

# 4300337 - Lista de exercícios 2

Louis Bergamo Radial  
8992822

19 de março de 2024

## Exercício 1

Para que um corpo de massa  $m$  tenha uma energia cinética  $K$ , sua velocidade  $v$  satisfaz

$$\left( \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1 \right) mc^2 = K.$$

Isolando  $v$ , obtemos

$$v = c \sqrt{1 - \left( \frac{1}{\frac{K}{mc^2} + 1} \right)^2}.$$

Assim, para que uma partícula tenha energia cinética igual a sua energia de repouso, sua velocidade é

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2} c.$$

Pelo mesmo cálculo, para que uma bola de canhão de massa  $m = 1 \text{ kg}$  tenha a mesma energia cinética que um próton, de massa  $m_p \approx 1.673 \times 10^{-27} \text{ kg}$ , de um raio cósmico em movimento com fator de Lorentz  $\gamma = 10^{11}$ , sua velocidade deve ser

$$\begin{aligned} v &= c \sqrt{1 - \left( \frac{1}{\frac{(\gamma-1)m_p c^2}{mc^2} + 1} \right)^2} \\ &= c \sqrt{1 - \left( \frac{1}{\frac{(\gamma-1)m_p}{m} + 1} \right)^2} \\ &\approx 5.483 \text{ m s}^{-1}. \end{aligned}$$

## Exercício 2

No referencial do centro de massa, o 4-momento do sistema é dado por

$$P^\mu = \left( m_1 c^2, \vec{0} \right)^\mu,$$

visto que antes do decaimento a partícula de massa  $m_1$  está em repouso neste referencial. Notaremos por  $(P_{m_i})^\mu$  a componente (neste caso contravariante)  $\mu$  do 4-momento da partícula de massa  $m_i$ . Por conservação do 4-momento, temos

$$(P_{m_1})^\mu = (P_{m_2})^\mu + (P_{m_3})^\mu,$$

com  $P_{m_1}$  dado acima.

Assim, temos

$$\begin{aligned} (P_{m_2})_\mu (P_{m_2})^\mu &= (P_{m_1} - P_{m_3})_\mu (P_{m_1} - P_{m_3})^\mu \\ &= (P_{m_1})_\mu (P_{m_1})^\mu + (P_{m_2})_\mu (P_{m_2})^\mu - 2 (P_{m_1})_\mu (P_{m_3})^\mu. \end{aligned}$$

Como  $(P_{m_i})_\mu (P_{m_i})^\mu = -m_i^2 c^2$ , obtemos a energia da partícula de massa  $m_3$

$$-m_2^2 c^2 = -m_1^2 c^2 - m_3^2 c^2 + 2m_1 E_3 \implies E_3 = \frac{m_1^2 - m_2^2 + m_3^2}{2m_1} c^2.$$

Pelo mesmo argumento, obtemos a energia da outra partícula

$$-m_3^2 c^2 = -m_1^2 c^2 - m_2^2 c^2 + 2m_1 E_2 \implies E_2 = \frac{m_1^2 + m_2^2 - m_3^2}{2m_1} c^2.$$

### Exercício 3

### Exercício 4

Consideremos a força  $F^i = \frac{dp^i}{dt}$ . Em notação vetorial temos  $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$ , donde segue

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{d\gamma}{dt} m \vec{v} + \gamma m \frac{d\vec{v}}{dt} \\ &= \frac{d\gamma}{dt} m \vec{v} + \gamma m \vec{a}, \end{aligned}$$

onde  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$  é a 3-aceleração da partícula.

Notemos que

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{dt} &= \left[ 1 - \left( \frac{v}{c} \right)^2 \right]^{-\frac{3}{2}} \frac{v}{c^2} \frac{dv}{dt} \\ &= \frac{\gamma^3}{c^2} \langle \vec{v}, \vec{a} \rangle, \end{aligned}$$

onde foi utilizada a relação

$$2v \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 2 \langle \vec{v}, \vec{a} \rangle.$$

Dessa forma, obtemos

$$\vec{F} = \gamma m \left( \vec{a} + \frac{\gamma^2}{c^2} \langle \vec{v}, \vec{a} \rangle \vec{v} \right).$$

No caso particular em que a força é paralela à velocidade, devemos ter que a aceleração é também paralela à velocidade. Assim,  $\vec{v} = v \hat{n}$ ,  $\vec{a} = a \hat{n}$  e  $\vec{F} = F \hat{n}$  para algum vetor unitário  $\hat{n}$ , então

$$\begin{aligned} F &= \gamma m a \left( 1 + \gamma^2 \frac{v^2}{c^2} \right) \\ &= \gamma^3 m a. \end{aligned}$$

