

4300337 - Lista de exercícios 3

Louis Bergamo Radial
8992822

19 de abril de 2024

Exercício 1

No contexto da mecânica Newtoniana, a massa inercial m_i de uma partícula é relacionada à força resultante que age nela pela segunda lei de Newton, $F = m_i a$. Com sua lei de gravitação, temos que a força gravitacional é dada por $F_g = -m_g \nabla \Phi$, onde m_g é a massa gravitacional e Φ é o potencial gravitacional. O Princípio de Equivalência Fraco diz que a massa inercial inercial e a massa gravitacional são iguais, de modo que qualquer partícula em queda livre tem aceleração dada por $a = -\nabla \Phi$. A série de experimentos por Eötvös no fim do século XIX verificou o Princípio de Equivalência Fraco com precisão de 5×10^{-9} , enquanto que atualmente a precisão é da ordem de 10^{-15} .

Ainda, em uma região suficientemente pequena, podemos aproximar o gradiente $-\nabla \Phi$ para uma constante g , de modo que nesta região todas as partículas em queda livre têm aceleração uniforme igual a g . Assim, um campo gravitacional homogêneo é equivalente à uma aceleração do sistema de referência. O Princípio de Equivalência de Einstein diz que, em regiões suficientemente pequenas do espaço-tempo, vale a Relatividade Restrita e e que é impossível detectar a existência de um campo gravitacional por experimentos locais. Isto é, localmente um campo gravitacional é indistinguível à um referencial uniformemente acelerado, ilustrado pelo *Gedankenexperiment* do elevador de Einstein.

O Princípio de Equivalência Forte diz que para uma trajetória de uma partícula massiva em queda livre em um campo gravitacional qualquer, é possível escolher um sistema de coordenadas localmente inercial, de modo que, em uma região do espaço-tempo suficientemente pequena ao redor desta trajetória, todas as leis físicas são equivalentes às suas formulações em sistemas de referência não acelerados na ausência da gravidade.

Exercício 2

Sobre um espaço vetorial V de dimensão n , tensores de segunda ordem têm um total de n^2 componentes. Um tensor antissimétrico $A_{\omega\rho}$ deve satisfazer $A_{\omega\rho} = -A_{\rho\omega}$ para todo par de índices ω, ρ . Assim, temos que as n componentes $A_{\rho\rho}$ são nulas, e a condição das outras $n^2 - n$ componentes, $A_{\omega\rho} = -A_{\rho\omega}$ para $\rho \neq \omega$, reduz o número de componentes independentes para $\frac{n^2-n}{2}$. Semelhantemente, um tensor simétrico $S^{\mu\nu}$ deve satisfazer $S^{\mu\nu} = S^{\nu\mu}$ para todo par de índices μ, ν . Para $\mu = \nu$, esta condição é trivialmente satisfeita, de modo que o número de componentes independentes é $\frac{n^2+n}{2}$. Como exemplo, em um espaço vetorial de dimensão 4, tensores de segunda ordem antissimétricos têm seis componentes independentes e simétricos, dez.

Mostremos que a contração de um tensor simétrico com um tensor antissimétrico tem uma propriedade muito útil, $S^{\omega\rho} A_{\omega\rho} = 0$. Por antissimetria e simetria temos

$$S^{\omega\rho} A_{\omega\rho} = -S^{\omega\rho} A_{\rho\omega} = -S^{\rho\omega} A_{\rho\omega}.$$

Como os índices estão sendo somados, podemos renomeá-los. Em particular, podemos renomear na soma à direita $\omega \rightarrow \rho$ e $\rho \rightarrow \omega$, obtendo

$$S^{\omega\rho} A_{\omega\rho} = -S^{\omega\rho} A_{\omega\rho},$$

isto é $S^{\omega\rho} A_{\omega\rho} = 0$.

Exercício 3

Coordenadas esféricas em \mathbb{R}^3

Consideremos coordenadas esféricas para o espaço tridimensional Euclidiano, dadas por

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \cos \theta = \frac{z}{r}, \quad \text{e} \quad \tan \phi = \frac{y}{x}.$$

Alternativamente, temos

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad \text{e} \quad z = r \cos \theta,$$

de modo que os vetores da base no sistema de coordenadas esféricas são dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \frac{\partial x}{\partial r} \mathbf{e}_x + \frac{\partial y}{\partial r} \mathbf{e}_y + \frac{\partial z}{\partial r} \mathbf{e}_z \\ &= \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\theta &= \frac{\partial x}{\partial \theta} \mathbf{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \theta} \mathbf{e}_y + \frac{\partial z}{\partial \theta} \mathbf{e}_z \\ &= r \cos \theta \cos \phi \mathbf{e}_x + r \cos \theta \sin \phi \mathbf{e}_y - r \sin \theta \mathbf{e}_z, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\phi &= \frac{\partial x}{\partial \phi} \mathbf{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \phi} \mathbf{e}_y + \frac{\partial z}{\partial \phi} \mathbf{e}_z \\ &= -r \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_x + r \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_y. \end{aligned}$$

