

4300337 - Lista de Exercícios VI

Louis Bergamo Radial
8992822

30 de junho de 2024

Exercício 1

Para um oscilador harmônico de massa $m = 0.2$ kg, amplitude de movimento $A = 1$ m, e frequência de oscilação $f = \frac{\omega}{2\pi} = 5$ Hz, temos a densidade de energia dada por

$$\rho(t, \mathbf{x}) = mc^2 \delta(x - A \cos \omega t) \delta(y) \delta(z).$$

A uma distância $D = 10$ m $\gg A$, podemos utilizar a aproximação de zona de radiação e determinar o momento de quadrupolo $q_{ij}(t)$, dado por

$$q_{ij}(t) = \int_{\Sigma} d^3x \left(x_i x_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \|\mathbf{x}\|^2 \right) \rho(t, \mathbf{x}),$$

para obter a perturbação na métrica h_{ij} a partir de

$$h_{ij}(t, \mathbf{x}) = \frac{2G}{Dc^6} \ddot{q}_{ij}(t_R),$$

onde $t_R = t - \frac{D}{c}$ é o tempo retardado.

Notemos que pela expressão da densidade, as componentes q_{ij} com índices distintos e com um índice igual a dois ou três se anulam, isto é, $q_{12} = q_{13} = q_{23} = 0$, de modo que resta apenas determinar os termos q_{11} , q_{22} , e q_{33} . Temos

$$q_{11}(t) = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} d^3x (x^2 - y^2 - z^2) \rho(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{2} mc^2 A^2 \cos^2 \omega t = \frac{1 + \cos 2\omega t}{4} mc^2 A^2$$

$$q_{22}(t) = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} d^3x (y^2 - x^2 - z^2) \rho(t, \mathbf{x}) = -\frac{1}{2} mc^2 A^2 \cos^2 \omega t = -q_{11}(t)$$

$$q_{33}(t) = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} d^3x (z^2 - x^2 - y^2) \rho(t, \mathbf{x}) = -\frac{1}{2} mc^2 A^2 \cos^2 \omega t = -q_{11}(t),$$

portanto a perturbação da métrica é dada por

$$h_{11} = -\frac{2mA^2\omega^2 G}{Dc^4} \cos(2\omega t_R) \quad \text{e} \quad h_{22} = h_{33} = \frac{2mA^2\omega^2 G}{Dc^4} \cos(2\omega t_R),$$

e vemos que a frequência de oscilação é $2f = 10$ Hz. Tomando a raiz do valor quadrático médio das perturbações para obter os estresses, obtemos

$$h_+ = \frac{\sqrt{2}mA^2\omega^2 G}{Dc^4} = 2.307 \times 10^{-43} \quad \text{e} \quad h_{\times} = 0.$$

A potência irradiada pela onda gravitacional é dada por

$$P = \frac{G}{5c^9} \left\langle \frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \frac{d^3 Q^{ij}}{dt^3} \right\rangle,$$

onde Q_{ij} é o momento de quadrupolo reduzido,

$$Q_{ij} = q_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta^{kl} q_{kl}.$$

Notando que q_{ij} é nulo para todo $i \neq j$ e que $q_{22} = q_{33} = -q_{11}$, temos

$$Q_{11} = \frac{4}{3} q_{11}, \quad Q_{22} = -\frac{2}{3} q_{11}, \quad \text{e} \quad Q_{33} = -\frac{2}{3} q_{11}$$

como as únicas componentes não nulas. Como $\ddot{q}_{11} = -4\omega^2 q_{11}$, temos $\ddot{\ddot{q}}_{11} = -4\omega^2 \dot{q}_{11}$, logo

$$\frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \frac{d^3 Q^{ij}}{dt^3} = \frac{8}{3} \left(\frac{d^3 q_{11}}{dt^3} \right)^2 = \frac{64}{3} \omega^4 (\dot{q}_{11})^2 = \frac{16}{3} m^2 c^4 A^4 \omega^6 \sin^2 2\omega t.$$

