

4300337 - Lista de exercícios 3

Louis Bergamo Radial
8992822

16 de abril de 2024

Exercício 1

No contexto da mecânica Newtoniana, a massa inercial m_i de uma partícula é relacionada à força resultante que age nela pela segunda lei de Newton, $F = m_i a$. Com sua lei de gravitação, temos que a força gravitacional é dada por $F_g = -m_g \nabla \Phi$, onde m_g é a massa gravitacional e Φ é o potencial gravitacional. O Princípio de Equivalência Fraco diz que a massa inercial inercial e a massa gravitacional são iguais, de modo que qualquer partícula em queda livre tem aceleração dada por $a = -\nabla \Phi$. A série de experimentos por Eötvös no fim do século XIX verificou o Princípio de Equivalência Fraco com precisão de 5×10^{-9} , enquanto que atualmente a precisão é da ordem de 10^{-15} .

Ainda, em uma região suficientemente pequena, podemos aproximar o gradiente $-\nabla \Phi$ para uma constante g , de modo que nesta região todas as partículas em queda livre têm aceleração uniforme igual a g . Assim, um campo gravitacional homogêneo é equivalente à uma aceleração do sistema de referência. O Princípio de Equivalência de Einstein diz que, em regiões suficientemente pequenas do espaço-tempo, vale a Relatividade Restrita e e que é impossível detectar a existência de um campo gravitacional por experimentos locais. Isto é, localmente um campo gravitacional é indistinguível à um referencial uniformemente acelerado, ilustrado pelo *Gedankenexperiment* do elevador de Einstein.

O Princípio de Equivalência Forte diz que para uma trajetória de uma partícula massiva em queda livre em um campo gravitacional qualquer, é possível escolher um sistema de coordenadas localmente inercial, de modo que, em uma região do espaço-tempo suficientemente pequena ao redor desta trajetória, todas as leis físicas são equivalentes às suas formulações em sistemas de referência não acelerados na ausência da gravidade.

Exercício 2

Sobre um espaço vetorial V de dimensão n , tensores de segunda ordem têm um total de n^2 componentes. Um tensor antissimétrico $A_{\omega\rho}$ deve satisfazer $A_{\omega\rho} = -A_{\rho\omega}$ para todo par de índices ω, ρ . Assim, temos que as n componentes $A_{\rho\rho}$ são nulas, e a condição das outras $n^2 - n$ componentes, $A_{\omega\rho} = -A_{\rho\omega}$ para $\rho \neq \omega$, reduz o número de componentes independentes para $\frac{n^2-n}{2}$. Semelhantemente, um tensor simétrico $S^{\mu\nu}$ deve satisfazer $S^{\mu\nu} = S^{\nu\mu}$ para todo par de índices μ, ν . Para $\mu = \nu$, esta condição é trivialmente satisfeita, de modo que o número de componentes independentes é $\frac{n^2+n}{2}$. Como exemplo, em um espaço vetorial de dimensão 4, tensores de segunda ordem antissimétricos têm seis componentes independentes e simétricos, dez.

Mostremos que a contração de um tensor simétrico com um tensor antissimétrico tem uma propriedade muito útil, $S^{\omega\rho} A_{\omega\rho} = 0$. Por antissimetria e simetria temos

$$S^{\omega\rho} A_{\omega\rho} = -S^{\omega\rho} A_{\rho\omega} = -S^{\rho\omega} A_{\rho\omega}.$$

Como os índices estão sendo somados, podemos renomeá-los. Em particular, podemos renomear na soma à direita $\omega \rightarrow \rho$ e $\rho \rightarrow \omega$, obtendo

$$S^{\omega\rho} A_{\omega\rho} = -S^{\omega\rho} A_{\omega\rho},$$

isto é $S^{\omega\rho} A_{\omega\rho} = 0$.

Exercício 3

Coordenadas esféricas em \mathbb{R}^3

Consideremos coordenadas esféricas para o espaço tridimensional Euclidiano, dadas por

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \cos \theta = \frac{z}{r}, \quad \text{e} \quad \tan \phi = \frac{y}{x}.$$

Alternativamente, temos

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad \text{e} \quad z = r \cos \theta,$$

de modo que os vetores da base no sistema de coordenadas esféricas são dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \frac{\partial x}{\partial r} \mathbf{e}_x + \frac{\partial y}{\partial r} \mathbf{e}_y + \frac{\partial z}{\partial r} \mathbf{e}_z \\ &= \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\theta &= \frac{\partial x}{\partial \theta} \mathbf{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \theta} \mathbf{e}_y + \frac{\partial z}{\partial \theta} \mathbf{e}_z \\ &= r \cos \theta \cos \phi \mathbf{e}_x + r \cos \theta \sin \phi \mathbf{e}_y - r \sin \theta \mathbf{e}_z, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\phi &= \frac{\partial x}{\partial \phi} \mathbf{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \phi} \mathbf{e}_y + \frac{\partial z}{\partial \phi} \mathbf{e}_z \\ &= -r \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_x + r \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_y. \end{aligned}$$

Com os vetores da base desse sistema de coordenadas, podemos obter os coeficientes da métrica por

$$g'_{ij} = g(\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}'_j),$$

utilizando os valores do tensor métrico na base de coordenadas cartesianas, dados por

$$g(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_x) = g(\mathbf{e}_y, \mathbf{e}_y) = g(\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_z) = 1$$

e os demais são iguais a zero. Assim, os coeficientes da métrica Euclidiana nas coordenadas esféricas são dados por

$$g'_{rr} = 1, \quad g'_{\theta\theta} = r^2, \quad \text{e} \quad g'_{\phi\phi} = r^2 \sin^2 \theta,$$

e as outras componentes nulas.

