4300337 - Lista de exercícios 1

Louis Bergamo Radial

10 de março de 2024

Exercício 1

No referencial K, a partícula se move com velocidade $v = 0.998c$ em direção ao chão. Assim, se a produção do múon ocorre à altitude $h \approx 15\,\mathrm{km}$, então o tempo t transcorrido desde o tempo de produção até a chegada da partícula no chão é

$$t = \frac{h}{v} \approx 5.0 \times 10^{-5}\,\mathrm{s}.$$

Se $\tau' = 2.2 \times 10^{-6}\,\mathrm{s}$ é a vida média no referencial K' de repouso do múon, então no referencial K, a vida média é

$$\tau = \gamma(v)\tau' = 3.5 \times 10^{-5}\,\mathrm{s},$$

em que $\gamma(v) = \left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$. Assim, a probabilidade da detecção de um múon no chão neste referencial é

$$p = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \approx 0.24.$$

No referencial K', o chão se move em direção à partícula com velocidade v. Pela contração de Lorentz, se a distância percorrida no referencial K é h, no referencial K' o chão se move uma distância h' dada por

$$h' = \frac{h}{\gamma(v)} \approx 0.95\,\mathrm{km}.$$

Dessa forma, o tempo t' transcorrido desde a produção do múon e a chegada do chão ao múon é

$$t' = \frac{h'}{v} \approx 3.2 \times 10^{-6}\,\mathrm{s}.$$

Assim, a probabilidade da detecção de um múon no chão neste referencial é

$$p' = \exp\left(-\frac{t'}{\tau'}\right) \approx 0.24,$$

o mesmo valor obtido no referencial K.

Exercício 2

Sejam t_1 o instante em que o jato é emitido e $t_2 = t_1 + \Delta t$ um instante posterior. Nestes instantes, sinais luminosos são emitidos em direção ao observador em O, que os recebe nos instantes $t'_1 = t_1 + \frac{r + v\Delta t\cos\theta}{c}$ e $t'_2 = t_2 + \frac{r}{c}$. Deste modo, os sinais são recebidos em O em um intervalo $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ dado por

$$\Delta t' = \Delta t\,(1 - \beta\cos\theta)\,,$$

em que $\beta = \frac{v}{c}$. A distância percorrida entre as emissões dos sinais luminosos é $v\Delta t\sin\theta$, de modo que a velocidade aparente $v_{\text{ap}} = \frac{v\Delta t\sin\theta}{\Delta t'}$ medida em O é

$$v_{\text{ap}} = \frac{\beta\sin\theta}{1 - \beta\cos\theta}c.$$

O ângulo ϕ que maximiza a velocidade aparente satisfaz

$$\left(\frac{\partial v_{\text{ap}}}{\partial\theta}\right)_{\theta=\phi} = 0 \iff \frac{\beta\cos\phi\,(1 - \beta\cos\phi) - \beta^2\sin^2\phi}{(1 - \beta\cos\phi)^2} = 0,$$

donde segue

$$\cos\phi = \beta.$$

Neste caso, $\sin\phi = \sqrt{1 - \beta^2}$, então

$$v_{\text{ap}}^{\text{max}} = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}c$$

é a velocidade aparente máxima. Ainda, para $\beta > \frac{1}{\sqrt{2}}$, a velocidade aparente máxima é maior do que a velocidade da luz. De fato,

$$\begin{aligned}\beta > \frac{1}{\sqrt{2}} &\implies 2\beta^2 > 1\\ &\implies \beta^2 > 1 - \beta^2\\ &\implies \beta > \sqrt{1 - \beta^2}\\ &\implies v_{\text{ap}}^{\text{max}} > c.\end{aligned}$$

Exercício 3

Exercício 4

Seja S o referencial do observador O, em que os observadores A e B se movem com velocidade v e u, respectivamente. Seja S' o referencial de A, se $(ct, x, 0, 0)$ é a 4-posição de B em S, com $x = ut$, então $(ct', x', 0, 0)$ é a 4-posição de B em S', em que

$$\begin{aligned}x' &= \gamma\,(x - vt)\\ &= \gamma(u - v)t.\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)\\ &= \gamma\left(1 - \frac{uv}{c^2}\right)t.\end{aligned}$$

Desse modo, a velocidade w de B no referencial S' é dada por

$$w = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}.$$

É conveniente introduzir a rapidez $\tanh \phi_u = \frac{u}{c}$ e $\tanh \phi_v = \frac{v}{c}$, donde segue

$$\begin{aligned} \tanh \phi_w &= \frac{\tanh \phi_u - \tanh \phi_v}{1 - \tanh \phi_u \tanh \phi_v} \\ &= \tanh \left(\phi_u - \phi_v \right). \end{aligned}$$

Logo, como a tangente hiperbólica é uma função injetora,

$$\phi_w = \phi_u - \phi_v,$$

isto é, a rapidez simplifica a adição relativística de velocidades.

