4300337 - Lista de Exercícios VI

Louis Bergamo Radial
8992822

30 de junho de 2024

Exercício 1

Para um oscilador harmônico de massa $m = 0.2\,\mathrm{kg}$, amplitude de movimento $A = 1\,\mathrm{m}$, e frequência de oscilação $f = \frac{\omega}{2\pi} = 5\,\mathrm{Hz}$, temos a densidade de energia dada por

$$\rho(t, \boldsymbol{x}) = mc^2 \delta\left(x - A\cos\omega t\right)\delta(y)\delta(z).$$

A uma distância $D = 10\,\mathrm{m} \gg A$, podemos utilizar a aproximação de zona de radiação e determinar o momento de quadrupolo $q_{ij}(t)$, dado por

$$q_{ij}(t) = \int_\Sigma \mathrm{d}^3x\,\left(x_i x_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}\|\boldsymbol{x}\|^2\right)\rho(t, \boldsymbol{x}),$$

para obter a perturbação na métrica h_{ij} a partir de

$$h_{ij}(t, \boldsymbol{x}) = \frac{2G}{Dc^6}\ddot{q}_{ij}(t_R),$$

onde $t_R = t - \frac{D}{c}$ é o tempo retardado.

Notemos que pela expressão da densidade, as componentes q_{ij} com índices distintos e com um índice igual a dois ou três se anulam, isto é, $q_{12} = q_{13} = q_{23} = 0$, de modo que resta apenas determinar os termos q_{11}, q_{22}, e q_{33}. Temos

$$\begin{aligned}
q_{11}(t) &= \frac{1}{2}\int_\Sigma \mathrm{d}^3x\,\left(x^2 - y^2 - z^2\right)\rho(t, \boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}mc^2A^2\cos^2\omega t = \frac{1 + \cos 2\omega t}{4}mc^2A^2 \\
q_{22}(t) &= \frac{1}{2}\int_\Sigma \mathrm{d}^3x\,\left(y^2 - x^2 - z^2\right)\rho(t, \boldsymbol{x}) = -\frac{1}{2}mc^2A^2\cos^2\omega t = -q_{11}(t) \\
q_{33}(t) &= \frac{1}{2}\int_\Sigma \mathrm{d}^3x\,\left(z^2 - x^2 - y^2\right)\rho(t, \boldsymbol{x}) = -\frac{1}{2}mc^2A^2\cos^2\omega t = -q_{11}(t),
\end{aligned}$$

portanto a perturbação da métrica é dada por

$$h_{11} = -\frac{2mA^2\omega^2G}{Dc^4}\cos(2\omega t_R) \quad \text{e} \quad h_{22} = h_{33} = \frac{2mA^2\omega^2G}{Dc^4}\cos(2\omega t_R),$$

e vemos que a frequência de oscilação é $2f = 10\,\mathrm{Hz}$. Tomando a raiz do valor quadrático médio das perturbações obtemos os estresses,

$$h_+ = \frac{\sqrt{2}mA^2\omega^2G}{Dc^4} = 2.307\times 10^{-43} \quad \text{e} \quad h_\times = 0.$$

A potência irradiada pela onda gravitacional é dada por

$$P = \frac{G}{5c^9}\left\langle \frac{\mathrm{d}^3 Q_{ij}}{\mathrm{d}t^3}\frac{\mathrm{d}^3 Q^{ij}}{\mathrm{d}t^3} \right\rangle,$$

onde Q_{ij} é o momento de quadrupolo reduzido,

$$Q_{ij} = q_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta^{k\ell}q_{k\ell}.$$

Notando que q_{ij} é nulo para todo $i \neq j$ e que $q_{22} = q_{33} = -q_{11}$, temos

$$Q_{11} = \frac{4}{3}q_{11}, \quad Q_{22} = -\frac{2}{3}q_{11}, \quad \text{e} \quad Q_{33} = -\frac{2}{3}q_{11}$$

como as únicas componentes não nulas. Como $\ddot{q}_{11} = -4\omega^2 q_{11}$, temos $\dddot{q}_{11} = -4\omega^2 \dot{q}_{11}$, logo

$$\frac{\mathrm{d}^3 Q_{ij}}{\mathrm{d}t^3}\frac{\mathrm{d}^3 Q^{ij}}{\mathrm{d}t^3} = \frac{8}{3}\left(\frac{\mathrm{d}^3 q_{11}}{\mathrm{d}t^3}\right)^2 = \frac{64}{3}\omega^4\left(\dot{q}_{11}\right)^2 = \frac{16}{3}m^2c^4A^4\omega^6\sin^2 2\omega t.$$

