

4300337 - Lista de exercícios 2

Louis Bergamo Radial
8992822

31 de março de 2024

Exercício 1

Para que um corpo de massa m tenha uma energia cinética K , sua velocidade v satisfaz

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1 \right) mc^2 = K.$$

Isolando v , obtemos

$$v = c \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\frac{K}{mc^2} + 1} \right)^2}.$$

Assim, para que uma partícula tenha energia cinética igual a sua energia de repouso, sua velocidade é

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2} c.$$

Pelo mesmo cálculo, para que uma bola de canhão de massa $m = 1 \text{ kg}$ tenha a mesma energia cinética que um próton, de massa $m_p \approx 1.673 \times 10^{-27} \text{ kg}$, de um raio cósmico em movimento com fator de Lorentz $\gamma = 10^{11}$, sua velocidade deve ser

$$\begin{aligned} v &= c \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\frac{(\gamma-1)m_p c^2}{mc^2} + 1} \right)^2} \\ &= c \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\frac{(\gamma-1)m_p}{m} + 1} \right)^2} \\ &\approx 5.483 \text{ m s}^{-1}. \end{aligned}$$

Exercício 2

No referencial do centro de massa, o 4-momento do sistema é dado por

$$P^\mu = \left(m_1 c^2, \vec{0} \right)^\mu,$$

visto que antes do decaimento a partícula de massa m_1 está em repouso neste referencial. Notaremos por $(P_{m_i})^\mu$ a componente (neste caso contravariante) μ do 4-momento da partícula de massa m_i . Por conservação do 4-momento, temos

$$(P_{m_1})^\mu = (P_{m_2})^\mu + (P_{m_3})^\mu,$$

com P_{m_1} dado acima.

Assim, temos

$$\begin{aligned} (P_{m_2})_\mu (P_{m_2})^\mu &= (P_{m_1} - P_{m_3})_\mu (P_{m_1} - P_{m_3})^\mu \\ &= (P_{m_1})_\mu (P_{m_1})^\mu + (P_{m_2})_\mu (P_{m_2})^\mu - 2 (P_{m_1})_\mu (P_{m_3})^\mu. \end{aligned}$$

Como $(P_{m_i})_\mu (P_{m_i})^\mu = -m_i^2 c^2$, obtemos a energia da partícula de massa m_3

$$-m_2^2 c^2 = -m_1^2 c^2 - m_3^2 c^2 + 2m_1 E_3 \implies E_3 = \frac{m_1^2 - m_2^2 + m_3^2}{2m_1} c^2.$$

Pelo mesmo argumento, obtemos a energia da outra partícula

$$-m_3^2 c^2 = -m_1^2 c^2 - m_2^2 c^2 + 2m_1 E_2 \implies E_2 = \frac{m_1^2 + m_2^2 - m_3^2}{2m_1} c^2.$$

Exercício 3

O processo de propulsão certamente deve respeitar a conservação de energia e momento, neste caso, temos

$$p - \gamma m v = 0 \quad \text{e} \quad \frac{d}{d\tau} (p c + \gamma m c^2) = 0$$

onde p é o momento do fóton. Desta forma, temos

$$d(\gamma m c + \gamma m v) = 0.$$

Notemos que

$$d\gamma = \gamma^3 \frac{v}{c^2} dv,$$

portanto

$$\gamma(v+c)dm + m\gamma \left(\gamma^2 \frac{v(v+c)}{c^2} + 1 \right) dv = 0.$$

Dividindo por $\gamma m(v+c)$, obtemos

$$\frac{dm}{m} + \frac{\gamma^2}{c} dv = 0.$$

Em termos de $\beta = \frac{v}{c}$, temos

$$\frac{dm}{m} + \frac{d\beta}{1-\beta^2} = 0.$$

Se o foguete parte do repouso com massa inicial M , temos

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{m}{M}\right) &= - \int_0^\beta \frac{d\xi}{1-\xi^2} \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^\beta \left(\frac{1}{\xi+1} - \frac{1}{\xi-1} \right) d\xi \\ &= -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{\beta+1}{1-\beta}\right) \\ &= \ln \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}. \end{aligned}$$

Desse modo, o foguete tem massa

$$m = M \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

quando sua velocidade é igual a βc .