Deste modo, a potência irradiada é

$$P = \frac{8m^2 A^4 \omega^6 G}{15c^5} = 5.653 \times 10^{-46} \text{ W}.$$

Exercício 2

Consideremos um sistema binário com massas m_1 e m_2 nas posições \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 em relação ao centro de massa do sistema. Seja $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ o vetor de posição relativa, então

$$\mathbf{r}_1 = \frac{\mu}{m_1} \mathbf{r} \quad \text{e} \quad \mathbf{r}_2 = -\frac{\mu}{m_2} \mathbf{r},$$

onde $\mu = \frac{m_1 m_2}{M}$ é a massa reduzida do sistema, com $M = m_1 + m_2$ a massa total. Em primeira aproximação, tomamos a trajetória da posição relativa como uma órbita circular ao redor do centro de massa com frequência angular constante ω ,

$$\mathbf{r} = r [\cos(\omega t) \mathbf{e}_x + \sin(\omega t) \mathbf{e}_y],$$

satisfazendo a terceira lei de Kepler,

$$r^3 = \frac{GM}{\omega^2}.$$

Desta forma, a densidade de energia é

$$\begin{aligned} \rho(t, \mathbf{x}) &= m_1 c^2 \delta(\mathbf{x} - r_1 [\cos(\omega t) \mathbf{e}_x + \sin(\omega t) \mathbf{e}_y]) + m_2 c^2 \delta(\mathbf{x} + r_2 [\cos(\omega t) \mathbf{e}_x + \sin(\omega t) \mathbf{e}_y]) \\ &= [m_1 c^2 \delta(x - r_1 \cos \omega t) \delta(y - r_1 \sin \omega t) + m_2 c^2 \delta(x + r_2 \cos \omega t) \delta(y + r_2 \sin \omega t)] \delta(z), \end{aligned}$$

com $r_1 = \|\mathbf{r}_1\|$ e $r_2 = \|\mathbf{r}_2\|$. Os componentes do quadrupolo físico $q_{ij}(t)$ são dados por

$$q_{ij}(t) = \int_{\Sigma} d^3x \left(x_i x_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \|\mathbf{x}\|^2 \right) \rho(t, \mathbf{x}),$$

portanto $q_{i3} = 0$, exceto para $i = 3$. Determinemos os componentes restantes q_{11}, q_{12}, q_{22} , e q_{33} ,

$$\begin{aligned} q_{11}(t) &= \frac{1}{2} \int_{\Sigma} d^3x (x^2 - y^2 - z^2) \rho(t, \mathbf{x}) & q_{12}(t) &= \int_{\Sigma} d^3x xy \rho(t, \mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{2} [m_1 c^2 r_1^2 + m_2 c^2 r_2^2] (\cos^2 \omega t - \sin^2 \omega t) & &= [m_1 c^2 r_1^2 + m_2 c^2 r_2^2] \cos(\omega t) \sin(\omega t) \\ &= \frac{1}{2} \left[m_1 \left(\frac{\mu r}{m_1} \right)^2 + m_2 \left(\frac{\mu r}{m_2} \right)^2 \right] c^2 \cos(2\omega t) & &= \frac{1}{2} \left[m_1 \left(\frac{\mu r}{m_1} \right)^2 + m_2 \left(\frac{\mu r}{m_2} \right)^2 \right] c^2 \sin(2\omega t) \\ &= \frac{1}{2} \mu c^2 r^2 \cos(2\omega t) & &= \frac{1}{2} \mu c^2 r^2 \sin(2\omega t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_{22}(t) &= \frac{1}{2} \int_{\Sigma} d^3x (y^2 - x^2 - z^2) \rho(t, \mathbf{x}) & q_{33}(t) &= \frac{1}{2} \int_{\Sigma} d^3x (z^2 - x^2 - y^2) \rho(t, \mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{2} [m_1 c^2 r_1^2 + m_2 c^2 r_2^2] (\sin^2 \omega t - \cos^2 \omega t) & &= -\frac{1}{2} m_1 c^2 r_1^2 - \frac{1}{2} m_2 c^2 r_2^2 \\ &= -q_{11}(t), & &= -\frac{1}{2} \mu c^2 r^2. \end{aligned}$$

