

# 4300337 - Lista de Exercícios VI

Louis Bergamo Radial  
8992822

30 de junho de 2024

## Exercício 1

Para um oscilador harmônico de massa  $m = 0.2$  kg, amplitude de movimento  $A = 1$  m, e frequência de oscilação  $f = \frac{\omega}{2\pi} = 5$  Hz, temos a densidade de energia dada por

$$\rho(t, \mathbf{x}) = mc^2 \delta(x - A \cos \omega t) \delta(y) \delta(z).$$

A uma distância  $D = 10$  m  $\gg A$ , podemos utilizar a aproximação de zona de radiação e determinar o momento de quadrupolo  $q_{ij}(t)$ , dado por

$$q_{ij}(t) = \int_{\Sigma} d^3x \left( x_i x_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \|\mathbf{x}\|^2 \right) \rho(t, \mathbf{x}),$$

para obter a perturbação na métrica  $h_{ij}$  a partir de

$$h_{ij}(t, \mathbf{x}) = \frac{2G}{Dc^6} \ddot{q}_{ij}(t_R),$$

onde  $t_R = t - \frac{D}{c}$  é o tempo retardado.

Notemos que pela expressão da densidade, as componentes  $q_{ij}$  com índices distintos e com um índice igual a dois ou três se anulam, isto é,  $q_{12} = q_{13} = q_{23} = 0$ , de modo que resta apenas determinar os termos  $q_{11}$ ,  $q_{22}$ , e  $q_{33}$ . Temos

$$q_{11}(t) = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} d^3x (x^2 - y^2 - z^2) \rho(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{2} mc^2 A^2 \cos^2 \omega t = \frac{1 + \cos 2\omega t}{4} mc^2 A^2$$

$$q_{22}(t) = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} d^3x (y^2 - x^2 - z^2) \rho(t, \mathbf{x}) = -\frac{1}{2} mc^2 A^2 \cos^2 \omega t = -q_{11}(t)$$

$$q_{33}(t) = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} d^3x (z^2 - x^2 - y^2) \rho(t, \mathbf{x}) = -\frac{1}{2} mc^2 A^2 \cos^2 \omega t = -q_{11}(t),$$

portanto a perturbação da métrica é dada por

$$h_{11} = -\frac{2mA^2\omega^2G}{Dc^4} \cos(2\omega t_R) \quad \text{e} \quad h_{22} = h_{33} = \frac{2mA^2\omega^2G}{Dc^4} \cos(2\omega t_R),$$

e vemos que a frequência de oscilação é  $2f = 10$  Hz. Tomando a raiz do valor quadrático médio das perturbações para obter os estresses, obtemos

$$h_+ = \frac{\sqrt{2}mA^2\omega^2G}{Dc^4} = 2.307 \times 10^{-43} \quad \text{e} \quad h_{\times} = 0.$$

A potência irradiada pela onda gravitacional é dada por

$$P = \frac{G}{5c^9} \left\langle \frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \frac{d^3 Q^{ij}}{dt^3} \right\rangle,$$

onde  $Q_{ij}$  é o momento de quadrupolo reduzido,

$$Q_{ij} = q_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta^{kl} q_{kl}.$$

Notando que  $q_{ij}$  é nulo para todo  $i \neq j$  e que  $q_{22} = q_{33} = -q_{11}$ , temos

$$Q_{11} = \frac{4}{3} q_{11}, \quad Q_{22} = -\frac{2}{3} q_{11}, \quad \text{e} \quad Q_{33} = -\frac{2}{3} q_{11}$$

como as únicas componentes não nulas. Como  $\ddot{q}_{11} = -4\omega^2 q_{11}$ , temos  $\ddot{\ddot{q}}_{11} = -4\omega^2 \dot{q}_{11}$ , logo

$$\frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \frac{d^3 Q^{ij}}{dt^3} = \frac{8}{3} \left( \frac{d^3 q_{11}}{dt^3} \right)^2 = \frac{64}{3} \omega^4 (\dot{q}_{11})^2 = \frac{16}{3} m^2 c^4 A^4 \omega^6 \sin^2 2\omega t.$$

