnel quanto o trem são medidos com comprimento L, portanto existe um instante em que as extremidades do túnel e do trem são coincidentes, denotados pelos eventos A e B no diagrama de espaço-tempo abaixo. Entretanto, o evento B, em que a frente do trem coincide com a saída do túnel, só é simultâneo ao evento A, em que a parte de trás do trem coincide com a entrada do túnel, no referencial Σ: no referencial Σ', o evento B é simultâneo com o evento D, onde a traseira do trem se encontra antes de entrar no túnel, e o evento A é simultâneo com o evento C, onde a parte frontal do trem se encontra após a saída do túnel. Desse modo, os eventos simultâneos a A e B são compatíveis com a observação em Σ' de que o túnel é menor do que o trem, visto que neste referencial sempre que uma extremidade do trem é coincidente com uma extremidade do túnel, há uma porção do trem externa ao túnel. Concluímos portanto que ambas as observações são válidas, devido ao fato de que a simultaneidade não é absoluta.

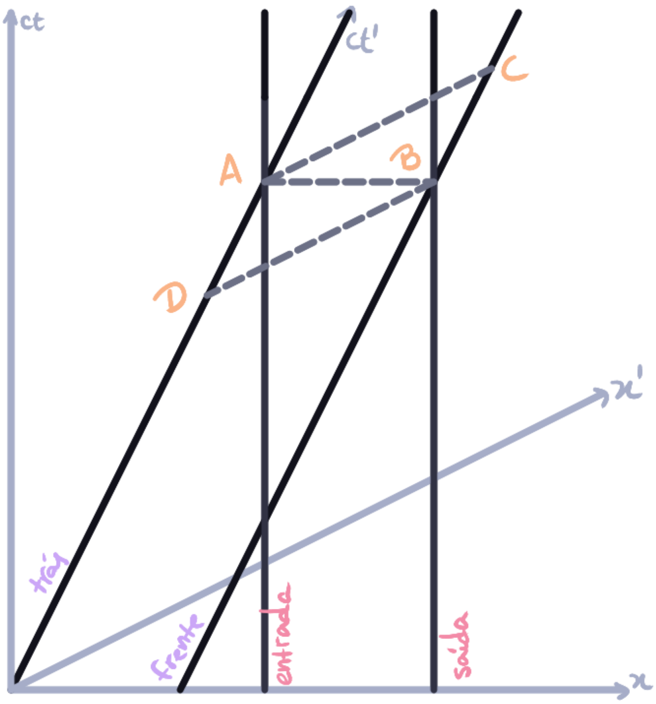

Figura 1: Diagrama de espaço-tempo

Exercício 6

Consideremos os eventos E_1, em que a traseira do trem B coincide com a frente do trem A, e E_2, em que a traseira de A coincide com a frente de B. Os referenciais utilizados a seguir são sincronizados em relação ao evento E_1, isto é, as origens dos referenciais representam este evento.

Seja Σ_C o referencial de C, em que A se move com velocidade $v_A = \frac{4}{5}c$ e B se move com velocidade $v_B = \frac{3}{5}c$ na mesma direção. Neste referencial, a velocidade relativa entre A e B é $v = \frac{1}{5}c$, de modo que o tempo que A leva para ultrapassar B é

$$t^C_{E_2} = \frac{L_A + L_B}{v_A - v_B},$$

em que L_A é o comprimento de A e L_B de B neste referencial. Assim,

$$t^C_{E_2} = \frac{\frac{1}{\gamma_A} + \frac{1}{\gamma_B}}{v} L = \frac{7L}{c}.$$

Desta forma, a traseira de A tem posição dada por

$$\begin{aligned} x^C_{E_2} &= -L_A + v_A t^C_{E_2} \\ &= \frac{v_B}{v_A - v_B} L_A + \frac{v_A}{v_A - v_B} L_B \\ &= 5L \end{aligned}$$

Isto é, em Σ_C, o evento E_2 tem coordenadas $(7L, 5L)$.