Deste modo, a potência irradiada é

$$P = \frac{8m^2A^4\omega^6 G}{15c^5} = 5.653\times 10^{-46}\,\mathrm{W}.$$

Exercício 2

Consideremos um sistema binário com massas m_1 e m_2 nas posições $\boldsymbol{r}_1$ e $\boldsymbol{r}_2$ em relação ao centro de massa do sistema. Seja $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ o vetor de posição relativa, então

$$\boldsymbol{r}_1 = \frac{\mu}{m_1}\boldsymbol{r} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{r}_2 = -\frac{\mu}{m_2}\boldsymbol{r},$$

onde

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{M} \iff \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

é a massa reduzida do sistema, com $M = m_1 + m_2$ a massa total. Em primeira aproximação, tomamos a trajetória da posição relativa como uma órbita circular ao redor do centro de massa com frequência angular constante ω,

$$\boldsymbol{r} = r\left[\cos(\omega t)\boldsymbol{e}_x + \sin(\omega t)\boldsymbol{e}_y\right],$$

satisfazendo a terceira lei de Kepler,

$$r^3 = \frac{GM}{\omega^2}.$$

Desta forma, a densidade de energia é

$$\begin{aligned}\rho(t,\boldsymbol{x}) &= m_1c^2\delta\left(\boldsymbol{x} - r_1\left[\cos(\omega t)\boldsymbol{e}_x + \sin(\omega t)\boldsymbol{e}_y\right]\right) + m_2c^2\delta\left(\boldsymbol{x} + r_2\left[\cos(\omega t)\boldsymbol{e}_x + \sin(\omega t)\boldsymbol{e}_y\right]\right)\\ &= \left[m_1c^2\delta(x - r_1\cos\omega t)\delta(y - r_1\sin\omega t) + m_2c^2\delta(x + r_2\cos\omega t)\delta(y + r_2\sin\omega t)\right]\delta(z),\end{aligned}$$

com $r_1 = \|\boldsymbol{r}_1\|$ e $r_2 = \|\boldsymbol{r}_2\|$. Os componentes do quadrupolo físico $q_{ij}(t)$ são dados por

$$q_{ij}(t) = \int_\Sigma \mathrm{d}^3x\left(x_ix_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}\|\boldsymbol{x}\|^2\right)\rho(t,\boldsymbol{x}),$$

portanto $q_{i3} = 0$, exceto para $i = 3$. Determinemos os componentes restantes q_{11}, q_{12}, q_{22}, e q_{33},

$$\begin{aligned} q_{11}(t) &= \frac{1}{2}\int_\Sigma \mathrm{d}^3x\,(x^2-y^2-z^2)\rho(t,\boldsymbol{x}) \\ &= \frac{1}{2}\left[m_1c^2r_1^2 + m_2c^2r_2^2\right]\left(\cos^2\omega t - \sin^2\omega t\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[m_1\left(\frac{\mu r}{m_1}\right)^2 + m_2\left(\frac{\mu r}{m_2}\right)^2\right]c^2\cos(2\omega t) \\ &= \frac{1}{2}\mu c^2r^2\cos(2\omega t) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} q_{12}(t) &= \int_\Sigma \mathrm{d}^3x\,xy\rho(t,\boldsymbol{x}) \\ &= \left[m_1c^2r_1^2 + m_2c^2r_2^2\right]\cos(\omega t)\sin(\omega t) \\ &= \frac{1}{2}\left[m_1\left(\frac{\mu r}{m_1}\right)^2 + m_2\left(\frac{\mu r}{m_2}\right)^2\right]c^2\sin(2\omega t) \\ &= \frac{1}{2}\mu c^2r^2\sin(2\omega t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_{22}(t) &= \frac{1}{2}\int_\Sigma \mathrm{d}^3x\,(y^2-x^2-z^2)\rho(t,\boldsymbol{x}) \\ &= \frac{1}{2}\left[m_1c^2r_1^2 + m_2c^2r_2^2\right]\left(\sin^2\omega t - \cos^2\omega t\right) \\ &= -q_{11}(t), \end{aligned} \qquad \begin{aligned} q_{33}(t) &= \frac{1}{2}\int_\Sigma \mathrm{d}^3x\,(z^2-x^2-y^2)\rho(t,\boldsymbol{x}) \\ &= -\frac{1}{2}m_1c^2r_1^2 - \frac{1}{2}m_2c^2r_2^2 \\ &= -\frac{1}{2}\mu c^2r^2. \end{aligned}$$

