4300337 - Lista de exercícios 3

Louis Bergamo Radial
8992822

19 de abril de 2024

Exercício 1

No contexto da mecânica Newtoniana, a massa inercial m_i de uma partícula é relacionada à força resultante que age nela pela segunda lei de Newton, $\boldsymbol{F} = m_i \boldsymbol{a}$. Com sua lei de gravitação, temos que a força gravitacional é dada por $\boldsymbol{F}_g = -m_g \nabla \Phi$, onde m_g é a massa gravitacional e Φ é o potencial gravitacional. O Princípio de Equivalência Fraco diz que a massa inercial inercial e a massa gravitacional são iguais, de modo que qualquer partícula em queda livre tem aceleração dada por $\boldsymbol{a} = -\nabla \Phi$. A série de experimentos por Eötvös no fim do século XIX verificou o Princípio de Equivalência Fraco com precisão de 5×10^{-9}, enquanto que atualmente a precisão é da ordem de 10^{-15}.

Ainda, em uma região suficientemente pequena, podemos aproximar o gradiente $-\nabla\Phi$ para uma constante $\boldsymbol{g}$, de modo que nesta região todas as partículas em queda livre têm aceleração uniforme igual a $\boldsymbol{g}$. Assim, um campo gravitacional homogêneo é equivalente à uma aceleração do sistema de referência. O Princípio de Equivalência de Einstein diz que, em regiões suficientemente pequenas do espaço-tempo, vale a Relatividade Restrita e e que é impossível detectar a existência de um campo gravitacional por experimentos locais. Isto é, localmente um campo gravitacional é indistinguível à um referencial uniformemente acelerado, ilustrado pelo *Gedankenexperiment* do elevador de Einstein.

O Princípio de Equivalência Forte diz que para uma trajetória de uma partícula massiva em queda livre em um campo gravitacional qualquer, é possível escolher um sistema de coordenadas localmente inercial, de modo que, em uma região do espaço-tempo suficientemente pequena ao redor desta trajetória, todas as leis físicas são equivalentes às suas formulações em sistemas de referência não acelerados na ausência da gravidade.

Exercício 2

Sobre um espaço vetorial V de dimensão n, tensores de segunda ordem têm um total de n^2 componentes. Um tensor antissimétrico $A_{\omega\rho}$ deve satisfazer $A_{\omega\rho} = -A_{\rho\omega}$ para todo par de índices ω, ρ. Assim, temos que as n componentes $A_{\rho\rho}$ são nulas, e a condição das outras $n^2 - n$ componentes, $A_{\omega\rho} = -A_{\rho\omega}$ para $\rho \neq \omega$, reduz o número de componentes independentes para $\frac{n^2-n}{2}$. Semelhantemente, um tensor simétrico $S^{\mu\nu}$ deve satisfazer $S^{\mu\nu} = S^{\nu\mu}$ para todo par de índices μ, ν. Para $\mu = \nu$, esta condição é trivialmente satisfeita, de modo que o número de componentes independentes é $\frac{n^2+n}{2}$. Como exemplo, em um espaço vetorial de dimensão 4, tensores de segunda ordem antissimétricos têm seis componentes independentes e simétricos, dez.

Mostremos que a contração de um tensor simétrico com um tensor antissimétrico tem uma propriedade muito útil, $S^{\omega\rho} A_{\omega\rho} = 0$. Por antissimetria e simetria temos

$$S^{\omega\rho} A_{\omega\rho} = -S^{\omega\rho} A_{\rho\omega} = -S^{\rho\omega} A_{\rho\omega}.$$

Como os índices estão sendo somados, podemos renomeá-los. Em particular, podemos renomear na soma à direita $\omega \to \rho$ e $\rho \to \omega$, obtendo

$$S^{\omega\rho} A_{\omega\rho} = -S^{\omega\rho} A_{\omega\rho},$$

isto é $S^{\omega\rho} A_{\omega\rho} = 0$.

Exercício 3

Coordenadas esféricas em $\mathbb{R}^3$

Consideremos coordenadas esféricas para o espaço tridimensional Euclidiano, dadas por

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \cos\theta = \frac{z}{r}, \quad \text{e} \quad \tan\phi = \frac{y}{x}.$$

Alternativamente, temos

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \quad y = r\sin\theta\sin\phi, \quad \text{e} \quad z = r\cos\theta,$$

de modo que os vetores da base no sistema de coordenadas esféricas são dados por

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_r &= \frac{\partial x}{\partial r}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial y}{\partial r}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial z}{\partial r}\boldsymbol{e}_z \\ &= \sin\theta\cos\phi\boldsymbol{e}_x + \sin\theta\sin\phi\boldsymbol{e}_y + \cos\theta\boldsymbol{e}_z, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_\theta &= \frac{\partial x}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial z}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_z \\ &= r\cos\theta\cos\phi\boldsymbol{e}_x + r\cos\theta\sin\phi\boldsymbol{e}_y - r\sin\theta\boldsymbol{e}_z, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_\phi &= \frac{\partial x}{\partial \phi}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \phi}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial z}{\partial \phi}\boldsymbol{e}_z \\ &= -r\sin\theta\sin\phi\boldsymbol{e}_x + r\sin\theta\cos\phi\boldsymbol{e}_y. \end{aligned}$$