No referencial Σ_A de repouso do trem A, temos pelas transformações de Lorentz,

$$\begin{aligned} ct^A_{E_2} &= \gamma_A \left(ct^C_{E_2} - \frac{v_A}{c} x^C_{E_2} \right) = 5L \\ x^A_{E_2} &= \gamma_A \left(x^C_{E_2} - v_A t^C_{E_2} \right) = -L, \end{aligned}$$

isto é, a ultrapassagem demora $\frac{5L}{c}$ e ocorre na posição $-L$, que é a posição de sua traseira, como esperado. Pelo mesmo argumento, no referencial Σ_B de repouso do trem B, temos

$$\begin{aligned} ct^B_{E_2} &= \gamma_B \left(ct^C_{E_2} - \frac{v_B}{c} x^C_{E_2} \right) = 5L \\ x^B_{E_2} &= \gamma_B \left(x^C_{E_2} - v_B t^C_{E_2} \right) = L, \end{aligned}$$

isto é, a ultrapassagem demora $\frac{5L}{c}$ e ocorre na posição $-L$, que é a posição de sua frente, como esperado.

É fácil verificar que o intervalo entre os eventos E_1 e E_2 é igual em todos os referenciais utilizados, isto é,

$$s^2 = -c^2 \left(t_{E_2} - t_{E_1}\right)^2 + \left(x_{E_2} - x_{E_1}\right)^2 = -24L^2.$$

Deste modo, o tempo próprio τ de um referencial Σ_D que observa ambos os eventos na mesma posição é dado por

$$c\tau^2 = -s^2 \implies \tau = \frac{2\sqrt{6}L}{c}.$$

Exercício 7

No referencial Σ' de repouso da barra, suas extremidades se encontram em todo instante no plano $x_0 y_0$ na origem e no ponto $(L_0 \cos\theta_0, L_0 \sin\theta_0)$.

O referencial Σ' se move em relação ao referencial Σ com velocidade $v\hat{x}$. Pela contração de Lorentz, as extremidades da barra se encontram nas posições $(vt, 0)$ e $\left(vt + \frac{L_0 \cos\theta_0}{\gamma}, L_0 \sin\theta_0\right)$ em um dado instante t. Assim, o comprimento da barra neste referencial é

$$L = \sqrt{L_0^2 \sin^2\theta_0 + \frac{L_0^2 \cos^2\theta_0}{\gamma^2}} = \frac{L_0}{\gamma} \sqrt{\gamma^2 \sin^2\theta_0 + \cos^2\theta_0}$$

e o ângulo θ que a barra faz com o eixo x é dado por

$$\tan\theta = \gamma \tan\theta_0.$$

Exercício 8

Proposição 1: *Boost* de um 4-vetor arbitrário

Um quadrivetor $S^\mu = (\sigma, \vec{s})$ no referencial Σ tem componentes $S^{\mu'} = (\sigma', \vec{s}')$ no referencial Σ', que se move com velocidade $\vec{v} = v\hat{n}$ em relação a Σ, onde

$$\sigma' = \gamma(\sigma - \beta\vec{s}\cdot\hat{n})$$

e

$$\vec{s}' = \vec{s} + \left[(\gamma-1)(\vec{s}\cdot\hat{n}) - \gamma\beta\sigma\right]\hat{n},$$

em que $\beta = \frac{v}{c}$ e $\gamma = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}$.

Demonstração. Podemos assumir sem perda de generalidade que $\hat{n} = \hat{x}$, em que $\vec{s} = s_x\hat{x} + s_y\hat{y} + s_z\hat{z}$, portanto

$$\begin{cases} \sigma' = \gamma(\sigma - \beta s_x) \\ s'_x = \gamma(s_x - \beta\sigma) \\ s'_y = s_y \\ s'_z = s_z \end{cases}$$

são as transformações de Lorentz usuais. Notando que $s_x = \vec{s}\cdot\hat{n}$, segue que

$$\sigma' = \gamma(\sigma - \beta\vec{s}\cdot\hat{n}) \text{ e } s'_x = \gamma(\vec{s}\cdot\hat{n} - \beta\sigma).$$

