

4300337 - Lista de exercícios 3

Louis Bergamo Radial
8992822

13 de abril de 2024

Exercício 1

Exercício 2

Sobre um espaço vetorial V de dimensão n , tensores de segunda ordem têm um total de n^2 componentes. Um tensor antissimétrico $A_{\omega\rho}$ deve satisfazer $A_{\omega\rho} = -A_{\rho\omega}$ para todo par de índices ω, ρ . Assim, temos que as n componentes $A_{\rho\rho}$ são nulas, e a condição das outras $n^2 - n$ componentes, $A_{\omega\rho} = -A_{\rho\omega}$ para $\rho \neq \omega$, reduz o número de componentes independentes para $\frac{n^2-n}{2}$. Semelhantemente, um tensor simétrico $S^{\mu\nu}$ deve satisfazer $S^{\mu\nu} = S^{\nu\mu}$ para todo par de índices μ, ν . Para $\mu = \nu$, esta condição é trivialmente satisfeita, de modo que o número de componentes independentes é $\frac{n^2+n}{2}$. Como exemplo, em um espaço vetorial de dimensão 4, tensores de segunda ordem antissimétricos têm seis componentes independentes e simétricos, dez.

$$S^{\omega\rho}A_{\omega\rho} = -S^{\omega\rho}A_{\rho\omega} = -S^{\rho\omega}A_{\rho\omega} \implies S^{\omega\rho}A_{\omega\rho} = -S^{\omega\rho}A_{\omega\rho} = 0$$

Exercício 3

Consideremos coordenadas esféricas para o espaço tridimensional Euclidiano, dadas por

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \cos \theta = \frac{z}{r}, \quad \text{e} \quad \tan \phi = \frac{y}{x}.$$

Alternativamente, temos

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad \text{e} \quad z = r \cos \theta,$$

de modo que os vetores da base no sistema de coordenadas esféricas são dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \frac{\partial x}{\partial r} \mathbf{e}_x + \frac{\partial y}{\partial r} \mathbf{e}_y + \frac{\partial z}{\partial r} \mathbf{e}_z \\ &= \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\theta &= \frac{\partial x}{\partial \theta} \mathbf{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \theta} \mathbf{e}_y + \frac{\partial z}{\partial \theta} \mathbf{e}_z \\ &= r \cos \theta \cos \phi \mathbf{e}_x + r \cos \theta \sin \phi \mathbf{e}_y - r \sin \theta \mathbf{e}_z, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\phi &= \frac{\partial x}{\partial \phi} \mathbf{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \phi} \mathbf{e}_y + \frac{\partial z}{\partial \phi} \mathbf{e}_z \\ &= -r \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_x + r \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_y. \end{aligned}$$

Com os vetores da base desse sistema de coordenadas, podemos obter os coeficientes da métrica por

$$g'_{ij} = g(\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}'_j),$$

utilizando que em termos da base do sistema cartesiano, temos

$$g(e_x, e_x) = g(e_y, e_y) = g(e_z, e_z) = 1$$

e os demais são iguais a zero. Assim, os coeficientes da métrica Euclidiana nas coordenadas esféricas são dados por

$$g'_{rr} = 1, \quad g'_{\theta\theta} = r^2, \quad \text{e} \quad g'_{\phi\phi} = r^2 \sin^2 \theta,$$

e as outras componentes nulas.

Consideremos agora a métrica da relatividade restrita $\eta_{\mu\nu}$ e as coordenadas em rotação

$$\begin{cases} t' = t \\ x' = \sqrt{x^2 + y^2} \cos(\phi - \omega t) \\ y' = \sqrt{x^2 + y^2} \sin(\phi - \omega t) \\ z' = z \end{cases}$$

onde $\tan \phi = \frac{y}{x}$. Notemos que

$$x' = x \cos \omega t + y \sin \omega t \quad \text{e} \quad y' = -x \sin \omega t + y \cos \omega t$$

então ao tomar combinações lineares das equações acima e utilizando $t' = t$, temos

$$\begin{cases} t = t' \\ x = x' \cos \omega t' - y' \sin \omega t' \\ y = x' \sin \omega t' + y' \cos \omega t' \\ z = z' \end{cases}.$$

Assim, os vetores da base são dados por $e_{\mu'} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu'}} e_\nu$, isto é,

$$\begin{cases} e_{0'} = e_0 - \omega(x' \sin \omega t' + y' \cos \omega t') e_1 + \omega(x' \cos \omega t' - y' \sin \omega t') e_2 \\ e_{1'} = \cos \omega t' e_1 + \sin \omega t' e_2 \\ e_{2'} = -\sin \omega t' e_1 + \cos \omega t' e_2 \\ e_{3'} = e_3 \end{cases}.$$

Utilizando a bilinearidade do tensor métrico temos que suas componentes são dadas por

$$g_{\mu'v'} = \begin{pmatrix} 1 + \omega^2(x'^2 + y'^2) & -\omega y' & \omega x' & 0 \\ -\omega y' & 1 & 0 & 0 \\ \omega x' & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{\mu'v'}.$$

