

4300337 - Lista de exercícios 1

Louis Bergamo Radial

12 de março de 2024

Exercício 1

No referencial K , a partícula se move com velocidade $v = 0.998c$ em direção ao chão. Assim, se a produção do múon ocorre à altitude $h \approx 15$ km, então o tempo t transcorrido desde o tempo de produção até a chegada da partícula no chão é

$$t = \frac{h}{v} \approx 5.0 \times 10^{-5} \text{ s.}$$

Se $\tau' = 2.2 \times 10^{-6}$ s é a vida média no referencial K' de repouso do múon, então no referencial K , a vida média é

$$\tau = \gamma(v)\tau' = 3.5 \times 10^{-5} \text{ s,}$$

em que $\gamma(v) = \left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$. Assim, a probabilidade da detecção de um múon no chão neste referencial é

$$p = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \approx 0.24.$$

No referencial K' , o chão se move em direção à partícula com velocidade v . Pela contração de Lorentz, se a distância percorrida no referencial K é h , no referencial K' o chão se move uma distância h' dada por

$$h' = \frac{h}{\gamma(v)} \approx 0.95 \text{ km.}$$

Dessa forma, o tempo t' transcorrido desde a produção do múon e a chegada do chão ao múon é

$$t' = \frac{h'}{v} \approx 3.2 \times 10^{-6} \text{ s.}$$

Assim, a probabilidade da detecção de um múon no chão neste referencial é

$$p' = \exp\left(-\frac{t'}{\tau'}\right) \approx 0.24,$$

o mesmo valor obtido no referencial K .

Exercício 2

Sejam t_1 o instante em que o jato é emitido e $t_2 = t_1 + \Delta t$ um instante posterior. Nestes instantes, sinais luminosos são emitidos em direção ao observador em O , que os recebe nos

instantes $t'_1 = t_1 + \frac{r+v\Delta t \cos \theta}{c}$ e $t'_2 = t_2 + \frac{r}{c}$. Deste modo, os sinais são recebidos em O em um intervalo $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ dado por

$$\Delta t' = \Delta t (1 - \beta \cos \theta),$$

em que $\beta = \frac{v}{c}$. A distância percorrida entre as emissões dos sinais luminosos é $v\Delta t \sin \theta$, de modo que a velocidade aparente $v_{\text{ap}} = \frac{v\Delta t \sin \theta}{\Delta t'}$ medida em O é

$$v_{\text{ap}} = \frac{\beta \sin \theta}{1 - \beta \cos \theta} c.$$

O ângulo ϕ que maximiza a velocidade aparente satisfaz

$$\left. \frac{\partial v_{\text{ap}}}{\partial \theta} \right|_{\theta=\phi} = 0 \iff \frac{\beta \cos \phi (1 - \beta \cos \phi) - \beta^2 \sin^2 \phi}{(1 - \beta \cos \phi)^2} = 0,$$

donde segue

$$\cos \phi = \beta.$$

Neste caso, $\sin \phi = \sqrt{1 - \beta^2}$, então

$$v_{\text{ap}}^{\text{max}} = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} c$$

é a velocidade aparente máxima. Ainda, para $\beta > \frac{1}{\sqrt{2}}$, a velocidade aparente máxima é maior do que a velocidade da luz. De fato,

$$\begin{aligned} \beta > \frac{1}{\sqrt{2}} &\implies 2\beta^2 > 1 \\ &\implies \beta^2 > 1 - \beta^2 \\ &\implies \beta > \sqrt{1 - \beta^2} \\ &\implies v_{\text{ap}}^{\text{max}} > c. \end{aligned}$$

Exercício 3

O grupo de Lorentz $O(1, 3)$ pode ser representado como

$$O(1, 3) = \{\Lambda \in GL(\mathbb{R}^4) : \Lambda^\top \eta \Lambda = \eta\},$$

em que η é a matriz dada por

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

representando a métrica de Minkowski.

