4300337 - Lista de exercícios 2

Louis Bergamo Radial
8992822

27 de março de 2024

Exercício 1

Para que um corpo de massa m tenha uma energia cinética K, sua velocidade v satisfaz

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}-1\right)mc^2 = K.$$

Isolando v, obtemos

$$v = c\sqrt{1-\left(\frac{1}{\frac{K}{mc^2}+1}\right)^2}.$$

Assim, para que uma partícula tenha energia cinética igual a sua energia de repouso, sua velocidade é

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2}c.$$

Pelo mesmo cálculo, para que uma bola de canhão de massa $m = 1\,\mathrm{kg}$ tenha a mesma energia cinética que um próton, de massa $m_p \approx 1.673 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$, de um raio cósmico em movimento com fator de Lorentz $\gamma = 10^{11}$, sua velocidade deve ser

$$\begin{aligned} v &= c\sqrt{1-\left(\frac{1}{\frac{(\gamma-1)m_pc^2}{mc^2}+1}\right)^2} \\ &= c\sqrt{1-\left(\frac{1}{\frac{(\gamma-1)m_p}{m}+1}\right)^2} \\ &\approx 5.483\,\mathrm{m\,s^{-1}}. \end{aligned}$$

Exercício 2

No referencial do centro de massa, o 4-momento do sistema é dado por

$$P^\mu = \left(m_1c^2, \vec{0}\right)^\mu,$$

visto que antes do decaimento a partícula de massa m_1 está em repouso neste referencial. Notaremos por $\left(P_{m_i}\right)^\mu$ a componente (neste caso contravariante) μ do 4-momento da partícula de massa m_i. Por conservação do 4-momento, temos

$$\left(P_{m_1}\right)^\mu = \left(P_{m_2}\right)^\mu + \left(P_{m_3}\right)^\mu,$$

com P_{m_1} dado acima.

Assim, temos

$$\begin{aligned} \left(P_{m_2}\right)_\mu \left(P_{m_2}\right)^\mu &= \left(P_{m_1} - P_{m_3}\right)_\mu \left(P_{m_1} - P_{m_3}\right)^\mu \\ &= \left(P_{m_1}\right)_\mu \left(P_{m_1}\right)^\mu + \left(P_{m_2}\right)_\mu \left(P_{m_2}\right)^\mu - 2\left(P_{m_1}\right)_\mu \left(P_{m_3}\right)^\mu. \end{aligned}$$

Como $\left(P_{m_i}\right)_\mu \left(P_{m_i}\right)^\mu = -m_i^2c^2$, obtemos a energia da partícula de massa m_3

$$-m_2^2c^2 = -m_1^2c^2 - m_3^2c^2 + 2m_1E_3 \implies E_3 = \frac{m_1^2 - m_2^2 + m_3^2}{2m_1}c^2.$$

Pelo mesmo argumento, obtemos a energia da outra partícula

$$-m_3^2c^2 = -m_1^2c^2 - m_2c^2 + 2m_1E_2 \implies E_2 = \frac{m_1^2 + m_2^2 - m_3^2}{2m_1}c^2.$$

Exercício 3

O processo de propulsão certamente deve respeitar a conservação de energia e momento, neste caso, temos

$$d(\gamma mv) = -dp \quad \text{e} \quad d(\gamma mc^2) = cdp,$$

onde p é o momento do fóton. Desta forma, temos

$$d\left(\gamma mc + \gamma mv\right) = 0.$$

Notemos que

$$d\gamma = \gamma^3\frac{v}{c^2}dv,$$

portanto

$$\gamma(v+c)dm + m\gamma\left(\gamma^2\frac{v(v+c)}{c^2} + 1\right)dv = 0.$$

Dividindo por $\gamma m(v+c)$, obtemos

$$\frac{dm}{m} + \frac{\gamma^2}{c}dv = 0.$$

Em termos de $\beta = \frac{v}{c}$, temos

$$\frac{dm}{m} + \frac{d\beta}{1-\beta^2} = 0.$$

Se o foguete parte do repouso com massa inicial M, temos

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{m}{M}\right) &= -\int_0^\beta \frac{\mathrm{d}\xi}{1-\xi^2} \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^\beta \left(\frac{1}{\xi+1} - \frac{1}{\xi-1}\right)\mathrm{d}\xi \\
&= -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\beta+1}{1-\beta}\right) \\
&= \ln\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}.
\end{aligned}$$

Desse modo, o foguete tem massa

$$m = M\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

quando sua velocidade é igual a βc.