Se $\sigma = \frac{dm}{d\tau}$ é a taxa em que o foguete converte massa em fótons no referencial instantaneamente de repouso do foguete, então a taxa no referencial terrestre é $\frac{\sigma}{\gamma} = \frac{dm}{dt}$. Neste caso, temos

$$\begin{aligned}\frac{\sigma}{M} &= \gamma \frac{d}{dt} \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \\ &= -\gamma \frac{\frac{1}{(1+\beta)^2} d\beta}{\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} dt} \\ &= -\frac{1}{(1+\beta)^2(1-\beta)} \frac{d\beta}{dt},\end{aligned}$$

isto é, uma equação diferencial a variáveis separáveis,

$$-\frac{\sigma}{M} dt = \frac{d\beta}{(1+\beta)^2(1-\beta)}.$$

Integrando, obtemos

$$\begin{aligned}t &= -\frac{M}{\sigma} \int_0^\beta \frac{d\xi}{(1+\xi)^2(1-\xi)} \\ &= \frac{M}{4\sigma} \int_\beta^0 \left(\frac{2}{(1+\xi)^2} + \frac{1}{1+\xi} - \frac{1}{\xi-1} \right) d\xi \\ &= \frac{M}{4\sigma} \left[-2(1+\xi)^{-1} + \ln \left(\frac{1+\xi}{1-\xi} \right) \right]_\beta^0 \\ &= \frac{M}{2\sigma} \left[-(1+\xi)^{-1} + \operatorname{artanh} \xi \right]_\beta^0 \\ &= -\frac{M}{2\sigma} \left(\frac{\beta}{1+\beta} + \operatorname{artanh} \beta \right).\end{aligned}$$

Exercício 4

Consideremos a força $F^i = \frac{dp^i}{dt}$. Em notação vetorial temos $\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}$, donde segue

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \frac{d\gamma}{dt} m \mathbf{v} + \gamma m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \\ &= \frac{d\gamma}{dt} m \mathbf{v} + \gamma m \mathbf{a},\end{aligned}$$

onde $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ é a 3-aceleração da partícula.

Notemos que

$$\begin{aligned}\frac{d\gamma}{dt} &= \left[1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right]^{-\frac{3}{2}} \frac{v}{c^2} \frac{dv}{dt} \\ &= \frac{\gamma^3}{c^2} \langle \mathbf{v}, \mathbf{a} \rangle,\end{aligned}$$

onde foi utilizada a relação

$$2v \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{a} \rangle.$$

Dessa forma, obtemos

$$\mathbf{F} = \gamma m \left(\mathbf{a} + \frac{\gamma^2}{c^2} \langle \mathbf{v}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{v} \right).$$

No caso particular em que a força é paralela à velocidade, devemos ter que a aceleração é também paralela à velocidade. Assim, $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{n}}$, $\mathbf{a} = a\hat{\mathbf{n}}$ e $\mathbf{F} = F\hat{\mathbf{n}}$ para algum vetor unitário $\hat{\mathbf{n}}$, então

$$\begin{aligned} F &= \gamma m a \left(1 + \gamma^2 \frac{v^2}{c^2} \right) \\ &= \gamma^3 m a. \end{aligned}$$

Como um exemplo, tomemos uma partícula de carga q com velocidade $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{i}}$ que parte do repouso na origem num campo uniforme $\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{i}}$. Assim,

$$qE = \gamma^3 m a.$$

Notemos que isso é uma equação diferencial a variáveis separáveis

$$\left[1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right]^{-\frac{3}{2}} dv = \frac{qE}{m} dt \implies \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2}} = \frac{qEt}{m}.$$

Resolvendo para v , obtemos

$$\begin{aligned} v^2 &= \frac{1}{\left(\frac{m}{qEt} \right)^2 + \left(\frac{1}{c} \right)^2} \implies v = \sqrt{\frac{c^2}{\left(\frac{mc}{qEt} \right)^2 + 1}} \\ &\implies v = \frac{\frac{qEt}{mc}}{\sqrt{1 + \left(\frac{qEt}{mc} \right)^2}} c. \end{aligned}$$