Assim, na aproximação de zona de radiação $R \gg r$, a perturbação da métrica é dada por

$$h_{ij}(t,\boldsymbol{x}) = \frac{2G}{Rc^6}\ddot{q}_{ij}(t_R), \text{ com } \quad t_R = t - \frac{R}{c},$$

de forma que

$$h_{11} = -\frac{4G\mu r^2\omega^2}{Rc^4}\cos(2\omega t_R) \quad \text{e} \quad h_{12} = -\frac{4G\mu r^2\omega^2}{Rc^4}\sin(2\omega t_R)$$

e podemos ver que a frequência da onda gravitacional é $f_{\mathrm{GW}} = \frac{\omega}{\pi}$. Tomando a raiz do valor quadrático médio destas componentes, obtemos as deformações induzidas h_+, $h_\times$ e o estresse h

$$h_+ = \sqrt{\left\langle h_{11}^2\right\rangle} = \frac{2\sqrt{2}G\mu r^2\omega^2}{Rc^4} \quad \text{e} \quad h_\times = \sqrt{\left\langle h_{12}^2\right\rangle} = \frac{2\sqrt{2}G\mu r^2\omega^2}{Rc^4} \implies h = \frac{\sqrt{h_+^2 + h_\times^2}}{2} = \frac{2G\mu r^2\omega^2}{Rc^4}.$$

O momento de quadrupolo reduzido é dado por

$$Q_{ij} = q_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta^{k\ell}q_{k\ell} = q_{ij} + \frac{1}{6}\mu c^2r^2\delta_{ij},$$

de modo que

$$\dddot{Q}_{ij}\dddot{Q}^{ij} = \dddot{q}_{ij}\dddot{q}^{ij} = 2\left(\dddot{q}_{11}^2 + \dddot{q}_{12}^2\right) = 32\mu^2c^4r^4\omega^6\left[\sin^2(2\omega t) + \cos^2(2\omega t)\right] = 32\mu^2c^4r^4\omega^6.$$

Desse modo, a potência irradiada pela onda gravitacional é

$$P = \frac{G}{5c^9}\left\langle\dddot{Q}_{ij}\dddot{Q}^{ij}\right\rangle = \frac{32G\mu^2r^4\omega^6}{5c^5}.$$

Levando em conta que a energia orbital do sistema binário é

$$E_{\mathrm{orb}} = -\frac{GM\mu}{2r}$$

e que sua variação deve ser por conta da potência irradiada pelas ondas gravitacionais, devemos ter

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{orb}}}{\mathrm{d}t} = -P &\implies \frac{GM\mu}{2r^2}\dot{r} = -\frac{32G\mu^2r^4\omega^6}{5c^5} \\ &\implies 3r^2\dot{r} = -\frac{192\mu r^8\omega^6}{5Mc^5}. \end{aligned}$$

Derivando a terceira lei de Kepler, obtemos

$$
\begin{aligned}
r^3 = \frac{GM}{\omega^2} &\implies -\frac{2GM}{\omega^3}\dot{\omega} = -\frac{192\mu\omega^6}{5Mc^5}\left(\frac{GM}{\omega^2}\right)^{\frac{8}{3}} \\
&\implies \dot{\omega} = \frac{96G^{\frac{5}{3}}}{5c^5}\mu M^{\frac{2}{3}}\omega^{\frac{11}{3}}.
\end{aligned}
$$

Como vimos, a frequência da onda gravitacional é $f_{\text{GW}} = \frac{\omega}{\pi}$, então

$$
\begin{aligned}
\dot{f}_{\text{GW}} &= \frac{96G^{\frac{5}{3}}\pi^{\frac{8}{3}}}{5c^5}\mu M^{\frac{2}{3}} f_{\text{GW}}^{\frac{11}{3}} \\
&= \alpha \mathcal{M}^{\frac{5}{3}} f_{\text{GW}}^{\frac{11}{3}},
\end{aligned}
$$

onde a constante proporcionalidade α e a *chirp mass* $\mathcal{M}$ são dadas por

$$
\alpha = \frac{96G^{\frac{5}{3}}\pi^{\frac{8}{3}}}{5c^5} \quad \text{e} \quad \mathcal{M} = \mu^{\frac{3}{5}} M^{\frac{2}{5}} = \frac{(m_1 m_2)^{\frac{3}{5}}}{(m_1+m_2)^{\frac{1}{5}}}.
$$