Com os vetores da base desse sistema de coordenadas, podemos obter os coeficientes da métrica por

$$g'_{ij} = g(\boldsymbol{e}'_i, \boldsymbol{e}'_j)$$

e utilizando os valores do tensor métrico na base de coordenadas cartesianas, dados por

$$g(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_x) = g(\boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_y) = g(\boldsymbol{e}_z, \boldsymbol{e}_z) = 1$$

e os demais são iguais a zero. Assim, os coeficientes da métrica Euclidiana nas coordenadas esféricas são obtidas por

$$\begin{aligned} g'_{rr} &= g(\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_r) \\ &= \sin^2\theta\cos^2\phi + \sin^2\theta\sin^2\phi + \cos^2\theta \\ &= 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'_{r\theta} &= g(\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta) \\ &= r\sin\theta\cos\theta\cos^2\phi + r\sin\theta\cos\theta\sin^2\phi - r\sin\theta\cos\theta \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'_{r\phi} &= g(\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\phi) \\ &= -r\sin^2\theta\cos\phi\sin\phi + r\sin^2\theta\cos\phi\sin\phi \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'_{\theta\theta} &= g(\boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\theta) \\ &= r^2\cos^\theta\cos^2\phi + r^2\cos^\theta\sin^2\phi + r^2\sin^2\theta \\ &= r^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'_{\theta\phi} &= g(\boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\phi) \\ &= -r^2\cos\theta\sin\theta\cos\phi\sin\phi + r^2\cos\theta\sin\theta\cos\phi\sin\phi \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'_{\phi\phi} &= g(\boldsymbol{e}_\phi, \boldsymbol{e}_\phi) \\ &= r^2\sin^2\theta\sin^2\phi + r^2\sin^2\theta\cos^2\phi \\ &= r^2\sin^2\theta, \end{aligned}$$

e os outros por simetria do tensor métrico. Brevemente, obtemos a métrica dada por

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2$$

do espaço Eucliadiano em coordenadas esféricas.

Coordenadas em rotação no espaço-tempo de Minkowski

Consideremos agora a métrica da relatividade restrita $\eta_{\mu\nu}$ e as coordenadas em rotação

$$\begin{cases} t' = t \\ x' = \sqrt{x^2 + y^2}\cos(\phi - \omega t) \\ y' = \sqrt{x^2 + y^2}\sin(\phi - \omega t) \\ z' = z \end{cases}$$

onde $\tan\phi = \frac{y}{x}$. Notemos que

$$x' = x\cos\omega t + y\sin\omega t \quad \text{e} \quad y' = -x\sin\omega t + y\cos\omega t$$

então ao tomar combinações lineares das equações acima e utilizando $t' = t$, temos

$$\begin{cases} t = t' \\ x = x'\cos\omega t' - y'\sin\omega t' \\ y = x'\sin\omega t' + y'\cos\omega t' \\ z = z' \end{cases}.$$

Assim, os vetores da base são dados por $\boldsymbol{e}_{\mu'} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu'}}\boldsymbol{e}_\nu$, isto é,

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_{0'} = \boldsymbol{e}_0 - \omega(x'\sin\omega t' + y'\cos\omega t')\boldsymbol{e}_1 + \omega(x'\cos\omega t' - y'\cos\omega t')\boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_{1'} = \cos\omega t'\boldsymbol{e}_1 + \sin\omega t'\boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_{2'} = -\sin\omega t'\boldsymbol{e}_1 + \cos\omega t'\boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_{3'} = \boldsymbol{e}_3 \end{cases}.$$

Utilizando a bilinearidade do tensor métrico e que $g(\boldsymbol{e}_\mu, \boldsymbol{e}_\nu) = \eta_{\mu\nu}$, temos que $g_{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^{\mu'}}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^{\nu'}}\eta_{\alpha\beta}$. Calculemos explicitamente a componente $0'0'$:

$$\begin{aligned} g_{0'0'} &= g(\boldsymbol{e}_{0'}, \boldsymbol{e}_{0'}) = g(\boldsymbol{e}_{0'}, \boldsymbol{e}_0 - \omega(x'\sin\omega t' + y'\cos\omega t')\boldsymbol{e}_1 + \omega(x'\cos\omega t' - y'\cos\omega t')\boldsymbol{e}_2) \\ &= -1 + \omega^2\left(x'\sin\omega t' + y'\cos\omega t'\right)^2 + \omega^2\left(x'\cos\omega t' - y'\cos\omega t'\right)^2 \\ &= -1 + \omega^2\left(x'^2 + y'^2\right). \end{aligned}$$

Repetindo o mesmo procedimento para as outras componentes, obtemos as componentes da métrica nas coordenadas em rotação

$$g_{\mu'\nu'} = \begin{pmatrix} -1 + \omega^2(x'^2 + y'^2) & -\omega y' & \omega x' & 0 \\ -\omega y' & 1 & 0 & 0 \\ \omega x' & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{\mu'\nu'}.$$

Desse modo, obtemos as componentes da métrica inversa $g^{\mu'\nu'}$ por escalonamento, resultando em

$$g^{\mu'\nu'} = \begin{pmatrix} -1 & -\omega y' & \omega x' & 0 \\ -\omega y' & 1 - \omega^2 y'^2 & \omega^2 x' y' & 0 \\ \omega x' & \omega^2 x' y' & 1 - \omega^2 x'^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\mu'\nu'}.$$

Exercício 4

Para uma conexão de Levi-Civita, isto é, simétrica e compatível com o tensor métrico, os seus coeficientes ${\Gamma^\rho}_{\alpha\beta}$ são dados por

$${\Gamma^\rho}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}g^{\rho\sigma}\left(\partial_\sigma g_{\alpha\beta} - \partial_\alpha g_{\beta\sigma} - \partial_\beta g_{\sigma\alpha}\right)$$

para todas as triplas de índices ρ, α, β.