Deste modo, a potência irradiada é

$$P = \frac{8m^2 A^4 \omega^6 G}{15c^5} = 5.653 \times 10^{-46} \text{ W}.$$

## Exercício 2

Consideremos um sistema binário com massas  $m_1$  e  $m_2$  nas posições  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_2$  em relação ao centro de massa do sistema. Seja  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  o vetor de posição relativa, então

$$\mathbf{r}_1 = \frac{\mu}{m_1} \mathbf{r} \quad \text{e} \quad \mathbf{r}_2 = -\frac{\mu}{m_2} \mathbf{r},$$

onde  $\mu = \frac{m_1 m_2}{M}$  é a massa reduzida do sistema, com  $M = m_1 + m_2$  a massa total. Em primeira aproximação, tomamos a trajetória da posição relativa como uma órbita circular ao redor do centro de massa com frequência angular constante  $\omega$ ,

$$\mathbf{r} = r [\cos(\omega t) \mathbf{e}_x + \sin(\omega t) \mathbf{e}_y],$$

satisfazendo a terceira lei de Kepler,

$$r^3 = \frac{GM}{\omega^2}.$$

Desta forma, a densidade de energia é

$$\begin{aligned} \rho(t, \mathbf{x}) &= m_1 c^2 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{r}_1 [\cos(\omega t) \mathbf{e}_x + \sin(\omega t) \mathbf{e}_y]) + m_2 c^2 \delta(\mathbf{x} + \mathbf{r}_2 [\cos(\omega t) \mathbf{e}_x + \sin(\omega t) \mathbf{e}_y]) \\ &= [m_1 c^2 \delta(x - r_1 \cos \omega t) \delta(y - r_1 \sin \omega t) + m_2 c^2 \delta(x + r_2 \cos \omega t) \delta(y + r_2 \sin \omega t)] \delta(z), \end{aligned}$$

com  $r_1 = \|\mathbf{r}_1\|$  e  $r_2 = \|\mathbf{r}_2\|$ . Os componentes do quadrupolo físico  $q_{ij}(t)$  são dados por

$$q_{ij}(t) = \int_{\Sigma} d^3x \left( x_i x_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \|\mathbf{x}\|^2 \right) \rho(t, \mathbf{x}),$$

portanto  $q_{i3} = 0$ , exceto para  $i = 3$ . Determinemos os componentes restantes  $q_{11}, q_{12}, q_{22}$ , e  $q_{33}$ ,

$$\begin{aligned} q_{11}(t) &= \frac{1}{2} \int_{\Sigma} d^3x (x^2 - y^2 - z^2) \rho(t, \mathbf{x}) & q_{12}(t) &= \int_{\Sigma} d^3x xy \rho(t, \mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{2} [m_1 c^2 r_1^2 + m_2 c^2 r_2^2] (\cos^2 \omega t - \sin^2 \omega t) & &= [m_1 c^2 r_1^2 + m_2 c^2 r_2^2] \cos(\omega t) \sin(\omega t) \\ &= \frac{1}{2} \left[ m_1 \left( \frac{\mu r}{m_1} \right)^2 + m_2 \left( \frac{\mu r}{m_2} \right)^2 \right] c^2 \cos(2\omega t) & &= \frac{1}{2} \left[ m_1 \left( \frac{\mu r}{m_1} \right)^2 + m_2 \left( \frac{\mu r}{m_2} \right)^2 \right] c^2 \sin(2\omega t) \\ &= \frac{1}{2} \mu c^2 r^2 \cos(2\omega t) & &= \frac{1}{2} \mu c^2 r^2 \sin(2\omega t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_{22}(t) &= \frac{1}{2} \int_{\Sigma} d^3x (y^2 - x^2 - z^2) \rho(t, \mathbf{x}) & q_{33}(t) &= \frac{1}{2} \int_{\Sigma} d^3x (z^2 - x^2 - y^2) \rho(t, \mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{2} [m_1 c^2 r_1^2 + m_2 c^2 r_2^2] (\sin^2 \omega t - \cos^2 \omega t) & &= -\frac{1}{2} m_1 c^2 r_1^2 - \frac{1}{2} m_2 c^2 r_2^2 \\ &= -q_{11}(t), & &= -\frac{1}{2} \mu c^2 r^2. \end{aligned}$$