Com os vetores da base desse sistema de coordenadas, podemos obter os coeficientes da métrica por

$$g'_{ij} = g(\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}'_j)$$

e utilizando os valores do tensor métrico na base de coordenadas cartesianas, dados por

$$g(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_x) = g(\mathbf{e}_y, \mathbf{e}_y) = g(\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_z) = 1$$

e os demais são iguais a zero. Assim, os coeficientes da métrica Euclidiana nas coordenadas esféricas são obtidas por

$$\begin{aligned} g'_{rr} &= g(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_r) & g'_{r\theta} &= g(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta) \\ &= \sin^2 \theta \cos^2 \phi + \sin^2 \theta \sin^2 \phi + \cos^2 \theta & &= r \sin \theta \cos \theta \cos^2 \phi + r \sin \theta \cos \theta \sin^2 \phi - r \sin \theta \cos \theta \\ &= 1, & &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'_{r\phi} &= g(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\phi) & g'_{\theta\theta} &= g(\mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\theta) \\ &= -r \sin^2 \theta \cos \phi \sin \phi + r \sin^2 \theta \cos \phi \sin \phi & &= r^2 \cos^2 \theta \cos^2 \phi + r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi + r^2 \sin^2 \theta \\ &= 0, & &= r^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'_{\theta\phi} &= g(\mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi) & g'_{\phi\phi} &= g(\mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_\phi) \\ &= -r^2 \cos \theta \sin \theta \cos \phi \sin \phi + r^2 \cos \theta \sin \theta \cos \phi \sin \phi & &= r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi + r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi \\ &= 0, & &= r^2 \sin^2 \theta, \end{aligned}$$

e os outros por simetria do tensor métrico. Brevemente, obtemos a métrica dada por

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

do espaço Euclidiano em coordenadas esféricas.

Coordenadas em rotação no espaço-tempo de Minkowski

Consideremos agora a métrica da relatividade restrita $\eta_{\mu\nu}$ e as coordenadas em rotação

$$\begin{cases} t' = t \\ x' = \sqrt{x^2 + y^2} \cos(\phi - \omega t) \\ y' = \sqrt{x^2 + y^2} \sin(\phi - \omega t) \\ z' = z \end{cases}$$

onde $\tan \phi = \frac{y}{x}$. Notemos que

$$x' = x \cos \omega t + y \sin \omega t \quad \text{e} \quad y' = -x \sin \omega t + y \cos \omega t$$

então ao tomar combinações lineares das equações acima e utilizando $t' = t$, temos

$$\begin{cases} t = t' \\ x = x' \cos \omega t' - y' \sin \omega t' \\ y = x' \sin \omega t' + y' \cos \omega t' \\ z = z' \end{cases}.$$

Assim, os vetores da base são dados por $e_{\mu'} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu'}} e_\nu$, isto é,

$$\begin{cases} e_{0'} = e_0 - \omega(x' \sin \omega t' + y' \cos \omega t') e_1 + \omega(x' \cos \omega t' - y' \sin \omega t') e_2 \\ e_{1'} = \cos \omega t' e_1 + \sin \omega t' e_2 \\ e_{2'} = -\sin \omega t' e_1 + \cos \omega t' e_2 \\ e_{3'} = e_3 \end{cases}.$$

Utilizando a bilinearidade do tensor métrico e que $g(e_\mu, e_\nu) = \eta_{\mu\nu}$, temos que $g_{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\nu'}} \eta_{\alpha\beta}$. Calculemos explicitamente a componente $0'0'$:

$$\begin{aligned} g_{0'0'} &= g(e_{0'}, e_{0'}) = g(e_{0'}, e_0 - \omega(x' \sin \omega t' + y' \cos \omega t') e_1 + \omega(x' \cos \omega t' - y' \sin \omega t') e_2) \\ &= -1 + \omega^2 (x' \sin \omega t' + y' \cos \omega t')^2 + \omega^2 (x' \cos \omega t' - y' \sin \omega t')^2 \\ &= -1 + \omega^2 (x'^2 + y'^2). \end{aligned}$$

Repetindo o mesmo procedimento para as outras componentes, obtemos as componentes da métrica nas coordenadas em rotação

$$g_{\mu'\nu'} = \begin{pmatrix} -1 + \omega^2(x'^2 + y'^2) & -\omega y' & \omega x' & 0 \\ -\omega y' & 1 & 0 & 0 \\ \omega x' & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{\mu'\nu'}.$$

Desse modo, obtemos as componentes da métrica inversa $g^{\mu'\nu'}$ por escalonamento, resultando em

$$g^{\mu'\nu'} = \begin{pmatrix} -1 & -\omega y' & \omega x' & 0 \\ -\omega y' & 1 - \omega^2 y'^2 & \omega^2 x' y' & 0 \\ \omega x' & \omega^2 x' y' & 1 - \omega^2 x'^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\mu'\nu'}.$$

Exercício 4

Para uma conexão de Levi-Civita, isto é, simétrica e compatível com o tensor métrico, os seus coeficientes $\Gamma^\rho_{\alpha\beta}$ são dados por

$$\Gamma^\rho_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_\sigma g_{\alpha\beta} - \partial_\alpha g_{\beta\sigma} - \partial_\beta g_{\sigma\alpha})$$

para todas as triplas de índices ρ, α, β .