Podemos utilizar a *chirp mass* para reescrever o estresse h obtido,

$$
h = \frac{2G\mu\omega^2}{Rc^4}\left(\frac{GM}{\omega^2}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{2G}{Rc^2}\left(\frac{\pi G}{c^3} f_{\text{GW}}\right)^{\frac{2}{3}} \mathcal{M}^{\frac{5}{3}} = \frac{2G\mathcal{M}}{Rc^2}\left(\frac{\pi G}{c^3}\mathcal{M} f_{\text{GW}}\right)^{\frac{2}{3}}.
$$

Exercício 3

Considerando a covariância entre a *chirp mass* e a frequência, assim como as demais incertezas como muito menores do que a incerteza σ_h no estresse h, temos do exercício anterior que

$$
\frac{\partial R}{\partial h} = -\frac{2G\mathcal{M}}{h^2 c^2}\left(\frac{\pi G}{c^3}\mathcal{M} f_{\text{GW}}\right)^{\frac{2}{3}} = -\frac{R}{h},
$$

portanto a incerteza σ_R na distância R é dada por

$$
\sigma_R = \left|\frac{\partial R}{\partial h}\right| \sigma_h + O(\sigma_f) \implies \frac{\sigma_R}{R} = \frac{\sigma_h}{h}.
$$

Para velocidades e distâncias suficientemente pequenas, temos $zc = H_0 R$, portanto

$$
\frac{\partial H_0}{\partial R} = -\frac{H_0}{R} \implies \frac{\sigma_{H_0}}{H_0} = \frac{\sigma_R}{R} = \frac{\sigma_h}{h}.
$$

Nesta aproximação de que a incerteza relativa do estresse é muito maior do que as outras incertezas e covariâncias, se há uma incerteza de 10% no estresse, então há uma incerteza de 10% no valor da constante de Hubble H_0 inferido por esta observação.

Como as frequências medidas f_{obs} são afetadas pelo desvio para o vermelho, temos

$$
f_{\text{e}} = (1+z) f_{\text{obs}}
$$

como o valor da frequência emitida f_{e}. Ainda, a relação entre os intervalos de tempo observados e emitidos é dada por

$$
\frac{\mathrm{d}t_e}{\mathrm{d}t_{\text{obs}}} = \frac{1}{1+z},
$$

de modo que

$$\frac{\mathrm{d}f_{\mathrm{obs}}}{\mathrm{d}t_{\mathrm{obs}}} = \frac{1}{1+z}\frac{\mathrm{d}f_{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}t_{\mathrm{e}}}\frac{\mathrm{d}t_{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}t_{\mathrm{obs}}} = \frac{1}{(1+z^2)}\frac{\mathrm{d}f_{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}t_{\mathrm{e}}}.$$

Da definição de *chirp mass*, segue que

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}f_{\mathrm{obs}}}{\mathrm{d}t_{\mathrm{obs}}} = \alpha\mathcal{M}_{\mathrm{obs}}^{\frac{5}{3}} f_{\mathrm{obs}}^{\frac{11}{3}} &\implies \frac{1}{(z+1)^2}\frac{\mathrm{d}f_{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}t_{\mathrm{e}}} = \alpha\mathcal{M}_{\mathrm{obs}}^{\frac{5}{3}}(1+z)^{-\frac{11}{3}} f_{\mathrm{e}}^{\frac{11}{3}} \\ &\implies \frac{\mathrm{d}f_{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}t_{\mathrm{e}}} = \alpha\left(\frac{\mathcal{M}_{\mathrm{obs}}}{1+z}\right)^{\frac{5}{3}} f_{\mathrm{e}}^{\frac{11}{3}},\end{aligned}$$

isto é, a *chirp mass* observada $\mathcal{M}_{\mathrm{obs}}$ é relacionada com a *chirp mass* absoluta $\mathcal{M}_{\mathrm{e}}$ por

$$\mathcal{M}_{\mathrm{obs}} = (1+z)\mathcal{M}_e.$$

Notemos que a relação entre os valores observados e emitidos são tais que

$$\mathcal{M}_{\mathrm{e}} f_{\mathrm{e}} = \mathcal{M}_{\mathrm{obs}} f_{\mathrm{obs}}.$$