Como um exemplo, tomemos uma partícula de carga  $q$  com velocidade  $\vec{v} = v \hat{x}$  que parte do repouso na origem num campo uniforme  $\vec{E} = E \hat{x}$ . Assim,

$$qE = \gamma^3 m a.$$

Notemos que isso é uma equação diferencial a variáveis separáveis

$$\left[ 1 - \left( \frac{v}{c} \right)^2 \right]^{-\frac{3}{2}} dv = \frac{qE}{m} dt \implies \frac{v}{\sqrt{1 - \left( \frac{v}{c} \right)^2}} = \frac{qEt}{m}.$$

Resolvendo para  $v$ , obtemos

$$v^2 = \frac{1}{\left( \frac{m}{qEt} \right)^2 + \left( \frac{1}{c} \right)^2} \implies v = \sqrt{\frac{c^2}{\left( \frac{mc}{qEt} \right)^2 - 1}}.$$

## Exercício 5

Utilizando a notação  $\mu \rightarrow \mu'$  para denotar uma transformação de Lorentz das componentes de um quadri-vetor,

$$x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\mu} x^{\mu} \quad \text{e} \quad x_{\mu'} = \Lambda^{\mu}_{\mu'} x_{\mu},$$

temos que as componentes  $T^{\mu_1, \dots, \mu_p}_{\nu_1, \dots, \nu_q}$  de um tensor tipo  $(p, q)$  se transformam de acordo com

$$T^{\mu'_1, \dots, \mu'_p}_{\nu'_1, \dots, \nu'_q} = \Lambda^{\mu'_1}_{\mu_1} \cdots \Lambda^{\mu'_p}_{\mu_p} \Lambda^{\nu_1}_{\nu'_1} \cdots \Lambda^{\nu_q}_{\nu'_q} T^{\mu_1, \dots, \mu_p}_{\nu_1, \dots, \nu_q}.$$

Dada uma base  $\hat{e}_{(\mu)}$ , temos

$$x = x^{\mu} \hat{e}_{(\mu)} = x^{\mu'} \hat{e}_{(\mu')},$$

isto é, uma mudança de referencial não muda o vetor em si, apenas os valores das componentes. Assim,

$$x^{\mu} \hat{e}_{(\mu)} = \Lambda^{\mu'}_{\nu} x^{\nu} \Lambda^{\sigma}_{\mu'} \hat{e}_{(\sigma)} \implies \Lambda^{\sigma}_{\mu'} \Lambda^{\mu'}_{\nu} = \delta^{\sigma}_{\nu}.$$

Pelo mesmo argumento para o espaço dual, obtemos

$$\Lambda^{\sigma'}_{\mu} \Lambda^{\mu}_{\nu'} = \delta^{\sigma'}_{\nu'}.$$

Podemos mostrar a invariância do intervalo  $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}$ . Pela transformações de tensores, temos

$$\begin{aligned} \eta_{\mu'\nu'} dx^{\mu'} dx^{\nu'} &= \Lambda^{\mu}_{\mu'} \Lambda^{\nu}_{\nu'} \eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu'}_{\sigma} \Lambda^{\nu'}_{\rho} dx^{\sigma} dx^{\rho} \\ &= \delta^{\mu}_{\sigma} \delta^{\nu}_{\rho} \eta_{\mu\nu} dx^{\sigma} dx^{\rho} \\ &= \eta_{\mu\nu} dx^{\sigma} dx^{\rho} \\ &= ds^2. \end{aligned}$$

Consideremos  $\delta^{\mu'}_{\nu'} = \eta^{\mu'\sigma'} \eta_{\sigma'\nu'}$ , então

$$\begin{aligned} \delta^{\mu'}_{\nu'} &= \Lambda^{\mu'}_{\mu} \Lambda^{\sigma'}_{\beta} \eta^{\mu\beta} \Lambda^{\rho}_{\sigma'} \Lambda^{\nu}_{\nu'} \eta_{\rho\nu} \\ &= \Lambda^{\rho}_{\sigma'} \Lambda^{\sigma'}_{\beta} \Lambda^{\mu'}_{\mu} \Lambda^{\nu}_{\nu'} \eta^{\mu\beta} \eta_{\rho\nu} \\ &= \delta^{\rho}_{\beta} \Lambda^{\mu'}_{\mu} \Lambda^{\nu}_{\nu'} \eta^{\mu\beta} \eta_{\rho\nu} \\ &= \Lambda^{\mu'}_{\mu} \Lambda^{\nu}_{\nu'} \eta^{\mu\rho} \eta_{\rho\nu} \\ &= \Lambda^{\mu'}_{\mu} \Lambda^{\nu}_{\nu'} \delta^{\mu}_{\nu}. \end{aligned}$$

## Exercício 6

## Exercício 7

## Exercício 8