Para uma métrica diagonal, isto é, $g_{\mu\nu} = 0 \iff \mu \neq \nu$, temos $g^{\mu\nu} = 0 \iff \mu \neq \nu$, de modo que os coeficientes da conexão são dados por

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\rho} = -\frac{1}{2g_{\rho\rho}} (\partial_{\rho}g_{\alpha\beta} - \partial_{\alpha}g_{\beta\rho} - \partial_{\beta}g_{\rho\alpha})$$

neste caso, e nesta expressão índices repetidos não são somados. Podemos simplificar adiante separando em casos: sejam μ, ν, λ índices todos distintos, então

$$\begin{aligned} \Gamma_{\lambda\lambda}^{\lambda} &= -\frac{1}{2g_{\lambda\lambda}} (\partial_{\lambda}g_{\lambda\lambda} - \partial_{\lambda}g_{\lambda\lambda} - \partial_{\lambda}g_{\lambda\lambda}) & \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda} &= -\frac{1}{2g_{\lambda\lambda}} (\partial_{\lambda}g_{\mu\lambda} - \partial_{\mu}g_{\lambda\lambda} - \partial_{\lambda}g_{\lambda\mu}) \\ &= \frac{\partial_{\lambda}g_{\lambda\lambda}}{2g_{\lambda\lambda}} = \partial_{\lambda} \ln \sqrt{|g_{\lambda\lambda}|} & &= \frac{\partial_{\mu}g_{\lambda\lambda}}{2g_{\lambda\lambda}} = \partial_{\mu} \ln \sqrt{|g_{\lambda\lambda}|} \\ \Gamma_{\mu\mu}^{\lambda} &= -\frac{1}{2g_{\lambda\lambda}} (\partial_{\lambda}g_{\mu\mu} - \partial_{\mu}g_{\mu\lambda} - \partial_{\mu}g_{\lambda\mu}) & \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} &= -\frac{1}{2g_{\lambda\lambda}} (\partial_{\lambda}g_{\mu\nu} - \partial_{\mu}g_{\nu\lambda} - \partial_{\nu}g_{\lambda\mu}) \\ &= -\frac{\partial_{\lambda}g_{\mu\mu}}{2g_{\lambda\lambda}} & &= 0 \end{aligned}$$

são todos os coeficientes da conexão para o caso de uma métrica diagonal.

Exercício 5

Utilizando os resultados do exercício anterior, os coeficientes da conexão de Levi-Civita para as coordenadas esféricas no espaço Euclidiano são dados por

$$\begin{aligned} \Gamma_{\theta\theta}^r &= -\frac{\partial_r(r^2)}{2} = -r & \Gamma_{\phi\phi}^r &= -\frac{\partial_r(r^2 \sin^2 \theta)}{2} = -r \sin^2 \theta \\ \Gamma_{\theta r}^{\theta} &= \frac{\partial_r(r^2)}{2r^2} = \frac{1}{r} & \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} &= -\frac{\partial_{\theta}(r^2 \sin^2 \theta)}{2r^2} = -\sin \theta \cos \theta \\ \Gamma_{\phi r}^{\phi} &= \frac{\partial_r(r^2 \sin^2 \theta)}{r^2 \sin^2 \theta} = \frac{1}{r} & \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} &= \frac{\partial_{\theta}(r^2 \sin^2 \theta)}{r^2 \sin^2 \theta} = \cot \theta, \end{aligned}$$

e os outros termos são ou nulos ou obtidos pela simetria da conexão.

Seja uma curva

$$\begin{aligned} \gamma : I \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \lambda &\mapsto (x^r(\lambda), x^{\theta}(\lambda), x^{\phi}(\lambda)). \end{aligned}$$

Assim, para que γ seja uma geodésica, devemos ter

$$\frac{d^2 x^k}{d\lambda^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda} = 0$$

para k igual a r, θ e ϕ . Assim, de forma explícita, as equações da geodésica são dadas por

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta = 0 \\ \ddot{\theta} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta} - \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta = 0 \\ \ddot{\phi} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\phi} + 2\dot{\phi}\dot{\theta} \cot \theta = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta = 0 \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta = 0 \\ r\ddot{\phi} \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\phi} + 2\dot{\phi}\dot{\theta} \cos \theta = 0 \end{cases},$$

onde, para simplificar, denotamos $r = x^r$, $\theta = x^{\theta}$ e $\phi = x^{\phi}$ e os pontos sobre as variáveis denotam que estas funções componente foram derivadas em relação ao parâmetro afim λ .

Em analogia ao movimento de uma partícula em mecânica clássica, sabemos que as equações acima especificam uma partícula se movendo ao longo de uma curva γ com aceleração nula, isto é, cada equação é uma componente da aceleração desta partícula. Desse modo, como o parâmetro λ é afim, uma vez que buscamos uma geodésica, sabemos que o vetor tangente à curva é constante. Integrando mais uma vez, obtemos que a solução deste sistema de equações é uma reta.

Exercício 6

Um espaço topológico é uma dupla (M, \mathcal{O}_M) composta por um conjunto M e uma topologia \mathcal{O}_M . Um subconjunto U de M é dito ser aberto em relação a este espaço topológico se $U \in \mathcal{O}_M$. Uma aplicação $f : M \rightarrow N$ entre espaços topológicos (M, \mathcal{O}_M) e (N, \mathcal{O}_N) é dita contínua se sua pré-imagem de um aberto é aberta, e é dita um homeomorfismo se for bijetiva e tanto f quanto f^{-1} forem contínuas. Se existe um homeomorfismo entre dois espaços topológicos, estes são ditos homeomorfos.

