

# 4300337 - Lista de Exercícios 5

Louis Bergamo Radial  
8992822

21 de maio de 2024

## Exercício 1

Relembremos o resultado obtido para os coeficientes da conexão de Levi-Civita no caso de uma métrica diagonal

$$\Gamma^\lambda_{\lambda\lambda} = \frac{\partial_\lambda g_{\lambda\lambda}}{2g_{\lambda\lambda}}, \quad \Gamma^\lambda_{\mu\lambda} = \frac{\partial_\mu g_{\lambda\lambda}}{2g_{\lambda\lambda}}, \quad \Gamma^\lambda_{\mu\mu} = -\frac{\partial_\lambda g_{\mu\mu}}{2g_{\lambda\lambda}}, \quad \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = 0,$$

em que não utilizamos a convenção de soma de Einstein, portanto não há nenhuma soma nos termos acima. A métrica de Schwarzschild é dada por

$$g_{tt} = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \quad g_{rr} = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \quad g_{\theta\theta} = r^2 \quad g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2 \theta,$$

com as outras componentes nulas. Utilizando as expressões para os coeficientes da conexão, vemos que os termos  $\Gamma^\lambda_{t\lambda} = \Gamma^\lambda_{\phi\lambda} = \Gamma^t_{\mu\mu} = \Gamma^\phi_{\mu\mu} = 0$ , visto que estes termos envolvem derivadas em relação a  $t$  ou a  $\phi$  e que as componentes da métrica não têm dependência com essas variáveis. Temos também que os termos  $\Gamma^\theta_{\nu\nu} = \Gamma^\theta_{\mu\theta} = 0$  se anulam para  $\nu \neq \phi$  e  $\mu \neq r$ .

Consideremos a componente  $t$  da equação da geodésica,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 t}{d\lambda^2} + \Gamma^t_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} &= 0 \implies \frac{d^2 t}{d\lambda^2} + 2\Gamma^t_{tr} \frac{dt}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} = 0 \\ &\implies \frac{d^2 t}{d\lambda^2} + \frac{\partial_r g_{tt}}{g_{tt}} \frac{dt}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} = 0 \\ &\implies \frac{1}{g_{tt}} \left( g_{tt} \frac{d^2 t}{d\lambda^2} + \frac{dg_{tt}}{d\lambda} \frac{dt}{d\lambda} \right) = 0 \\ &\implies \frac{1}{g_{tt}} \frac{d}{d\lambda} \left( g_{tt} \frac{dt}{d\lambda} \right) = 0. \end{aligned}$$

Como  $g_{tt} \neq 0$ , temos a seguinte lei de conservação

$$\frac{d}{d\lambda} \left[ \frac{dt}{d\lambda} \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right) \right] = 0,$$

pela componente temporal da equação da geodésica.

Analogamente, para a componente  $\phi$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \phi}{d\lambda^2} + \Gamma^\phi_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} &= 0 \implies \frac{d^2 \phi}{d\lambda^2} + 2\Gamma^\phi_{r\phi} \frac{d\phi}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} + 2\Gamma^\phi_{\theta\phi} \frac{d\phi}{d\lambda} \frac{d\theta}{d\lambda} = 0 \\ &\implies \frac{d^2 \phi}{d\lambda^2} + \frac{\partial_r g_{\phi\phi}}{g_{\phi\phi}} \frac{d\phi}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} + \frac{\partial_\theta g_{\phi\phi}}{g_{\phi\phi}} \frac{d\phi}{d\lambda} \frac{d\theta}{d\lambda} = 0 \\ &\implies \frac{1}{g_{\phi\phi}} \left[ g_{\phi\phi} \frac{d^2 \phi}{d\lambda^2} + \left( \frac{\partial_r g_{\phi\phi}}{\partial r} \frac{dr}{d\lambda} + \frac{\partial_\theta g_{\phi\phi}}{\partial \theta} \frac{d\theta}{d\lambda} \right) \frac{d\phi}{d\lambda} \right] = 0 \\ &\implies \frac{1}{g_{\phi\phi}} \frac{d}{d\lambda} \left[ g_{\phi\phi} \frac{d\phi}{d\lambda} \right] = 0. \end{aligned}$$

Como  $g_{\phi\phi} \neq 0$ , temos a lei de conservação

$$\frac{d}{d\lambda} \left( r^2 \frac{d\phi}{d\lambda} \sin^2 \theta \right) = 0,$$

pela componente azimutal da equação da geodésica.