Assim, na aproximação de zona de radiação $R \gg r$, a perturbação da métrica é dada por

$$h_{ij}(t, \mathbf{x}) = \frac{2G}{Rc^6} \ddot{q}_{ij}(t_R), \quad \text{com} \quad t_R = t - \frac{R}{c},$$

de forma que

$$h_{11} = -\frac{4G\mu r^2 \omega^2}{Rc^4} \cos(2\omega t_R) \quad \text{e} \quad h_{12} = -\frac{4G\mu r^2 \omega^2}{Rc^4} \sin(2\omega t_R)$$

e podemos ver que a frequência da onda gravitacional é $f_{\text{GW}} = \frac{\omega}{\pi}$. Tomando a raiz do valor quadrático médio destas componentes, obtemos as deformações induzidas h_+ , h_\times e o estresse h

$$h_+ = \sqrt{\langle h_{11}^2 \rangle} = \frac{2\sqrt{2}G\mu r^2 \omega^2}{Rc^4} \quad \text{e} \quad h_\times = \sqrt{\langle h_{12}^2 \rangle} = \frac{2\sqrt{2}G\mu r^2 \omega^2}{Rc^4} \implies h = \frac{\sqrt{h_+^2 + h_\times^2}}{2} = \frac{2G\mu r^2 \omega^2}{Rc^4}.$$

Levando em conta que a energia orbital do sistema binário é

$$E_{\text{orb}} = -\frac{GM\mu}{2r}$$

e que sua variação deve ser por conta da potência irradiada pelas ondas gravitacionais, devemos ter

$$\begin{aligned} \frac{dE_{\text{orb}}}{dt} = -P &\implies \frac{GM\mu}{2r^2} \dot{r} = -\frac{32G\mu^2 r^4 \omega^6}{5c^5} \\ &\implies 3r^2 \dot{r} = -\frac{192\mu r^8 \omega^6}{5Mc^5}. \end{aligned}$$

Derivando a terceira lei de Kepler, obtemos

$$\begin{aligned} r^3 = \frac{GM}{\omega^2} &\implies -\frac{2GM}{\omega^3} \dot{\omega} = -\frac{192\mu \omega^6}{5Mc^5} \left(\frac{GM}{\omega^2} \right)^{\frac{8}{3}} \\ &\implies \dot{\omega} = \frac{96G^{\frac{5}{3}}}{5c^5} \mu M^{\frac{2}{3}} \omega^{\frac{11}{3}}. \end{aligned}$$

Como vimos, a frequência da onda gravitacional é $f_{\text{GW}} = \frac{\omega}{\pi}$, então

$$\begin{aligned} \dot{f}_{\text{GW}} &= \frac{96G^{\frac{5}{3}}\pi^{\frac{8}{3}}}{5c^5} \mu M^{\frac{2}{3}} f_{\text{GW}}^{\frac{11}{3}} \\ &= \alpha \mathcal{M}^{\frac{5}{3}} f_{\text{GW}}^{\frac{11}{3}}, \end{aligned}$$

onde a constante proporcionalidade α e a *chirp mass* \mathcal{M} são dadas por

$$\alpha = \frac{96G^{\frac{5}{3}}\pi^{\frac{8}{3}}}{5c^5} \quad \text{e} \quad \mathcal{M} = \mu^{\frac{3}{5}} M^{\frac{2}{5}} = \frac{(m_1 m_2)^{\frac{3}{5}}}{(m_1 + m_2)^{\frac{1}{5}}}.$$

