4302305 - Lista de Exercícios IV

Louis Bergamo Radial
8992822

10 de maio de 2024

Exercício 1

Em uma variedade de dimensão n dotada de métrica e uma conexão de Levi-Civita, o tensor de curvatura tem n^4 componentes. Contraindo o tensor de curvatura com o tensor métrico, temos as simetrias dadas por

$$R_{\alpha\rho\mu\nu} = -R_{\alpha\rho\nu\mu} = -R_{\rho\alpha\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\rho},$$

além da identidade de Jacobi,

$$R_{\alpha\rho\mu\nu} + R_{\alpha\mu\nu\rho} + R_{\alpha\nu\rho\mu} = 0.$$

Como o tensor é antissimétrico no primeiro e no último par de índices, temos que cada par pode assumir $m = \binom{n}{2}$ valores diferentes. Desse modo, como podemos trocar os pares de índices, segue que o tensor tem no máximo $\frac{m(m+1)}{2}$ componentes independentes. Na identidade de Jacobi, todos os índices devem ser distintos para que a equação não seja reduzida às condições de antissimetria, portanto temos $\binom{n}{4}$ outros vínculos para as componentes do tensor de curvatura. Assim, o número de componentes independentes do tensor de Riemann é dado por

$$\frac{m(m+1)}{2} - \binom{n}{4} = \frac{n(n-1)}{8}\left(3n^2 - 3n + 6 - (n-2)(n-3)\right) = \frac{n^2(n^2-1)}{12}.$$

Notemos que o tensor de Ricci é um tensor simétrico, portanto um limite superior para o número de suas componentes independentes é dado por $\frac{n(n+1)}{2}$. Desse modo, temos que em $n = 3$ o número de componentes independentes do tensor de Ricci e do tensor de Riemann são iguais!

Já vimos que as componentes do tensor de Riemann são dadas por

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = g_{\mu\sigma}R^{\sigma}{}_{\nu\alpha\beta} = g_{\mu\sigma}\left(\partial_\alpha\Gamma^{\sigma}{}_{\beta\nu} - \partial_\beta\Gamma^{\sigma}{}_{\alpha\nu} + \Gamma^{\sigma}{}_{\alpha\rho}\Gamma^{\rho}{}_{\beta\nu} - \Gamma^{\sigma}{}_{\beta\rho}\Gamma^{\rho}{}_{\alpha\nu}\right)$$

em qualquer sistema de coordenadas. Em coordenadas normais de Riemann, as primeiras derivadas da métrica e os coeficientes da conexão se anulam, de modo que

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu\alpha\beta} &= \frac{1}{2}g_{\mu\sigma}\left[\partial_\alpha\left(g^{\sigma\rho}(\partial_\beta g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\beta} - \partial_\rho g_{\beta\nu})\right) - \partial_\beta\left(g^{\sigma\rho}(\partial_\alpha g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\alpha} - \partial_\rho g_{\alpha\nu})\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}g_{\mu\sigma}g^{\sigma\rho}\left[\partial_\alpha\left(\partial_\beta g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\beta} - \partial_\rho g_{\beta\nu}\right) - \partial_\beta\left(\partial_\alpha g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\alpha} - \partial_\rho g_{\alpha\nu}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\delta^{\rho}{}_{\mu}\left(\partial_\alpha\partial_\beta g_{\rho\nu} + \partial_\alpha\partial_\nu g_{\rho\beta} - \partial_\alpha\partial_\rho g_{\beta\nu} - \partial_\beta\partial_\alpha g_{\rho\nu} - \partial_\beta\partial_\nu g_{\rho\alpha} + \partial_\beta\partial_\rho g_{\alpha\nu}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\partial_\alpha\partial_\nu g_{\mu\beta} - \partial_\alpha\partial_\mu g_{\beta\nu} - \partial_\beta\partial_\nu g_{\mu\alpha} + \partial_\beta\partial_\mu g_{\alpha\nu}\right),
\end{aligned}$$

onde utilizamos que $\partial_\alpha\partial_\beta = \partial_\beta\partial_\alpha$. Assim, ainda nas coordenadas normais de Riemann, temos

$$\nabla_\lambda R_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\underline{\partial_\lambda\partial_\alpha\partial_\nu g_{\mu\beta}} - \underline{\partial_\lambda\partial_\alpha\partial_\mu g_{\beta\nu}} - \underline{\partial_\lambda\partial_\beta\partial_\nu g_{\mu\alpha}} + \underline{\partial_\lambda\partial_\beta\partial_\mu g_{\alpha\nu}}\right),$$