Notemos que as quantidades conservadas

$$\epsilon = \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right) \frac{dt}{d\lambda} \quad \text{e} \quad \ell = r^2 \sin^2 \theta \frac{d\phi}{d\lambda}$$

estão relacionadas à energia e ao momento angular da partícula na trajetória geodésica. Para uma partícula de massa  $m$ ,  $m\epsilon$  e  $m\ell$  são a sua energia e seu momento angular, enquanto que  $\hbar\epsilon$  e  $\hbar\ell$  são a energia e o momento angular de um fóton. A expressão  $\ell$  é familiar, enquanto que precisamos motivar a relação de  $\epsilon$  com a energia. Tomemos uma partícula massiva muito distante do centro de atração, isto é,  $r \rightarrow \infty$ , onde temos

$$\lim_{r \rightarrow \infty} m\epsilon = m \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{dt}{d\tau} = m\gamma = E,$$

onde utilizamos as expressões conhecidas da Relatividade Restrita, visto que à grandes distâncias do centro atrativo, a métrica de Schwarzschild se reduz à métrica de Minkowski.

A simetria azimutal da métrica é refletida na conservação do momento angular, portanto podemos considerar uma partícula se movendo em um plano de ângulo polar constante, por exemplo  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . Neste caso, como a trajetória se dá numa geodésica, temos que a “norma” do vetor tangente à trajetória é constante, uma vez que este é paralelo ao longo da geodésica, isto é

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = -\kappa,$$

para a constante  $\kappa$  dada por  $\kappa = 1$  no caso de uma partícula massiva e o parâmetro afim dado pelo tempo próprio, ou  $\kappa = 0$  para uma partícula de massa nula. De forma explícita, temos

$$-\kappa = - \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right) \left( \frac{dt}{d\lambda} \right)^2 + \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-1} \left( \frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + r^2 \left( \frac{d\phi}{d\lambda} \right)^2,$$

portanto ao multiplicar por  $1 - \frac{2GM}{r}$  e utilizar as integrais de movimento, temos

$$-\kappa \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right) = -\epsilon^2 + \left( \frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right) \frac{\ell^2}{r^2}.$$

Assim, obtemos a equação

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dr}{d\lambda} \right)^2 - \kappa \frac{GM}{r} + \frac{\ell^2}{2r^2} - \frac{GM\ell^2}{r^3} = \frac{1}{2} (\epsilon^2 - \kappa)$$

a qual podemos analisar como o movimento unidimensional de uma partícula de massa unitária e energia  $\frac{1}{2} (\epsilon^2 - \kappa)$ , sob a ação de um potencial efetivo clássico  $V_{\text{ef}}$  dado por

$$V_{\text{ef}}(r) = -\kappa \frac{GM}{r} + \frac{\ell^2}{2r^2} - \frac{GM\ell^2}{r^3}.$$

Para o caso particular de partículas não massivas,  $\kappa = 0$ , e ainda nessa analogia com Mecânica Clássica, podemos multiplicar a equação de movimento por  $\frac{2}{\ell^2}$ , obtendo

$$\left( \frac{dr}{d\lambda} \right)^2 - \frac{2GM}{r^3} + \frac{1}{r^2} = \frac{\epsilon^2}{\ell^2},$$

deixando evidente a forma

$$\left( \frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + U_{\text{ef}}(r) = \frac{1}{b^2},$$

com

$$U_{\text{ef}}(r) = -\frac{2GM}{r^3} + \frac{1}{r^2} = \frac{2}{\ell^2} V_{\text{ef}}(r) \quad \text{e} \quad b = \frac{\ell}{\epsilon},$$

onde  $b$  é o parâmetro de impacto, ou distância de visada.