Podemos utilizar a *chirp mass* para reescrever o estresse h obtido,

$$h = \frac{2G\mu\omega^2}{Rc^4} \left(\frac{GM}{\omega^2} \right)^{\frac{2}{3}} = \frac{2G}{Rc^2} \left(\frac{\pi G}{c^3} f_{\text{GW}} \right)^{\frac{2}{3}} \mathcal{M}^{\frac{5}{3}} = \frac{2G\mathcal{M}}{Rc^2} \left(\frac{\pi G}{c^3} \mathcal{M} f_{\text{GW}} \right)^{\frac{2}{3}}.$$

Exercício 3

Exercício 4

Relembremos o resultado obtido para os coeficientes da conexão de Levi-Civita no caso de uma métrica diagonal

$$\Gamma^\lambda_{\lambda\lambda} = \frac{\partial_\lambda g_{\lambda\lambda}}{2g_{\lambda\lambda}}, \quad \Gamma^\lambda_{\mu\lambda} = \frac{\partial_\mu g_{\lambda\lambda}}{2g_{\lambda\lambda}}, \quad \Gamma^\lambda_{\mu\mu} = -\frac{\partial_\lambda g_{\mu\mu}}{2g_{\lambda\lambda}}, \quad \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = 0,$$

em que não utilizamos a convenção de soma de Einstein, portanto não há nenhuma soma nos termos acima. Recordemos também que, utilizando a convenção de soma, vale

$$\Gamma^\mu_{\mu\nu} = \frac{\partial_\nu \sqrt{-g}}{\sqrt{-g}},$$

onde g é o determinante da métrica.

Consideremos a métrica dada por $ds^2 = -dt^2 + a^2(t) dx^i dx_i$, com $-g = a^6(t)$. Utilizando as expressões para os coeficientes da conexão, vemos que os termos $\Gamma^0_{0\lambda} = \Gamma^\lambda_{\lambda\lambda} = \Gamma^i_{\lambda\lambda} = \Gamma^i_{ij} = 0$, visto que estes termos envolvem derivadas em relação às coordenadas espaciais e que as componentes da métrica não têm dependência com essas variáveis. Resta apenas os coeficientes dados por

$$\Gamma^0_{ij} = a\dot{a}\delta_{ij} \quad \text{e} \quad \Gamma^i_{j0} = \frac{\dot{a}}{a}\delta^i_j,$$

onde $\dot{a} = \frac{da}{dt}$. Da expressão para o tensor de curvatura de Riemann em coordenadas locais,

$$R^\sigma_{\mu\rho\nu} = \partial_\rho \Gamma^\sigma_{\nu\mu} - \partial_\nu \Gamma^\sigma_{\rho\mu} + \Gamma^\sigma_{\rho\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\mu} - \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\rho\mu},$$

e das simetrias encontradas para os coeficientes da conexão, segue que o tensor de Ricci é

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= R^\sigma_{\mu\sigma\nu} = \partial_\sigma \Gamma^\sigma_{\nu\mu} - \partial_\nu \Gamma^\sigma_{\sigma\mu} + \Gamma^\sigma_{\sigma\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\mu} - \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\sigma\mu} \\ &= \partial_t \Gamma^0_{\nu\mu} - \delta_\nu^0 \partial_t \left(\frac{\partial_\mu \sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} \right) + \frac{\partial_\lambda \sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} \Gamma^\lambda_{\nu\mu} - \Gamma^0_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{0\mu} - \Gamma^i_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{i\mu} \\ &= \delta_\mu^m \delta_\nu^n \delta_{mn} \frac{d}{dt} (a\dot{a}) - \delta_\mu^0 \delta_\nu^0 \frac{d}{dt} \left(\frac{3\dot{a}}{a} \right) + \frac{3\dot{a}}{a} \delta_\mu^m \delta_\nu^n \delta_{mn} a\dot{a} - \Gamma^0_{\nu j} \Gamma^j_{0\mu} - \Gamma^i_{\nu 0} \Gamma^0_{i\mu} - \Gamma^i_{\nu j} \Gamma^j_{i\mu} \\ &= \delta_\mu^m \delta_\nu^n \delta_{mn} (4\dot{a}^2 + a\ddot{a}) - \delta_\mu^0 \delta_\nu^0 \left(\frac{3\ddot{a}}{a} - \frac{3\dot{a}^2}{a^2} \right) - \delta_\nu^n \delta_\mu^m \delta_{mn} \dot{a}^2 - \delta_\nu^n \delta_\mu^m \delta_{mn} \dot{a}^2 - \delta_\nu^0 \delta_\mu^0 \frac{3\dot{a}^2}{a^2} \\ &= \delta_\mu^m \delta_\nu^n \delta_{mn} (2\dot{a}^2 + a\ddot{a}) - \delta_\mu^0 \delta_\nu^0 \left(\frac{3\ddot{a}}{a} \right), \end{aligned}$$