Podemos utilizar estes resultados para expressar a distância R e a constante de Hubble H_0 em relação aos valores observados e o *redshift* z,

$$R = \frac{2G\mathcal{M}_{\mathrm{obs}}}{(1+z)hc^2}\left(\frac{\pi G}{c^3}\mathcal{M}_{\mathrm{obs}} f_{\mathrm{obs}}\right)^{\frac{2}{3}} \quad \text{e} \quad H_0 = \frac{zc}{R} = \frac{z(1+z)hc^3}{2G\mathcal{M}_{\mathrm{obs}}}\left(\frac{\pi G}{c^3}\mathcal{M}_{\mathrm{obs}} f_{\mathrm{obs}}\right)^{-\frac{2}{3}}.$$

Deste modo, se o valor do *redshift* for diferente, como por exemplo uma velocidade peculiar da kilonova na direção da linha de visada, os valores obtidos para a distância e para a constante de Hubble seriam diferentes. De fato, sejam R e H_0 os valores obtidos com o *redshift* z e sejam $\tilde{R}$ e $\tilde{H}_0$ os valores obtidos com o *redshift* $z + \delta z$, então

$$\begin{aligned}\tilde{R} &= \frac{1+z}{1+z+\delta z}R & \qquad \tilde{H}_0 &= \frac{(z+\delta z)(1+z+\delta z)}{z(1+z)}H_0 \\ &= \frac{R}{1+\frac{\delta z}{1+z}} & &= \left(1+\frac{\delta z}{z}\right)\left(1+\frac{\delta z}{1+z}\right)H_0\end{aligned}$$

são as relações entre as previsões. Por exemplo, para $z = 0.0099$ e $\delta z = \pm\frac{500\,\mathrm{km\,s^{-1}}}{c}$, temos $\tilde{R} \in [0.998R, 1.002R]$ e $\tilde{H}_0 \in [0.830H_0, 1.170H_0]$.

Exercício 4

Relembremos o resultado obtido para os coeficientes da conexão de Levi-Civita no caso de uma métrica diagonal

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\lambda\lambda} = \frac{\partial_\lambda g_{\lambda\lambda}}{2g_{\lambda\lambda}}, \qquad \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\lambda} = \frac{\partial_\mu g_{\lambda\lambda}}{2g_{\lambda\lambda}}, \qquad \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\mu} = -\frac{\partial_\lambda g_{\mu\mu}}{2g_{\lambda\lambda}}, \qquad \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} = 0,$$

em que não utilizamos a convenção de soma de Einstein, portanto não há nenhuma soma nos termos acima. Recordemos também que, utilizando a convenção de soma, vale

$$\Gamma^{\mu}{}_{\mu\nu} = \frac{\partial_\nu\sqrt{-g}}{\sqrt{-g}},$$

onde g é o determinante da métrica.

Consideremos a métrica dada por $\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + a^2(t)\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x_i$, com $-g = a^6(t)$. Utilizando as expressões para os coeficientes da conexão, vemos que os termos $\Gamma^0{}_{0\lambda} = \Gamma^\lambda{}_{\lambda\lambda} = \Gamma^i{}_{\lambda\lambda} = \Gamma^i{}_{ij} = 0$, visto que estes termos envolvem derivadas em relação às coordenadas espaciais e que as componentes da métrica não têm dependência com essas variáveis. Resta apenas os coeficientes dados por

$$\Gamma^0{}_{ij} = a\dot{a}\delta_{ij} \quad \text{e} \quad \Gamma^i{}_{j0} = \frac{\dot{a}}{a}\delta^i_j,$$

onde $\dot{a} = \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}$. Da expressão para o tensor de curvatura de Riemann em coordenadas locais,

$$R^\sigma{}_{\mu\rho\nu} = \partial_\rho\Gamma^\sigma{}_{\nu\mu} - \partial_\nu\Gamma^\sigma{}_{\rho\mu} + \Gamma^\sigma{}_{\rho\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} - \Gamma^\sigma{}_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\rho\mu},$$

e das simetrias encontradas para os coeficientes da conexão, segue que o tensor de Ricci é