Se $\sigma = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\tau}$ é a taxa em que o foguete converte massa em fótons no referencial instantaneamente de repouso do foguete, então a taxa no referencial terreste é $\frac{\sigma}{\gamma} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$. Neste caso, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma}{M} &= \gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \\
&= -\gamma\frac{\frac{1}{(1+\beta)^2}}{\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}}\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} \\
&= -\frac{1}{(1+\beta)^2(1-\beta)}\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t},
\end{aligned}$$

isto é, uma equação diferencial a variáveis separáveis,

$$-\frac{\sigma}{M}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}\beta}{(1+\beta)^2(1-\beta)}.$$

Integrando, obtemos

$$\begin{aligned} t &= -\frac{M}{\sigma}\int_0^\beta \frac{\mathrm{d}\xi}{(1+\xi)^2(1-\xi)} \\ &= -\frac{M}{4\sigma}\int_0^\beta \left(\frac{2}{(1+\xi)^2} + \frac{1}{1+\xi} - \frac{1}{\xi-1}\right)\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{M}{4\sigma}\left[2(1+\xi)^{-1} + \ln\left(\frac{1-\xi}{1+\xi}\right)\right]_0^\beta \\ &= \frac{M}{4\sigma}\left[-\frac{2\beta}{1+\beta} + \ln\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)\right]. \end{aligned}$$

Exercício 4

Consideremos a força $F^i = \frac{\mathrm{d}p^i}{\mathrm{d}t}$. Em notação vetorial temos $\vec{p} = \gamma m\vec{v}$, donde segue

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}m\vec{v} + \gamma m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}m\vec{v} + \gamma m\vec{a}, \end{aligned}$$

onde $\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$ é a 3-aceleração da partícula.

Notemos que

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} &= \left[1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}}\frac{v}{c^2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\gamma^3}{c^2}\langle\vec{v},\vec{a}\rangle, \end{aligned}$$

onde foi utilizada a relação

$$2v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\vec{v},\vec{v}\rangle = 2\langle\vec{v},\vec{a}\rangle.$$

Dessa forma, obtemos

$$\vec{F} = \gamma m\left(\vec{a} + \frac{\gamma^2}{c^2}\langle\vec{v},\vec{a}\rangle\vec{v}\right).$$

No caso particular em que a força é paralela à velocidade, devemos ter que a aceleração é também paralela à velocidade. Assim, $\vec{v} = v\hat{n}$, $\vec{a} = a\hat{n}$ e $\vec{F} = F\hat{n}$ para algum vetor unitário $\hat{n}$, então

$$\begin{aligned} F &= \gamma ma\left(1 + \gamma^2\frac{v^2}{c^2}\right) \\ &= \gamma^3 ma. \end{aligned}$$

Como um exemplo, tomemos uma partícula de carga q com velocidade $\vec{v} = v\hat{x}$ que parte do repouso na origem num campo uniforme $\vec{E} = E\hat{x}$. Assim,

$$qE = \gamma^3 ma.$$

Notemos que isso é uma equação diferencial a variáveis separáveis

$$\left[1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}v = \frac{qE}{m}\mathrm{d}t \implies \frac{v}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}^2\right)}} = \frac{qEt}{m}.$$

Resolvendo para v, obtemos

$$v^2 = \frac{1}{\left(\frac{m}{qEt}\right)^2 + \left(\frac{1}{c}\right)^2} \implies v = \sqrt{\frac{c^2}{\left(\frac{mc}{qEt}\right)^2 - 1}}.$$

No caso particular em que a força é ortogonal à velocidade, devemos ter

$$\begin{aligned} \langle \vec{F}, \vec{v} \rangle = 0 &\implies \langle \vec{a}, \vec{v} \rangle \left(1 + \gamma^2\beta^2\right) = 0 \\ &\implies \langle \vec{a}, \vec{v} \rangle = 0, \end{aligned}$$

de modo que

$$\vec{F} = \gamma m \vec{a}.$$

Como um exemplo, tomemos uma partícula de carga q com velocidade $\vec{v} = v\hat{\varphi}$ contida no plano xy que se move num campo magnético uniforme $\vec{B} = B\hat{z}$. Assim,

$$\begin{aligned} \gamma m \vec{a} = q\vec{v} \times \vec{B} &\implies -\gamma m v \dot{\varphi} \hat{r} = qvB\hat{r} \\ &\implies \dot{\varphi} = -\frac{qB}{m\gamma}, \end{aligned}$$

portanto a frequência f de oscilação do movimento orbital é

$$f = \frac{qB}{2\pi m}\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}.$$