Assim, na aproximação de zona de radiação  $R \gg r$ , a perturbação da métrica é dada por

$$h_{ij}(t, \mathbf{x}) = \frac{2G}{Rc^6} \ddot{q}_{ij}(t_R), \quad \text{com} \quad t_R = t - \frac{R}{c},$$

de forma que

$$h_{11} = -\frac{4G\mu r^2 \omega^2}{Rc^4} \cos(2\omega t_R) \quad \text{e} \quad h_{12} = -\frac{4G\mu r^2 \omega^2}{Rc^4} \sin(2\omega t_R)$$

e podemos ver que a frequência da onda gravitacional é  $f_{\text{GW}} = \frac{\omega}{\pi}$ . Tomando a raiz do valor quadrático médio destas componentes, obtemos as deformações induzidas  $h_+$ ,  $h_\times$  e o estresse  $h$

$$h_+ = \sqrt{\langle h_{11}^2 \rangle} = \frac{2\sqrt{2}G\mu r^2 \omega^2}{Rc^4} \quad \text{e} \quad h_\times = \sqrt{\langle h_{12}^2 \rangle} = \frac{2\sqrt{2}G\mu r^2 \omega^2}{Rc^4} \implies h = \frac{\sqrt{h_+^2 + h_\times^2}}{2} = \frac{2G\mu r^2 \omega^2}{Rc^4}.$$

Levando em conta que a energia orbital do sistema binário é

$$E_{\text{orb}} = -\frac{GM\mu}{2r}$$

e que sua variação deve ser por conta da potência irradiada pelas ondas gravitacionais, devemos ter

$$\begin{aligned} \frac{dE_{\text{orb}}}{dt} = -P &\implies \frac{GM\mu}{2r^2} \dot{r} = -\frac{32G\mu^2 r^4 \omega^6}{5c^5} \\ &\implies 3r^2 \dot{r} = -\frac{192\mu r^8 \omega^6}{5Mc^5}. \end{aligned}$$

Derivando a terceira lei de Kepler, obtemos

$$\begin{aligned} r^3 = \frac{GM}{\omega^2} &\implies -\frac{2GM}{\omega^3} \dot{\omega} = -\frac{192\mu \omega^6}{5Mc^5} \left( \frac{GM}{\omega^2} \right)^{\frac{8}{3}} \\ &\implies \dot{\omega} = \frac{96G^{\frac{5}{3}}}{5c^5} \mu M^{\frac{2}{3}} \omega^{\frac{11}{3}}. \end{aligned}$$

Como vimos, a frequência da onda gravitacional é  $f_{\text{GW}} = \frac{\omega}{\pi}$ , então

$$\begin{aligned} \dot{f}_{\text{GW}} &= \frac{96G^{\frac{5}{3}}\pi^{\frac{8}{3}}}{5c^5} \mu M^{\frac{2}{3}} f_{\text{GW}}^{\frac{11}{3}} \\ &= \alpha \mathcal{M}^{\frac{5}{3}} f_{\text{GW}}^{\frac{11}{3}}, \end{aligned}$$

onde a constante proporcionalidade  $\alpha$  e a *chirp mass*  $\mathcal{M}$  são dadas por

$$\alpha = \frac{96G^{\frac{5}{3}}\pi^{\frac{8}{3}}}{5c^5} \quad \text{e} \quad \mathcal{M} = \mu^{\frac{3}{5}} M^{\frac{2}{5}} = \frac{(m_1 m_2)^{\frac{3}{5}}}{(m_1 + m_2)^{\frac{1}{5}}}.$$