então ao permutar ciclicamente (α, β, λ), obtemos

$$\nabla_\alpha R_{\mu\nu\beta\lambda} = \frac{1}{2}\left(\underline{\partial_\alpha\partial_\beta\partial_\nu g_{\mu\lambda}} - \underline{\partial_\alpha\partial_\beta\partial_\mu g_{\lambda\nu}} - \underline{\partial_\alpha\partial_\lambda\partial_\nu g_{\mu\beta}} + \underline{\partial_\alpha\partial_\lambda\partial_\mu g_{\beta\nu}}\right)$$

e

$$\nabla_\beta R_{\mu\nu\lambda\alpha} = \frac{1}{2}\left(\partial_\beta\partial_\lambda\partial_\nu g_{\mu\alpha} - \partial_\beta\partial_\lambda\partial_\mu g_{\alpha\nu} - \partial_\beta\partial_\alpha\partial_\nu g_{\mu\lambda} + \partial_\beta\partial_\alpha\partial_\mu g_{\lambda\nu}\right),$$

portanto ao somar as três equações obtemos

$$\nabla_\lambda R_{\mu\nu\alpha\beta} + \nabla_\alpha R_{\mu\nu\beta\lambda} + \nabla_\beta R_{\mu\nu\lambda\alpha} = 0.$$

Deste modo, em qualquer outro sistema de coordenadas vale a segunda identidade de Bianchi, expressa acima.

Tornemos nossa atenção para o caso particular bidimensional e consideremos o tensor $X_{\mu\nu\alpha\beta} = g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}$. Notemos que

$$\begin{aligned} X_{\nu\mu\alpha\beta} &= g_{\nu\alpha}g_{\mu\beta} - g_{\nu\beta}g_{\mu\alpha} \\ &= -(g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}) \\ &= -X_{\mu\nu\alpha\beta} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} X_{\mu\nu\beta\alpha} &= g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha} - g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} \\ &= -(g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}) \\ &= -X_{\mu\nu\alpha\beta} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} X_{\alpha\beta\mu\nu} &= g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu} \\ &= g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha} \\ &= X_{\mu\nu\alpha\beta}, \end{aligned}$$

isto é, o tensor $X_{\mu\nu\alpha\beta}$ tem as simetrias do tensor de Riemann. Nesta dimensão há apenas uma componente independente para estes tensores, portanto $R_{\mu\nu\alpha\beta} = KX_{\mu\nu\alpha\beta}$ para alguma constante K. Podemos obter a relação desta constante com o escalar de curvatura $R = g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}R_{\mu\nu\alpha\beta}$ de forma a escrever o tensor de Riemann em termos do tensor métrico e do escalar de curvatura,

$$\begin{aligned} R &= Kg^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}X_{\mu\nu\alpha\beta} \\ &= Kg^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\left(g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}\right) \\ &= Kg^{\mu\alpha}\left(2g_{\mu\alpha} - g_{\mu\alpha}\right) \\ &= 2K, \end{aligned}$$

portanto,

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{R}{2}\left(g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}\right).$$

É interessante notar que a constante $K = \frac{R}{2}$ é a chamada curvatura Gaussiana de uma superfície da teoria clássica de geometria diferencial. O tratamento original feito por Gauss foi inicialmente de modo extrínseco, estudando superfícies imersas no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$ e induzindo uma métrica nesta superfície a partir da métrica Euclidiana, chamada de primeira forma fundamental. Utilizando a abordagem intrínseca obtivemos o mesmo resultado, fato esse relacionado com o teorema de Whitney, que diz sobre a capacidade de imersão de qualquer variedade diferenciável de dimensão n em algum $\mathbb{R}^d$ com $d \geq n$.

Exercício 2

No exercício 1, vimos que em duas dimensões temos

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{R}{2}\left(g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}\right),$$

portanto

$$R_{2121} = \frac{R}{2}(g_{22}g_{11} - g_{21}g_{12}) = \frac{R}{2}g,$$

de modo que R_{2121} se anula se e somente se o escalar de curvatura R se anula, uma vez que o tensor métrico é não degenerado. Como consequência, se $R_{2121} = 0$, segue que $R_{\mu\nu\alpha\beta} = 0$, isto é, a variedade é plana.