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu} = R^\sigma{}_{\mu\sigma\nu} &= \partial_\sigma\Gamma^\sigma{}_{\nu\mu} - \partial_\nu\Gamma^\sigma{}_{\sigma\mu} + \Gamma^\sigma{}_{\sigma\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} - \Gamma^\sigma{}_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\sigma\mu} \\
&= \partial_t\Gamma^0{}_{\nu\mu} - \delta^0_\nu\partial_t\left(\frac{\partial_\mu\sqrt{-g}}{\sqrt{-g}}\right) + \frac{\partial_\lambda\sqrt{-g}}{\sqrt{-g}}\Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} - \Gamma^0{}_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda{}_{0\mu} - \Gamma^i{}_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda{}_{i\mu} \\
&= \delta^m_\mu\delta^n_\nu\delta_{mn}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a\dot{a}) - \delta^0_\mu\delta^0_\nu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{3\dot{a}}{a}\right) + \frac{3\dot{a}}{a}\delta^m_\mu\delta^n_\nu\delta_{mn}a\dot{a} - \Gamma^0{}_{\nu j}\Gamma^j{}_{0\mu} - \Gamma^i{}_{\nu 0}\Gamma^0{}_{i\mu} - \Gamma^i{}_{\nu j}\Gamma^j{}_{i\mu} \\
&= \delta^m_\mu\delta^n_\nu\delta_{mn}\left(4\dot{a}^2 + a\ddot{a}\right) - \delta^0_\mu\delta^0_\nu\left(\frac{3\ddot{a}}{a} - \frac{3\dot{a}^2}{a^2}\right) - \delta^n_\nu\delta^m_\mu\delta_{mn}\dot{a}^2 - \delta^n_\nu\delta^m_\mu\delta_{mn}\dot{a}^2 - \delta^0_\nu\delta^0_\mu\frac{3\dot{a}^2}{a^2} \\
&= \delta^m_\mu\delta^n_\nu\delta_{mn}\left(2\dot{a}^2 + a\ddot{a}\right) - \delta^0_\mu\delta^0_\nu\left(\frac{3\ddot{a}}{a}\right),
\end{aligned}$$

isto é

$$R_{00} = -\frac{3\ddot{a}}{a}, \quad \text{e} \quad R_{ii} = a\ddot{a} + 2\dot{a}^2,$$

e todas as outras componentes nulas. Assim, o escalar de Ricci é dado por

$$\begin{aligned}
R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} &= \frac{3\ddot{a}}{a} + 3\frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2}{a^2} \\
&= 6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right),
\end{aligned}$$

logo o tensor de Einstein, $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$, tem suas componentes não nulas dadas por

$$G_{00} = 3\frac{\dot{a}^2}{a^2} \quad \text{e} \quad G_{ii} = -2a\ddot{a} - \dot{a}^2.$$

Consideremos as equações de Einstein no vácuo com uma constante cosmológica positiva Λ,

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0 \implies 3\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \Lambda = 0 \quad \text{e} \quad -2a\ddot{a} - \dot{a}^2 + \Lambda a^2 = 0.$$

Utilizando a primeira equação para eliminar o termo $\dot{a}^2$ na segunda equação, obtemos

$$-2a\left(\ddot{a} - \frac{\Lambda}{3}a\right) = 0.$$

Como $a \neq 0$ para que a métrica não seja singular, devemos ter que

$$a(t) = A\exp(Ht) + B\exp(-Ht),$$

onde $H = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}$ e $A, B \in \mathbb{R}$ são constantes não todas nulas. No caso particular de $B = 0$, a métrica seria, portanto,

$$\mathrm{d}s^2 = -\,\mathrm{d}t^2 + A^2 e^{2Ht}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x_i,$$

representando um Universo em expansão.

Neste caso, definimos o tempo conforme $\eta = -\frac{\exp(-Ht)}{H}$, que satisfaz $\dot{\eta} = -H\eta$, isto é,

$$\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}\eta}{H\eta} \implies \mathrm{d}t^2 = \frac{\mathrm{d}\eta^2}{H^2\eta^2}.$$

Deste modo, como $\exp(2Ht) = \left(H\eta\right)^{-2}$, temos

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{-\,\mathrm{d}\eta^2 + \,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x_i}{H^2\eta^2},$$

se tomarmos $A = 1$.