Integrando em relação ao tempo para obter a posição, temos

$$\begin{aligned} x &= c \int_0^t dt \frac{\frac{qEt}{mc}}{\sqrt{1 + \left(\frac{qEt}{mc} \right)^2}} \implies x = \frac{mc^2}{2qE} \int_1^{1 + \left(\frac{qEt}{mc} \right)^2} d\zeta \zeta^{-\frac{1}{2}} \\ &\implies x = \frac{mc^2}{qE} \left[\sqrt{\zeta} \right]_1^{1 + \left(\frac{qEt}{mc} \right)^2} \\ &\implies x = \frac{mc^2}{qE} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{qEt}{mc} \right)^2} - 1 \right), \end{aligned}$$

partindo de $x = 0$.

No caso particular em que a força é ortogonal à velocidade, devemos ter

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{F}, \mathbf{v} \rangle &= 0 \implies \langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle (1 + \gamma^2 \beta^2) = 0 \\ &\implies \langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle = 0, \end{aligned}$$

de modo que

$$\mathbf{F} = \gamma m \mathbf{a}.$$

Como um exemplo, tomemos uma partícula de carga q com velocidade $\mathbf{v} = v\hat{\boldsymbol{\phi}}$ contida no plano xy que se move num campo magnético uniforme $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{k}}$. Assim,

$$\begin{aligned} \gamma m \mathbf{a} &= q \mathbf{v} \times \mathbf{B} \implies -\gamma m v \dot{\boldsymbol{\phi}} \hat{\mathbf{r}} = qvB\hat{\mathbf{r}} \\ &\implies \dot{\boldsymbol{\phi}} = -\frac{qB}{m\gamma}, \end{aligned}$$

portanto a frequência f de oscilação do movimento orbital é

$$f = \frac{qB}{2\pi m} \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2}.$$

Exercício 5

A transformação de Lorentz de das componentes de um quadrivetor é dada por

$$x'^{\nu} = \Lambda^{\nu}_{\mu} x^{\mu} \quad \text{e} \quad x'_{\nu} = \Lambda_{\nu}^{\mu} x_{\mu},$$

então temos que as componentes $T^{\mu_1, \dots, \mu_p}_{\nu_1, \dots, \nu_q}$ de um tensor tipo (p, q) se transformam de acordo com

$$T'^{\alpha_1, \dots, \alpha_p}_{\beta_1, \dots, \beta_q} = \Lambda^{\alpha_1}_{\mu_1} \cdots \Lambda^{\alpha_p}_{\mu_p} \Lambda^{\nu_1}_{\beta_1} \cdots \Lambda^{\nu_q}_{\beta_q} T^{\mu_1, \dots, \mu_p}_{\nu_1, \dots, \nu_q}.$$

Dadas bases \hat{e}_{μ} e \hat{e}'_{ν} , temos

$$x = x^{\mu} \hat{e}_{\mu} = x'^{\nu} \hat{e}'_{\nu},$$

isto é, uma mudança de referencial não muda o vetor em si, apenas os valores das componentes. Assim,

$$x = (\Lambda^{\nu}_{\sigma} x^{\sigma}) (\Lambda_{\nu}^{\rho} \hat{e}_{\rho}) \implies \Lambda^{\nu}_{\sigma} \Lambda_{\nu}^{\rho} = \delta^{\rho}_{\sigma}.$$

Podemos mostrar a invariância do intervalo $ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta}$. Pela transformações de tensores, temos

$$\begin{aligned} \eta'_{\mu\nu} dx'^{\mu} dx'^{\nu} &= (\Lambda_{\mu}^{\alpha} \Lambda_{\nu}^{\beta} \eta_{\alpha\beta}) (\Lambda^{\mu}_{\sigma} dx^{\sigma}) (\Lambda^{\nu}_{\rho} dx^{\rho}) \\ &= \delta^{\alpha}_{\sigma} \delta^{\beta}_{\rho} \eta_{\alpha\beta} dx^{\sigma} dx^{\rho} \\ &= \eta_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta} \\ &= ds^2. \end{aligned}$$

Consideremos $\delta^{\mu}_{\nu} = \eta^{\mu\sigma} \eta_{\sigma\nu}$, então

$$\begin{aligned} \delta'^{\alpha}_{\beta} &= \Lambda^{\alpha}_{\mu} \Lambda_{\beta}^{\nu} \delta^{\mu}_{\nu} \\ &= \Lambda^{\alpha}_{\nu} \Lambda_{\beta}^{\nu} \\ &= \delta^{\alpha}_{\beta}, \end{aligned}$$

isto é, o delta de Kronecker é invariante por transformações de Lorentz.