Podemos utilizar a *chirp mass* para reescrever o estresse  $h$  obtido,

$$h = \frac{2G\mu\omega^2}{Rc^4} \left( \frac{GM}{\omega^2} \right)^{\frac{2}{3}} = \frac{2G}{Rc^2} \left( \frac{\pi G}{c^3} f_{\text{GW}} \right)^{\frac{2}{3}} \mathcal{M}^{\frac{5}{3}} = \frac{2G\mathcal{M}}{Rc^2} \left( \frac{\pi G}{c^3} \mathcal{M} f_{\text{GW}} \right)^{\frac{2}{3}}.$$

## Exercício 3

## Exercício 4

Relembremos o resultado obtido para os coeficientes da conexão de Levi-Civita no caso de uma métrica diagonal

$$\Gamma^\lambda_{\lambda\lambda} = \frac{\partial_\lambda g_{\lambda\lambda}}{2g_{\lambda\lambda}}, \quad \Gamma^\lambda_{\mu\lambda} = \frac{\partial_\mu g_{\lambda\lambda}}{2g_{\lambda\lambda}}, \quad \Gamma^\lambda_{\mu\mu} = -\frac{\partial_\lambda g_{\mu\mu}}{2g_{\lambda\lambda}}, \quad \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = 0,$$

em que não utilizamos a convenção de soma de Einstein, portanto não há nenhuma soma nos termos acima. Recordemos também que, utilizando a convenção de soma, vale

$$\Gamma^\mu_{\mu\nu} = \frac{\partial_\nu \sqrt{-g}}{\sqrt{-g}},$$

onde  $g$  é o determinante da métrica.

Consideremos a métrica dada por  $ds^2 = -dt^2 + a^2(t) dx^i dx_i$ , com  $-g = a^6(t)$ . Utilizando as expressões para os coeficientes da conexão, vemos que os termos  $\Gamma^0_{0\lambda} = \Gamma^\lambda_{\lambda\lambda} = \Gamma^i_{\lambda\lambda} = \Gamma^i_{ij} = 0$ , visto que estes termos envolvem derivadas em relação às coordenadas espaciais e que as componentes da métrica não têm dependência com essas variáveis. Resta apenas os coeficientes dados por

$$\Gamma^0_{ij} = a\dot{a}\delta_{ij} \quad \text{e} \quad \Gamma^i_{j0} = \frac{\dot{a}}{a}\delta^i_j,$$

onde  $\dot{a} = \frac{da}{dt}$ . Da expressão para o tensor de curvatura de Riemann em coordenadas locais,

$$R^\sigma_{\mu\rho\nu} = \partial_\rho \Gamma^\sigma_{\nu\mu} - \partial_\nu \Gamma^\sigma_{\rho\mu} + \Gamma^\sigma_{\rho\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\mu} - \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\rho\mu},$$

e das simetrias encontradas para os coeficientes da conexão, segue que o tensor de Ricci é

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= R^\sigma_{\mu\sigma\nu} = \partial_\sigma \Gamma^\sigma_{\nu\mu} - \partial_\nu \Gamma^\sigma_{\sigma\mu} + \Gamma^\sigma_{\sigma\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\mu} - \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\sigma\mu} \\ &= \partial_t \Gamma^0_{\nu\mu} - \delta_\nu^0 \partial_t \left( \frac{\partial_\mu \sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} \right) + \frac{\partial_\lambda \sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} \Gamma^\lambda_{\nu\mu} - \Gamma^0_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{0\mu} - \Gamma^i_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{i\mu} \\ &= \delta_\mu^m \delta_\nu^n \delta_{mn} \frac{d}{dt} (a\dot{a}) - \delta_\mu^0 \delta_\nu^0 \frac{d}{dt} \left( \frac{3\dot{a}}{a} \right) + \frac{3\dot{a}}{a} \delta_\mu^m \delta_\nu^n \delta_{mn} a\dot{a} - \Gamma^0_{\nu j} \Gamma^j_{0\mu} - \Gamma^i_{\nu 0} \Gamma^0_{i\mu} - \Gamma^i_{\nu j} \Gamma^j_{i\mu} \\ &= \delta_\mu^m \delta_\nu^n \delta_{mn} (4\dot{a}^2 + a\ddot{a}) - \delta_\mu^0 \delta_\nu^0 \left( \frac{3\ddot{a}}{a} - \frac{3\dot{a}^2}{a^2} \right) - \delta_\nu^n \delta_\mu^m \delta_{mn} \dot{a}^2 - \delta_\nu^n \delta_\mu^m \delta_{mn} \dot{a}^2 - \delta_\nu^0 \delta_\mu^0 \frac{3\dot{a}^2}{a^2} \\ &= \delta_\mu^m \delta_\nu^n \delta_{mn} (2\dot{a}^2 + a\ddot{a}) - \delta_\mu^0 \delta_\nu^0 \left( \frac{3\ddot{a}}{a} \right), \end{aligned}$$