Ainda, para uma rapidez arbitrária ϕ, temos

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 \phi}} \\ &= \cosh \phi, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \gamma\beta &= \cosh \phi \tanh \phi \\ &= \sinh \phi, \end{aligned}$$

de modo que a matriz de uma transformação de Lorentz para um *boost* ao longo da direção x pode ser dada por

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh \phi & -\sinh \phi & 0 & 0 \\ -\sinh \phi & \cosh \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tornemos nossa atenção ao bloco superior esquerdo da matriz acima

$$H(\phi) = \begin{pmatrix} \cosh \phi & -\sinh \phi \\ -\sinh \phi & \cosh \phi \end{pmatrix}.$$

Assim como rotações preservam a métrica euclidiana, isto é, mapeiam pontos de um círculo no mesmo círculo, a transformação linear $H(\phi)$ preserva a métrica de Minkowski, isto é, mapeia pontos da hipérbole $(ct)^2 - x^2 = s^2$ em pontos na mesma hipérbole. De fato, consideramos um ponto (ct, x) nesta hipérbole e computamos a ação desta transformação neste ponto, obtendo o ponto (ct', x') dado por

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} ct' \\ x' \end{bmatrix} &= H(\phi) \begin{bmatrix} ct \\ x \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ct \cosh \phi - x \sinh \phi \\ -ct \sinh \phi + x \cosh \phi \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

que pertence à mesma hipérbole do ponto original, visto que

$$\begin{aligned} (ct')^2 - (x')^2 &= (ct \cosh \phi - x \sinh \phi)^2 - (-ct \sinh \phi + x \cosh \phi)^2 \\ &= (ct)^2 \left(\cosh^2 \phi - \sinh^2 \phi \right) + x^2 \left(\sinh^2 \phi - \cosh^2 \phi \right) \\ &= (ct)^2 - x^2. \end{aligned}$$

Deste modo, a rapidez representa uma parametrização para “rotações hiperbólicas”.

Exercício 5

Exercício 6

Exercício 7

Exercício 8

Proposição 1: ***Boost* de um 4-vetor arbitrário**

Um quadrivetor $S^\mu = (\sigma, \vec{s})$ no referencial Σ tem componentes $S^{\mu'} = (\sigma', \vec{s}')$ no referencial Σ', que se move com velocidade $\vec{v} = v\hat{n}$ em relação a Σ, onde

$$\sigma' = \gamma(\sigma - \beta\vec{s} \cdot \hat{n})$$

e

$$\vec{s}' = \vec{s} + \left[(\gamma - 1)(\vec{s} \cdot \hat{n}) - \gamma\beta\sigma\right] \hat{n},$$

em que $\beta = \frac{v}{c}$ e $\gamma = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}$.

Demonstração. Podemos assumir sem perda de generalidade que $\hat{n} = \hat{x}$, em que $\vec{s} = s_x\hat{x} + s_y\hat{y} + s_z\hat{z}$, portanto

$$\begin{cases} \sigma' = \gamma(\sigma - \beta s_x) \\ s'_x = \gamma(s_x - \beta\sigma) \\ s'_y = s_y \\ s'_z = s_z \end{cases}$$

são as transformações de Lorentz usuais. Notando que $s_x = \vec{s} \cdot \hat{n}$, segue que

$$\sigma' = \gamma(\sigma - \beta\vec{s} \cdot \hat{n}) \text{ e } s'_x = \gamma(\vec{s} \cdot \hat{n} - \beta\sigma).$$

Ainda, $\vec{s}' = s'_x\hat{x} + s'_y\hat{y} + s'_z\hat{z}$, portanto

$$\begin{aligned} \vec{s}' &= (s'_x - s_x)\,\hat{x} + \left(s_x\hat{x} + s_y\hat{y} + s_z\hat{z}\right) \\ &= \vec{s} + (s'_x - s_x)\,\hat{n} \\ &= \vec{s} + \left[\gamma(\vec{s} \cdot \hat{n} - \beta\sigma) - \vec{s} \cdot \hat{n}\right] \hat{n} \\ &= \vec{s} + \left[(\gamma - 1)(\vec{s} \cdot \hat{n}) - \gamma\beta\sigma\right] \hat{n}, \end{aligned}$$

como desejado. □

No referencial Σ, a partícula se move com velocidade $\vec{u} = u\cos\theta\hat{x} + u\sin\theta\hat{y}$, portanto sua 4-velocidade tem componentes $(\gamma_u c, \gamma_u\vec{u})$ neste referencial. O referencial Σ' se move com velocidade $\vec{v} = -v\hat{x}$ em relação a Σ, de modo que a 4-velocidade da partícula em Σ' tem componentes $(\gamma_w c, \gamma_w\vec{w})$, dadas pela expressão da Proposição 1, isto é

$$\begin{aligned} \gamma_w c &= \gamma_v(\gamma_u c - \beta_v\gamma_u\vec{u} \cdot (-\hat{x})) \\ &= \gamma_v(\gamma_u c + \beta_v\gamma_u u\cos\theta) \\ &= \gamma_u\gamma_v(1 + \beta_u\beta_v\cos\theta)c \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\gamma_w\vec{w} &= \gamma_u\vec{u} + \left[(\gamma_v-1)\gamma_u\vec{u}\cdot(-\hat{x}) - \gamma_v\beta_v\gamma_u c\right](-\hat{x})\\ &= \gamma_u\vec{u} + \left[(\gamma_v-1)\gamma_u\beta_u\cos\theta + \gamma_u\gamma_v\beta_v\right]c\hat{x}\\ &= \gamma_u\gamma_v\left(\beta_u\cos\theta+\beta_v\right)c\hat{x} + \gamma_u\beta_u\sin\theta c\hat{y}.\end{aligned}$$

