4300337 - Lista de exercícios 3

Louis Bergamo Radial
8992822

13 de abril de 2024

Exercício 1

Exercício 2

Sobre um espaço vetorial V de dimensão n, tensores de segunda ordem têm um total de n^2 componentes. Um tensor antissimétrico $A_{\omega\rho}$ deve satisfazer $A_{\omega\rho} = -A_{\rho\omega}$ para todo par de índices ω, ρ. Assim, temos que as n componentes $A_{\rho\rho}$ são nulas, e a condição das outras $n^2 - n$ componentes, $A_{\omega\rho} = -A_{\rho\omega}$ para $\rho \neq \omega$, reduz o número de componentes independentes para $\frac{n^2-n}{2}$. Semelhantemente, um tensor simétrico $S^{\mu\nu}$ deve satisfazer $S^{\mu\nu} = S^{\nu\mu}$ para todo par de índices μ, ν. Para $\mu = \nu$, esta condição é trivialmente satisfeita, de modo que o número de componentes independentes é $\frac{n^2+n}{2}$. Como exemplo, em um espaço vetorial de dimensão 4, tensores de segunda ordem antissimétricos têm seis componentes independentes e simétricos, dez.

Mostremos que a contração de um tensor simétrico com um tensor antissimétrico tem uma propriedade muito útil, $S^{\omega\rho}A_{\omega\rho} = 0$. Por antissimetria e simetria temos

$$S^{\omega\rho}A_{\omega\rho} = -S^{\omega\rho}A_{\rho\omega} = -S^{\rho\omega}A_{\rho\omega}.$$

Como os índices estão sendo somados, podemos renomeá-los. Em particular, podemos renomear na soma à direita $\omega \to \rho$ e $\rho \to \omega$, obtendo

$$S^{\omega\rho}A_{\omega\rho} = -S^{\omega\rho}A_{\omega\rho},$$

isto é $S^{\omega\rho}A_{\omega\rho} = 0$.

Exercício 3

Consideremos coordenadas esféricas para o espaço tridimensional Euclidiano, dadas por

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \cos\theta = \frac{z}{r}, \quad \text{e} \quad \tan\phi = \frac{y}{x}.$$

Alternativamente, temos

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \quad y = r\sin\theta\sin\phi, \quad \text{e} \quad z = r\cos\theta,$$

de modo que os vetores da base no sistema de coordenadas esféricas são dados por

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_r &= \frac{\partial x}{\partial r}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial y}{\partial r}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial z}{\partial r}\boldsymbol{e}_z \\ &= \sin\theta\cos\phi\boldsymbol{e}_x + \sin\theta\sin\phi\boldsymbol{e}_y + \cos\theta\boldsymbol{e}_z, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_\theta &= \frac{\partial x}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial z}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_z \\ &= r\cos\theta\cos\phi\boldsymbol{e}_x + r\cos\theta\sin\phi\boldsymbol{e}_y - r\sin\theta\boldsymbol{e}_z, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_\phi &= \frac{\partial x}{\partial\phi}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial y}{\partial\phi}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial z}{\partial\phi}\boldsymbol{e}_z \\ &= -r\sin\theta\sin\phi\boldsymbol{e}_x + r\sin\theta\cos\phi\boldsymbol{e}_y.\end{aligned}$$

Com os vetores da base desse sistema de coordenadas, podemos obter os coeficientes da métrica por

$$g'_{ij} = g(\boldsymbol{e}'_i, \boldsymbol{e}'_j),$$

utilizando que em termos da base do sistema cartesiano, temos

$$g(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_x) = g(\boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_y) = g(\boldsymbol{e}_z, \boldsymbol{e}_z) = 1$$

e os demais são iguais a zero. Assim, os coeficientes da métrica Euclidiana nas coordenadas esféricas são dados por

$$g'_{rr} = 1, \quad g'_{\theta\theta} = r^2, \quad \text{e} \quad g'_{\phi\phi} = r^2\sin^2\theta,$$

e as outras componentes nulas.