isto é

$$R_{00} = -\frac{3\ddot{a}}{a}, \quad \text{e} \quad R_{ii} = a\ddot{a} + 2\dot{a}^2,$$

e todas as outras componentes nulas. Assim, o escalar de Ricci é dado por

$$\begin{aligned} R &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \frac{3\ddot{a}}{a} + 3 \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2}{a^2} \\ &= 6 \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right), \end{aligned}$$

logo o tensor de Einstein,  $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$ , tem suas componentes não nulas dadas por

$$G_{00} = 3 \frac{\dot{a}^2}{a^2} \quad \text{e} \quad G_{ii} = -2a\ddot{a} - \dot{a}^2.$$

Consideremos as equações de Einstein no vácuo com uma constante cosmológica positiva  $\Lambda$ ,

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0 \implies 3\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \Lambda = 0 \quad \text{e} \quad -2a\ddot{a} - \dot{a}^2 + \Lambda a^2 = 0.$$

Utilizando a primeira equação para eliminar o termo  $\dot{a}^2$  na segunda equação, obtemos

$$-2a\left(\ddot{a} - \frac{\Lambda}{3}a\right) = 0.$$

Como  $a \neq 0$  para que a métrica não seja singular, devemos ter que

$$a(t) = A \exp(Ht) + B \exp(-Ht),$$

onde  $H = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}$  e  $A, B \in \mathbb{R}$  são constantes não todas nulas. No caso particular de  $B = 0$ , a métrica seria, portanto,

$$ds^2 = -dt^2 + A^2 e^{2Ht} dx^i dx_i,$$

representando um Universo em expansão.

Neste caso, definimos o tempo conforme  $\eta = -\frac{\exp(-Ht)}{H}$ , que satisfaz  $\dot{\eta} = -H\eta$ , isto é,

$$dt = -\frac{d\eta}{H\eta} \implies dt^2 = \frac{d\eta^2}{H^2\eta^2}.$$

Deste modo, como  $\exp(2Ht) = (H\eta)^{-2}$ , temos

$$ds^2 = \frac{-d\eta^2 + dx^i dx_i}{H^2\eta^2},$$

se tomarmos  $A = 1$ .

Interpretando  $-\frac{\Lambda}{\kappa}g_{\mu\nu}$  como o tensor de energia e momento  $T_{\mu\nu}$  das equações de Einstein sem constante cosmológica, temos de

$$T^\mu_\nu = (\rho + p)U^\mu U_\nu + p\delta^\mu_\nu,$$

com  $U^0 = H\eta$  e  $U^i = 0$ , que

$$\begin{aligned} \left(p + \frac{\Lambda}{\kappa}\right)\delta^\mu_\nu &= -(\rho + p)U^\mu U_\nu \\ &= (\rho + p)\delta^\mu_0 \delta^0_\nu. \end{aligned}$$

Recordando que  $\Lambda = 3H^2$ , obtemos

$$\rho = \frac{3H^2}{\kappa} \quad \text{e} \quad p = -\frac{3H^2}{\kappa},$$

isto é, uma constante cosmológica positiva pode ser interpretada como um fluido com pressão negativa.