Desse modo, as componentes $g^{\mu'v'}$ são dadas por

$$g^{\mu'v'} = \begin{pmatrix} 1 & \omega y' & -\omega x' & 0 \\ \omega y' & 1 + \omega^2 y'^2 & -\omega^2 x' y' & 0 \\ -\omega x' & -\omega^2 x' y' & 1 + \omega^2 x'^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{\mu'v'}.$$

Exercício 4

Para uma conexão de Levi-Civita, isto é, simétrica e compatível com o tensor métrico, os seus coeficientes $\Gamma^\rho_{\alpha\beta}$ são dados por

$$\Gamma^\rho_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_\sigma g_{\alpha\beta} - \partial_\alpha g_{\beta\sigma} - \partial_\beta g_{\sigma\alpha})$$

para todas as triplas de índices ρ, α, β .

Para uma métrica diagonal, isto é, $g_{\mu\nu} = 0 \iff \mu \neq \nu$, temos $g^{\mu\nu} = 0 \iff \mu \neq \nu$, de modo que os coeficientes da conexão são dados por

$$\Gamma^\rho_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2g_{\rho\rho}} (\partial_\rho g_{\alpha\beta} - \partial_\alpha g_{\beta\rho} - \partial_\beta g_{\rho\alpha})$$

neste caso, e nesta expressão índices repetidos não são somados. Podemos simplificar adiante separando em casos: sejam μ, ν, λ índices todos distintos, então

$$\begin{aligned} \Gamma^\lambda_{\lambda\lambda} &= -\frac{1}{2g_{\lambda\lambda}} (\partial_\lambda g_{\lambda\lambda} - \partial_\lambda g_{\lambda\lambda} - \partial_\lambda g_{\lambda\lambda}) & \Gamma^\lambda_{\mu\lambda} &= -\frac{1}{2g_{\lambda\lambda}} (\partial_\lambda g_{\mu\lambda} - \partial_\mu g_{\lambda\lambda} - \partial_\lambda g_{\lambda\mu}) \\ &= \frac{\partial_\lambda g_{\lambda\lambda}}{2g_{\lambda\lambda}} = \partial_\lambda \ln \sqrt{|g_{\lambda\lambda}|} & &= \frac{\partial_\mu g_{\lambda\lambda}}{2g_{\lambda\lambda}} = \partial_\mu \ln \sqrt{|g_{\lambda\lambda}|} \\ \Gamma^\lambda_{\mu\mu} &= -\frac{1}{2g_{\lambda\lambda}} (\partial_\lambda g_{\mu\mu} - \partial_\mu g_{\mu\lambda} - \partial_\mu g_{\lambda\mu}) & \Gamma^\lambda_{\mu\nu} &= -\frac{1}{2g_{\lambda\lambda}} (\partial_\lambda g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\nu g_{\lambda\mu}) \\ &= -\frac{\partial_\lambda g_{\mu\mu}}{2g_{\lambda\lambda}} & &= 0 \end{aligned}$$

são todos os coeficientes da conexão para o caso de uma métrica diagonal.

Exercício 5

Utilizando os resultados do exercício anterior, os coeficientes da conexão de Levi-Civita para as coordenadas esféricas no espaço Euclidiano são dados por

$$\begin{aligned} \Gamma^r_{\theta\theta} &= -r & \Gamma^r_{\phi\phi} &= -r \sin^2 \theta \\ \Gamma^\theta_{\theta r} &= \frac{1}{r} & \Gamma^\theta_{\phi\phi} &= -\sin \theta \cos \theta \\ \Gamma^\phi_{\phi r} &= \frac{1}{r} & \Gamma^\phi_{\phi\theta} &= \frac{1}{r} \cot \theta, \end{aligned}$$

e os outros termos são ou nulos ou obtidos pela simetria da conexão.

Seja uma curva

$$\begin{aligned} \gamma : I \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \lambda &\mapsto (x^r(\lambda), x^\theta(\lambda), x^\phi(\lambda)) \end{aligned}$$

cujo vetor tangente é dado por $X = X^i e_i$, com $X^i = \frac{dx^i}{d\lambda}$ ao longo de γ , e seja um campo de vetores $Y = Y^i e_i$, com $i = r, \theta, \phi$. Temos então

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= X^i \nabla_{e_i} (Y^j e_j) \\ &= X^i (\partial_i Y^j) e_j + X^i Y^j \nabla_{e_i} e_j \\ &= X^i (\partial_i Y^j + \Gamma^k_{ij} Y^j) e_k. \end{aligned}$$

No caso em que $Y = X$, temos

$$\begin{aligned} \nabla_X X &= X^i (\partial_i X^k + \Gamma^k_{ij} X^j) e_k \\ &= \left(\frac{dx^i}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{dx^k}{d\lambda} + \Gamma^k_{ij} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda} \right) e_k \\ &= \left(\frac{d^2 x^k}{d\lambda^2} + \Gamma^k_{ij} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda} \right) e_k. \end{aligned}$$

