4300337 - Lista de exercícios 2

Louis Bergamo Radial
8992822

18 de março de 2024

Exercício 1

Para que um corpo de massa m tenha uma energia cinética K, sua velocidade v satisfaz

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}-1\right)mc^2 = K.$$

Isolando v, obtemos

$$v = c\sqrt{1-\left(\frac{1}{\frac{K}{mc^2}+1}\right)^2}.$$

Assim, para que uma partícula tenha energia cinética igual a sua energia de repouso, sua velocidade é

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2}c.$$

Pelo mesmo cálculo, para que uma bola de canhão de massa $m = 1\,\mathrm{kg}$ tenha a mesma energia cinética que um próton, de massa $m_p \approx 1.673\times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$, de um raio cósmico em movimento com fator de Lorentz $\gamma = 10^{11}$, sua velocidade deve ser

$$\begin{aligned}
v &= c\sqrt{1-\left(\frac{1}{\frac{(\gamma-1)m_p c^2}{mc^2}+1}\right)^2}\\
&= c\sqrt{1-\left(\frac{1}{\frac{(\gamma-1)m_p}{m}+1}\right)^2}\\
&\approx 5.483\,\mathrm{m\,s^{-1}}.
\end{aligned}$$

Exercício 2

No referencial do centro de massa, o 4-momento do sistema é dado por

$$P^\mu = \left(m_1c^2, \vec{0}\right)^\mu,$$

visto que antes do decaimento a partícula de massa m_1 está em repouso neste referencial. Notaremos por $(P_{m_i})^\mu$ a componente (neste caso contravariante) μ do 4-momento da partícula de massa m_i. Por conservação do 4-momento, temos

$$(P_{m_1})^\mu = (P_{m_2})^\mu + (P_{m_3})^\mu,$$

com P_{m_1} dado acima.

Assim, temos

$$\begin{aligned}
(P_{m_2})_\mu (P_{m_2})^\mu &= (P_{m_1}-P_{m_3})_\mu (P_{m_1}-P_{m_3})^\mu\\
&= (P_{m_1})_\mu (P_{m_1})^\mu + (P_{m_2})_\mu (P_{m_2})^\mu - 2(P_{m_1})_\mu (P_{m_3})^\mu.
\end{aligned}$$

Como $(P_{m_i})_\mu (P_{m_i})^\mu = -m_i^2 c^2$, obtemos a energia da partícula de massa m_3

$$-m_2^2 c^2 = -m_1^2 c^2 - m_3^2 c^2 + 2m_1 E_3 \implies E_3 = \frac{m_1^2 - m_2^2 + m_3^2}{2m_1} c^2.$$

Pelo mesmo argumento, obtemos a energia da outra partícula

$$-m_3^2 c^2 = -m_1^2 c^2 - m_2 c^2 + 2m_1 E_2 \implies E_2 = \frac{m_1^2 + m_2^2 - m_3^2}{2m_1} c^2.$$

Exercício 3

Exercício 4

Consideremos a força $F^i = \frac{\mathrm{d}p^i}{\mathrm{d}\tau}$. Em notação vetorial temos $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$, donde segue

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}\tau} m\vec{v} + \gamma m \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}\tau} \\
&= \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} m\vec{v} + \gamma m \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} \\
&= \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} \gamma m \vec{v} + \gamma^2 m \vec{a},
\end{aligned}$$

onde $\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$ é a 3-aceleração da partícula.

Notemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} &= \left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}} \frac{v}{c^2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\gamma^3}{c^2}\langle \vec{v}, \vec{a}\rangle,
\end{aligned}$$

onde foi utilizada a relação

$$2v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \vec{v}, \vec{v}\rangle = 2\langle \vec{v}, \vec{a}\rangle.$$

Dessa forma, obtemos

$$\vec{F} = \gamma^2 m \left(\vec{a} + \frac{\gamma^2}{c^2}\langle \vec{v}, \vec{a}\rangle \vec{v}\right).$$

No caso particular em que a força é paralela à velocidade, devemos ter que a aceleração é também paralela à velocidade. Assim, $\vec{v} = v\hat{n}$, $\vec{a} = a\hat{n}$ e $\vec{F} = F\hat{n}$ para algum vetor unitário $\hat{n}$, então

$$\begin{aligned}
F &= \gamma^2 m a \left(1 + \gamma^2 \frac{v^2}{c^2}\right) \\
&= \gamma^4 m a.
\end{aligned}$$