Se existe um número inteiro n tal que todo aberto $U \in \mathcal{O}_M$ é homeomorfo a \mathbb{R}^n , em relação à topologia usual do espaço Euclidiano, dizemos que (M, \mathcal{O}_M) é um espaço topológico localmente Euclidiano de dimensão n . Ainda, para cada aberto $U \in \mathcal{O}_M$ existe um homeomorfismo $x : U \rightarrow x(U) \subset \mathbb{R}^n$, e chamamos o par (U, x) de carta local. Um atlas \mathcal{A}_M é uma coleção de cartas locais tal que a união dos abertos cobre o conjunto M .

Consideremos agora duas cartas $(U, x), (V, y) \in \mathcal{A}_M$ tal que $U \cap V \neq \emptyset$.

$$\begin{array}{ccc} & U \cap V & \\ x \swarrow & & \searrow y \\ x(U \cap V) & \xrightarrow{y \circ x^{-1}} & y(U \cap V) \end{array}$$

Como uma composição de homeomorfismos, segue que a aplicação de transição $y \circ x^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um homeomorfismo, isto é, contínua. Como uma função em \mathbb{R}^n , podemos utilizar análise usual para decidir se esta função é diferenciável. Duas cartas locais $(U, x), (V, y)$ são ditas C^k -compatíveis se ou $U \cap V = \emptyset$ e a aplicação de transição $y \circ x^{-1}$ é de classe C^k ou se $U \cap V \neq \emptyset$. Ainda, um atlas é dito C^k -compatível se todo par de cartas locais são C^k -compatíveis.

Uma variedade diferenciável $(M, \mathcal{O}_M, \mathcal{A}_M)$ é um espaço topológico (M, \mathcal{O}_M) localmente Euclidiano munido de um atlas maximal suave \mathcal{A}_M , isto é, um atlas C^∞ -compatível com a propriedade de que se uma carta (U, x) é compatível com uma carta $(V, y) \in \mathcal{A}_M$, então $(U, x) \in \mathcal{A}_M$. A estrutura diferencial dada pelo atlas permite definir em todo ponto $p \in M$ um espaço vetorial $T_p M$, chamado de espaço tangente no ponto p , cujos elementos são derivações na álgebra $C^\infty(M)$ de funções suaves $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Geometricamente, cada elemento $X \in T_p M$ é um operador de derivada direcional ao longo de alguma curva suave $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ que passa por $p = \gamma(0)$. O espaço dual $T_p^* M$ é chamado de espaço cotangente no ponto p , cujos elementos são relacionados com as curvas de nível de funções suaves $C^\infty(M)$.

Utilizando o atlas da variedade, podemos definir um atlas para a união disjunta dos espaços tangentes, construindo assim o fibrado tangente TM , que é também uma variedade diferenciável. Uma aplicação suave $p \mapsto X_p$ que associa um ponto p da variedade a um vetor $X_p \in T_p M \subset TM$ do fibrado tangente é chamada de campo de vetores. Analogamente, definimos o fibrado cotangente T^*M , em que uma aplicação suave $p \mapsto \omega_p$ que associa um ponto $p \in M$ a um elemento $\omega_p \in T_p^* M \subset T^*M$ é chamada de 1-forma diferencial, ou campo de covetores. Uma função multilinear de campos de vetores e de 1-formas diferenciais é chamada de tensor na variedade.

Resumindo de forma mais informal, uma variedade diferenciável é um conjunto M que localmente se parece com algum espaço Euclidiano \mathbb{R}^n , e no qual podemos definir ponto a ponto um espaço vetorial, que é intimamente relacionado à estrutura diferencial fornecida à M por um atlas de cartas de coordenadas locais. Um tensor no contexto de uma variedade diferenciável é uma função multilinear de vetores e 1-formas definida em todo ponto da variedade.

Exercício 7

Consideremos duas cartas locais de coordenadas locais (U, x) e (U, x') , com

$$\partial_\alpha = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \partial'_\mu \quad \text{e} \quad g_{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} g'_{\mu\nu}.$$

Pela definição dos coeficientes da conexão de Levi-Civita em uma carta \tilde{x} ,

$$\tilde{\Gamma}^\lambda_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} \tilde{g}^{\lambda\omega} \left(\tilde{\partial}_\rho \tilde{g}_{\omega\sigma} + \tilde{\partial}_\sigma \tilde{g}_{\omega\rho} - \tilde{\partial}_\omega \tilde{g}_{\rho\sigma} \right),$$

podemos obter a transformação destes coeficientes. Temos

$$\begin{aligned}\partial_\gamma g_{\alpha\beta} &= \partial_\gamma \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} g'_{\mu\nu} \right) \\ &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \partial_\gamma g'_{\mu\nu} + g'_{\mu\nu} \partial_\gamma \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \right) \\ &= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \partial'_\lambda g'_{\mu\nu} + g'_{\mu\nu} \left(\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\gamma \partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\gamma \partial x^\beta} \right)\end{aligned}$$

portanto, por permutações cíclicas de α, β, γ e renomeando alguns índices que estão sendo somados, temos