Para uma métrica diagonal, isto é, $g_{\mu\nu} = 0 \iff \mu \neq \nu$, temos $g^{\mu\nu} = 0 \iff \mu \neq \nu$, de modo que os coeficientes da conexão são dados por

$$\Gamma^{\rho}{}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2g_{\rho\rho}} \left(\partial_\rho g_{\alpha\beta} - \partial_\alpha g_{\beta\rho} - \partial_\beta g_{\rho\alpha}\right)$$

neste caso, e nesta expressão índices repetidos não são somados. Podemos simplificar adiante separando em casos: sejam μ, ν, λ índices todos distintos, então

$$\begin{aligned} \Gamma^{\lambda}{}_{\lambda\lambda} &= -\frac{1}{2g_{\lambda\lambda}} \left(\partial_\lambda g_{\lambda\lambda} - \partial_\lambda g_{\lambda\lambda} - \partial_\lambda g_{\lambda\lambda}\right) & \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\lambda} &= -\frac{1}{2g_{\lambda\lambda}} \left(\partial_\lambda g_{\mu\lambda} - \partial_\mu g_{\lambda\lambda} - \partial_\lambda g_{\lambda\mu}\right) \\ &= \frac{\partial_\lambda g_{\lambda\lambda}}{2g_{\lambda\lambda}} = \partial_\lambda \ln \sqrt{|g_{\lambda\lambda}|} & &= \frac{\partial_\mu g_{\lambda\lambda}}{2g_{\lambda\lambda}} = \partial_\mu \ln \sqrt{|g_{\lambda\lambda}|} \\ \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\mu} &= -\frac{1}{2g_{\lambda\lambda}} \left(\partial_\lambda g_{\mu\mu} - \partial_\mu g_{\mu\lambda} - \partial_\mu g_{\lambda\mu}\right) & \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} &= -\frac{1}{2g_{\lambda\lambda}} \left(\partial_\lambda g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\nu g_{\lambda\mu}\right) \\ &= -\frac{\partial_\lambda g_{\mu\mu}}{2g_{\lambda\lambda}} & &= 0 \end{aligned}$$

são todos os coeficientes da conexão para o caso de uma métrica diagonal.

Exercício 5

Utilizando os resultados do exercício anterior, os coeficientes da conexão de Levi-Civita para as coordenadas esféricas no espaço Euclidiano são dados por

$$\begin{aligned} \Gamma^{r}{}_{\theta\theta} &= -\frac{\partial_r(r^2)}{2} = -r & \Gamma^{r}{}_{\phi\phi} &= -\frac{\partial_r(r^2 \sin^2\theta)}{2} = -r\sin^2\theta \\ \Gamma^{\theta}{}_{\theta r} &= \frac{\partial_r(r^2)}{2r^2} = \frac{1}{r} & \Gamma^{\theta}{}_{\phi\phi} &= -\frac{\partial_\theta(r^2\sin^2\theta)}{2r^2} = -\sin\theta\cos\theta \\ \Gamma^{\phi}{}_{\phi r} &= \frac{\partial_r(r^2\sin^2\theta)}{r^2\sin^2\theta} = \frac{1}{r} & \Gamma^{\phi}{}_{\phi\theta} &= \frac{\partial_\theta(r^2\sin^2\theta)}{r^2\sin^2\theta} = \cot\theta, \end{aligned}$$

e os outros termos são ou nulos ou obtidos pela simetria da conexão.

Seja uma curva

$$\begin{aligned} \gamma : I \subset \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^3 \\ \lambda &\mapsto \left(x^r(\lambda), x^\theta(\lambda), x^\phi(\lambda)\right). \end{aligned}$$

Assim, para que γ seja uma geodésica, devemos ter

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^k}{\mathrm{d}\lambda^2} + \Gamma^{k}{}_{ij} \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}\lambda} = 0$$

para k igual a r, θ e ϕ. Assim, de forma explícita, as equações da geodésica são dadas por

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta = 0 \\ \ddot{\theta} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta} - \dot{\phi}^2 \sin\theta\cos\theta = 0 \\ \ddot{\phi} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\phi} + 2\dot{\phi}\dot{\theta}\cot\theta = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta = 0 \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \sin\theta\cos\theta = 0 \\ r\ddot{\phi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\phi} + 2\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta = 0 \end{cases},$$

onde, para simplificar, denotamos $r = x^r$, $\theta = x^\theta$ e $\phi = x^\phi$ e os pontos sobre as variáveis denotam que estas funções componente foram derivadas em relação ao parâmetro afim λ.

Em analogia ao movimento de uma partícula em mecânica clássica, sabemos que as equações acima especificam uma partícula se movendo ao longo de uma curva γ com aceleração nula, isto é, cada equação é uma componente da aceleração desta partícula. Desse modo, como o parâmetro λ é afim, uma vez que buscamos uma geodésica, sabemos que o vetor tangente à curva é constante. Integrando mais uma vez, obtemos que a solução deste sistema de equações é uma reta.

Exercício 6

Um espaço topológico é uma dupla $(M, \mathcal{O}_M)$ composta por um conjunto M e uma topologia $\mathcal{O}_M$. Um subconjunto U de M é dito ser aberto em relação a este espaço topológico se $U \in \mathcal{O}_M$. Uma aplicação $f : M \to N$ entre espaços topológicos $(M, \mathcal{O}_M)$ e $(N, \mathcal{O}_N)$ é dita contínua se sua pré-imagem de um aberto é aberta, e é dita um homeomorfismo se for bijetiva e tanto f quanto f^{-1} forem contínuas. Se existe um homeomorfismo entre dois espaços topológicos, estes são ditos homeomorfos.