## Exercício 2

Como obtido no exercício anterior, o potencial efetivo é dado por

$$V_{\text{ef}}(r) = -\kappa \frac{GM}{r} + \frac{\ell^2}{2r^2} - \frac{GM\ell^2}{r^3},$$

cujo possível gráfico é apresentado na [Figura 1](#), a depender das relações entre os parâmetros  $M$  e  $\ell$ .

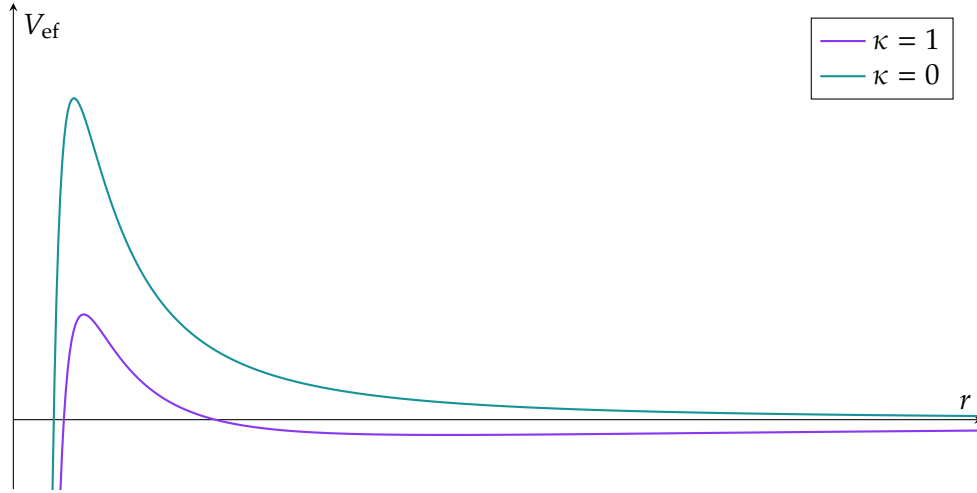


Figura 1: Potencial efetivo radial

Determinemos os pontos críticos do potencial efetivo. Temos

$$\frac{dV_{\text{ef}}}{dr} = \frac{\kappa GM r^2 - \ell^2 r + 3GM\ell^2}{r^4} \quad \text{e} \quad \frac{d^2V_{\text{ef}}}{dr^2} = -\frac{2\kappa GM r^2 - 3\ell^2 r + 12GM\ell^2}{r^5},$$

portanto um ponto crítico do potencial efetivo satisfaz a equação polinomial

$$\kappa GM r^2 - \ell^2 r + 3GM\ell^2 = 0.$$

Para partículas massivas, temos as raízes

$$2GM r_{\pm} = \ell^2 \pm \ell^2 \sqrt{1 - 3 \left( \frac{2GM}{\ell} \right)^2},$$

para  $|\ell| \geq 2\sqrt{3}GM$  e nenhuma raiz real caso contrário. Substituindo essas raízes na segunda derivada do potencial efetivo, obtemos

$$\left( \frac{d^2V_{\text{ef}}}{dr^2} \right)_{r_{\pm}} = \pm 16 \left( \frac{GM}{r_{\pm}} \right)^4 \ell^2 \sqrt{1 - 3 \left( \frac{2GM}{\ell} \right)^2},$$

isto é, se  $|\ell| = 2\sqrt{3}GM$ , há apenas um ponto de inflexão em  $r = \frac{\ell^2}{2GM}$  e se  $|\ell| > 2\sqrt{3}GM$ , há um máximo em  $r_{\text{max}} = r_-$  e um mínimo em  $r_{\text{min}} = r_+$ .