Consideremos o símbolo de Levi-Civita $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$, então

$$\begin{aligned} \epsilon'^{\alpha\beta\kappa\lambda} &= \Lambda^{\alpha}_{\mu} \Lambda^{\beta}_{\nu} \Lambda^{\kappa}_{\rho} \Lambda^{\lambda}_{\sigma} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \\ &= \det(\Lambda) \epsilon^{\alpha\beta\kappa\lambda}. \end{aligned}$$

Assim, o símbolo de Levi-Civita é invariante por transformações do grupo restrito de Lorentz.

Exercício 6

Consideremos um tensor $T^{\mu\nu}$, então

$$T'^{\alpha\beta} = \Lambda^{\alpha}_{\mu} \Lambda^{\beta}_{\nu} T^{\mu\nu}$$

expressa a transformação das componentes sob uma transformação de Lorentz Λ . No caso particular em que a transformação é uma rotação no grupo restrito de Lorentz, segue que as únicas componentes não nulas dessa transformação são

$$\Lambda^0_0 = 1 \quad \text{e} \quad \Lambda^i_j = R^i_j,$$

para uma dada matriz de rotação $R^i_j \in \text{SO}(3)$. Desse modo, temos

$$\begin{aligned} T'^{00} &= \Lambda^0_{\mu} \Lambda^0_{\nu} T^{\mu\nu} & T'^{i0} &= \Lambda^i_{\mu} \Lambda^0_{\nu} T^{\mu\nu} & T'^{0j} &= \Lambda^0_{\mu} \Lambda^j_{\nu} T^{\mu\nu} & T'^{ij} &= \Lambda^i_{\mu} \Lambda^j_{\nu} T^{\mu\nu} \\ &= \Lambda^0_0 \Lambda^0_{\nu} T^{0\nu} + \Lambda^0_m \Lambda^0_{\nu} T^{m\nu} & &= \Lambda^i_{\mu} T^{\mu 0} & &= \Lambda^j_{\nu} T^{0\nu} & &= \Lambda^i_m \Lambda^j_n T^{mn} \\ &= T^{00} & &= R^i_m T^{m0} & &= R^j_n T^{0n} & &= R^i_m R^j_n T^{mn}, \end{aligned}$$

isto é, a componente T^{00} é inalterada, as componentes T^{i0} e T^{0j} se transformam como componentes de 3-vetores, e as componentes T^{ij} se transformam como componentes de um 3-tensor.

Exercício 7

A ação para uma partícula de massa m é dada por

$$\begin{aligned} S &= - \int mc \sqrt{-\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} \\ &= - \int dt mc \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} \\ &= - \int dt \frac{mc^2}{\gamma(\dot{\mathbf{x}})}, \end{aligned}$$

portanto a lagrangiana é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x, \dot{x}) &= -mc \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} \\ &= -\frac{mc^2}{\gamma(\dot{\mathbf{x}})}. \end{aligned}$$

Deste modo, o momento canônico é dado por

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} = -mc \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} \\ &= \frac{mc}{2\sqrt{-\eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} \eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \\ &= \frac{mc}{\sqrt{-\eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}} \eta_{\mu\nu} \delta^\mu_i \dot{x}^\nu \\ &= m\gamma(\dot{\mathbf{x}}) \delta^\mu_i \dot{x}_\mu \\ &= m\gamma(\dot{\mathbf{x}}) \dot{x}_i, \end{aligned}$$

e a Hamiltoniana por

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= p_i \dot{x}^i - \mathcal{L} = m\gamma(\dot{\mathbf{x}}) \dot{x}_i \dot{x}^i + \frac{mc^2}{\gamma(\dot{\mathbf{x}})} \\ &= \gamma(\dot{\mathbf{x}}) mc^2 \left(\frac{\dot{x}_i \dot{x}^i}{c^2} + \frac{1}{\gamma^2(\dot{\mathbf{x}})} \right) \\ &= \gamma(\dot{\mathbf{x}}) mc^2, \end{aligned}$$

uma vez que $\frac{1}{\gamma^2} = 1 - \frac{\dot{x}_i \dot{x}^i}{c^2}$.