$$\begin{aligned}\partial_\alpha g_{\beta\gamma} &= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\gamma} \partial'_\lambda g'_{\mu\nu} + g'_{\mu\nu} \left(\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta} \frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} \right) \\ &= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \partial'_\mu g'_{\nu\lambda} + g'_{\nu\mu} \left(\frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} \right) \\ &= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \partial'_\mu g'_{\nu\lambda} + g'_{\mu\nu} \left(\frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} \right)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\partial_\beta g_{\gamma\alpha} &= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\beta} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\alpha} \partial'_\lambda g'_{\mu\nu} + g'_{\mu\nu} \left(\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\gamma} \frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} \right) \\ &= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \partial'_\nu g'_{\lambda\mu} + g'_{\nu\mu} \frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} + g'_{\mu\nu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\gamma} \frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} \\ &= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \partial'_\nu g'_{\lambda\mu} + g'_{\mu\nu} \left(\frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\gamma} \frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} \right),\end{aligned}$$

onde utilizamos que as componentes da métrica são simétricos. Utilizando o guia dos termos sublinhados, obtemos a transformação dos coeficientes da conexão sob mudança de cartas,

$$\begin{aligned}\Gamma_{\alpha\beta}^\rho &= \frac{1}{2} g^{\rho\gamma} (\partial_\alpha g_{\beta\gamma} + \partial_\beta g_{\gamma\alpha} - \partial_\gamma g_{\alpha\beta}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\xi} g'^{\sigma\xi} \right) \left[\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} (\partial'_\mu g'_{\nu\lambda} + \partial'_\nu g'_{\lambda\mu} - \partial'_\lambda g'_{\mu\nu}) + 2g'_{\mu\nu} \left(\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\gamma} \right) \right] \\ &= \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\xi} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} g'^{\sigma\xi} (\partial'_\mu g'_{\nu\lambda} + \partial'_\nu g'_{\lambda\mu} - \partial'_\lambda g'_{\mu\nu}) + \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\xi} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\gamma} g'^{\sigma\xi} g'_{\mu\nu} \left(\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \right) \right] \\ &= \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \delta^\lambda_\xi g'^{\sigma\xi} (\partial'_\mu g'_{\nu\lambda} + \partial'_\nu g'_{\lambda\mu} - \partial'_\lambda g'_{\mu\nu}) + \delta^\nu_\xi g'^{\sigma\xi} g'_{\mu\nu} \left(\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \right) \right] \\ &= \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \left[\frac{1}{2} g'^{\sigma\lambda} (\partial'_\mu g'_{\nu\lambda} + \partial'_\nu g'_{\lambda\mu} - \partial'_\lambda g'_{\mu\nu}) \right] + \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} g'^{\sigma\nu} g'_{\mu\nu} \left(\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \right) \\ &= \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma'} + \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial^2 x'^\sigma}{\partial x^\alpha \partial x^\beta},\end{aligned}$$

então pela presença do termo afim $\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial^2 x'^\sigma}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}$ não necessariamente nulo, estes coeficientes não se transformam como tensores.

Para um vetor V^ρ , consideremos o objeto $\partial_\alpha V^\rho$ na carta local de coordenadas x . Em outra carta de coordenadas x' , temos

$$V^\rho = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} V'^\nu,$$

de modo que

$$\begin{aligned}\partial_\alpha V^\rho &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \partial'_\mu \left(\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} V'^\sigma \right) \\ &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \partial'_\mu V'^\sigma + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu \partial x'^\sigma} V'^\sigma,\end{aligned}$$

e por conta do termo afim $\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu \partial x'^\sigma} V'^\sigma$ não necessariamente nulo, este objeto não se transforma como um tensor.

Mostremos que $\nabla_\alpha V^\rho = \partial_\alpha V^\rho + \Gamma^\rho_{\alpha\beta} V^\beta$ se transforma como um tensor. Notemos que

$$\begin{aligned}\Gamma^\rho_{\alpha\beta} V^\beta &= \left(\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \Gamma'^\sigma_{\mu\nu} + \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial^2 x'^\sigma}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \right) V^\beta \\ &= \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \Gamma'^\sigma_{\mu\nu} V'^\nu + \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial^2 x'^\sigma}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} V^\beta.\end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}\nabla_\alpha V^\rho &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \left(\partial'_\mu V'^\sigma + \Gamma'^\sigma_{\mu\nu} V'^\nu \right) + \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial^2 x'^\sigma}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} V^\beta + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu \partial x'^\sigma} V'^\sigma \\ &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \nabla'_\mu V'^\sigma + \left(\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial^2 x'^\sigma}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} + \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\beta} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu \partial x'^\sigma} \right) V^\beta \\ &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \nabla'_\mu V'^\sigma + \left(\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\beta} + \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\beta} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \right) V^\beta \\ &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \nabla'_\mu V'^\sigma + \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\beta} \right) V^\beta \\ &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \nabla'_\mu V'^\sigma + \left(\partial_\alpha \delta^\rho_\beta \right) V^\beta \\ &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \nabla'_\mu V'^\sigma,\end{aligned}$$

já que o $\partial_\alpha \delta^\rho_\beta = 0$. Segue que este objeto se transforma como um tensor.