Exercício 5

A transformação de Lorentz de das componentes de um quadrivetor é dada por

$$x'^{\nu} = \Lambda^{\nu}{}_{\mu} x^{\mu} \quad \text{e} \quad x'_{\nu} = \Lambda_{\nu}{}^{\mu} x_{\mu},$$

então temos que as componentes $T^{\mu_1,\dots,\mu_p}{}_{\nu_1,\dots,\nu_q}$ de um tensor tipo (p,q) se transformam de acordo com

$$T'^{\alpha_1,\dots,\alpha_p}{}_{\beta_1,\dots,\beta_q} = \Lambda^{\alpha_1}{}_{\mu_1} \cdots \Lambda^{\alpha_p}{}_{\mu_p} \Lambda^{\nu_1}{}_{\beta_1} \cdots \Lambda^{\nu_q}{}_{\beta_q} T^{\mu_1,\dots,\mu_p}{}_{\nu_1,\dots,\nu_q}.$$

Dadas bases $\hat{e}_{\mu}$ e $\hat{e}'_{\nu}$, temos

$$x = x^{\mu}\hat{e}_{\mu} = x'^{\nu}\hat{e}'_{\nu},$$

isto é, uma mudança de referencial não muda o vetor em si, apenas os valores das componentes. Assim,

$$x = \left(\Lambda^{\nu}{}_{\sigma} x^{\sigma}\right)\left(\Lambda_{\nu}{}^{\rho}\hat{e}_{\rho}\right) \implies \Lambda^{\nu}{}_{\sigma}\Lambda_{\nu}{}^{\rho} = \delta^{\rho}{}_{\sigma}.$$

Podemos mostrar a invariância do intervalo $\mathrm{d}s^2 = \eta_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x^{\alpha}\,\mathrm{d}x^{\beta}$. Pela transformações de tensores, temos

$$\begin{aligned} \eta'_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x'^{\mu}\,\mathrm{d}x'^{\nu} &= \left(\Lambda_{\mu}{}^{\alpha}\Lambda_{\nu}{}^{\beta}\eta_{\alpha\beta}\right)\left(\Lambda^{\mu}{}_{\sigma}\,\mathrm{d}x^{\sigma}\right)\left(\Lambda^{\nu}{}_{\rho}\,\mathrm{d}x^{\rho}\right) \\ &= \delta^{\alpha}{}_{\sigma}\delta^{\beta}{}_{\rho}\eta_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x^{\sigma}\,\mathrm{d}x^{\rho} \\ &= \eta_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x^{\alpha}\,\mathrm{d}x^{\beta} \\ &= \mathrm{d}s^2. \end{aligned}$$

Consideremos $\delta^{\mu}{}_{\nu} = \eta^{\mu\sigma}\eta_{\sigma\nu}$, então

$$\begin{aligned} \delta'^{\alpha}{}_{\beta} &= \Lambda^{\alpha}{}_{\mu}\Lambda_{\beta}{}^{\nu}\delta^{\mu}_{\nu} \\ &= \Lambda^{\alpha}{}_{\nu}\Lambda_{\beta}{}^{\nu} \\ &= \delta^{\alpha}{}_{\beta}, \end{aligned}$$

isto é, o delta de Kronecker é invariante por transformações de Lorentz.

Consideremos o símbolo de Levi-Civita $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$, então

$$\begin{aligned} \epsilon'^{\alpha\beta\kappa\lambda} &= \Lambda^{\alpha}{}_{\mu}\Lambda^{\beta}{}_{\nu}\Lambda^{\kappa}{}_{\rho}\Lambda^{\lambda}_{\sigma}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \\ &= \det(\Lambda)\epsilon^{\alpha\beta\kappa\lambda}. \end{aligned}$$

Assim, o símbolo de Levi-Civita é invariante por transformações do grupo restrito de Lorentz.

Exercício 6

Exercício 7

Exercício 8