Assim, para que γ seja uma geodésica, devemos ter $\nabla_X X = 0$, isto é,

$$\frac{d^2 x^k}{d\lambda^2} + \Gamma^k_{ij} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda} = 0$$

para todo k . Assim, de forma explícita, as equações da geodésica são dadas por

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta = 0 \\ \ddot{\theta} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta} - \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta = 0 \\ \ddot{\phi} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\phi} + \frac{2}{r}\dot{\phi}\dot{\theta} \cot \theta = 0 \end{cases} .$$

Exercício 6

Um espaço topológico é uma dupla (M, \mathcal{O}_M) composta por um conjunto M e uma topologia \mathcal{O}_M . Um subconjunto U de M é dito ser aberto em relação a este espaço topológico se $U \in \mathcal{O}_M$. Uma aplicação $f : M \rightarrow N$ entre espaços topológicos (M, \mathcal{O}_M) e (N, \mathcal{O}_N) é dita contínua se sua pré-imagem de um aberto é aberta, e é dita um homeomorfismo se for bijetiva e tanto f quanto f^{-1} forem contínuas. Se existe um homeomorfismo entre dois espaços topológicos, estes são ditos homeomorfos.

Se existe um número inteiro n tal que todo aberto $U \in \mathcal{O}_M$ é homeomorfo a \mathbb{R}^n , em relação à topologia usual do espaço Euclidiano, dizemos que (M, \mathcal{O}_M) é um espaço topológico localmente Euclidiano de dimensão n . Ainda, para cada aberto $U \in \mathcal{O}_M$ existe um homeomorfismo $x : U \rightarrow x(U) \subset \mathbb{R}^n$, e chamamos o par (U, x) de carta local. Um atlas \mathcal{A}_M é uma coleção de cartas locais tal que a união dos abertos cobre o conjunto M .

Consideremos agora duas cartas $(U, x), (V, y) \in \mathcal{A}_M$ tal que $U \cap V \neq \emptyset$.

$$\begin{array}{ccc} & U \cap V & \\ x \swarrow & & \searrow y \\ x(U \cap V) & \xrightarrow{y \circ x^{-1}} & y(U \cap V) \end{array}$$

Como uma composição de homeomorfismos, segue que a aplicação de transição $y \circ x^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um homeomorfismo, isto é, contínua. Como uma função em \mathbb{R}^n , podemos utilizar análise usual para decidir se esta função é diferenciável. Duas cartas locais $(U, x), (V, y)$ são ditas C^k -compatíveis se ou $U \cap V = \emptyset$ e a aplicação de transição $y \circ x^{-1}$ é de classe C^k ou se $U \cap V \neq \emptyset$. Ainda, um atlas é dito C^k -compatível se todo par de cartas locais são C^k -compatíveis.

Uma variedade diferenciável $(M, \mathcal{O}_M, \mathcal{A}_M)$ é um espaço topológico (M, \mathcal{O}_M) localmente Euclidiano munido de um atlas maximal suave \mathcal{A}_M , isto é, um atlas C^∞ -compatível com a propriedade de que se uma carta (U, x) é compatível com uma carta $(V, y) \in \mathcal{A}_M$, então $(U, x) \in \mathcal{A}_M$. A estrutura diferencial dada pelo atlas permite definir em todo ponto $p \in M$ um espaço vetorial $T_p M$, chamado de espaço tangente no ponto p , cujos elementos são derivações na álgebra $C^\infty(M)$ de funções suaves $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Geometricamente, cada elemento $X \in T_p M$ é um operador de derivada direcional ao longo de alguma curva suave $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ que passa por $p = \gamma(0)$. O espaço dual $T_p^* M$ é chamado de espaço cotangente no ponto p , cujos elementos são relacionados com as curvas de nível de funções suaves $C^\infty(M)$.

Utilizando o atlas da variedade, podemos definir um atlas para a união disjunta dos espaços tangentes, construindo assim o fibrado tangente TM , que é também uma variedade diferenciável. Uma aplicação suave $p \mapsto X_p$ que associa um ponto p da variedade a um vetor $X_p \in T_p M \subset TM$ do fibrado tangente é chamada de campo de vetores. Analogamente, definimos o fibrado cotangente T^*M , em que uma aplicação suave $p \mapsto \omega_p$ que associa um ponto $p \in M$ a um elemento $\omega_p \in T_p^* M \subset T^*M$ é chamada de 1-forma diferencial, ou campo de covetores. Uma função multilinear de campos de vetores e de 1-formas diferenciais é chamada de tensor na variedade.

Resumindo de forma mais informal, uma variedade diferenciável é um conjunto M que localmente se parece com algum espaço Euclidiano \mathbb{R}^n , e no qual podemos definir ponto a ponto um espaço vetorial, que é intimamente relacionado à estrutura diferencial fornecida à M por um atlas de cartas de coordenadas locais. Um tensor no contexto de uma variedade diferenciável é uma função multilinear de vetores e 1-formas definida em todo ponto da variedade.

Exercício 7

Exercício 8

Exercício 9

Exercício 10