Notemos que se duas matrizes são iguais, então certamente os seus determinantes também o são. Desse modo, para $\Lambda \in O(1, 3)$ temos

$$\begin{aligned} \Lambda^\top \eta \Lambda = \eta &\implies \det(\Lambda^\top \eta \Lambda) = \det \eta \\ &\implies \det \Lambda^\top \det \eta \det \Lambda = \det \eta \\ &\implies (\det \Lambda)^2 = 1 \\ &\implies \det \Lambda = \pm 1, \end{aligned}$$

já que o determinante da matriz transposta é igual ao determinante da matriz.

Em termos das componentes, temos

$$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\rho\sigma} \Lambda^\rho_\mu \Lambda^\sigma_\nu,$$

utilizando a notação de Einstein. Em particular, para $\mu = \nu = 0$,

$$\eta_{\rho\sigma} \Lambda^\rho_0 \Lambda^\sigma_0 = \eta_{00},$$

ou de forma mais explícita,

$$\left(\Lambda^0_0\right)^2 = 1 + \left(\Lambda^1_0\right)^2 + \left(\Lambda^2_0\right)^2 + \left(\Lambda^3_0\right)^2.$$

Assim, como os elementos de Λ são números reais, devemos ter $|\Lambda^0_0| \geq 1$.

Notemos que uma reflexão dos eixos espaciais como $(ct, x, y, z) \mapsto (ct, -x, y, z)$ é uma transformação ortogonal em relação à métrica de Minkowski, já que uma reflexão dos eixos em \mathbb{R}^3 é uma transformação ortogonal em relação à métrica Euclidiana. O determinante de transformações deste tipo é sempre igual a -1 . Semelhantemente, transformações que refletem o eixo temporal $(ct, x, y, z) \mapsto (-ct, x, y, z)$ também é ortogonal em relação à métrica de Minkowski e tem determinante -1 . Deste modo, para ignorar transformações deste tipo, devemos adicionar a restrição $\det \Lambda = 1$. Definimos o grupo

$$\text{SO}(1, 3) = \{\Lambda \in \text{O}(1, 3) : \det \Lambda = 1\}$$

das transformações ortogonais em relação à métrica de Minkowski, exceto as reflexões espaciais e temporais.

Entretanto, uma composição de uma reflexão espacial e de uma reflexão temporal tem determinante unitário. Nestes casos, a componente Λ^0_0 deve ser negativa, portanto podemos restringir o grupo de Lorentz para conter apenas *boosts* e rotações com o grupo

$$\text{SO}^\uparrow(1, 3) = \{\Lambda \in \text{SO}(1, 3) : \Lambda^0_0 \geq 1\},$$

chamado de grupo de Lorentz próprio.

Exercício 4

Seja S o referencial do observador O , em que os observadores A e B se movem com velocidade v e u , respectivamente. Seja S' o referencial de A , se $(ct, x, 0, 0)$ é a 4-posição de B em S , com $x = ut$, então $(ct', x', 0, 0)$ é a 4-posição de B em S' , em que

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ &= \gamma(u - v)t. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \\ &= \gamma\left(1 - \frac{uv}{c^2}\right)t. \end{aligned}$$

Desse modo, a velocidade w de B no referencial S' é dada por

$$w = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}.$$

É conveniente introduzir a rapidez $\tanh \phi_u = \frac{u}{c}$ e $\tanh \phi_v = \frac{v}{c}$, donde segue

$$\begin{aligned}\tanh \phi_w &= \frac{\tanh \phi_u - \tanh \phi_v}{1 - \tanh \phi_u \tanh \phi_v} \\ &= \tanh (\phi_u - \phi_v) .\end{aligned}$$

Logo, como a tangente hiperbólica é uma função injetora,

$$\phi_w = \phi_u - \phi_v ,$$

isto é, a rapidez simplifica a adição relativística de velocidades.