Consideremos a métrica de uma variedade bidimensional dada por

$$g_{11} = 1 + u^2, \quad g_{12} = 2v - u, \quad g_{21} = 2v - u, \quad \text{e} \quad g_{22} = 1 + \kappa v^2,$$

para um parâmetro $\kappa > 0$. Notando que $g = 1 + 4uv + \kappa u^2v^2 + (\kappa - 4)v^2$, temos

$$g^{11} = \frac{1+\kappa v^2}{g}, \quad g^{12} = \frac{u-2v}{g}, \quad g^{21} = \frac{u-2v}{g}, \quad \text{e} \quad g^{22} = \frac{1+u^2}{g}.$$

Podemos agora calcular os coeficientes da conexão de Levi-Civita, dados por

$$\begin{aligned}
\Gamma^1{}_{11} &= \frac{1}{2}g^{1m}\left(\partial_1 g_{1m} + \partial_1 g_{1m} - \partial_m g_{11}\right) \\
&= g^{1m}\partial_1 g_{1m} - \frac{1}{2}g^{11}\partial_1 g_{11} \\
&= \frac{1}{2}g^{11}\partial_1 g_{11} + g^{12}\partial_1 g_{12} \\
&= \frac{\kappa uv^2 + 2v}{g},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^1{}_{12} &= \frac{1}{2}g^{1m}\left(\partial_1 g_{2m} + \partial_2 g_{1m} - \partial_m g_{12}\right) \\
&= \frac{1}{2}g^{11}\left(\partial_1 g_{21} + \partial_2 g_{11} - \partial_1 g_{12}\right) + \frac{1}{2}g^{12}\left(\partial_1 g_{22} + \partial_2 g_{12} - \partial_2 g_{12}\right) \\
&= \frac{1}{2}g^{11}\partial_2 g_{11} + \frac{1}{2}g^{12}\partial_1 g_{22} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^1{}_{22} &= \frac{1}{2}g^{1m}\left(\partial_2 g_{2m} + \partial_2 g_{2m} - \partial_m g_{22}\right) \\
&= g^{1m}\partial_2 g_{2m} - \frac{1}{2}g^{12}\partial_2 g_{22} \\
&= g^{11}\partial_2 g_{21} + \frac{1}{2}g^{12}\partial_2 g_{22} \\
&= \frac{2+\kappa uv}{g},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^2{}_{11} &= \frac{1}{2}g^{2m}\left(\partial_1 g_{1m} + \partial_1 g_{1m} - \partial_m g_{11}\right) \\
&= g^{2m}\partial_1 g_{1m} - \frac{1}{2}g^{21}\partial_1 g_{11} \\
&= \frac{1}{2}g^{21}\partial_1 g_{11} + g^{22}\partial_1 g_{12} \\
&= \frac{-1-2uv}{g},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^2{}_{12} &= \frac{1}{2}g^{2m}\left(\partial_1 g_{2m} + \partial_2 g_{1m} - \partial_m g_{12}\right) \\
&= \frac{1}{2}g^{21}\left(\partial_1 g_{21} + \partial_2 g_{11} - \partial_1 g_{12}\right) + \frac{1}{2}g^{22}\left(\partial_1 g_{22} + \partial_2 g_{12} - \partial_2 g_{12}\right) \\
&= \frac{1}{2}g^{21}\partial_2 g_{11} + \frac{1}{2}g^{22}\partial_1 g_{22} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^2{}_{22} &= \frac{1}{2}g^{2m}\left(\partial_2 g_{2m} + \partial_2 g_{2m} - \partial_m g_{22}\right) \\
&= g^{2m}\partial_2 g_{2m} - \frac{1}{2}g^{22}\partial_2 g_{22} \\
&= g^{21}\partial_2 g_{21} + \frac{1}{2}g^{22}\partial_2 g_{22} \\
&= \frac{2u + (\kappa-4)v + \kappa u^2 v}{g}.
\end{aligned}$$

Com isso, podemos calcular a componente R_{2121} do tensor de Riemann por

$$\begin{aligned}
R_{2121} = g_{2s}R^s{}_{121} &= g_{2s}\left(\partial_2\Gamma^s{}_{11} - \partial_1\Gamma^s{}_{21} + \Gamma^s{}_{2r}\Gamma^r{}_{11} - \Gamma^s{}_{1r}\Gamma^r{}_{21}\right) \\
&= g_{2s}\left(\partial_2\Gamma^s{}_{11} + \Gamma^s{}_{22}\Gamma^2{}_{11}\right) \\
&= g_{21}\left(\partial_2\Gamma^1{}_{11} + \Gamma^1{}_{22}\Gamma^2{}_{11}\right) + g_{22}\left(\partial_2\Gamma^2{}_{11} + \Gamma^2{}_{22}\Gamma^2{}_{11}\right) \\
&= g_{21}\frac{(\kappa-4)(uv-2v^2)}{g^2} + g_{22}\frac{(\kappa-4)u^2v}{g^2} \\
&= (\kappa-4)v\frac{\kappa u^2v^2 + 4uv - 4v^2}{g^2},
\end{aligned}$$

com os detalhes omitidos[1] por simplicidade. Deste modo, vemos que R_{2121} é identicamente nulo se e so-