Para um tensor Q^ρ_τ , a sua derivada covariante é dada por

$$\nabla_\alpha Q^\rho_\tau = \partial_\alpha Q^\rho_\tau + \Gamma^\rho_{\alpha\beta} Q^\beta_\tau - \Gamma^\gamma_{\alpha\tau} Q^\rho_\gamma.$$

Em relação à carta de coordenadas x' , temos

$$\begin{aligned}\partial_\alpha Q^\rho_\tau &= \partial_\alpha \left(\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\xi}{\partial x^\tau} Q'^\sigma_\xi \right) \\ &= \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\xi}{\partial x^\tau} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \partial'_\mu Q'^\sigma_\xi + \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial^2 x'^\xi}{\partial x^\alpha \partial x^\tau} Q'^\sigma_\xi + \frac{\partial x'^\xi}{\partial x^\tau} Q'^\sigma_\xi \partial_\alpha \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \\ &= \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\xi}{\partial x^\tau} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \partial'_\mu Q'^\sigma_\xi + \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial^2 x'^\xi}{\partial x^\alpha \partial x^\tau} Q'^\sigma_\xi + \frac{\partial x'^\xi}{\partial x^\tau} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\xi} Q'^\beta_\delta \partial_\alpha \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \\ &= \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\xi}{\partial x^\tau} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \partial'_\mu Q'^\sigma_\xi + \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial^2 x'^\xi}{\partial x^\alpha \partial x^\tau} Q'^\sigma_\xi + \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\beta} Q'^\beta_\tau \partial_\alpha \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^\rho_{\alpha\beta} Q^\beta_\tau &= \left(\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \Gamma'^\sigma_{\mu\nu} + \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial^2 x'^\sigma}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \right) Q^\beta_\tau \\ &= \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \Gamma'^\sigma_{\mu\nu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x'^\xi}{\partial x^\tau} Q'^\lambda_\xi + \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial^2 x'^\sigma}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} Q^\beta_\tau \\ &= \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\xi}{\partial x^\tau} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \Gamma'^\sigma_{\mu\nu} Q'^\nu_\xi + \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} Q^\beta_\tau \partial_\alpha \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\beta}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^\gamma_{\alpha\tau} Q^\rho_\gamma &= \left(\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\omega} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\xi}{\partial x^\tau} \Gamma'^\omega_{\mu\xi} + \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\omega} \frac{\partial^2 x'^\omega}{\partial x^\alpha \partial x^\tau} \right) \left(\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\zeta}{\partial x^\gamma} Q'^\sigma_\zeta \right) \\ &= \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\omega} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\xi}{\partial x^\tau} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\zeta}{\partial x^\gamma} \Gamma'^\omega_{\mu\xi} Q'^\sigma_\zeta + \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\omega} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\zeta}{\partial x^\gamma} Q'^\sigma_\zeta \frac{\partial^2 x'^\omega}{\partial x^\alpha \partial x^\tau} \\ &= \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\xi}{\partial x^\tau} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \Gamma'^\zeta_{\mu\xi} Q'^\sigma_\zeta + \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} Q'^\sigma_\zeta \frac{\partial^2 x'^\zeta}{\partial x^\alpha \partial x^\tau}\end{aligned}$$

Assim, ao somar os dois primeiros termos e subtrair o terceiro, os termos sublinhados em verde são cancelados e os termos sublinhados em laranja também uma vez que

$$\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\beta}} \partial_{\alpha} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\sigma}} + \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\sigma}} \partial_{\alpha} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\beta}} = \partial_{\alpha} \left(\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\sigma}} \right) = \partial_{\alpha} \delta^{\rho}_{\beta} = 0,$$

portanto segue que restam apenas os termos sublinhados em rosa, obtendo

$$\nabla_{\alpha} Q^{\rho}_{\tau} = \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\sigma}} \frac{\partial x'^{\xi}}{\partial x^{\tau}} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \left(\partial'_{\mu} Q'^{\sigma}_{\xi} + \Gamma'^{\sigma}_{\mu\nu} Q'^{\nu}_{\xi} + \Gamma'^{\zeta}_{\mu\xi} Q'^{\sigma}_{\zeta} \right) = \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\sigma}} \frac{\partial x'^{\xi}}{\partial x^{\tau}} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \nabla'_{\alpha} Q'^{\sigma}_{\xi}.$$

Dessa forma, verificamos a transformação tensorial da derivada covariante de um tensor Q^{ρ}_{τ} .

Exercício 8

Consideremos a D -forma $dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^{D-1}$, então em outra carta de coordenadas x' , temos

$$\begin{aligned} dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^{D-1} &= \left(\frac{\partial x^0}{\partial x'^{\mu_0}} dx'^{\mu_0} \right) \wedge \cdots \wedge \left(\frac{\partial x^{D-1}}{\partial x'^{\mu_{D-1}}} dx'^{\mu_{D-1}} \right) \\ &= \epsilon^{\mu_0 \cdots \mu_{D-1}} \left(\frac{\partial x^0}{\partial x'^{\mu_0}} \cdots \frac{\partial x^{D-1}}{\partial x'^{\mu_{D-1}}} \right) dx'^0 \wedge \cdots \wedge dx'^{D-1} \\ &= J dx'^0 \wedge \cdots \wedge dx'^{D-1}, \end{aligned}$$

onde J é o determinante do jacobiano $\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\beta}}$, isto é, $J = \epsilon^{\mu_0 \cdots \mu_{D-1}} \frac{\partial x^0}{\partial x'^{\mu_0}} \cdots \frac{\partial x^{D-1}}{\partial x'^{\mu_{D-1}}}$.