Ainda, para uma rapidez arbitrária ϕ , temos

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 \phi}} \\ &= \cosh \phi ,\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\gamma\beta &= \cosh \phi \tanh \phi \\ &= \sinh \phi ,\end{aligned}$$

de modo que a matriz de uma transformação de Lorentz para um *boost* ao longo da direção x pode ser dada por

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh \phi & -\sinh \phi & 0 & 0 \\ -\sinh \phi & \cosh \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Tornemos nossa atenção ao bloco superior esquerdo da matriz acima

$$H(\phi) = \begin{pmatrix} \cosh \phi & -\sinh \phi \\ -\sinh \phi & \cosh \phi \end{pmatrix} .$$

Assim como rotações preservam a métrica euclidiana, isto é, mapeiam pontos de um círculo no mesmo círculo, a transformação linear $H(\phi)$ preserva a métrica de Minkowski, isto é, mapeia pontos da hipérbole $(ct)^2 - x^2 = s^2$ em pontos na mesma hipérbole. De fato, consideramos um ponto (ct, x) nesta hipérbole e computamos a ação desta transformação neste ponto, obtendo o ponto (ct', x') dado por

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} ct' \\ x' \end{bmatrix} &= H(\phi) \begin{bmatrix} ct \\ x \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ct \cosh \phi - x \sinh \phi \\ -ct \sinh \phi + x \cosh \phi \end{bmatrix} ,\end{aligned}$$

que pertence à mesma hipérbole do ponto original, visto que

$$\begin{aligned}(ct')^2 - (x')^2 &= (ct \cosh \phi - x \sinh \phi)^2 - (-ct \sinh \phi + x \cosh \phi)^2 \\ &= (ct)^2 (\cosh^2 \phi - \sinh^2 \phi) + x^2 (\sinh^2 \phi - \cosh^2 \phi) \\ &= (ct)^2 - x^2 .\end{aligned}$$

Deste modo, a rapidez representa uma parametrização para “rotações hiperbólicas”.

Exercício 5

Exercício 6

Exercício 7

No referencial Σ' de repouso da barra, suas extremidades se encontram em todo instante no plano x_0y_0 na origem e no ponto $(L_0 \cos \theta_0, L_0 \sin \theta_0)$.

O referencial Σ' se move em relação ao referencial Σ com velocidade $v\hat{x}$.

Exercício 8

Proposição 1: *Boost* de um 4-vetor arbitrário

Um quadrivetor $S^\mu = (\sigma, \vec{s})$ no referencial Σ tem componentes $S^{\mu'} = (\sigma', \vec{s}')$ no referencial Σ' , que se move com velocidade $\vec{v} = v\hat{n}$ em relação a Σ , onde

$$\sigma' = \gamma(\sigma - \beta \vec{s} \cdot \hat{n})$$

e

$$\vec{s}' = \vec{s} + [(\gamma - 1)(\vec{s} \cdot \hat{n}) - \gamma\beta\sigma] \hat{n},$$

em que $\beta = \frac{v}{c}$ e $\gamma = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}$.

Demonstração. Podemos assumir sem perda de generalidade que $\hat{n} = \hat{x}$, em que $\vec{s} = s_x\hat{x} + s_y\hat{y} + s_z\hat{z}$, portanto

$$\begin{cases} \sigma' = \gamma(\sigma - \beta s_x) \\ s'_x = \gamma(s_x - \beta\sigma) \\ s'_y = s_y \\ s'_z = s_z \end{cases}$$

são as transformações de Lorentz usuais. Notando que $s_x = \vec{s} \cdot \hat{n}$, segue que

$$\sigma' = \gamma(\sigma - \beta \vec{s} \cdot \hat{n}) \text{ e } s'_x = \gamma(\vec{s} \cdot \hat{n} - \beta\sigma).$$