[1] Com rascunho disponível no repositório.

mente se $\kappa = 4$, portanto a variedade cuja métrica é dada por

$$\mathrm{d}s^2 = (1 + u^2)\,\mathrm{d}u^2 + (1 + 4v^2)\,\mathrm{d}v^2 + 2(2v - u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

tem tensor de curvatura identicamente nulo, enquanto que a variedade cuja métrica é dada por

$$\mathrm{d}s^2 = (1 + u^2)\,\mathrm{d}u^2 + (1 + 2v^2)\,\mathrm{d}v^2 + 2(2v - u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

tem tensor de curvatura não nulo.

Exercício 3

Exercício 4

Consideremos a ação de Einstein-Hilbert com uma constante cosmológica Λ,

$$S_{\mathrm{EH}} = \kappa_G \int_M \mathrm{d}^4x \, \sqrt{-g} \, (R - 2\Lambda) \, ,$$

onde $\kappa_G = \frac{1}{16\pi G}$. A variação da ação devido à variação $g^{\mu\nu} \longrightarrow g^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu}$ é dada por

$$\begin{aligned} \delta S_{\mathrm{EH}} &= \kappa_G \int_M \mathrm{d}^4x \, \left[(R - 2\Lambda)\delta\sqrt{-g} + \sqrt{-g}\delta R \right] \\ &= \kappa_G \int_M \mathrm{d}^4x \, \sqrt{-g} \left[\left(\frac{1}{2}R - \Lambda \right) \frac{\delta g}{g} + R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} \right] , \end{aligned}$$

portanto precisamos determinar as variações δg e $\delta R_{\mu\nu}$.

Em uma carta de coordenadas $g_{\mu\nu}$ pode ser considerada como uma matriz invertível, de modo que pela fórmula de Jacobi[2] temos

$$\delta g = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = -g g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}.$$

Assim, temos

$$\delta S_{\mathrm{EH}} = \kappa_G \int_M \mathrm{d}^4x \, \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} + \kappa_G \int_M \mathrm{d}^4x \, \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu},$$

e nos resta mostrar que a segunda integral se anula.

Como consideramos conexões de Levi-Civita, a variação da métrica acarreta uma variação dos coeficientes da conexão $\Gamma^\sigma{}_{\nu\mu} \longrightarrow \Gamma^\sigma{}_{\nu\mu} + \delta\Gamma^\sigma{}_{\nu\mu}$. Como $\delta\Gamma^\sigma{}_{\nu\mu}$ é uma componente do **tensor** dado pela diferença entre duas conexões, podemos escrever a sua derivada covariante por

$$\nabla_\rho \delta\Gamma^\sigma{}_{\nu\mu} = \partial_\rho \delta\Gamma^\sigma{}_{\nu\mu} + \Gamma^\sigma{}_{\rho\lambda} \delta\Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} - \Gamma^\lambda{}_{\rho\nu} \delta\Gamma^\sigma{}_{\lambda\mu} - \Gamma^\lambda{}_{\rho\mu} \delta\Gamma^\sigma{}_{\nu\lambda},$$

em relação à conexão de coeficientes $\Gamma^\sigma{}_{\nu\mu}$. Como o tensor de curvatura é definido a partir da conexão, isto é,

$$R^\sigma{}_{\mu\rho\nu} = \partial_\rho \Gamma^\sigma{}_{\nu\mu} - \partial_\nu \Gamma^\sigma{}_{\rho\mu} + \Gamma^\sigma{}_{\rho\lambda} \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} - \Gamma^\sigma{}_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda{}_{\rho\mu},$$