Consideremos a ação

$$\tilde{S} = -\frac{1}{2} \int d\zeta \left[\sigma(\zeta) \left(\frac{dx}{d\zeta} \right)^2 + \frac{m^2}{\sigma(\zeta)} \right]$$

então pela equação de Euler-Lagrange para σ , temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\sigma \left(\frac{dx}{d\zeta} \right)^2 + \frac{m^2}{\sigma} \right] &= 0 \implies \left(\frac{dx}{d\zeta} \right)^2 - \frac{m^2}{\sigma^2} = 0 \\ &\implies \frac{m^2}{\sigma^2} = \left(\frac{dx}{d\zeta} \right)^2. \end{aligned}$$

Assim, substituindo na ação, obtemos

$$\tilde{S} = - \int d\zeta \sigma(\zeta) \left(\frac{dx}{d\zeta} \right)^2 = - \int d\zeta m \frac{dx}{d\zeta} = -m \int dx,$$

que seria a mesma ação para a partícula de massa m em unidades naturais e se $dx = ds$.

Exercício 8

Consideremos as equações de Maxwell em sua forma covariante

$$\partial_\mu F^{\nu\mu} = \mu_0 J^\nu \quad \text{e} \quad \partial^\rho \epsilon_{\rho\sigma\mu\nu} F^{\mu\nu} = 0,$$

onde o tensor de Faraday $F^{\mu\nu}$ tem suas componentes dadas por

$$F^{0i} = \frac{E^i}{c} \quad \text{e} \quad F^{ij} = \epsilon^{ijk} B_k,$$

com as demais dadas pela propriedade antissimétrica do tensor, isto é, $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$.

Substituindo $\nu = 0$ na primeira equação obtemos

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{0\mu} = \mu_0 J^0 &\iff \partial_i F^{0i} = \mu_0 \rho c \\ &\iff \partial_i E^i = \mu_0 \rho c^2 \\ &\iff \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \end{aligned}$$

Para os outros índices, isto é, $\nu = j$, obtemos

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{j\mu} = \mu_0 J^j &\iff \partial_0 F^{j0} + \partial_i F^{ji} = \mu_0 J^j \\ &\iff -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E^j}{\partial t} + \partial_i \epsilon^{jik} B_k = \mu_0 J^j \\ &\iff -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E^j}{\partial t} - \partial_i \epsilon^{ijk} B_k = \mu_0 J^j \\ &\iff (\nabla \times \mathbf{B})^j = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)^j \\ &\iff \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right). \end{aligned}$$

Assim, mostramos que a primeira equação é equivalente à lei de Ampère-Maxwell e à lei de Gauss elétrica.

Substituindo $\sigma = 0$ na segunda equação obtemos

$$\begin{aligned} \partial^\rho \epsilon_{\rho 0 \mu \nu} F^{\mu \nu} = 0 &\iff \partial^r \epsilon_{r 0 m n} F^{m n} = 0 \\ &\iff -\partial^r \epsilon_{0 r m n} \epsilon^{m n l} B_l = 0 \\ &\iff \partial^r \epsilon_{r m n} \epsilon^{m n l} B_l = 0 \\ &\iff 2 \partial^r \delta^l_r B_l = 0 \\ &\iff \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \end{aligned}$$