Se existe um número inteiro n tal que todo aberto $U \in \mathcal{O}_M$ é homeomorfo a $\mathbb{R}^n$, em relação à topologia usual do espaço Euclidiano, dizemos que $(M, \mathcal{O}_M)$ é um espaço topológico localmente Euclidiano de dimensão n. Ainda, para cada aberto $U \in \mathcal{O}_M$ existe um homeomorfismo $x : U \to x(U) \subset \mathbb{R}^n$, e chamamos o par (U, x) de carta local. Um atlas $\mathscr{A}_M$ é uma coleção de cartas locais tal que a união dos abertos cobre o conjunto M.

Consideremos agora duas cartas $(U, x), (V, x) \in \mathscr{A}_M$ tal que $U \cap V \neq \emptyset$.

$$\begin{tikzcd}
 & U \cap V \arrow[dl, "x"'] \arrow[dr, "y"] & \\
x(U \cap V) \arrow[rr, "y \circ x^{-1}"] & & y(U \cap V)
\end{tikzcd}$$

Como uma composição de homeomorfismos, segue que a aplicação de transição $y \circ x^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um homeomorfismo, isto é, contínua. Como uma função em $\mathbb{R}^n$, podemos utilizar análise usual para decidir se esta função é diferenciável. Duas cartas locais $(U, x), (V, y)$ são ditas C^k-compatíveis se ou $U \cap V \neq \emptyset$ e a aplicação de transição $y \circ x^{-1}$ é de classe C^k ou se $U \cap V = \emptyset$. Ainda, um atlas é dito C^k-compatível se todo par de cartas locais são C^k-compatíveis.

Uma variedade diferenciável $(M, \mathcal{O}_M, \mathscr{A}_M)$ é um espaço topológico $(M, \mathcal{O}_M)$ localmente Euclidiano munido de um atlas maximal suave $\mathscr{A}_M$, isto é, um atlas C^∞-compatível com a propriedade de que se uma carta (U, x) é compatível com uma carta $(V, y) \in \mathscr{A}_M$, então $(U, x) \in \mathscr{A}_M$. A estrutura diferencial dada pelo atlas permite definir em todo ponto $p \in M$ um espaço vetorial T_pM, chamado de espaço tangente no ponto p, cujos elementos são derivações na álgebra $C^\infty(M)$ de funções suaves $f : M \to \mathbb{R}$. Geometricamente, cada elemento $X \in T_pM$ é um operador de derivada direcional ao longo de alguma curva suave $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ que passa por $p = \gamma(0)$. O espaço dual T_p^*M é chamado de espaço cotangente no ponto p, cujos elementos são relacionados com as curvas de nível de funções suaves $C^\infty(M)$.

Utilizando o atlas da variedade, podemos definir um atlas para a união disjunta dos espaços tangentes, construindo assim o fibrado tangente TM, que é também uma variedade diferenciável. Uma aplicação suave $p \mapsto X_p$ que associa um ponto p da variedade a um vetor $X_p \in T_pM \subset TM$ do fibrado tangente é chamada de campo de vetores. Analogamente, definimos o fibrado cotangente T^*M, em que uma aplicação suave $p \mapsto \omega_p$ que associa um ponto $p \in M$ a um elemento $\omega_p \in T_p^*M \subset T^*M$ é chamada de 1-forma diferencial, ou campo de covetores. Uma função multilinear de campos de vetores e de 1-formas diferenciais é chamada de tensor na variedade.

Resumindo de forma mais informal, uma variedade diferenciável é um conjunto M que localmente se parece com algum espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$, e no qual podemos definir ponto a ponto um espaço vetorial, que é intimamente relacionado à estrutura diferencial fornecida à M por um atlas de cartas de coordenadas locais. Um tensor no contexto de uma variedade diferenciável é uma função multilinear de vetores e 1--formas definida em todo ponto da variedade.

Exercício 7

Consideremos duas cartas locais de coordenadas locais (U, x) e (U, x'), com

$$\partial_\alpha = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \partial'_\mu \quad \text{e} \quad g_{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} g'_{\mu\nu}.$$

Pela definição dos coeficientes da conexão de Levi-Civita em uma carta $\tilde{x}$,

$$\tilde{\Gamma}^\lambda{}_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} \tilde{g}^{\lambda\omega} \left(\tilde{\partial}_\rho \tilde{g}_{\omega\sigma} + \tilde{\partial}_\sigma \tilde{g}_{\omega\sigma} - \tilde{\partial}_\omega \tilde{g}_{\rho\sigma} \right),$$

podemos obter a transformação destes coeficientes. Temos

$$\begin{aligned}
\partial_\gamma g_{\alpha\beta} &= \partial_\gamma \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} g'_{\mu\nu} \right) \\
&= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \partial_\gamma g'_{\mu\nu} + g'_{\mu\nu} \partial_\gamma \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \right) \\
&= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \partial'_\lambda g'_{\mu\nu} + g'_{\mu\nu} \left(\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\gamma \partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\gamma \partial x^\beta} \right)
\end{aligned}$$

portanto, por permutações cíclicas de α, β, γ e renomeando alguns índices que estão sendo somados, temos