Ainda, $\vec{s}' = s'_x\hat{x} + s'_y\hat{y} + s'_z\hat{z}$, portanto

$$\begin{aligned} \vec{s}' &= (s'_x - s_x)\,\hat{x} + \left(s_x\hat{x} + s_y\hat{y} + s_z\hat{z}\right) \\ &= \vec{s} + (s'_x - s_x)\,\hat{n} \\ &= \vec{s} + \left[\gamma(\vec{s}\cdot\hat{n} - \beta\sigma) - \vec{s}\cdot\hat{n}\right]\hat{n} \\ &= \vec{s} + \left[(\gamma-1)(\vec{s}\cdot\hat{n}) - \gamma\beta\sigma\right]\hat{n}, \end{aligned}$$

como desejado. □

No referencial Σ, a partícula se move com velocidade $\vec{u} = u\cos\theta\hat{x} + u\sin\theta\hat{y}$, portanto sua 4-velocidade tem componentes $(\gamma_u c, \gamma_u\vec{u})$ neste referencial. O referencial Σ' se move com velocidade $\vec{v} = -v\hat{x}$ em relação a Σ, de modo que a 4-velocidade da partícula em Σ' tem componentes $(\gamma_w c, \gamma_w\vec{w})$, dadas pela expressão da Proposição 1, isto é

$$\begin{aligned} \gamma_w c &= \gamma_v(\gamma_u c - \beta_v\gamma_u\vec{u}\cdot(-\hat{x})) \\ &= \gamma_v(\gamma_u c + \beta_v\gamma_u u\cos\theta) \\ &= \gamma_u\gamma_v(1 + \beta_u\beta_v\cos\theta)c \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \gamma_w\vec{w} &= \gamma_u\vec{u} + \left[(\gamma_v-1)\gamma_u\vec{u}\cdot(-\hat{x}) - \gamma_v\beta_v\gamma_u c\right](-\hat{x}) \\ &= \gamma_u\vec{u} + \left[(\gamma_v-1)\gamma_u\beta_u\cos\theta + \gamma_u\gamma_v\beta_v\right]c\hat{x} \\ &= \gamma_u\gamma_v\left(\beta_u\cos\theta + \beta_v\right)c\hat{x} + \gamma_u\beta_u\sin\theta\, c\hat{y}. \end{aligned}$$

Desse modo,

$$\vec{w} = \frac{\beta_u\cos\theta + \beta_v}{1 + \beta_u\beta_v\cos\theta}c\hat{x} + \frac{\beta_u\sin\theta}{\gamma_v\left(1 + \beta_u\beta_v\cos\theta\right)}c\hat{y}$$

é a velocidade da partícula em Σ', que faz um ângulo θ' dado por

$$\tan\theta' = \frac{\beta_u \sin\theta}{\gamma_v\left(\beta_u\cos\theta + \beta_v\right)},$$

em relação ao eixo x.

Um triângulo retângulo de catetos de comprimento L_x e L_y situados ao longo dos eixos x e y, respectivamente, que se encontra em repouso em Σ é visto por Σ' como um triângulo retângulo de catetos L'_x e L'_y que se move com velocidade $v\hat{x}$. Pelas transformações de Lorentz, obtemos $L'_y = L_y$ e $L'_x = \frac{L_x}{\gamma_v}$. Assim, se φ é o ângulo compreendido entre o lado de comprimento L_x e a hipotenusa no referencial Σ, o ângulo φ' análogamente medido em Σ' é dado por

$$\tan\varphi' = \gamma_v \tan\varphi.$$

Exercício 9

Em um referencial S em que a 4-posição de uma partícula tem componentes x^μ, definimos sua 4-velocidade e 4-aceleração pelas componentes

$$v^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} \text{ e } a^\mu = \frac{\mathrm{d}v^\mu}{\mathrm{d}\tau}.$$

Assim, temos $v^\mu = (\gamma_v c, \gamma_v \vec{v})$, em que $\vec{v}$ é a 3-velocidade da partícula e $\gamma_v = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}$, e

$$\begin{aligned} a^\mu &= \left(c\frac{\mathrm{d}\gamma_v}{\mathrm{d}\tau}, \frac{\mathrm{d}\gamma_v}{\mathrm{d}\tau}\vec{v} + \gamma_v\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}\tau}\right) \\ &= \left(c\gamma_v\dot{\gamma}_v, \gamma_v\dot{\gamma}_v\vec{v} + \gamma_v^2\vec{a}\right), \end{aligned}$$

onde $\dot{\gamma}_v = \frac{\mathrm{d}\gamma_v}{\mathrm{d}t}$ e $\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$.

Sendo η a métrica de Minkowski, temos

$$\eta_{\mu\nu} v^\mu v^\nu = c^2.$$

Derivando em relação a τ, obtemos

$$\eta_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}v^\mu}{\mathrm{d}\tau} v^\nu = 0 \implies a^\mu v_\mu = 0,$$

como desejado.