isto é

$$R_{00} = -\frac{3\ddot{a}}{a}, \quad \text{e} \quad R_{ii} = a\ddot{a} + 2\dot{a}^2,$$

e todas as outras componentes nulas. Assim, o escalar de Ricci é dado por

$$\begin{aligned} R &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \frac{3\ddot{a}}{a} + 3 \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2}{a^2} \\ &= 6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right), \end{aligned}$$

logo o tensor de Einstein, $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$, tem suas componentes não nulas dadas por

$$G_{00} = 3 \frac{\dot{a}^2}{a^2} \quad \text{e} \quad G_{ii} = -2a\ddot{a} - \dot{a}^2.$$

Consideremos as equações de Einstein no vácuo com uma constante cosmológica positiva Λ ,

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0 \implies 3\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \Lambda = 0 \quad \text{e} \quad -2a\ddot{a} - \dot{a}^2 + \Lambda a^2 = 0.$$

Utilizando a primeira equação para eliminar o termo \dot{a}^2 na segunda equação, obtemos

$$-2a\left(\ddot{a} - \frac{\Lambda}{3}a\right) = 0.$$

Como $a \neq 0$ para que a métrica não seja singular, devemos ter que

$$a(t) = A \exp(Ht) + B \exp(-Ht),$$

onde $H = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}$ e $A, B \in \mathbb{R}$ são constantes não todas nulas. No caso particular de $B = 0$, a métrica seria, portanto,

$$ds^2 = -dt^2 + A^2 e^{2Ht} dx^i dx_i,$$

representando um Universo em expansão.

Neste caso, definimos o tempo conforme $\eta = -\frac{\exp(-Ht)}{H}$, que satisfaz $\dot{\eta} = -H\eta$, isto é,

$$dt = -\frac{d\eta}{H\eta} \implies dt^2 = \frac{d\eta^2}{H^2\eta^2}.$$

Deste modo, como $\exp(2Ht) = (H\eta)^{-2}$, temos

$$ds^2 = \frac{-d\eta^2 + dx^i dx_i}{H^2\eta^2},$$

se tomarmos $A = 1$.

Interpretando $-\frac{\Lambda}{\kappa}g_{\mu\nu}$ como o tensor de energia e momento $T_{\mu\nu}$ das equações de Einstein sem constante cosmológica, temos de

$$T^\mu_\nu = (\rho + p)U^\mu U_\nu + p\delta^\mu_\nu,$$

com $U^0 = H\eta$ e $U^i = 0$, que

$$\begin{aligned} \left(p + \frac{\Lambda}{\kappa}\right)\delta^\mu_\nu &= -(\rho + p)U^\mu U_\nu \\ &= (\rho + p)\delta^\mu_0 \delta^0_\nu. \end{aligned}$$

Recordando que $\Lambda = 3H^2$, obtemos

$$\rho = \frac{3H^2}{\kappa} \quad \text{e} \quad p = -\frac{3H^2}{\kappa},$$

isto é, uma constante cosmológica positiva pode ser interpretada como um fluido com pressão negativa.