$$\begin{aligned}
\partial_\alpha g_{\beta\gamma} &= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\gamma} \partial'_\lambda g'_{\mu\nu} + g'_{\mu\nu} \left(\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta} \frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} \right) \\
&= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \partial'_\mu g'_{\nu\lambda} + g'_{\nu\mu} \left(\frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} \right) \\
&= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \partial'_\mu g'_{\nu\lambda} + g'_{\mu\nu} \left(\frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} \right)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\partial_\beta g_{\gamma\alpha} &= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\beta} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\alpha} \partial'_\lambda g'_{\mu\nu} + g'_{\mu\nu} \left(\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\gamma} \frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} \right) \\
&= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \partial'_\nu g'_{\lambda\mu} + g'_{\nu\mu} \frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} + g'_{\mu\nu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\gamma} \frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} \\
&= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \partial'_\nu g'_{\lambda\mu} + g'_{\mu\nu} \left(\frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\gamma} \frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} \right),
\end{aligned}$$

onde utilizamos que as componentes da métrica são simétricos. Utilizando o guia dos termos sublinhados, obtemos a transformação dos coeficientes da conexão sob mudança de cartas,

$$\begin{aligned}
\Gamma^\rho{}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} g^{\rho\gamma} \left(\partial_\alpha g_{\beta\gamma} + \partial_\beta g_{\gamma\alpha} - \partial_\gamma g_{\alpha\beta} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\xi} g'^{\sigma\xi} \right) \left[\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \left(\partial'_\mu g'_{\nu\lambda} + \partial'_\nu g'_{\lambda\mu} - \partial'_\lambda g'_{\mu\nu} \right) + 2 g'_{\mu\nu} \left(\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\gamma} \right) \right] \\
&= \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\xi} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} g'^{\sigma\xi} \left(\partial'_\mu g'_{\nu\lambda} + \partial'_\nu g'_{\lambda\mu} - \partial'_\lambda g'_{\mu\nu} \right) + \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\xi} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\gamma} g'^{\sigma\xi} g'_{\mu\nu} \left(\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \right) \right] \\
&= \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \delta^\lambda{}_\xi g'^{\sigma\xi} \left(\partial'_\mu g'_{\nu\lambda} + \partial'_\nu g'_{\lambda\mu} - \partial'_\lambda g'_{\mu\nu} \right) + \delta^\nu{}_\xi g'^{\sigma\xi} g'_{\mu\nu} \left(\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \right) \right] \\
&= \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \left[\frac{1}{2} g'^{\sigma\lambda} \left(\partial'_\mu g'_{\nu\lambda} + \partial'_\nu g'_{\lambda\mu} - \partial'_\lambda g'_{\mu\nu} \right) \right] + \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} g'^{\sigma\nu} g'_{\mu\nu} \left(\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \right) \\
&= \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \Gamma'^\sigma{}_{\mu\nu} + \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial^2 x'^\sigma}{\partial x^\alpha \partial x^\beta},
\end{aligned}$$

então pela presença do termo afim $\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial^2 x'^\sigma}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}$ não necessariamente nulo, estes coeficientes não se transformam como tensores.

Para um vetor V^ρ, consideremos o objeto $\partial_\alpha V^\rho$ na carta local de coordenadas x. Em outra carta de coordenadas x', temos

$$V^\rho = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} V'^\nu,$$

de modo que

$$\begin{aligned}
\partial_\alpha V^\rho &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \partial'_\mu \left(\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} V'^\sigma \right) \\
&= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \partial'_\mu V'^\sigma + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu \partial x'^\sigma} V'^\sigma,
\end{aligned}$$

e por conta do termo afim $\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu \partial x'^\sigma} V'^\sigma$ não necessariamente nulo, este objeto não se transforma como um tensor.

Mostremos que $\nabla_\alpha V^\rho = \partial_\alpha V^\rho + \Gamma^\rho{}_{\alpha\beta} V^\beta$ se transforma como um tensor. Notemos que

$$\begin{aligned}
\Gamma^\rho{}_{\alpha\beta} V^\beta &= \left(\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \Gamma'^\sigma{}_{\mu\nu} + \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial^2 x'^\sigma}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \right) V^\beta \\
&= \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \Gamma'^\sigma{}_{\mu\nu} V'^\nu + \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial^2 x'^\sigma}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} V^\beta .
\end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}
\nabla_\alpha V^\rho &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \left(\partial'_\mu V'^\sigma + \Gamma'^\sigma{}_{\mu\nu} V'^\nu \right) + \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial^2 x'^\sigma}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} V^\beta + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu \partial x'^\sigma} V'^\sigma \\
&= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \nabla'_\mu V'^\sigma + \left(\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial^2 x'^\sigma}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} + \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\beta} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu \partial x'^\sigma} \right) V^\beta \\
&= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \nabla'_\mu V'^\sigma + \left(\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\beta} + \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\beta} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \right) V^\beta \\
&= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \nabla'_\mu V'^\sigma + \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\beta} \right) V^\beta \\
&= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \nabla'_\mu V'^\sigma + \left(\partial_\alpha \delta^\rho{}_\beta \right) V^\beta \\
&= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \nabla'_\mu V'^\sigma ,
\end{aligned}$$

já que o $\partial_\alpha \delta^\rho{}_\beta = 0$. Segue que este objeto se transforma como um tensor.