sua variação é dada por

$$\begin{aligned} \delta R^\sigma{}_{\mu\rho\nu} &= \partial_\rho \delta\Gamma^\sigma{}_{\nu\mu} - \partial_\nu \delta\Gamma^\sigma{}_{\rho\mu} + \delta\Gamma^\sigma{}_{\rho\lambda} \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} + \Gamma^\sigma{}_{\rho\lambda} \delta\Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} - \delta\Gamma^\sigma{}_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda{}_{\rho\mu} - \Gamma^\sigma{}_{\nu\lambda} \delta\Gamma^\lambda{}_{\rho\mu} \\ &= \left(\partial_\rho \delta\Gamma^\sigma{}_{\nu\mu} + \Gamma^\sigma{}_{\rho\lambda} \delta\Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} - \delta\Gamma^\sigma{}_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda{}_{\rho\mu} \right) - \left(\partial_\nu \delta\Gamma^\sigma{}_{\rho\mu} + \Gamma^\sigma{}_{\nu\lambda} \delta\Gamma^\lambda{}_{\rho\mu} - \delta\Gamma^\sigma{}_{\rho\lambda} \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} \right) \\ &= \left(\nabla_\rho \delta\Gamma^\sigma{}_{\nu\mu} + \Gamma^\lambda{}_{\rho\nu} \delta\Gamma^\sigma{}_{\lambda\mu} \right) - \left(\nabla_\nu \delta\Gamma^\sigma{}_{\rho\mu} + \Gamma^\lambda{}_{\nu\rho} \delta\Gamma^\sigma{}_{\lambda\mu} \right) \\ &= \nabla_\rho \delta\Gamma^\sigma{}_{\nu\mu} - \nabla_\nu \delta\Gamma^\sigma{}_{\rho\mu}. \end{aligned}$$

Assim, contraindo σ e ρ, obtemos a variação do tensor de Ricci,

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\sigma \delta\Gamma^\sigma{}_{\nu\mu} - \nabla_\nu \delta\Gamma^\sigma{}_{\sigma\mu},$$

conhecida como a identidade de Palatini. Desse modo, temos

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} \nabla_\sigma \delta\Gamma^\sigma{}_{\nu\mu} - g^{\mu\nu} \nabla_\nu \delta\Gamma^\sigma{}_{\sigma\mu} \\ &= \nabla_\sigma \left(g^{\mu\nu} \delta\Gamma^\sigma{}_{\nu\mu} \right) - \nabla_\nu \left(g^{\mu\nu} \delta\Gamma^\sigma{}_{\sigma\mu} \right) \\ &= \nabla_\sigma \left(g^{\mu\nu} \delta\Gamma^\sigma{}_{\nu\mu} - g^{\mu\sigma} \delta\Gamma^\nu{}_{\nu\mu} \right) , \end{aligned}$$

onde utilizamos a propriedade de que a conexão de Levi-Civita é uma conexão métrica e permutamos os índices ν e σ no segundo termo. Por fim, temos

$$\kappa_G \int_M \mathrm{d}^4x \, \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \kappa_G \int_M \mathrm{d}^4x \, \sqrt{-g} \nabla_\sigma \left(g^{\mu\nu} \delta\Gamma^\sigma{}_{\nu\mu} - g^{\mu\sigma} \delta\Gamma^\nu{}_{\nu\mu} \right) ,$$

[2] Para uma matriz quadrada invertível M, vale $\delta(\det M) = (\det M) \operatorname{tr} \left(A^{-1} \delta M \right)$.

que se anula pelo teorema de Stokes, ao impormos que a variação na borda ∂M é nula.

Por fim, obtemos a variação da ação com uma constante cosmológica, dada por

$$\delta S_{\mathrm{EH}} = \kappa_G \int_M \mathrm{d}^4 x \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu}.$$

Assim, pelo lema fundamental do cálculo de variações, se $\delta S_{\mathrm{EH}} = 0$, devemos ter

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0.$$

Exercício 5

Consideremos a ação

$$S_{\mathrm{M}} = \int_M \mathrm{d}^4x\, \sqrt{-g}\mathcal{L}_{\mathrm{M}},$$

para uma densidade de lagrangiana $\mathcal{L}_{\mathrm{M}}$ que depende da métrica. Definindo o tensor de energia e momento por

$$T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_{\mathrm{M}})}{\partial g^{\mu\nu}},$$

a variação da ação para uma variação do tensor métrico $g^{\mu\nu} \to g^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu}$ é dada por

$$\delta S_{\mathrm{M}} = \int_M \mathrm{d}^4x\, \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_{\mathrm{M}})}{\partial g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\int_M \mathrm{d}^4x\, \sqrt{-g}T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}.$$