Para os outros índices, $\sigma = s$, obtemos

$$\begin{aligned} \partial^\rho \epsilon_{\rho s \mu \nu} F^{\mu \nu} = 0 &\iff \partial^0 \epsilon_{0 s m n} F^{m n} + \partial^r \epsilon_{r s \mu \nu} F^{\mu \nu} = 0 \\ &\iff 2 \partial^0 \delta^k_s B_k + \partial^r \epsilon_{r s 0 v} F^{0 v} + \partial^r \epsilon_{r s m v} F^{m v} = 0 \\ &\iff -\frac{2}{c} \frac{\partial B_s}{\partial t} + \partial^r \epsilon_{r s 0 n} F^{0 n} + \partial^r \epsilon_{r s m 0} F^{m 0} + \partial^r \epsilon_{r s m n} F^{m n} = 0 \\ &\iff -\frac{2}{c} \frac{\partial B_s}{\partial t} + \frac{2}{c} \partial^r \epsilon_{r s 0 n} E^n = 0 \\ &\iff -\partial^r \epsilon_{s r n} E^n = \frac{\partial B_s}{\partial t} \\ &\iff -(\nabla \times \mathbf{E})_s = \frac{\partial B_s}{\partial t} \\ &\iff \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Isto é, a segunda equação é equivalente à lei de Faraday e à lei de Gauss magnética.

Consideremos uma carga pontual estacionária em um referencial inercial S , em que o campo elétrico é dado por

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}},$$

então o tensor de Faraday neste referencial tem componentes

$$F^{0i} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(x_k x^k \right)^{-\frac{3}{2}} x^i \quad \text{e} \quad F^{ji} = 0.$$

Em um referencial S' , que se move com velocidade $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{i}}$ em relação à S , o tensor de Faraday tem componentes dados por

$$\begin{aligned} F'^{\sigma\rho} &= \Lambda^\sigma_\mu \Lambda^\rho_\nu F^{\mu\nu} \\ &= \Lambda^\sigma_0 \Lambda^\rho_n F^{0n} + \Lambda^\sigma_m \Lambda^\rho_0 F^{m0} + \Lambda^\sigma_m \Lambda^\rho_n F^{mn} \\ &= \left(\Lambda^\sigma_0 \Lambda^\rho_k - \Lambda^\sigma_k \Lambda^\rho_0 \right) F^{0k}. \end{aligned}$$

Calculando-os explicitamente, obtemos

$$\begin{aligned} F'^{01} &= (\gamma \Lambda^1_k + \gamma \beta \Lambda^0_k) F^{0k} & F'^{02} &= (\Lambda^0_0 \Lambda^2_k - \Lambda^0_k \Lambda^2_0) F^{0k} & F'^{03} &= (\Lambda^0_0 \Lambda^3_k - \Lambda^0_k \Lambda^3_0) F^{0k} \\ &= (\gamma^2 - \gamma^2 \beta^2) F^{01} & &= \gamma \Lambda^2_k F^{0k} & &= \gamma \Lambda^3_k F^{0k} \\ &= F^{01} & &= \gamma F^{02} & &= \gamma F^{03} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F'^{12} &= (\Lambda^1_0 \Lambda^2_k - \Lambda^1_k \Lambda^2_0) F^{0k} & F'^{13} &= (\Lambda^1_0 \Lambda^3_k - \Lambda^1_k \Lambda^3_0) F^{0k} & F'^{23} &= (\Lambda^2_0 \Lambda^3_k - \Lambda^2_k \Lambda^3_0) F^{0k} \\ &= -\gamma \beta \Lambda^2_k F^{0k} & &= -\gamma \beta \Lambda^3_k F^{0k} & &= 0 \\ &= -\gamma \beta F^{02} & &= -\gamma \beta F^{03} \end{aligned}$$

portanto os campos elétrico e magnético nesse referencial são dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(x_k x^k \right)^{-\frac{3}{2}} \left(x^1 \hat{\mathbf{i}} + \gamma x^2 \hat{\mathbf{j}} + \gamma x^3 \hat{\mathbf{k}} \right) \\ &= \frac{\gamma Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\gamma^2 (x' + vt')^2 + (y')^2 + (z')^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \left((x' + vt') \hat{\mathbf{i}} + y' \hat{\mathbf{j}} + z' \hat{\mathbf{k}} \right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{B}' &= \frac{\gamma v Q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left(x_k x^k \right)^{-\frac{3}{2}} \left(x^3 \hat{\mathbf{j}} - x^2 \hat{\mathbf{k}} \right) \\ &= \frac{\mu_0 \gamma v Q}{4\pi} \left(\gamma^2 (x' + vt')^2 + (y')^2 + (z')^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \left(z' \hat{\mathbf{j}} - y' \hat{\mathbf{k}} \right). \end{aligned}$$