Para um tensor $Q^\rho{}_\tau$, a sua derivada covariante é dada por

$$\nabla_\alpha Q^\rho{}_\tau = \partial_\alpha Q^\rho{}_\tau + \Gamma^\rho{}_{\alpha\beta} Q^\beta{}_\tau - \Gamma^\gamma{}_{\alpha\tau} Q^\rho{}_\gamma .$$

Em relação à carta de coordenadas x', temos

$$\begin{aligned}
\partial_\alpha Q^\rho{}_\tau &= \partial_\alpha \left(\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\xi}{\partial x^\tau} Q'^\sigma{}_\xi \right) \\
&= \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\xi}{\partial x^\tau} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \partial'_\mu Q'^\sigma{}_\xi + \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial^2 x'^\xi}{\partial x^\alpha \partial x^\tau} Q'^\sigma{}_\xi + \frac{\partial x'^\xi}{\partial x^\tau} Q'^\sigma{}_\xi \partial_\alpha \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \\
&= \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\xi}{\partial x^\tau} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \partial'_\mu Q'^\sigma{}_\xi + \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial^2 x'^\xi}{\partial x^\alpha \partial x^\tau} Q'^\sigma{}_\xi + \frac{\partial x'^\xi}{\partial x^\tau} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\xi} Q^\beta{}_\delta \partial_\alpha \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \\
&= \underline{\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\xi}{\partial x^\tau} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \partial'_\mu Q'^\sigma{}_\xi} + \underline{\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial^2 x'^\xi}{\partial x^\alpha \partial x^\tau} Q'^\sigma{}_\xi} + \underline{\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\beta} Q^\beta{}_\tau \partial_\alpha \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^\rho{}_{\alpha\beta} Q^\beta{}_\tau &= \left(\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \Gamma'^\sigma{}_{\mu\nu} + \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial^2 x'^\sigma}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \right) Q^\beta{}_\tau \\
&= \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \Gamma'^\sigma{}_{\mu\nu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x'^\xi}{\partial x^\tau} Q'^\lambda{}_\xi + \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial^2 x'^\sigma}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} Q^\beta{}_\tau \\
&= \underline{\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\xi}{\partial x^\tau} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \Gamma'^\sigma{}_{\mu\nu} Q'^\nu{}_\xi} + \underline{\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} Q^\beta{}_\tau \partial_\alpha \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\beta}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^\gamma{}_{\alpha\tau} Q^\rho{}_\gamma &= \left(\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\omega} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\xi}{\partial x^\tau} \Gamma'^\omega{}_{\mu\xi} + \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\omega} \frac{\partial^2 x'^\omega}{\partial x^\alpha \partial x^\tau} \right) \left(\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\zeta}{\partial x^\gamma} Q'^\sigma{}_\zeta \right) \\
&= \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\omega} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\xi}{\partial x^\tau} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\zeta}{\partial x^\gamma} \Gamma'^\omega{}_{\mu\xi} Q'^\sigma{}_\zeta + \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\omega} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\zeta}{\partial x^\gamma} Q'^\sigma{}_\zeta \frac{\partial^2 x'^\omega}{\partial x^\alpha \partial x^\tau} \\
&= \underline{\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\xi}{\partial x^\tau} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \Gamma'^\zeta{}_{\mu\xi} Q'^\sigma{}_\zeta} + \underline{\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} Q'^\sigma{}_\zeta \frac{\partial^2 x'^\zeta}{\partial x^\alpha \partial x^\tau}}
\end{aligned}$$

Assim, ao somar os dois primeiros termos e subtrair o terceiro, os termos sublinhados em verde são cancelados e os termos sublinhados em laranja também uma vez que

$$\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\beta}\partial_\alpha \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} + \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma}\partial_\alpha \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\beta} = \partial_\alpha \left(\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma}\right) = \partial_\alpha \delta^\rho{}_\beta = 0,$$

portanto segue que restam apenas os termos sublinhados em rosa, obtendo

$$\nabla_\alpha Q^\rho{}_\tau = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma}\frac{\partial x'^\xi}{\partial x^\tau}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\left(\partial'_\mu Q'^\sigma{}_\xi + \Gamma'^\sigma{}_{\mu\nu} Q'^\nu{}_\xi + \Gamma'^\zeta{}_{\mu\xi} Q'^\sigma{}_\zeta\right) = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma}\frac{\partial x'^\xi}{\partial x^\tau}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\nabla'_\alpha Q'^\sigma{}_\xi.$$

Dessa forma, verificamos a transformação tensorial da derivada covariante de um tensor $Q^\rho{}_\tau$.

Exercício 8

Consideremos a D-forma $\mathrm{d}x^0 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{D-1}$, então em outra carta de coordenadas x', temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}x^0 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{D-1} &= \left(\frac{\partial x^0}{\partial x'^{\mu_0}}\,\mathrm{d}x'^{\mu_0}\right) \wedge \cdots \wedge \left(\frac{\partial x^{D-1}}{\partial x'^{\mu_{D-1}}}\,\mathrm{d}x'^{\mu_{D-1}}\right) \\
&= \epsilon^{\mu_0\cdots\mu_{D-1}} \left(\frac{\partial x^0}{\partial x'^\mu_0} \cdots \frac{\partial x^{D-1}}{\partial x'^{\mu_{D-1}}}\right) \mathrm{d}x'^0 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x'^{D-1} \\
&= J\,\mathrm{d}x'^0 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x'^{D-1},
\end{aligned}$$

onde J é o determinante do jacobiano $\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta}$, isto é, $J = \epsilon^{\mu_0\cdots\mu_{D-1}} \frac{\partial x^0}{\partial x'^{\mu_0}} \cdots \frac{\partial x^{D-1}}{\partial x'^{\mu_{D-1}}}$.