Consideremos o caso particular do eletromagnetismo, com a ação dada por

$$S_{\mathrm{EM}} = \int_M \mathrm{d}^4x\, \sqrt{-g}\left(-\frac{1}{4}g^{\rho\alpha}g^{\sigma\beta}F_{\rho\sigma}F_{\alpha\beta}\right),$$

onde $F_{\mu\nu}$ é o tensor de Faraday. Assim, variando a métrica e lembrando que o tensor de Faraday é antissimétrico, temos

$$\begin{aligned}
\delta S_{\mathrm{EM}} &= -\frac{1}{4}\int_M \mathrm{d}^4x\, \sqrt{-g}\delta\left(g^{\rho\alpha}g^{\sigma\beta}F_{\rho\sigma}F_{\alpha\beta}\right) - \frac{1}{4}\int_M \mathrm{d}^4x\, F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}\delta\sqrt{-g} \\
&= -\frac{1}{4}\int_M \mathrm{d}^4x\, \sqrt{-g}\left(\delta^{\rho}{}_{\mu}\delta^{\alpha}{}_{\nu}g^{\sigma\beta} + g^{\rho\alpha}\delta^{\sigma}{}_{\mu}\delta^{\beta}{}_{\nu}\right)F_{\rho\sigma}F_{\alpha\beta}\delta g^{\mu\nu} + \frac{1}{8}\int_M \mathrm{d}^4x\, \sqrt{-g}g_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}\delta g^{\mu\nu} \\
&= -\frac{1}{2}\int_M \mathrm{d}^4x\, \sqrt{-g}\left[\frac{1}{2}\left(g^{\sigma\beta}F_{\mu\sigma}F_{\nu\beta} + g^{\rho\alpha}F_{\rho\mu}F_{\alpha\nu}\right) - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}\right]\delta g^{\mu\nu} \\
&= -\frac{1}{2}\int_M \mathrm{d}^4x\, \sqrt{-g}\left[\frac{1}{2}\left(g^{\kappa\lambda}F_{\mu\kappa}F_{\nu\lambda} + g^{\kappa\lambda}F_{\kappa\mu}F_{\lambda\nu}\right) - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}\right]\delta g^{\mu\nu} \\
&= -\frac{1}{2}\int_M \mathrm{d}^4x\, \sqrt{-g}\left(g^{\kappa\lambda}F_{\kappa\mu}F_{\lambda\nu} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}\right)\delta g^{\mu\nu},
\end{aligned}$$

então o tensor de energia e momento é

$$T_{\mu\nu} = F^{\kappa}{}_{\nu}F_{\kappa\mu} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma},$$

ou então, com índices contravariantes,

$$\begin{aligned}
T^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}T_{\alpha\beta} &= g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\left(F^{\kappa}{}_{\beta}F_{\kappa\alpha} - \frac{1}{4}g_{\alpha\beta}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}\right) \\
&= F^{\mu}{}_{\kappa}F^{\nu\kappa} - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}.
\end{aligned}$$

Consideremos as coordenadas normais de Riemann, em que podemos tomar os resultados conhecidos da Relatividade Restrita. Isto é, nesta carta temos

$$F^{0i} = E^i \quad \text{e} \quad F^{ij} = \epsilon^{ijk}B_k,$$

com as demais componentes dadas pela antissimetria do tensor. A fim de calcular as componentes T^{00} e T^{i0} do tensor de energia e momento, determinamos

$$\begin{aligned}
F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma} &= F_{0\sigma}F^{0\sigma} + F_{i\sigma}F^{i\sigma} \\
&= F_{0i}F^{0i} + F_{i0}F^{i0} + F_{ij}F^{ij} \\
&= -2E_iE^i + \epsilon_{ij\ell}B^{\ell}\epsilon^{ijk}B_k \\
&= -2\|\boldsymbol{E}\|^2 + 2\|\boldsymbol{B}\|^2,
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
F^{0}{}_{\kappa}F^{0\kappa} &= F^{0}{}_{k}F^{0k} \\
&= \eta_{jk}F^{0j}E^k \\
&= E_kE^k \\
&= \|\boldsymbol{E}\|^2,
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
F^{i}{}_{\kappa}F^{0\kappa} &= F^{i}{}_{k}F^{0k} \\
&= \eta_{jk}F^{ij}E^k \\
&= \epsilon^{ij\ell}E_jB_{\ell} \\
&= (\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})^i.
\end{aligned}$$

Assim, obtemos as componentes desejadas,

$$T^{00} = \|\boldsymbol{E}\|^2 + \frac{2\|\boldsymbol{B}\|^2 - 2\|\boldsymbol{E}\|}{4} = \frac{\|\boldsymbol{E}\|^2 + \|\boldsymbol{B}\|^2}{2} \quad \text{e} \quad T^{i0} = (\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})^i,$$

isto é, T^{00} é a densidade de energia do campo eletromagnético e T^{i0} é a componente i do vetor de Poynting.