Consideremos agora a transformação da métrica $g_{\mu\nu}$ das coordenadas x para as coordenadas x'

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} g'_{\alpha\beta}.$$

Notemos que podemos arranjar esta última equação como uma multiplicação matricial

$$(g_{\mu\nu}) = \left(\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \right)^{\top} (g'_{\alpha\beta}) \left(\frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} \right),$$

donde segue que

$$g = J^{-2} g',$$

onde g e g' são os valores absolutos dos determinantes das matrizes que representam a métrica nas cartas de coordenadas locais x e x' . Desse modo, o objeto \sqrt{g} se transforma de forma inversa à D -forma considerada. Nesse caso, obtemos a regra de transformação

$$\sqrt{g} dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^{D-1} = \sqrt{g'} dx'^0 \wedge \cdots \wedge dx'^{D-1},$$

isto é, $\sqrt{g} dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^{D-1}$ se transforma como um escalar, então podemos utilizar este objeto como uma medida invariante para integrais em uma variedade.

Por exemplo, consideremos o círculo unitário submerso no plano Euclidiano $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ e a carta

$$\begin{aligned} \psi : S^1 \setminus \{(1,0)\} &\subset \mathbb{R}^2 \rightarrow (0, 2\pi) \\ (\cos \theta, \sin \theta) &\mapsto \theta. \end{aligned}$$

Então o vetor da base induzida por esta carta é $e_{\theta} = (-\sin \theta, \cos \theta)$, que é unitário em relação à métrica Euclidiana. Isto é, a métrica induzida em S^1 é dada por seu único elemento $g_{\theta\theta} = 1$, e cujo determinante é $g = 1$. Desse modo, o elemento de linha para o círculo unitário é $ds = \sqrt{g} d\theta = d\theta$, como esperado.

Com a medida invariante podemos também determinar volumes invariantes. Por exemplo, para uma métrica $ds^2 = a^2 dx^2 + b^2 dy^2 + c^2 dz^2$, temos $g = a^2 b^2 c^2$, portanto o volume invariante de um cubo infinitesimal de lados dx, dy, dz é

$$abc dx \wedge dy \wedge dz.$$

Exercício 9

Notemos que a derivada direcional $W^\mu \partial_\mu \phi$ para um campo escalar ϕ na direção dada pelo campo vetorial W é um escalar. De fato, em relação à outra carta de coordenadas temos

$$W^\mu \partial_\mu \phi = \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} W'^\alpha \right) \left(\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\mu} \partial'_\beta \right) \phi = W'^\alpha \partial'_\alpha \phi,$$

uma vez que o campo escalar é independente da escolha de cartas.

Desse modo, com o resultado do exercício anterior, segue que a integral

$$\int_M d^D x \sqrt{g} W^\mu \partial_\mu \phi$$

é invariante. Suponhamos agora que o suporte de ϕ é contido no domínio de uma carta x , então por integração por partes temos

$$\begin{aligned} \int_M d^D x \sqrt{g} W^\mu \partial_\mu \phi &= \int_{\partial M} d^{D-1} x \sqrt{g} n_\mu W^\mu \phi - \int_M d^D x \phi \partial_\mu (\sqrt{g} W^\mu) \\ &= \int_{\partial M} d^{D-1} x \sqrt{g} n_\mu W^\mu \phi - \int_M d^D x \sqrt{g} \phi \frac{\partial_\mu (\sqrt{g} W^\mu)}{\sqrt{g}} \end{aligned}$$

onde n_μ é a 1-forma definida pela fronteira ∂M . Equivalentemente temos

$$\int_{\partial M} d^{D-1} x \sqrt{g} n_\mu W^\mu \phi = \int_M d^D x \sqrt{g} \left[W^\mu \partial_\mu \phi + \phi \frac{\partial_\mu (\sqrt{g} W^\mu)}{\sqrt{g}} \right],$$

então pelo teorema do divergente,

$$\int_{\partial M} d^{D-1} x \sqrt{g} n_\mu W^\mu \phi = \int_M d^D x \sqrt{g} \operatorname{div}(\phi W),$$

segue que

$$\operatorname{div}(\phi W) = W^\mu \partial_\mu \phi + \phi \frac{\partial_\mu (\sqrt{g} W^\mu)}{\sqrt{g}}.$$

Pela propriedade do divergente

$$\operatorname{div}(\phi W) = W^\mu \partial_\mu \phi + \phi \operatorname{div}(W) = W^\mu \partial_\mu \phi + \phi \operatorname{div}(W),$$

obtemos

$$\underline{W^\mu \partial_\mu \phi} + \phi \operatorname{div}(W) = \underline{W^\mu \partial_\mu \phi} + \phi \frac{\partial_\mu (\sqrt{g} W^\mu)}{\sqrt{g}} \implies \phi \left[\operatorname{div}(W) - \frac{\partial_\mu (\sqrt{g} W^\mu)}{\sqrt{g}} \right] = 0.$$

Como o campo escalar é arbitrário, temos

$$\operatorname{div}(W) = \frac{\partial_\mu (\sqrt{g} W^\mu)}{\sqrt{g}}.$$

Notemos que

$$\operatorname{div}(W) = \partial_\mu W^\mu + \frac{\partial_\nu \sqrt{g}}{\sqrt{g}} W^\nu.$$