Consideremos agora a transformação da métrica $g_{\mu\nu}$ das coordenadas x para as coordenadas x'

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} g'_{\alpha\beta}.$$

Notemos que podemos arranjar esta última equação como uma multiplicação matricial

$$(g_{\mu\nu}) = \left(\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu}\right)^\top (g'_{\alpha\beta}) \left(\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu}\right),$$

donde segue que

$$g = J^{-2} g',$$

onde g e g' são os valores absolutos dos determinantes das matrizes que representam a métrica nas cartas de coordenadas locais x e x'. Desse modo, o objeto $\sqrt{g}$ se transforma de forma inversa à D-forma considerada. Nesse caso, obtemos a regra de transformação

$$\sqrt{g}\,\mathrm{d}x^0 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{D-1} = \sqrt{g'}\,\mathrm{d}x'^0 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x'^{D-1},$$

isto é,$\sqrt{g}\,\mathrm{d}x^0 \wedge \cdots \wedge x^{D-1}$ se transforma como um escalar, então podemos utilizar este objeto como uma medida invariante para integrais em uma variedade.

Por exemplo, consideremos o círculo unitário submerso no plano Euclidiano $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ e a carta

$$\begin{aligned}
\psi : S^1 \setminus \{(1,0)\} \subset \mathbb{R}^2 &\to (0, 2\pi) \\
(\cos\theta, \sin\theta) &\mapsto \theta.
\end{aligned}$$

Então o vetor da base induzida por esta carta é $\boldsymbol{e}_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta)$, que é unitário em relação à métrica Euclidiana. Isto é, a métrica induzida em S^1 é dada por seu único elemento $g_{\theta\theta} = 1$, e cujo determinante é $g = 1$. Desse modo, o elemento de linha para o círculo unitário é $\mathrm{d}s = \sqrt{g}\,\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\theta$, como esperado.

Com a medida invariante podemos também determinar volumes invariantes. Por exemplo, para uma métrica $\mathrm{d}s^2 = a^2\,\mathrm{d}x^2 + b^2\,\mathrm{d}y^2 + c^2\,\mathrm{d}z^2$, temos $g = a^2b^2c^2$, portanto o volume invariante é de um cubo infinitesimal de lados $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$ é

$$abc\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z.$$

Exercício 9

Notemos que a derivada direcional $W^\mu \partial_\mu \phi$ para um campo escalar ϕ na direção dada pelo campo vetorial W é um escalar. De fato, em relação à outra carta de coordenadas temos

$$W^\mu \partial_\mu \phi = \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} W'^\alpha \right) \left(\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\mu} \partial'_\beta \right) \phi = W'^\alpha \partial'_\alpha \phi,$$

uma vez que o campo escalar é independente da escolha de cartas.

Desse modo, com o resultado do exercício anterior, segue que a integral

$$\int_M \mathrm{d}^D x \sqrt{g} W^\mu \partial_\mu \phi$$

é invariante. Suponhamos agora que o suporte de ϕ é contido no domínio de uma carta x, então por integração por partes temos

$$\begin{aligned} \int_M \mathrm{d}^D x \sqrt{g} W^\mu \partial_\mu \phi &= \int_{\partial M} \mathrm{d}^{D-1} x \sqrt{g} n_\mu W^\mu \phi - \int_M \mathrm{d}^D x \phi \partial_\mu \left(\sqrt{g} W^\mu \right) \\ &= \int_{\partial M} \mathrm{d}^{D-1} x \sqrt{g} n_\mu W^\mu \phi - \int_M \mathrm{d}^D x \sqrt{g} \phi \frac{\partial_\mu \left(\sqrt{g} W^\mu \right)}{\sqrt{g}} \end{aligned}$$

onde n_μ é a 1-forma definida pela fronteira ∂M. Equivalentemente temos

$$\int_{\partial M} \mathrm{d}^{D-1} x \sqrt{g} n_\mu W^\mu \phi = \int_M \mathrm{d}^D x \sqrt{g} \left[W^\mu \partial_\mu \phi + \phi \frac{\partial_\mu (\sqrt{g} W^\mu)}{\sqrt{g}} \right],$$

então pelo teorema do divergente,

$$\int_{\partial M} \mathrm{d}^{D-1} x \sqrt{g} n_\mu W^\mu \phi = \int_M \mathrm{d}^D x \sqrt{g} \mathrm{div}(\phi W),$$

segue que

$$\mathrm{div}(\phi W) = W^\mu \partial_\mu \phi + \phi \frac{\partial_\mu (\sqrt{g} W^\mu)}{\sqrt{g}}.$$

Pela propriedade do divergente

$$\mathrm{div}(\phi W) = W^\mu \partial_\mu \phi + \phi \mathrm{div}(W) = W^\mu \partial_\mu \phi + \phi \mathrm{div}(W),$$

obtemos

$$\underline{W^\mu \partial_\mu \phi} + \phi \mathrm{div}(W) = \underline{W^\mu \partial_\mu \phi} + \phi \frac{\partial_\mu (\sqrt{g} W^\mu)}{\sqrt{g}} \implies \phi \left[\mathrm{div}(W) - \frac{\partial_\mu (\sqrt{g} W^\mu)}{\sqrt{g}} \right] = 0.$$

Como o campo escalar é arbitrário, temos

$$\mathrm{div}(W) = \frac{\partial_\mu (\sqrt{g} W^\mu)}{\sqrt{g}}.$$

Notemos que

$$\mathrm{div}(W) = \partial_\mu W^\mu + \frac{\partial_\nu \sqrt{g}}{\sqrt{g}} W^\nu.$$