Exercício 6

No exercício 1, mostramos que vale

$$R_{\lambda\mu\rho\nu} = \frac{1}{2}R\left(g_{\lambda\rho}g_{\mu\nu} - g_{\lambda\nu}g_{\mu\rho}\right)$$

no caso particular de variedades bidimensionais. Assim, o tensor de Riemann é dado por

$$R^{\sigma}{}_{\mu\rho\nu} = g^{\sigma\lambda}R_{\lambda\mu\rho\nu} = \frac{1}{2}Rg^{\sigma\lambda}\left(g_{\lambda\rho}g_{\mu\nu} - g_{\lambda\nu}g_{\mu\rho}\right) = \frac{1}{2}R\left(\delta^{\sigma}{}_{\rho}g_{\mu\nu} - \delta^{\sigma}{}_{\nu}g_{\mu\rho}\right),$$

de modo que o tensor de Ricci é obtido pela contração de σ e ρ,

$$R_{\mu\nu} = R^{\sigma}{}_{\mu\sigma\nu} = \frac{1}{2}R\left(2g_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}\right) = \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}.$$

Dessa forma, o tensor de Einstein em duas dimensões é identicamente nulo,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 0.$$

Dessa forma, as equações de Einstein $G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$, implicam que o tensor de energia e momento é nulo em toda a variedade.

Exercício 7

Consideremos um campo gravitacional fraco, em que podemos tomar a métrica como uma perturbação da métrica de Minkowski $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, onde $h_{\mu\nu}$ é "pequeno", isto é, consideraremos efeitos dessa perturbação em até primeira ordem. Por exemplo, os isomorfismos musicais são feitos em relação à métrica de Minkowski e tomaremos

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu},$$

com $h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}h_{\alpha\beta}$, de modo que $g_{\mu\nu}g^{\nu\lambda} = \delta^{\lambda}{}_{\mu} + O(h^2)$. É importante ressaltar que, como $g_{\mu\nu}$ e $\eta_{\mu\nu}$ são simétricos, $h_{\mu\nu}$ também o deve ser.

Os coeficientes da conexão de Levi-Civita para essa métrica são dados por

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\sigma}{}_{\nu\mu} &= \frac{1}{2}g^{\sigma\lambda}\left(\partial_\nu g_{\lambda\mu} + \partial_\mu g_{\lambda\nu} - \partial_\lambda g_{\nu\mu}\right) \\
&= \frac{1}{2}\eta^{\sigma\lambda}\left(\partial_\nu h_{\lambda\mu} + \partial_\mu h_{\lambda\nu} - \partial_\lambda h_{\nu\mu}\right) + O(h^2),
\end{aligned}$$

de modo que o tensor de Riemann é dado por

$$\begin{aligned}
R^{\sigma}{}_{\mu\rho\nu} &= \partial_\rho\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu} - \partial_\mu\Gamma^{\sigma}{}_{\rho\nu} + \Gamma^{\sigma}{}_{\rho\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\sigma}{}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\rho\nu} \\
&= \partial_\rho\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu} - \partial_\mu\Gamma^{\sigma}{}_{\rho\nu} + O(h^2) \\
&= \frac{1}{2}\eta^{\sigma\lambda}\left(\partial_\rho\partial_\mu h_{\lambda\nu} + \partial_\rho\partial_\nu h_{\lambda\mu} - \partial_\rho\partial_\lambda h_{\mu\nu}\right) - \frac{1}{2}\eta^{\sigma\lambda}\left(\partial_\mu\partial_\rho h_{\lambda\nu} + \partial_\mu\partial_\nu h_{\lambda\rho} - \partial_\mu\partial_\lambda h_{\rho\nu}\right) \\
&= \frac{1}{2}\eta^{\sigma\lambda}\left(\partial_\rho\partial_\nu h_{\lambda\mu} - \partial_\rho\partial_\lambda h_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\nu h_{\lambda\rho} + \partial_\mu\partial_\lambda h_{\rho\nu}\right).
\end{aligned}$$

Definindo o traço $h = h^{\sigma}{}_{\sigma} = \eta^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}$ e $\bar{h}_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}h$, temos que o tensor de Ricci é dado por