## Exercício 5

Para a métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker,

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\gamma_{ij} dx^i dx^j, \text{ com } \gamma_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{\left[1 + \frac{\kappa}{4}(x^2 + y^2 + z^2)\right]^2},$$

onde  $\kappa$  é a curvatura da seção espacial, o tensor de Einstein é dado por

$$G_{00} = 3\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 3\frac{\kappa}{a^2}, \quad G_{0i} = 0, \quad \text{e} \quad G_{ij} = -\left(2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\kappa}{a^2}\right)g_{ij},$$

e os coeficientes da conexão de Levi-Civita por

$$\Gamma^0_{ij} = a\dot{a}\gamma_{ij}, \quad \Gamma^i_{0j} = \frac{\dot{a}}{a}\delta^i_j, \quad \text{e} \quad \Gamma^k_{ij} = 2\kappa \frac{\delta_{ij}x^k - \delta_{ik}x^j - \delta_{jk}x^i}{4 + \kappa(x^2 + y^2 + z^2)},$$

com os outros coeficientes ou nulos ou dados pela simetria da conexão. Consideremos um tensor de energia e momento homogêneo e isotrópico

$$T^\mu_\nu = [\rho(t) + p(t)] U^\mu U_\nu + p(t)\delta^\mu_\nu,$$

com  $U^0 = 1$  e  $U^i = 0$ , e calculemos a divergência  $\nabla_\mu T^\mu_\nu$  explicitamente. Notemos que

$$\nabla_\mu U^\mu = \frac{\partial_\mu(\sqrt{-g}U^\mu)}{\sqrt{-g}} = \frac{\partial_t \sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} = 3\frac{\dot{a}}{a}$$

e que

$$U^\mu \nabla_\mu U_\nu = U^\mu \Gamma^\sigma_{\mu\nu} U_\sigma = -\Gamma^0_{0\nu} = 0,$$

logo a divergência procurada é dada por

$$\begin{aligned} \nabla_\mu T^\mu_\nu &= (\dot{\rho} + \dot{p})U_\nu + (\rho + p)(U_\nu \nabla_\mu U^\mu + U^\mu \nabla_\mu U_\nu) + \dot{p}\delta^0_\nu \\ &= \left[\dot{\rho} + \dot{p} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p)\right]U_\nu + \dot{p}\delta^0_\nu. \end{aligned}$$

Da conservação do tensor de energia e momento,  $\nabla_\mu T^\mu_\nu = 0$ , temos

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0,$$

equação a qual nos referiremos por equação de continuidade.

Considerando as equações de Einstein com constante cosmológica,  $G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$ , obtemos as equações de Friedmann,

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 3\frac{\kappa}{a^2} - \Lambda = 8\pi G\rho \quad \text{e} \quad -2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\kappa}{a^2} + \Lambda = 8\pi Gp.$$

Somando a primeira equação dividida por três à segunda equação, obtemos

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{\Lambda}{3} - \frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p),$$

que podemos substituir de volta na segunda equação, resultando em

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= \Lambda - \frac{\kappa}{a^2} - 8\pi Gp - 2\left[\frac{\Lambda}{3} - \frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p)\right] \\ &= \frac{\Lambda}{3} - \frac{\kappa}{a^2} + \frac{8\pi G}{3}\rho. \end{aligned}$$



Definindo  $\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}$  e  $\rho_\kappa = -\frac{3\kappa}{8\pi G}a^{-2}$  e utilizando o parâmetro de Hubble,  $H = \frac{\dot{a}}{a}$ , podemos escrever esta última equação como

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} (\rho_\Lambda + \rho_\kappa + \rho).$$

Nesta forma, podemos interpretar o efeito da constante cosmológica e da curvatura da seção espacial como densidades de energia fictícias.