Nas coordenadas normais de Riemann, temos $\tilde{g} = 1$ e $\tilde{\partial}_\mu \tilde{g} = 0$, portanto

$$\mathrm{div}(W) = \tilde{\partial}_\mu \tilde{W}^\mu.$$

Assim, em uma carta de coordenadas arbitrária temos

$$\mathrm{div}(W) = \nabla_\mu W^\mu.$$

Comparando $\nabla_\mu W^\mu = \partial_\mu W^\mu + \Gamma^\mu{}_{\mu\nu} W^\nu$ com a expressão para o divergente, temos

$$\Gamma^\mu{}_{\mu\nu} = \frac{\partial_\nu \sqrt{g}}{\sqrt{g}}.$$

Substituindo W^μ pelo gradiente de um campo escalar $(\mathrm{grad}\psi)^\mu = g^{\mu\nu}\partial_\nu\psi$, obtemos a expressão para o seu laplaciano, dado por

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \psi = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\mu\left(\sqrt{g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\psi\right).$$

Podemos utilizar estas identidades para encontrar as expressões para o divergente e laplaciano em coordenadas esféricas para o espaço Euclidiano,

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2,$$

onde a métrica tem determinante dado por $g = r^4\sin^2\theta$. Para um campo de vetores

$$W = W^r \boldsymbol{e}_r + W^\theta \frac{\boldsymbol{e}_\theta}{r} + W^\varphi \frac{\boldsymbol{e}_\varphi}{r\sin\theta},$$

isto é, cujas componentes na base ortonormal $\left\{\boldsymbol{e}_r, \frac{1}{r}\boldsymbol{e}_\theta, \frac{1}{r\sin\theta}\boldsymbol{e}_\varphi\right\}$ são dadas por W^r, W^θ, W^φ, temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(W) &= \frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\mu\left(r^2\sin\theta W^\mu\right)\\
&= \frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_r\left(r^2\sin\theta W^r\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta\left(r^2\sin\theta\frac{W^\theta}{r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\varphi\left(r^2\sin\theta\frac{W^\varphi}{r\sin\theta}\right)\\
&= \frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2 W^r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\theta\left(W^\theta\sin\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\varphi W^\varphi.
\end{aligned}$$

O gradiente de um campo escalar ψ é dado por

$$(\mathrm{grad}\psi)^\mu = g^{\mu\nu}\partial_\nu\psi,$$

portanto em coordenadas esféricas temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{grad}\psi &= \frac{\partial\psi}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi\\
&= \frac{\partial\psi}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\boldsymbol{e}_\theta}{r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\frac{\boldsymbol{e}_\varphi}{r\sin\theta}.
\end{aligned}$$

Portanto, tomando $W^r = \frac{\partial\psi}{\partial r}$, $W^\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}$ e $W^\varphi = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}$, temos pelo resultado anterior que

$$\begin{aligned}
\nabla^2\psi &= \frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\theta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\sin\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\varphi\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)\\
&= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\sin\theta\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}.
\end{aligned}$$

Exercício 10

Consideremos a métrica de um espaço em expansão

$$\mathrm{d}s^2 = -\,\mathrm{d}t^2 + t^{2q}\left(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2\right),$$

com $q \in (0,1)$ e $t \in (0,\infty)$. Para um intervalo tipo luz ao longo do eixo x, temos

$$\mathrm{d}t^2 = t^{2q}\,\mathrm{d}x^2 \implies t^{-q}\,\mathrm{d}t = \pm\,\mathrm{d}x \implies t^{-q}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \pm 1,$$

isto é, uma equação diferencial para a coordenada temporal. Integrando em relação à posição obtemos

$$\frac{t^{1-q}}{1-q} = \pm(x-\xi) \implies t = \left[\pm(1-q)(x-\xi)\right]^{\frac{1}{1-q}},$$

onde ξ é uma constante de integração.

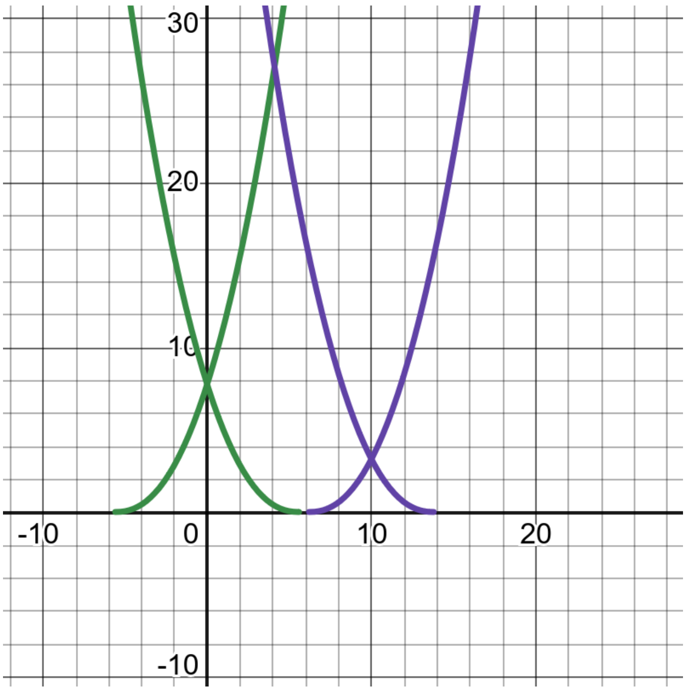

Figura 1: Diagrama de espaço-tempo.

Pelo diagrama de espaço-tempo mostrado na Figura 1, notamos que para pontos distintos não é necessário que haja interseção de seus passados.