Desse modo,

$$\vec{w} = \frac{\beta_u\cos\theta+\beta_v}{1+\beta_u\beta_v\cos\theta}c\hat{x} + \frac{\beta_u\sin\theta}{\gamma_v\left(1+\beta_u\beta_v\cos\theta\right)}c\hat{y}$$

é a velocidade da partícula em Σ', que faz um ângulo θ' dado por

$$\tan\theta' = \frac{\beta_u\sin\theta}{\gamma_v\left(\beta_u\cos\theta+\beta_v\right)},$$

em relação ao eixo x.

Um triângulo retângulo de catetos de comprimento L_x e L_y situados ao longo dos eixos x e y, respectivamente, que se encontra em repouso em Σ é visto por Σ' como um triângulo retângulo de catetos L'_x e L'_y que se move com velocidade $v\hat{x}$. Pelas transformações de Lorentz, obtemos $L'_y = L_y$ e $L'_x = \frac{L_x}{\gamma_v}$. Assim, se φ é o ângulo compreendido entre o lado de comprimento L_x e a hipotenusa no referencial Σ, o ângulo φ' análogamente medido em Σ' é dado por

$$\tan\varphi' = \gamma_v\tan\varphi.$$

Exercício 9

Em um referencial S em que a 4-posição de uma partícula tem componentes x^μ, definimos sua 4-velocidade e 4-aceleração pelas componentes

$$v^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} \text{ e } a^\mu = \frac{\mathrm{d}v^\mu}{\mathrm{d}\tau}.$$

Assim, temos $v^\mu = (\gamma_v c, \gamma_v\vec{v})$, em que $\vec{v}$ é a 3-velocidade da partícula e $\gamma_v = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}$, e

$$\begin{aligned}a^\mu &= \left(c\frac{\mathrm{d}\gamma_v}{\mathrm{d}\tau}, \frac{\mathrm{d}\gamma_v}{\mathrm{d}\tau}\vec{v} + \gamma_v\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}\tau}\right)\\ &= \left(c\gamma_v\dot{\gamma}_v, \gamma_v\dot{\gamma}_v\vec{v} + \gamma_v^2\vec{a}\right),\end{aligned}$$

onde $\dot{\gamma}_v = \frac{\mathrm{d}\gamma_v}{\mathrm{d}t}$ e $\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$.

Sendo η a métrica de Minkowski, temos

$$\eta_{\mu\nu}v^\mu v^\nu = c^2.$$

Derivando em relação a τ, obtemos

$$\eta_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}v^\mu}{\mathrm{d}\tau}v^\nu = 0 \implies a^\mu v_\mu = 0,$$

como desejado.

Em um dado instante em que a velocidade espacial da partícula é $\vec{u} = u\hat{n}$ no referencial S, tomamos nossa atenção ao referencial S' que se move em relação a S com velocidade espacial $\vec{u}$. Neste mesmo instante, a 4-velocidade da partícula é $v^{\mu'} = (c, 0)$ no referencial S', de modo que a componente temporal da 4-aceleração da partícula deve se anular para respeitar a identidade invariante $a^{\mu'}v_{\mu'} = 0$. Assim,

$$a^{\mu'} = (0, \vec{a}')$$

é a 4-aceleração da partícula em S', em que $\vec{a}' = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t'}$.

Exercício 10

Seja Σ o referencial de repouso de uma partícula de massa m. Após seu decaimento em dois fótons de momentos $\vec{p}_1$ e $\vec{p}_2$, temos por conservação de momento que

$$\vec{p}_1 = -\vec{p}_2,$$

donde segue que os fótons emitidos têm mesma frequência ν, mas direções opostas. Assim, neste referencial, a energia da partícula massiva é dada por

$$E = 2h\nu,$$

por conservação de energia.

Seja Σ' o referencial em que a partícula de massa m se move com velocidade $\vec{v}$. Os momentos $\vec{p}'_1$ e $\vec{p}'_2$ dos fótons neste referencial devem satisfazer

$$\vec{p} = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2,$$

em que $\vec{p}$ é o momento da partícula, que depende da velocidade $\vec{v}$. Notemos que o 4-momento de um dos fótons é dado por

$$\begin{aligned} P_1^\mu &= \left(\frac{h\nu_1}{c}, \frac{h\nu_1}{c}\hat{n}_1\right) \\ &= \hbar\left(\frac{\omega_1}{c}, \vec{k}_1\right), \end{aligned}$$

onde ω_1 é a frequência angular e $\vec{k}_1 = \frac{2\pi\nu_1}{c}\hat{n}_1$ o vetor de onda associados à propagação deste fóton. Deste modo, definimos o 4-vetor de onda $K^\mu = \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k}\right)$ para fótons.