Nas coordenadas normais de Riemann, temos $\tilde{g} = 1$ e $\tilde{\partial}_\mu \tilde{g} = 0$, portanto

$$\operatorname{div}(W) = \tilde{\partial}_\mu \tilde{W}^\mu.$$

Assim, em uma carta de coordenadas arbitrária temos

$$\operatorname{div}(W) = \nabla_\mu W^\mu.$$

Comparando $\nabla_\mu W^\mu = \partial_\mu W^\mu + \Gamma^\mu_{\mu\nu} W^\nu$ com a expressão para o divergente, temos

$$\Gamma^\mu_{\mu\nu} = \frac{\partial_\nu \sqrt{g}}{\sqrt{g}}.$$

Substituindo W^μ pelo gradiente de um campo escalar $(\text{grad}\psi)^\mu = g^{\mu\nu} \partial_\nu \psi$, obtemos a expressão para o seu laplaciano, dado por

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \psi = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu (\sqrt{g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \psi).$$

Podemos utilizar estas identidades para encontrar as expressões para o divergente e laplaciano em coordenadas esféricas para o espaço Euclidiano,

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2,$$

onde a métrica tem determinante dado por $g = r^4 \sin^2 \theta$. Para um campo de vetores

$$W = W^r e_r + W^\theta \frac{e_\theta}{r} + W^\varphi \frac{e_\varphi}{r \sin \theta},$$

isto é, cujas componentes na base ortonormal $\{e_r, \frac{1}{r} e_\theta, \frac{1}{r \sin \theta} e_\varphi\}$ são dadas por W^r, W^θ, W^φ , temos

$$\begin{aligned} \text{div}(W) &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\mu (r^2 \sin \theta W^\mu) \\ &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_r (r^2 \sin \theta W^r) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta \left(r^2 \sin \theta \frac{W^\theta}{r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\varphi \left(r^2 \sin \theta \frac{W^\varphi}{r \sin \theta} \right) \\ &= \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 W^r) + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\theta (W^\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi W^\varphi. \end{aligned}$$

O gradiente de um campo escalar ψ é dado por

$$(\text{grad}\psi)^\mu = g^{\mu\nu} \partial_\nu \psi,$$

portanto em coordenadas esféricas temos

$$\begin{aligned} \text{grad}\psi &= \frac{\partial \psi}{\partial r} e_r + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} e_\theta + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} e_\varphi \\ &= \frac{\partial \psi}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{e_\theta}{r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \frac{e_\varphi}{r \sin \theta}. \end{aligned}$$

Portanto, tomando $W^r = \frac{\partial \psi}{\partial r}$, $W^\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$ e $W^\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}$, temos pelo resultado anterior que

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi &= \frac{1}{r^2} \partial_r \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \sin \theta \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right) \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \sin \theta \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2}. \end{aligned}$$

Exercício 10

Consideremos a métrica de um espaço em expansão

$$ds^2 = -dt^2 + t^{2q} (dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

com $q \in (0, 1)$ e $t \in (0, \infty)$. Para um intervalo tipo luz ao longo do eixo x , temos

$$dt^2 = t^{2q} dx^2 \implies t^{-q} dt = \pm dx \implies t^{-q} \frac{dt}{dx} = \pm 1,$$

isto é, uma equação diferencial para a coordenada temporal. Integrando em relação à posição obtemos

$$\frac{t^{1-q}}{1-q} = \pm(x - \xi) \implies t = [\pm(1-q)(x - \xi)]^{\frac{1}{1-q}},$$

onde ξ é uma constante de integração.

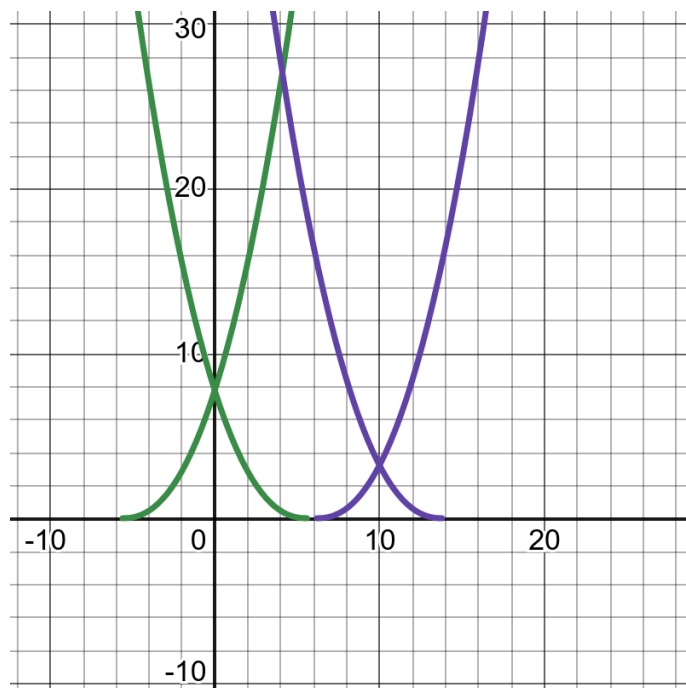


Figura 1: Diagrama de espaço-tempo.

Pelo diagrama de espaço-tempo mostrado na [Figura 1](#), notamos que para pontos distintos não é necessário que haja interseção de seus passados.