Interpretando $-\frac{\Lambda}{\kappa}g_{\mu\nu}$ como o tensor de energia e momento $T_{\mu\nu}$ das equações de Einstein sem constante cosmológica, temos de

$$T^{\mu}{}_{\nu} = (\rho + p)U^{\mu}U_{\nu} + p\delta^{\mu}{}_{\nu},$$

com $U^0 = H\eta$ e $U^i = 0$, que

$$\begin{aligned}\left(p + \frac{\Lambda}{\kappa}\right)\delta^{\mu}{}_{\nu} &= -(\rho + p)U^{\mu}U_{\nu} \\ &= (\rho + p)\delta^{\mu}_{0}\delta^{0}_{\nu}.\end{aligned}$$

Recordando que $\Lambda = 3H^2$, obtemos

$$\rho = \frac{3H^2}{\kappa} \quad \text{e} \quad p = -\frac{3H^2}{\kappa},$$

isto é, uma constante cosmológica positiva pode ser interpretada como um fluido com pressão negativa.

Exercício 5

Para a métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker,

$$\mathrm{d}s^2 = -\,\mathrm{d}t^2 + a^2(t)\gamma_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j, \text{com } \gamma_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{\left[1 + \frac{\kappa}{4}(x^2 + y^2 + z^2)\right]^2},$$

onde κ é a curvatura da seção espacial, o tensor de Einstein é dado por

$$G_{00} = 3\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 3\frac{\kappa}{a^2}, \quad G_{0i} = 0, \quad \text{e} \quad G_{ij} = -\left(2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\kappa}{a^2}\right)g_{ij},$$

e os coeficientes da conexão de Levi-Civita por

$$\Gamma^{0}{}_{ij} = a\dot{a}\gamma_{ij}, \quad \Gamma^{i}{}_{0j} = \frac{\dot{a}}{a}\delta^{i}{}_{j}, \quad \text{e} \quad \Gamma^{k}{}_{ij} = 2\kappa\frac{\delta_{ij}x^k - \delta_{ik}x^j - \delta_{jk}x^i}{4 + \kappa(x^2 + y^2 + z^2)},$$

com os outros coeficientes ou nulos ou dados pela simetria da conexão. Consideremos um tensor de energia e momento homogêneo e isotrópico

$$T^{\mu}{}_{\nu} = \left[\rho(t) + p(t)\right]U^{\mu}U_{\nu} + p(t)\delta^{\mu}{}_{\nu},$$

com $U^0 = 1$ e $U^i = 0$, e calculemos a divergência $\nabla_\mu T^\mu{}_\nu$ explicitamente. Notemos que

$$\nabla_\mu U^\mu = \frac{\partial_\mu(\sqrt{-g}U^\mu)}{\sqrt{-g}} = \frac{\partial_t\sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} = 3\frac{\dot{a}}{a}$$

e que

$$U^\mu \nabla_\mu U_\nu = U^\mu \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} U_\sigma = -\Gamma^0{}_{0\nu} = 0,$$

logo a divergência procurada é dada por

$$\begin{aligned}\nabla_\mu T^\mu{}_\nu &= (\dot{\rho} + \dot{p})U_\nu + (\rho + p)\left(U_\nu \nabla_\mu U^\mu + U^\mu \nabla_\mu U_\nu\right) + \dot{p}\delta^0{}_\nu \\ &= \left[\dot{\rho} + \dot{p} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p)\right] U_\nu + \dot{p}\delta^0{}_\nu.\end{aligned}$$

Da conservação do tensor de energia e momento, $\nabla_\mu T^\mu{}_\nu = 0$, temos

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0,$$

equação a qual nos referiremos por equação de continuidade.

Considerando as equações de Einstein com constante cosmológica, $G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$, obtemos as equações de Friedmann,

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 3\frac{\kappa}{a^2} - \Lambda = 8\pi G\rho \quad \text{e} \quad -2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\kappa}{a^2} + \Lambda = 8\pi G p.$$

Somando a primeira equação dividida por três à segunda equação, obtemos

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{\Lambda}{3} - \frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p),$$

que podemos substituir de volta na segunda equação, resultando em

$$\begin{aligned}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= \Lambda - \frac{\kappa}{a^2} - 8\pi G p - 2\left[\frac{\Lambda}{3} - \frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p)\right] \\ &= \frac{\Lambda}{3} - \frac{\kappa}{a^2} + \frac{8\pi G}{3}\rho.\end{aligned}$$

Definindo $\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}$ e $\rho_\kappa = -\frac{3\kappa}{8\pi G}a^{-2}$ e utilizando o parâmetro de Hubble, $H = \frac{\dot{a}}{a}$, podemos escrever esta última equação como

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\left(\rho_\Lambda + \rho_\kappa + \rho\right).$$

Nesta forma, podemos interpretar o efeito da constante cosmológica e da curvatura da seção espacial como densidades de energia fictícias.