Consideremos agora a métrica da relatividade restrita $\eta_{\mu\nu}$ e as coordenadas em rotação

$$\begin{cases} t' = t \\ x' = \sqrt{x^2+y^2}\cos(\phi - \omega t) \\ y' = \sqrt{x^2+y^2}\sin(\phi - \omega t) \\ z' = z \end{cases}$$

onde $\tan\phi = \frac{y}{x}$. Notemos que

$$x' = x\cos\omega t + y\sin\omega t \quad \text{e} \quad y' = -x\sin\omega t + y\cos\omega t$$

então ao tomar combinações lineares das equações acima e utilizando $t' = t$, temos

$$\begin{cases} t = t' \\ x = x'\cos\omega t' - y'\sin\omega t' \\ y = x'\sin\omega t' + y'\cos\omega t' \\ z = z' \end{cases}.$$

Assim, os vetores da base são dados por $\boldsymbol{e}_{\mu'} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu'}}\boldsymbol{e}_\nu$, isto é,

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_{0'} = \boldsymbol{e}_0 - \omega(x'\sin\omega t' + y'\cos\omega t')\boldsymbol{e}_1 + \omega(x'\cos\omega t' - y'\cos\omega t')\boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_{1'} = \cos\omega t'\boldsymbol{e}_1 + \sin\omega t'\boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_{2'} = -\sin\omega t'\boldsymbol{e}_1 + \cos\omega t'\boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_{3'} = \boldsymbol{e}_3 \end{cases}.$$

Utilizando a bilinearidade do tensor métrico temos que suas componentes são dadas por

$$g_{\mu'\nu'} = \begin{pmatrix} 1+\omega^2(x'^2+y'^2) & -\omega y' & \omega x' & 0 \\ -\omega y' & 1 & 0 & 0 \\ \omega x' & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{\mu'\nu'}.$$

Desse modo, as componentes $g^{\mu'\nu'}$ são dadas por

$$g_{\mu'\nu'} = \begin{pmatrix} 1 & \omega y' & -\omega x' & 0 \\ \omega y' & 1+\omega^2 y'^2 & -\omega^2 x'y' & 0 \\ -\omega x' & -\omega^2 x'y' & 1+\omega^2 x'^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{\mu'\nu'}.$$

Exercício 4

Para uma conexão de Levi-Civita, isto é, simétrica e compatível com o tensor métrico, os seus coeficientes $\Gamma^{\rho}{}_{\alpha\beta}$ são dados por

$$\Gamma^{\rho}{}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} g^{\rho\sigma} \left(\partial_\sigma g_{\alpha\beta} - \partial_\alpha g_{\beta\sigma} - \partial_\beta g_{\sigma\alpha}\right)$$

para todas as triplas de índices ρ, α, β.

Para uma métrica diagonal, isto é, $g_{\mu\nu} = 0 \iff \mu \neq \nu$, temos $g^{\mu\nu} = 0 \iff \mu \neq \nu$, de modo que os coeficientes da conexão são dados por

$$\Gamma^{\rho}{}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2g_{\rho\rho}} \left(\partial_\rho g_{\alpha\beta} - \partial_\alpha g_{\beta\rho} - \partial_\beta g_{\rho\alpha}\right)$$

neste caso, e nesta expressão índices repetidos não são somados. Podemos simplificar adiante separando em casos: sejam μ, ν, λ índices todos distintos, então

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\lambda}{}_{\lambda\lambda} &= -\frac{1}{2g_{\lambda\lambda}} \left(\partial_\lambda g_{\lambda\lambda} - \partial_\lambda g_{\lambda\lambda} - \partial_\lambda g_{\lambda\lambda}\right) \\
&= \frac{\partial_\lambda g_{\lambda\lambda}}{2g_{\lambda\lambda}} = \partial_\lambda \ln\sqrt{|g_{\lambda\lambda}|}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\lambda} &= -\frac{1}{2g_{\lambda\lambda}} \left(\partial_\lambda g_{\mu\lambda} - \partial_\mu g_{\lambda\lambda} - \partial_\lambda g_{\lambda\mu}\right) \\
&= \frac{\partial_\mu g_{\lambda\lambda}}{2g_{\lambda\lambda}} = \partial_\mu \ln\sqrt{|g_{\lambda\lambda}|}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\mu} &= -\frac{1}{2g_{\lambda\lambda}} \left(\partial_\lambda g_{\mu\mu} - \partial_\mu g_{\mu\lambda} - \partial_\mu g_{\lambda\mu}\right) \\
&= -\frac{\partial_\lambda g_{\mu\mu}}{2g_{\lambda\lambda}}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} &= -\frac{1}{2g_{\lambda\lambda}} \left(\partial_\lambda g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\nu g_{\lambda\mu}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