Exercício 5

Utilizando a notação $\mu \longrightarrow \mu'$ para denotar uma transformação de Lorentz das componentes de um quadrivetor,

$$x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_{\mu} x^\mu \quad \text{e} \quad x_{\mu'} = \Lambda^{\mu}{}_{\mu'} x_{\mu'},$$

temos que as componentes $T^{\mu_1,\dots,\mu_p}{}_{\nu_1,\dots,\nu_q}$ de um tensor tipo (p, q) se transformam de acordo com

$$T^{\mu_1',\dots,\mu_p'}{}_{\nu_1',\dots,\nu_q'} = \Lambda^{\mu_1'}{}_{\mu_1} \cdots \Lambda^{\mu_p'}{}_{\mu_p} \Lambda^{\nu_1}{}_{\nu_1'} \cdots \Lambda^{\nu_q}{}_{\nu_q'} T^{\mu_1,\dots,\mu_p}{}_{\nu_1,\dots,\nu_q}.$$

Dada uma base $\hat{e}_{(\mu)}$, temos

$$x = x^\mu \hat{e}_{(\mu)} = x^{\mu'} \hat{e}_{(\mu')},$$

isto é, uma mudança de referencial não muda o vetor em si, apenas os valores das componentes. Assim,

$$x^\mu \hat{e}_{(\mu)} = \Lambda^{\mu'}{}_\nu x^\nu \Lambda^\sigma{}_{\mu'} \hat{e}_{(\sigma)} \implies \Lambda^\sigma{}_{\mu'} \Lambda^{\mu'}{}_\nu = \delta^\sigma{}_\nu.$$

Pelo mesmo argumento para o espaço dual, obtemos

$$\Lambda^{\sigma'}{}_\mu \Lambda^\mu{}_{\nu'} = \delta^{\sigma'}{}_{\nu'}.$$

Podemos mostrar a invariância do intervalo $\mathrm{d}s^2 = \eta_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu$. Pela transformações de tensores, temos

$$\begin{aligned}
\eta_{\mu'\nu'}\,\mathrm{d}x^{\mu'}\,\mathrm{d}x^{\nu'} &= \Lambda^\mu{}_{\mu'}\Lambda^\nu{}_{\nu'}\eta_{\mu\nu}\Lambda^{\mu'}{}_\sigma\,\mathrm{d}x^\sigma \Lambda^{\nu'}{}_\rho\,\mathrm{d}x^\rho \\
&= \delta^\mu{}_\sigma \delta^\nu{}_\rho \eta_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\sigma\,\mathrm{d}x^\rho \\
&= \eta_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\sigma\,\mathrm{d}x^\rho \\
&= \mathrm{d}s^2.
\end{aligned}$$

Podemos mostrar também a invariância do Delta de Kronecker $\delta^\mu{}_\nu$. Consideremos $\delta^{\mu'}{}_{\nu'} = \eta^{\mu'\sigma'}\eta_{\sigma'\nu'}$, então

$$\begin{aligned}
\delta^{\mu'}{}_{\nu'} &= \Lambda^{\mu'}{}_\alpha \Lambda^{\sigma'}{}_\beta \eta^{\alpha\beta} \Lambda^\rho{}_{\sigma'} \Lambda^\lambda{}_{\nu'} \eta_{\rho\lambda} \\
&= \Lambda^\rho{}_{\sigma'} \Lambda^{\sigma'}{}_\beta \Lambda^{\mu'}{}_\alpha \Lambda^\lambda{}_{\nu'} \eta^{\alpha\beta} \eta_{\rho\lambda} \\
&= \delta^\rho{}_\beta \Lambda^{\mu'}{}_\alpha \Lambda^\lambda{}_{\nu'} \eta^{\alpha\beta} \eta_{\rho\lambda} \\
&= \Lambda^{\mu'}{}_\alpha \Lambda^\lambda{}_{\nu'} \eta^{\alpha\rho} \eta_{\rho\lambda} \\
&= \Lambda^{\mu'}{}_\alpha \Lambda^\lambda{}_{\nu'} \delta^\alpha{}_\lambda \\
&= \Lambda^{\mu'}{}_\alpha \Lambda^\alpha{}_{\nu'} \\
&= \delta^{\mu'}{}_{\nu'}
\end{aligned}$$

Exercício 6

Exercício 7

Exercício 8