Exercício 5

Para a métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker,

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\gamma_{ij} dx^i dx^j, \text{ com } \gamma_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{\left[1 + \frac{\kappa}{4}(x^2 + y^2 + z^2)\right]^2},$$

onde κ é a curvatura da seção espacial, o tensor de Einstein é dado por

$$G_{00} = 3\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 3\frac{\kappa}{a^2}, \quad G_{0i} = 0, \quad \text{e} \quad G_{ij} = -\left(2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\kappa}{a^2}\right)g_{ij},$$

e os coeficientes da conexão de Levi-Civita por

$$\Gamma^0_{ij} = a\dot{a}\gamma_{ij}, \quad \Gamma^i_{0j} = \frac{\dot{a}}{a}\delta^i_j, \quad \text{e} \quad \Gamma^k_{ij} = 2\kappa \frac{\delta_{ij}x^k - \delta_{ik}x^j - \delta_{jk}x^i}{4 + \kappa(x^2 + y^2 + z^2)},$$

com os outros coeficientes ou nulos ou dados pela simetria da conexão. Consideremos um tensor de energia e momento homogêneo e isotrópico

$$T^\mu_\nu = [\rho(t) + p(t)] U^\mu U_\nu + p(t)\delta^\mu_\nu,$$

com $U^0 = 1$ e $U^i = 0$, e calculemos a divergência $\nabla_\mu T^\mu_\nu$ explicitamente. Notemos que

$$\nabla_\mu U^\mu = \frac{\partial_\mu(\sqrt{-g}U^\mu)}{\sqrt{-g}} = \frac{\partial_t \sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} = 3\frac{\dot{a}}{a}$$

e que

$$U^\mu \nabla_\mu U_\nu = U^\mu \Gamma^\sigma_{\mu\nu} U_\sigma = -\Gamma^0_{0\nu} = 0,$$

logo a divergência procurada é dada por

$$\begin{aligned} \nabla_\mu T^\mu_\nu &= (\dot{\rho} + \dot{p})U_\nu + (\rho + p)(U_\nu \nabla_\mu U^\mu + U^\mu \nabla_\mu U_\nu) + \dot{p}\delta^0_\nu \\ &= \left[\dot{\rho} + \dot{p} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p)\right]U_\nu + \dot{p}\delta^0_\nu. \end{aligned}$$

Da conservação do tensor de energia e momento, $\nabla_\mu T^\mu_\nu = 0$, temos

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0,$$

equação a qual nos referiremos por equação de continuidade.

Considerando as equações de Einstein com constante cosmológica, $G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$, obtemos as equações de Friedmann,

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 3\frac{\kappa}{a^2} - \Lambda = 8\pi G\rho \quad \text{e} \quad -2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\kappa}{a^2} + \Lambda = 8\pi Gp.$$

Somando a primeira equação dividida por três à segunda equação, obtemos

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{\Lambda}{3} - \frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p),$$

que podemos substituir de volta na segunda equação, resultando em

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= \Lambda - \frac{\kappa}{a^2} - 8\pi Gp - 2\left[\frac{\Lambda}{3} - \frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p)\right] \\ &= \frac{\Lambda}{3} - \frac{\kappa}{a^2} + \frac{8\pi G}{3}\rho. \end{aligned}$$

Definindo $\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}$ e $\rho_\kappa = -\frac{3\kappa}{8\pi G}a^{-2}$ e utilizando o parâmetro de Hubble, $H = \frac{\dot{a}}{a}$, podemos escrever esta última equação como

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} (\rho_\Lambda + \rho_\kappa + \rho).$$

Nesta forma, podemos interpretar o efeito da constante cosmológica e da curvatura da seção espacial como densidades de energia fictícias.