são todos os coeficientes da conexão para o caso de uma métrica diagonal.

Exercício 5

Utilizando os resultados do exercício anterior, os coeficientes da conexão de Levi-Civita para as coordenadas esféricas no espaço Euclidiano são dados por

$$\begin{aligned}
\Gamma^{r}{}_{\theta\theta} &= -r & \qquad \Gamma^{r}{}_{\phi\phi} &= -r\sin^2\theta \\
\Gamma^{\theta}{}_{\theta r} &= \frac{1}{r} & \qquad \Gamma^{\theta}{}_{\phi\phi} &= -\sin\theta\cos\theta \\
\Gamma^{\phi}{}_{\phi r} &= \frac{1}{r} & \qquad \Gamma^{\phi}{}_{\phi\theta} &= \frac{1}{r}\cot\theta,
\end{aligned}$$

e os outros termos são ou nulos ou obtidos pela simetria da conexão.

Seja uma curva

$$\begin{aligned}
\gamma : I \subset \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^3 \\
\lambda &\mapsto \left(x^r(\lambda), x^\theta(\lambda), x^\phi(\lambda)\right)
\end{aligned}$$

cujo vetor tangente é dado por $X = X^i \boldsymbol{e}_i$, com $X^i = \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\lambda}$ ao longo de γ, e seja um campo de vetores $Y = Y^i \boldsymbol{e}_i$, com $i = r, \theta, \phi$. Temos então

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= X^i \nabla_{\boldsymbol{e}_i}(Y^j \boldsymbol{e}_j) \\
&= X^i(\partial_i Y^j)\boldsymbol{e}_j + X^i Y^j \nabla_{\boldsymbol{e}_i}\boldsymbol{e}_j \\
&= X^i(\partial_i Y^k + \Gamma^{k}{}_{ij} Y^j)\boldsymbol{e}_k.
\end{aligned}$$

No caso em que $Y = X$, temos

$$\begin{aligned}
\nabla_X X &= X^i(\partial_i X^k + \Gamma^{k}{}_{ij} X_j)\boldsymbol{e}_k \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}\lambda} + \Gamma^{k}{}_{ij}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}\lambda}\right)\boldsymbol{e}_k \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}^2 x^k}{\mathrm{d}\lambda^2} + \Gamma^{k}{}_{ij}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}\lambda}\right)\boldsymbol{e}_k.
\end{aligned}$$

Assim, para que γ seja uma geodésica, devemos ter $\nabla_X X = 0$, isto é,

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^k}{\mathrm{d}\lambda^2} + \Gamma^k{}_{ij} \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}\lambda} = 0$$

para todo k. Assim, de forma explícita, as equações da geodésica são dadas por

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2\theta = 0 \\ \ddot{\theta} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta} - \dot{\phi}^2 \sin\theta\cos\theta = 0 \\ \ddot{\phi} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\phi} + \frac{2}{r}\dot{\phi}\dot{\theta}\cot\theta = 0 \end{cases} .$$

Exercício 6

Um espaço topológico é uma dupla $(M, \mathcal{O}_M)$ composta por um conjunto M e uma topologia $\mathcal{O}_M$. Um subconjunto U de M é dito ser aberto em relação a este espaço topológico se $U \in \mathcal{O}_M$. Uma aplicação $f : M \to N$ entre espaços topológicos $(M, \mathcal{O}_M)$ e $(N, \mathcal{O}_N)$ é dita contínua se sua pré-imagem de um aberto é aberta, e é dita um homeomorfismo se for bijetiva e tanto f quanto f^{-1} forem contínuas. Se existe um homeomorfismo entre dois espaços topológicos, estes são ditos homeomorfos.