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu} = R^{\sigma}{}_{\mu\sigma\nu} &= \frac{1}{2}\eta^{\sigma\lambda}\left(\partial_\sigma\partial_\nu h_{\lambda\mu} - \partial_\sigma\partial_\lambda h_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\nu h_{\lambda\sigma} + \partial_\mu\partial_\lambda h_{\sigma\nu}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\partial_\sigma\partial_\nu h^{\sigma}{}_{\mu} - \partial^\sigma\partial_\sigma h_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\nu h + \partial_\mu\partial^\sigma h_{\sigma\nu}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\partial^\sigma\partial_\nu h_{\mu\sigma} + \partial^\sigma\partial_\mu h_{\nu\sigma} - \partial^\sigma\partial_\sigma h_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\nu h\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\partial^\sigma\partial_\nu \bar{h}_{\mu\sigma} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\sigma}\partial^\sigma\partial_\nu h + \partial^\sigma\partial_\mu \bar{h}_{\nu\sigma} + \frac{1}{2}\eta_{\nu\sigma}\partial^\sigma\partial_\nu h - \partial^\sigma\partial_\sigma h_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\nu h\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\partial^\sigma\partial_\nu \bar{h}_{\mu\sigma} + \partial^\sigma\partial_\mu \bar{h}_{\nu\sigma} - \partial^\sigma\partial_\sigma h_{\mu\nu}\right)
\end{aligned}$$

e o escalar de curvatura por

$$\begin{aligned}
R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} &= \eta^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + O(h^2) \\
&= \frac{1}{2}\left(\partial^\sigma\partial^\mu \bar{h}_{\mu\sigma} + \partial^\sigma\partial^\mu \bar{h}_{\mu\sigma} - \partial^\sigma\partial_\sigma \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}\right) \\
&= \partial^\sigma\partial^\mu \bar{h}_{\mu\sigma} - \frac{1}{2}\partial^\sigma\partial_\sigma h.
\end{aligned}$$

Desse modo, obtemos a linearização do tensor de Einstein, dada por

$$\begin{aligned}
G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R\eta_{\mu\nu} + O(h^2) \\
&= \frac{1}{2}\left(\partial^\sigma\partial_\nu \bar{h}_{\mu\sigma} + \partial^\sigma\partial_\mu \bar{h}_{\nu\sigma} - \partial^\sigma\partial_\sigma h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\partial^\sigma\partial^\rho \bar{h}_{\rho\sigma} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\partial^\sigma\partial_\sigma h\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\partial^\sigma\partial_\nu \bar{h}_{\mu\sigma} + \partial^\sigma\partial_\mu \bar{h}_{\nu\sigma} - \partial^\sigma\partial_\sigma \bar{h}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\partial^\sigma\partial^\rho \bar{h}_{\rho\sigma}\right).
\end{aligned}$$

Pela simetria por difeomorfismos, temos liberdade de escolha de calibre para $g_{\mu\nu}$, de forma que podemos escolher o calibre $\partial^\nu h_{\mu\nu} = 0$, de forma que o tensor de Einstein se torna apenas $G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\partial^\sigma\partial_\sigma \bar{h}_{\mu\nu}$. Neste caso, as equações de Einstein são dadas por

$$\partial^\sigma\partial_\sigma \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi G T_{\mu\nu}.$$

Consideremos o caso quase-estático em que o tensor de energia e momento pode ser tomado em primeira aproximação como identicamente nulo exceto por sua componente $T_{00} = \rho$ que só depende das coordenadas espaciais. Neste caso temos

$$\nabla^2 \bar{h}_{00} = -16\pi G\rho,$$

portanto em paralelo com a equação de Poisson, $\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$, escolhemos $\bar{h}_{00} = -4\Phi$. Além disso, como as outras componentes do tensor de energia e momento são nulas, podemos tomar $\bar{h}_{\mu\nu} = 0$ para todos μ e ν, exceto para $\mu = \nu = 0$. Deste modo o traço de $\bar{h}_{\mu\nu}$ é

$$\bar{h} = g^{\mu\nu}\bar{h}_{\mu\nu} = 4\Phi + O(h^2),$$

e podemos relacioná-lo com o traço de $h_{\mu\nu}$ ao tomar o traço da definição do tensor $\bar{h}_{\mu\nu}$,

$$h = g^{\mu\nu}h_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}\left(\bar{h}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}h\eta_{\mu\nu}\right) + O(h^2) = \bar{h} + 2h \implies h = -\bar{h} = -4\Phi.$$

Assim, obtemos $h_{\mu\nu}$,

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}h\eta_{\mu\nu} = -4\Phi\delta^0{}_\mu\delta^0{}_\nu - 2\Phi\eta_{\mu\nu} \implies h_{00} = -2\Phi, \quad h_{ij} = -2\Phi\delta_{ij}, \quad \text{e} \quad h_{0j} = 0,$$

e, portanto, a métrica do campo gravitacional fraco é dada por

$$\mathrm{d}s^2 = -(1+2\Phi)\,\mathrm{d}t^2 + (1-2\Phi)\left(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2\right).$$

Exercício 8