4300337 - Lista de exercícios 3

Louis Bergamo Radial
8992822

9 de abril de 2024

Exercício 1

Exercício 2

Sobre um espaço vetorial V de dimensão n, tensores de segunda ordem têm um total de n^2 componentes. Um tensor antissimétrico $A_{\omega\rho}$ deve satisfazer $A_{\omega\rho} = -A_{\rho\omega}$ para todo par de índices ω, ρ. Assim, temos que as n componentes $A_{\rho\rho}$ são nulas, e a condição das outras $n^2 - n$ componentes, $A_{\omega\rho} = -A_{\rho\omega}$ para $\rho \neq \omega$, reduz o número de componentes independentes para $\frac{n^2-n}{2}$. Semelhantemente, um tensor simétrico $S^{\mu\nu}$ deve satisfazer $S^{\mu\nu} = S^{\nu\mu}$ para todo par de índices μ, ν. Para $\mu = \nu$, esta condição é trivialmente satisfeita, de modo que o número de componentes independentes é $\frac{n^2+n}{2}$. Como exemplo, em um espaço vetorial de dimensão 4, tensores de segunda ordem antissimétricos têm seis componentes independentes e simétricos, dez.

$$S^{\omega\rho} A_{\omega\rho} = -S^{\omega\rho} A_{\rho\omega} = -S^{\rho\omega} A_{\rho\omega} \implies S^{\omega\rho} A_{\omega\rho} = -S^{\omega\rho} A_{\omega\rho} = 0$$

Exercício 3

Consideremos coordenadas esféricas para o espaço tridimensional Euclidiano, dadas por

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \cos\theta = \frac{z}{r}, \quad \text{e} \quad \tan\phi = \frac{y}{x}.$$

Alternativamente, temos

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \quad y = r\sin\theta\sin\phi, \quad \text{e} \quad z = r\cos\theta,$$

de modo que os vetores da base no sistema de coordenadas esféricas são dados por

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_r &= \frac{\partial x}{\partial r}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial y}{\partial r}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial z}{\partial r}\boldsymbol{e}_z \\ &= \sin\theta\cos\phi\,\boldsymbol{e}_x + \sin\theta\sin\phi\,\boldsymbol{e}_y + \cos\theta\,\boldsymbol{e}_z, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_\theta &= \frac{\partial x}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial z}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_z \\ &= r\cos\theta\cos\phi\,\boldsymbol{e}_x + r\cos\theta\sin\phi\,\boldsymbol{e}_y - r\sin\theta\,\boldsymbol{e}_z, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_\phi &= \frac{\partial x}{\partial \phi}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \phi}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial z}{\partial \phi}\boldsymbol{e}_z \\ &= -r\sin\theta\sin\phi\,\boldsymbol{e}_x + r\sin\theta\cos\phi\,\boldsymbol{e}_y. \end{aligned}$$

Assim, os coeficientes da métrica Euclidiana nas coordenadas esféricas são dados por

$$g_{rr} = 1, \quad g_{\theta\theta} = r^2, \quad \text{e} \quad g_{\phi\phi} = r^2\sin^2\theta,$$

e as outras componentes nulas.

Consideremos agora a métrica da relatividade restrita $\eta_{\mu\nu}$ e as coordenadas em rotação

$$\begin{cases} t' = t \\ x' = \sqrt{x^2+y^2}\cos(\phi - \omega t) \\ y' = \sqrt{x^2+y^2}\sin(\phi - \omega t) \\ z' = z \end{cases}$$

onde $\tan\phi = \frac{y}{x}$. Notemos que

$$x' = x\cos\omega t + y\sin\omega t \quad \text{e} \quad y' = -x\sin\omega t + y\cos\omega t$$

então ao tomar combinações lineares das equações acima e utilizando $t' = t$, temos

$$\begin{cases} t = t' \\ x = x'\cos\omega t' - y'\sin\omega t' \\ y = x'\sin\omega t' + y'\cos\omega t' \\ z = z' \end{cases}.$$