Em um dado instante em que a velocidade espacial da partícula é $\vec{u} = u\hat{n}$ no referencial S, tomamos nossa atenção ao referencial S' que se move em relação a S com velocidade espacial $\vec{u}$. Neste mesmo instante, a 4-velocidade da partícula é $v^{\mu'} = (c, 0)$ no referencial S', de modo que a componente temporal da 4-aceleração da partícula deve se anular para respeitar a identidade invariante $a^{\mu'} v_{\mu'} = 0$. Assim,

$$a^{\mu'} = (0, \vec{a}')$$

é a 4-aceleração da partícula em S', em que $\vec{a}' = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t'}$.

Exercício 10

Seja Σ o referencial de repouso de uma partícula de massa m. Após seu decaimento em dois fótons de momentos $\vec{p}_1$ e $\vec{p}_2$, temos por conservação de momento que

$$\vec{p}_1 = -\vec{p}_2,$$

donde segue que os fótons emitidos têm mesma frequência ν, mas direções opostas. Assim, neste referencial, a energia da partícula massiva é dada por

$$E = 2h\nu,$$

por conservação de energia.

Notemos que o 4-momento de um dos fótons é dado por

$$\begin{aligned} P_1^\mu &= \left(\frac{h\nu}{c}, \frac{h\nu}{c}\hat{n}_1\right) \\ &= \hbar\left(\frac{\omega}{c}, \vec{k}\right), \end{aligned}$$

onde $\omega = 2\pi\nu$ é a frequência angular e $\vec{k} = \frac{2\pi\nu}{c}\hat{n}_1$ o vetor de onda associados à propagação deste fóton. Deste modo, definimos o 4-vetor de onda $K^\mu = \frac{1}{\hbar}P^\mu$ para fótons. Após o decaimento, os 4-vetores dos fótons são dados por

$$K_1^\mu = \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k}\right) \text{ e } K_2^\mu = \left(\frac{\omega}{c}, -\vec{k}\right)$$

no referencial Σ.

Seja Σ' o referencial em que a partícula de massa m se move com velocidade $\vec{v} = v\hat{n}$. Isto é, o referencial Σ' se move com velocidade $-\vec{v}$ em relação à Σ. Pela Proposição 1, os 4-vetores de onda dos fótons são dados por

$$K_1^{\mu'} = \left(\gamma\frac{\omega + \frac{1}{c}\vec{v}\cdot\vec{k}}{c}, \vec{k} + \left[(\gamma - 1)(\vec{k}\cdot\hat{n}) + \gamma\beta\frac{\omega}{c}\right]\hat{n}\right)$$

e

$$K_2^{\mu'} = \left(\gamma\frac{\omega - \frac{1}{c}\vec{v}\cdot\vec{k}}{c}, -\vec{k} + \left[-(\gamma - 1)(\vec{k}\cdot\hat{n}) + \gamma\beta\frac{\omega}{c}\right]\hat{n}\right)$$

em Σ'. Assim, o 4-momento da partícula é dado por

$$\begin{aligned} P^{\mu'} &= \hbar\left(K_1^{\mu'} + K_2^{\mu'}\right) \\ &= \left(2\gamma\frac{h\nu}{c}, 2\gamma\beta\frac{h\nu}{c}\hat{n}\right) \\ &= \left(\gamma\frac{E}{c}, \gamma\beta\frac{E}{c}\hat{n}\right). \end{aligned}$$

No limite não-relativístico, em que $\frac{v^2}{c^2} \ll 1$, certamente a diferença entre a energia da partícula no referencial Σ' e no referencial Σ deve tender à energia cinética clássica, isto é,

$$\gamma E - E \xrightarrow{\beta^2 \ll 1} \frac{1}{2}mv^2.$$

Expandindo $\gamma - 1$ por séries de Taylor ao redor de $\beta = 0$, obtemos

$$\gamma E - E = E\left[\frac{1}{2}\beta^2 + \frac{3}{8}\beta^4 + O(\beta^6)\right],$$

portanto no limite $\beta^2 \ll 1$, devemos ter

$$\frac{1}{2}\beta^2 E = \frac{1}{2}m\beta^2c^2 \implies E = mc^2.$$

Deste modo, o momento da partícula no referencial Σ' é dado por $\vec{p} = \gamma mv\hat{n} = \gamma m\vec{v}$ e sua energia por $E' = \gamma mc^2$.