Ainda, $\vec{s}' = s'_x\hat{x} + s'_y\hat{y} + s'_z\hat{z}$, portanto

$$\begin{aligned} \vec{s}' &= (s'_x - s_x)\hat{x} + (s_x\hat{x} + s_y\hat{y} + s_z\hat{z}) \\ &= \vec{s} + (s'_x - s_x)\hat{n} \\ &= \vec{s} + [\gamma(\vec{s} \cdot \hat{n} - \beta\sigma) - \vec{s} \cdot \hat{n}] \hat{n} \\ &= \vec{s} + [(\gamma - 1)(\vec{s} \cdot \hat{n}) - \gamma\beta\sigma] \hat{n}, \end{aligned}$$

como desejado. □

No referencial Σ , a partícula se move com velocidade $\vec{u} = u \cos \theta \hat{x} + u \sin \theta \hat{y}$, portanto sua 4-velocidade tem componentes $(\gamma_u c, \gamma_u \vec{u})$ neste referencial. O referencial Σ' se move

com velocidade $\vec{v} = -v\hat{x}$ em relação a Σ , de modo que a 4-velocidade da partícula em Σ' tem componentes $(\gamma_w c, \gamma_w \vec{w})$, dadas pela expressão da [Proposição 1](#), isto é

$$\begin{aligned}\gamma_w c &= \gamma_v(\gamma_u c - \beta_v \gamma_u \vec{u} \cdot (-\hat{x})) \\ &= \gamma_v(\gamma_u c + \beta_v \gamma_u u \cos \theta) \\ &= \gamma_u \gamma_v (1 + \beta_u \beta_v \cos \theta) c\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\gamma_w \vec{w} &= \gamma_u \vec{u} + [(\gamma_v - 1) \gamma_u \vec{u} \cdot (-\hat{x}) - \gamma_v \beta_v \gamma_u c] (-\hat{x}) \\ &= \gamma_u \vec{u} + [(\gamma_v - 1) \gamma_u \beta_u \cos \theta + \gamma_u \gamma_v \beta_v] c \hat{x} \\ &= \gamma_u \gamma_v (\beta_u \cos \theta + \beta_v) c \hat{x} + \gamma_u \beta_u \sin \theta c \hat{y}.\end{aligned}$$

Desse modo,

$$\vec{w} = \frac{\beta_u \cos \theta + \beta_v}{1 + \beta_u \beta_v \cos \theta} c \hat{x} + \frac{\beta_u \sin \theta}{\gamma_v (1 + \beta_u \beta_v \cos \theta)} c \hat{y}$$

é a velocidade da partícula em Σ' , que faz um ângulo θ' dado por

$$\tan \theta' = \frac{\beta_u \sin \theta}{\gamma_v (\beta_u \cos \theta + \beta_v)},$$

em relação ao eixo x .

Um triângulo retângulo de catetos de comprimento L_x e L_y situados ao longo dos eixos x e y , respectivamente, que se encontra em repouso em Σ é visto por Σ' como um triângulo retângulo de catetos L'_x e L'_y que se move com velocidade $v\hat{x}$. Pelas transformações de Lorentz, obtemos $L'_y = L_y$ e $L'_x = \frac{L_x}{\gamma_v}$. Assim, se φ é o ângulo compreendido entre o lado de comprimento L_x e a hipotenusa no referencial Σ , o ângulo φ' análogamente medido em Σ' é dado por

$$\tan \varphi' = \gamma_v \tan \varphi.$$

Exercício 9

Em um referencial S em que a 4-posição de uma partícula tem componentes x^μ , definimos sua 4-velocidade e 4-aceleração pelas componentes

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \text{ e } a^\mu = \frac{dv^\mu}{d\tau}.$$

Assim, temos $v^\mu = (\gamma_v c, \gamma_v \vec{v})$, em que \vec{v} é a 3-velocidade da partícula e $\gamma_v = \frac{dt}{d\tau}$, e

$$\begin{aligned}a^\mu &= \left(c \frac{d\gamma_v}{d\tau}, \frac{d\gamma_v}{d\tau} \vec{v} + \gamma_v \frac{d\vec{v}}{d\tau} \right) \\ &= \left(c \gamma_v \dot{\gamma}_v, \gamma_v \dot{\gamma}_v \vec{v} + \gamma_v^2 \vec{a} \right),\end{aligned}$$

onde $\dot{\gamma}_v = \frac{d\gamma_v}{dt}$ e $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$.