Utilizando a equação de continuidade e a equação obtida a partir das equações de Friedmann, podemos obter a evolução do fator de escala para diferentes cenários de constante cosmológica, curvatura, e densidade de energia. Para um universo com apenas matéria fria, isto é, cuja pressão é desprezível, temos da equação de continuidade que

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0 \implies \rho = \rho_0 a^{-3}$$

portanto

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho_0}{3a^3} \implies \dot{a} = \sqrt{\frac{8\pi G\rho_0}{3a}} \implies a(t) \implies a(t) = \left[ \frac{3}{2} \left( a_0 + t\sqrt{\frac{8\pi G\rho_0}{3}} \right) \right]^{\frac{2}{3}},$$

onde  $a_0$  e  $\rho_0$  são constantes de integração, logo a evolução do fator de escala é da ordem de  $t^{\frac{2}{3}}$ . Para um universo com apenas radiação, temos pela isotropia e homogeneidade que  $p = \frac{1}{3}\rho$ , portanto

$$\dot{\rho} + 4\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0 \implies \rho = \rho_0 a^{-4},$$

então

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho_0}{3a^4} \implies \dot{a} = \sqrt{\frac{8\pi G\rho_0}{3}}a^{-1} \implies a(t) \implies a(t) = \sqrt{2 \left( a_0 + t\sqrt{\frac{8\pi G\rho_0}{3}} \right)},$$

isto é, o fator de escala evolui como  $t^{\frac{1}{2}}$ . Para um universo com apenas constante cosmológica e/ou apenas curvatura espacial, segue da equação de continuidade que  $\rho(t) = \rho_0$ . Para um universo com apenas curvatura, temos

$$\dot{a} = \sqrt{-\kappa} \implies a(t) = t\sqrt{-\kappa} + a_0,$$

isto é, o fator de escala muda linearmente, e a curvatura espacial deve ser negativa. Para um universo com apenas constante cosmológica, vimos no exercício 4 que o fator de escala muda exponencialmente.

Para um universo com geometria plana com as abundâncias de matéria  $\Omega_m = 0.3$  e energia escura  $\Omega_\Lambda = 0.7$ , a equação para o parâmetro de Hubble é

$$H^2 = H_0^2 (\Omega_\Lambda + \Omega_m a^{-3})$$

onde  $H_0 \approx 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  é o parâmetro de Hubble atual. Notemos que

$$H = \frac{\dot{a}}{a} \implies \frac{da}{aH} = dt,$$

então integrando em  $[0, 1]$  em  $a$  e em  $[0, T]$  em  $t$ , temos a expressão para a idade do universo  $T$ ,

$$T = \frac{1}{H_0\sqrt{\Omega_m}} \int_0^1 \frac{da}{a\sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m} + a^{-3}}}.$$

Para calcular esta integral, consideremos a mudança de variáveis

$$\frac{\Omega_m}{\Omega_\Lambda} \xi^2 = a^3 \implies \frac{da}{a} = \frac{2 d\xi}{3\xi},$$

de modo que

$$T = \frac{2}{3H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}} \int_0^{\sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m}}} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 + 1}} = \frac{2}{3H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}} \operatorname{arsinh} \left( \sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m}} \right) \approx 13.467 \times 10^9 \text{ anos.}$$

## Exercício 6

Para a métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker,

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\gamma_{ij}dx^i dx^j, \text{ com } \gamma_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{\left[1 + \frac{\kappa}{4}(x^2 + y^2 + z^2)\right]^2},$$

onde  $\kappa$  é a curvatura da seção espacial, o escalar de Ricci é dado por

$$R = 6 \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\kappa}{a^2} \right).$$

Para um fator de escala com comportamento do tipo  $a(t) = a_0 t^n$ , temos

$$R = 6 \left( \frac{n(n-1)}{t^2} + \frac{n^2}{t^2} + \frac{\kappa}{a_0^2 t^{2n}} \right) \implies \lim_{t \rightarrow 0^+} |R| = \infty,$$

isto é,  $t \rightarrow 0$  é uma singularidade em que a curvatura do espaço-tempo é divergente, não importando o tipo de curvatura da seção espacial.