Assim, os vetores da base são dados por $\boldsymbol{e}_{\mu'} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu'}}\boldsymbol{e}_\nu$, isto é,

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_{0'} = \boldsymbol{e}_0 - \omega(x'\sin\omega t' + y'\cos\omega t')\boldsymbol{e}_1 + \omega(x'\cos\omega t' - y'\cos\omega t')\boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_{1'} = \cos\omega t'\boldsymbol{e}_1 + \sin\omega t'\boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_{2'} = -\sin\omega t'\boldsymbol{e}_1 + \cos\omega t'\boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_{3'} = \boldsymbol{e}_3 \end{cases}.$$

Utilizando a bilinearidade do tensor métrico temos que suas componentes são dadas por

$$g_{\mu'\nu'} = \begin{pmatrix} 1+\omega^2(x'^2+y'^2) & -\omega y' & \omega x' & 0 \\ -\omega y' & 1 & 0 & 0 \\ \omega x' & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{\mu'\nu'}.$$

Desse modo, as componentes $g^{\mu'\nu'}$ são dadas por

$$g_{\mu'\nu'} = \begin{pmatrix} 1 & \omega y' & -\omega x' & 0 \\ \omega y' & 1+\omega^2 y'^2 & -\omega^2 x'y' & 0 \\ -\omega x' & -\omega^2 x'y' & 1+\omega^2 x'^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{\mu'\nu'}.$$

Exercício 4

Para uma conexão de Levi-Civita, isto é, simétrica e compatível com o tensor métrico, os seus coeficientes ${\Gamma^\rho}_{\alpha\beta}$ são dados por

$${\Gamma^\rho}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}g^{\rho\sigma}\left(\partial_\sigma g_{\alpha\beta} - \partial_\alpha g_{\beta\sigma} - \partial_\beta g_{\sigma\alpha}\right)$$

para todas as triplas de índices ρ, α, β.

Para uma métrica diagonal, isto é, $g_{\mu\nu} = 0 \iff \mu \neq \nu$, temos $g^{\mu\nu} = 0 \iff \mu \neq \nu$, de modo que os coeficientes da conexão são dados por

$${\Gamma^\rho}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2g_{\rho\rho}}\left(\partial_\rho g_{\alpha\beta} - \partial_\alpha g_{\beta\rho} - \partial_\beta g_{\rho\alpha}\right)$$

neste caso, e nesta expressão índices repetidos não são somados. Podemos simplificar adiante separando em casos: sejam μ, ν, λ índices todos distintos, então

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\lambda}{}_{\lambda\lambda} &= -\frac{1}{2g_{\lambda\lambda}}\left(\partial_\lambda g_{\lambda\lambda} - \partial_\lambda g_{\lambda\lambda} - \partial_\lambda g_{\lambda\lambda}\right) & \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\lambda} &= -\frac{1}{2g_{\lambda\lambda}}\left(\partial_\lambda g_{\mu\lambda} - \partial_\mu g_{\lambda\lambda} - \partial_\lambda g_{\lambda\mu}\right) \\
&= \frac{\partial_\lambda g_{\lambda\lambda}}{2g_{\lambda\lambda}} = \partial_\lambda \ln\sqrt{|g_{\lambda\lambda}|} & &= \frac{\partial_\mu g_{\lambda\lambda}}{2g_{\lambda\lambda}} = \partial_\mu \ln\sqrt{|g_{\lambda\lambda}|} \\
\\
\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\mu} &= -\frac{1}{2g_{\lambda\lambda}}\left(\partial_\lambda g_{\mu\mu} - \partial_\mu g_{\mu\lambda} - \partial_\mu g_{\lambda\mu}\right) & \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} &= -\frac{1}{2g_{\lambda\lambda}}\left(\partial_\lambda g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\nu g_{\lambda\mu}\right) \\
&= -\frac{\partial_\lambda g_{\mu\mu}}{2g_{\lambda\lambda}} & &= 0
\end{aligned}$$

são todos os coeficientes da conexão para o caso de uma métrica diagonal.

Exercício 5

Exercício 6

Exercício 7

Exercício 8

Exercício 9

Exercício 10