Se existe um número inteiro n tal que todo aberto $U \in \mathcal{O}_M$ é homeomorfo a $\mathbb{R}^n$, em relação à topologia usual do espaço Euclidiano, dizemos que $(M, \mathcal{O}_M)$ é um espaço topológico localmente Euclidiano de dimensão n. Ainda, para cada aberto $U \in \mathcal{O}_M$ existe um homeomorfismo $x : U \to x(U) \subset \mathbb{R}^n$, e chamamos o par (U, x) de carta local. Um atlas $\mathscr{A}_M$ é uma coleção de cartas locais tal que a união dos abertos cobre o conjunto M.

Consideremos agora duas cartas $(U, x), (V, x) \in \mathscr{A}_M$ tal que $U \cap V \neq \emptyset$.

$$\begin{tikzcd} & U \cap V \arrow[dl, "x"'] \arrow[dr, "y"] & \\ x(U \cap V) \arrow[rr, "y \circ x^{-1}"] & & y(U \cap V) \end{tikzcd}$$

Como uma composição de homeomorfismos, segue que a aplicação de transição $y \circ x^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um homeomorfismo, isto é, contínua. Como uma função em $\mathbb{R}^n$, podemos utilizar análise usual para decidir se esta função é diferenciável. Duas cartas locais $(U, x), (V, y)$ são ditas C^k-compatíveis se ou $U \cap V \neq \emptyset$ e a aplicação de transição $y \circ x^{-1}$ é de classe C^k ou se $U \cap V = \emptyset$. Ainda, um atlas é dito C^k-compatível se todo par de cartas locais são C^k-compatíveis.

Uma variedade diferenciável $(M, \mathcal{O}_M, \mathscr{A}_M)$ é um espaço topológico $(M, \mathcal{O}_M)$ localmente Euclidiano munido de um atlas maximal suave $\mathscr{A}_M$, isto é, um atlas C^∞-compatível com a propriedade de que se uma carta (U, x) é compatível com uma carta $(V, y) \in \mathscr{A}_M$, então $(U, x) \in \mathscr{A}_M$. A estrutura diferencial dada pelo atlas permite definir em todo ponto $p \in M$ um espaço vetorial T_pM, chamado de espaço tangente no ponto p, cujos elementos são derivações na álgebra $C^\infty(M)$ de funções suaves $f : M \to \mathbb{R}$. Geometricamente, cada elemento $X \in T_pM$ é um operador de derivada direcional ao longo de alguma curva suave $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ que passa por $p = \gamma(0)$. O espaço dual T_p^*M é chamado de espaço cotangente no ponto p, cujos elementos são relacionados com as curvas de nível de funções suaves $C^\infty(M)$.

Utilizando o atlas da variedade, podemos definir um atlas para a união disjunta dos espaços tangentes, construindo assim o fibrado tangente TM, que é também uma variedade diferenciável. Uma aplicação suave $p \mapsto X_p$ que associa um ponto p da variedade a um vetor $X_p \in T_pM \subset TM$ do fibrado tangente é chamada de campo de vetores. Analogamente, definimos o fibrado cotangente T^*M, em que uma aplicação suave $p \mapsto \omega_p$ que associa um ponto $p \in M$ a um elemento $\omega_p \in T_p^*M \subset T^*M$ é chamada de 1-forma diferencial, ou campo de covetores. Uma função multilinear de campos de vetores e de 1-formas diferenciais é chamada de tensor na variedade.

Resumindo de forma mais informal, uma variedade diferenciável é um conjunto M que localmente se parece com algum espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$, e no qual podemos definir ponto a ponto um espaço vetorial, que é intimamente relacionado à estrutura diferencial fornecida à M por um atlas de cartas de coordenadas locais. Um tensor no contexto de uma variedade diferenciável é uma função multilinear de vetores e 1--formas definida em todo ponto da variedade.

Exercício 7

Exercício 8

Exercício 9

Exercício 10