4300337 - Lista de exercícios 3

Louis Bergamo Radial
8992822

7 de abril de 2024

Exercício 1

Exercício 2

Sobre um espaço vetorial V de dimensão n, tensores de segunda ordem têm um total de n^2 componentes. Um tensor antissimétrico $A_{\omega\rho}$ deve satisfazer $A_{\omega\rho} = -A_{\rho\omega}$ para todo par de índices ω, ρ. Assim, temos que as n componentes $A_{\rho\rho}$ são nulas, e a condição das outras $n^2 - n$ componentes, $A_{\omega\rho} = -A_{\rho\omega}$ para $\rho \neq \omega$, reduz o número de componentes independentes para $\frac{n^2-n}{2}$. Semelhantemente, um tensor simétrico $S^{\mu\nu}$ deve satisfazer $S^{\mu\nu} = S^{\nu\mu}$ para todo par de índices μ, ν. Para $\mu = \nu$, esta condição é trivialmente satisfeita, de modo que o número de componentes independentes é $\frac{n^2+n}{2}$. Como exemplo, em um espaço vetorial de dimensão 4, tensores de segunda ordem antissimétricos têm seis componentes independentes e simétricos, dez.

$$S^{\omega\rho}A_{\omega\rho} = -S^{\omega\rho}A_{\rho\omega} = -S^{\rho\omega}A_{\rho\omega} \implies S^{\omega\rho}A_{\omega\rho} = -S^{\omega\rho}A_{\omega\rho} = 0$$

Exercício 3

Consideremos coordenadas esféricas para o espaço tridimensional Euclidiano, dadas por

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \cos\theta = \frac{z}{r}, \quad \text{e} \quad \tan\phi = \frac{y}{x}.$$

Alternativamente, temos

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \quad y = r\sin\theta\sin\phi, \quad \text{e} \quad z = r\cos\theta,$$

de modo que os vetores da base no sistema de coordenadas esféricas são dados por

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_r &= \frac{\partial x}{\partial r}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial y}{\partial r}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial z}{\partial r}\boldsymbol{e}_z \\ &= \sin\theta\cos\phi\boldsymbol{e}_x + \sin\theta\sin\phi\boldsymbol{e}_y + \cos\theta\boldsymbol{e}_z, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_\theta &= \frac{\partial x}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial z}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_z \\ &= r\cos\theta\cos\phi\boldsymbol{e}_x + r\cos\theta\sin\phi\boldsymbol{e}_y - r\sin\theta\boldsymbol{e}_z, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_\phi &= \frac{\partial x}{\partial \phi}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \phi}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial z}{\partial \phi}\boldsymbol{e}_z \\ &= -r\sin\theta\sin\phi\boldsymbol{e}_x + r\sin\theta\cos\phi\boldsymbol{e}_y. \end{aligned}$$

Assim, os coeficientes da métrica Euclidiana nas coordenadas esféricas são dados por

$$g_{rr} = 1, \quad g_{\theta\theta} = r^2, \quad \text{e} \quad g_{\phi\phi} = r^2\sin^2\theta,$$

e as outras componentes nulas.

Consideremos agora a métrica da relatividade restrita $\eta_{\mu\nu}$ e as coordenadas em rotação

$$\begin{cases} t' = t \\ x' = \sqrt{x^2 + y^2}\cos(\phi - \omega t) \\ y' = \sqrt{x^2 + y^2}\sin(\phi - \omega t) \\ z' = z \end{cases}$$

onde $\tan\phi = \frac{y}{x}$. Notemos que

$$x' = x\cos\omega t + y\sin\omega t \quad \text{e} \quad y' = -x\sin\omega t + y\cos\omega t$$

então temos

Exercício 4

Exercício 5

Exercício 6

Exercício 7

Exercício 8

Exercício 9

Exercício 10