Utilizando a equação de continuidade e a equação obtida a partir das equações de Friedmann, podemos obter a evolução do fator de escala para diferentes cenários de constante cosmológica, curvatura, e densidade de energia. Para um universo com apenas matéria fria, isto é, cuja pressão é desprezível, temos da equação de continuidade que

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0 \implies \rho = \rho_0 a^{-3}$$

portanto

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho_0}{3a^3} \implies \dot{a} = \sqrt{\frac{8\pi G\rho_0}{3a}} \implies a(t) \implies a(t) = \left[\frac{3}{2} \left(a_0 + t\sqrt{\frac{8\pi G\rho_0}{3}} \right) \right]^{\frac{2}{3}},$$

onde a_0 e ρ_0 são constantes de integração, logo a evolução do fator de escala é da ordem de $t^{\frac{2}{3}}$. Para um universo com apenas radiação, temos pela isotropia e homogeneidade que $p = \frac{1}{3}\rho$, portanto

$$\dot{\rho} + 4\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0 \implies \rho = \rho_0 a^{-4},$$

então

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho_0}{3a^4} \implies \dot{a} = \sqrt{\frac{8\pi G\rho_0}{3}}a^{-1} \implies a(t) \implies a(t) = \sqrt{2 \left(a_0 + t\sqrt{\frac{8\pi G\rho_0}{3}} \right)},$$

isto é, o fator de escala evolui como $t^{\frac{1}{2}}$. Para um universo com apenas constante cosmológica e/ou apenas curvatura espacial, segue da equação de continuidade que $\rho(t) = \rho_0$. Para um universo com apenas curvatura, temos

$$\dot{a} = \sqrt{-\kappa} \implies a(t) = t\sqrt{-\kappa} + a_0,$$

isto é, o fator de escala muda linearmente, e a curvatura espacial deve ser negativa. Para um universo com apenas constante cosmológica, vimos no exercício 4 que o fator de escala muda exponencialmente.

Para um universo com geometria plana com as abundâncias de matéria $\Omega_m = 0.3$ e energia escura $\Omega_\Lambda = 0.7$, a equação para o parâmetro de Hubble é

$$H^2 = H_0^2 (\Omega_\Lambda + \Omega_m a^{-3})$$

onde $H_0 \approx 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ é o parâmetro de Hubble atual. Notemos que

$$H = \frac{\dot{a}}{a} \implies \frac{da}{aH} = dt,$$

então integrando em $[0, 1]$ em a e em $[0, T]$ em t , temos a expressão para a idade do universo T ,

$$T = \frac{1}{H_0\sqrt{\Omega_m}} \int_0^1 \frac{da}{a\sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m} + a^{-3}}}.$$

Para calcular esta integral, consideremos a mudança de variáveis

$$\frac{\Omega_m}{\Omega_\Lambda} \xi^2 = a^3 \implies \frac{da}{a} = \frac{2 d\xi}{3\xi},$$

de modo que

$$T = \frac{2}{3H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}} \int_0^{\sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m}}} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 + 1}} = \frac{2}{3H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}} \operatorname{arsinh} \left(\sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m}} \right) \approx 13.467 \times 10^9 \text{ anos.}$$

Exercício 6

Para a métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker,

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\gamma_{ij} dx^i dx^j, \text{ com } \gamma_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{\left[1 + \frac{\kappa}{4}(x^2 + y^2 + z^2)\right]^2},$$

onde κ é a curvatura da seção espacial, o escalar de Ricci é dado por

$$R = 6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\kappa}{a^2} \right).$$

Para um fator de escala com comportamento do tipo $a(t) = a_0 t^n$, temos

$$R = 6 \left(\frac{n(n-1)}{t^2} + \frac{n^2}{t^2} + \frac{\kappa}{a_0^2 t^{2n}} \right) \implies \lim_{t \rightarrow 0^+} |R| = \infty,$$

isto é, $t \rightarrow 0$ é uma singularidade em que a curvatura do espaço-tempo é divergente, não importando o tipo de curvatura da seção espacial.