Sendo η a métrica de Minkowski, temos

$$\eta_{\mu\nu} v^\mu v^\nu = c^2.$$

Derivando em relação a τ , obtemos

$$\eta_{\mu\nu} \frac{dv^\mu}{d\tau} v^\nu = 0 \implies a^\mu v_\mu = 0,$$

como desejado.

Em um dado instante em que a velocidade espacial da partícula é $\vec{u} = u\hat{n}$ no referencial S , tomamos nossa atenção ao referencial S' que se move em relação a S com velocidade espacial \vec{u} . Neste mesmo instante, a 4-velocidade da partícula é $v^{\mu'} = (c, 0)$ no referencial S' , de modo que a componente temporal da 4-aceleração da partícula deve se anular para respeitar a identidade invariante $a^{\mu'} v_{\mu'} = 0$. Assim,

$$a^{\mu'} = (0, \vec{a}')$$

é a 4-aceleração da partícula em S' , em que $\vec{a}' = \frac{d\vec{v}}{dt'}$.

Exercício 10

Seja Σ o referencial de repouso de uma partícula de massa m . Após seu decaimento em dois fótons de momentos \vec{p}_1 e \vec{p}_2 , temos por conservação de momento que

$$\vec{p}_1 = -\vec{p}_2,$$

donde segue que os fótons emitidos têm mesma frequência ν , mas direções opostas. Assim, neste referencial, a energia da partícula massiva é dada por

$$E = 2h\nu,$$

por conservação de energia.

Notemos que o 4-momento de um dos fótons é dado por

$$\begin{aligned} P_1^\mu &= \left(\frac{h\nu}{c}, \frac{h\nu}{c} \hat{n}_1 \right) \\ &= \hbar \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k} \right), \end{aligned}$$

onde $\omega = 2\pi\nu$ é a frequência angular e $\vec{k} = \frac{2\pi\nu}{c} \hat{n}_1$ o vetor de onda associados à propagação deste fóton. Deste modo, definimos o 4-vetor de onda $K^\mu = \frac{1}{\hbar} P^\mu$ para fótons. Após o decaimento, os 4-vetores dos fótons são dados por

$$K_1^\mu = \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k} \right) \text{ e } K_2^\mu = \left(\frac{\omega}{c}, -\vec{k} \right)$$

no referencial Σ .

Seja Σ' o referencial em que a partícula de massa m se move com velocidade $\vec{v} = v\hat{n}$. Isto é, o referencial Σ' se move com velocidade $-\vec{v}$ em relação a Σ . Pela [Proposição 1](#), os 4-vetores de onda dos fótons são dados por

$$K_1^{\mu'} = \left(\gamma \frac{\omega + \frac{1}{c} \vec{v} \cdot \vec{k}}{c}, \vec{k} + \left[(\gamma - 1)(\vec{k} \cdot \hat{n}) + \gamma \beta \frac{\omega}{c} \right] \hat{n} \right)$$

e

$$K_2^{\mu'} = \left(\gamma \frac{\omega - \frac{1}{c} \vec{v} \cdot \vec{k}}{c}, -\vec{k} + \left[-(\gamma - 1)(\vec{k} \cdot \hat{n}) + \gamma \beta \frac{\omega}{c} \right] \hat{n} \right)$$

em Σ' . Assim, o 4-momento da partícula é dado por

$$\begin{aligned} P^{\mu'} &= \hbar \left(K_1^{\mu'} + K_2^{\mu'} \right) \\ &= \left(2\gamma \frac{h\nu}{c}, 2\gamma\beta \frac{h\nu}{c} \hat{n} \right) \\ &= \left(\gamma \frac{E}{c}, \gamma\beta \frac{E}{c} \hat{n} \right) \end{aligned}$$