Utilizando a equação de continuidade e a equação obtida a partir das equações de Friedmann, podemos obter a evolução do fator de escala para diferentes cenários de constante cosmológica, curvatura, e densidade de energia. Para um universo com apenas matéria fria, isto é, cuja pressão é desprezível, temos da equação de continuidade que

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0 \implies \rho = \rho_0 a^{-3}$$

portanto

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho_0}{3a^3} \implies \dot{a} = \sqrt{\frac{8\pi G\rho_0}{3a}} \implies a(t) \implies a(t) = \left[\frac{3}{2}\left(a_0 + t\sqrt{\frac{8\pi G\rho_0}{3}}\right)\right]^{\frac{2}{3}},$$

onde a_0 e ρ_0 são constantes de integração, logo a evolução do fator de escala é da ordem de $t^{\frac{2}{3}}$. Para um universo com apenas radiação, temos pela isotropia e homogeneidade que $p = \frac{1}{3}\rho$, portanto

$$\dot{\rho} + 4\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0 \implies \rho = \rho_0 a^{-4},$$

então

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho_0}{3a^4} \implies \dot{a} = \sqrt{\frac{8\pi G\rho_0}{3}}a^{-1} \implies a(t) \implies a(t) = \sqrt{2\left(a_0 + t\sqrt{\frac{8\pi G\rho_0}{3}}\right)},$$

isto é, o fator de escala evolui como $t^{\frac{1}{2}}$. Para um universo com apenas constante cosmológica e/ou apenas curvatura espacial, segue da equação de continuidade que $\rho(t) = \rho_0$. Para um universo com apenas curvatura, temos

$$\dot{a} = \sqrt{-\kappa} \implies a(t) = t\sqrt{-\kappa} + a_0,$$

isto é, o fator de escala muda linearmente, e a curvatura espacial deve ser negativa. Para um universo com apenas constante cosmológica, vimos no exercício 4 que o fator de escala muda exponencialmente.

Para um universo com geometria plana com as abundâncias de matéria $\Omega_m = 0.3$ e energia escura $\Omega_\Lambda = 0.7$, a equação para o parâmetro de Hubble é

$$H^2 = H_0^2\left(\Omega_\Lambda + \Omega_m a^{-3}\right)$$

onde $H_0 \approx 70\,\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$ é o parâmetro de Hubble atual. Notemos que

$$H = \frac{\dot{a}}{a} \implies \frac{\mathrm{d}a}{aH} = \mathrm{d}t,$$

então integrando em $[0, 1]$ em a e em $[0, T]$ em t, temos a expressão para a idade do universo T,

$$T = \frac{1}{H_0\sqrt{\Omega_m}}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}a}{a\sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m} + a^{-3}}}.$$

Para calcular esta integral, consideremos a mudança de variáveis

$$\frac{\Omega_m}{\Omega_\Lambda}\xi^2 = a^3 \implies \frac{\mathrm{d}a}{a} = \frac{2\,\mathrm{d}\xi}{3\xi},$$

de modo que

$$T = \frac{2}{3H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}}\int_0^{\sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m}}} \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{\xi^2+1}} = \frac{2}{3H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}}\,\mathrm{arsinh}\left(\sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m}}\right) \approx 13.467\times 10^9 \text{ anos}.$$

Exercício 6

Para a métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker,

$$\mathrm{d}s^2 = -\,\mathrm{d}t^2 + a^2(t)\gamma_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j, \text{ com } \gamma_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{\left[1 + \frac{\kappa}{4}(x^2+y^2+z^2)\right]^2},$$

onde κ é a curvatura da seção espacial, o escalar de Ricci é dado por

$$R = 6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\kappa}{a^2}\right).$$

Para um fator de escala com comportamento do tipo $a(t) = a_0 t^n$, temos

$$R = 6\left(\frac{n(n-1)}{t^2} + \frac{n^2}{t^2} + \frac{\kappa}{a_0^2 t^{2n}}\right) \implies \lim_{t\to 0^+} |R| = \infty,$$

isto é, $t \to 0^+$ é uma singularidade em que a curvatura do espaço-tempo é divergente, não importando o tipo de curvatura da seção espacial. Diferentemente da singularidade na origem de uma métrica de Schwarzschild, esta singularidade na métrica de FLRW não possui um horizonte de eventos, uma vez que a métrica está bem definida para todo $t > 0$.