Coordenadas em rotação no espaço-tempo de Minkowski

Consideremos agora a métrica da relatividade restrita $\eta_{\mu\nu}$ e as coordenadas em rotação

$$\begin{cases} t' = t \\ x' = \sqrt{x^2 + y^2} \cos(\phi - \omega t) \\ y' = \sqrt{x^2 + y^2} \sin(\phi - \omega t) \\ z' = z \end{cases}$$

onde $\tan \phi = \frac{y}{x}$. Notemos que

$$x' = x \cos \omega t + y \sin \omega t \quad \text{e} \quad y' = -x \sin \omega t + y \cos \omega t$$

então ao tomar combinações lineares das equações acima e utilizando $t' = t$, temos

$$\begin{cases} t = t' \\ x = x' \cos \omega t' - y' \sin \omega t' \\ y = x' \sin \omega t' + y' \cos \omega t' \\ z = z' \end{cases}.$$

Assim, os vetores da base são dados por $e_{\mu'} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\mu'}} e_{\nu}$, isto é,

$$\begin{cases} e_{0'} = e_0 - \omega(x' \sin \omega t' + y' \cos \omega t') e_1 + \omega(x' \cos \omega t' - y' \sin \omega t') e_2 \\ e_{1'} = \cos \omega t' e_1 + \sin \omega t' e_2 \\ e_{2'} = -\sin \omega t' e_1 + \cos \omega t' e_2 \\ e_{3'} = e_3 \end{cases}.$$

Utilizando a bilinearidade do tensor métrico e que $g(e_{\mu}, e_{\nu}) = \eta_{\mu\nu}$, temos que

$$g_{\mu'\nu'} = \begin{pmatrix} -1 + \omega^2(x'^2 + y'^2) & -\omega y' & \omega x' & 0 \\ -\omega y' & 1 & 0 & 0 \\ \omega x' & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{\mu'\nu'}$$

são os componentes da métrica nas coordenadas em rotação. Desse modo, obtemos as componentes da métrica inversa $g^{\mu'\nu'}$ por escalonamento, resultando em

$$g^{\mu'\nu'} = \begin{pmatrix} -1 & -\omega y' & \omega x' & 0 \\ -\omega y' & 1 - \omega^2 y'^2 & \omega^2 x' y' & 0 \\ \omega x' & \omega^2 x' y' & 1 - \omega^2 x'^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\mu'\nu'}.$$

Exercício 4

Para uma conexão de Levi-Civita, isto é, simétrica e compatível com o tensor métrico, os seus coeficientes $\Gamma^{\rho}_{\alpha\beta}$ são dados por

$$\Gamma^{\rho}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_{\sigma} g_{\alpha\beta} - \partial_{\alpha} g_{\beta\sigma} - \partial_{\beta} g_{\sigma\alpha})$$

para todas as triplas de índices ρ, α, β .

Para uma métrica diagonal, isto é, $g_{\mu\nu} = 0 \iff \mu \neq \nu$, temos $g^{\mu\nu} = 0 \iff \mu \neq \nu$, de modo que os coeficientes da conexão são dados por

$$\Gamma^{\rho}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2g_{\rho\rho}} (\partial_{\rho} g_{\alpha\beta} - \partial_{\alpha} g_{\beta\rho} - \partial_{\beta} g_{\rho\alpha})$$

neste caso, e nesta expressão índices repetidos não são somados. Podemos simplificar adiante separando em casos: sejam μ, ν, λ índices todos distintos, então

$$\begin{aligned} \Gamma^{\lambda}_{\lambda\lambda} &= -\frac{1}{2g_{\lambda\lambda}} (\partial_{\lambda} g_{\lambda\lambda} - \partial_{\lambda} g_{\lambda\lambda} - \partial_{\lambda} g_{\lambda\lambda}) & \Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda} &= -\frac{1}{2g_{\lambda\lambda}} (\partial_{\lambda} g_{\mu\lambda} - \partial_{\mu} g_{\lambda\lambda} - \partial_{\lambda} g_{\lambda\mu}) \\ &= \frac{\partial_{\lambda} g_{\lambda\lambda}}{2g_{\lambda\lambda}} = \partial_{\lambda} \ln \sqrt{|g_{\lambda\lambda}|} & &= \frac{\partial_{\mu} g_{\lambda\lambda}}{2g_{\lambda\lambda}} = \partial_{\mu} \ln \sqrt{|g_{\lambda\lambda}|} \\ \Gamma^{\lambda}_{\mu\mu} &= -\frac{1}{2g_{\lambda\lambda}} (\partial_{\lambda} g_{\mu\mu} - \partial_{\mu} g_{\mu\lambda} - \partial_{\mu} g_{\lambda\mu}) & \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} &= -\frac{1}{2g_{\lambda\lambda}} (\partial_{\lambda} g_{\mu\nu} - \partial_{\mu} g_{\nu\lambda} - \partial_{\nu} g_{\lambda\mu}) \\ &= -\frac{\partial_{\lambda} g_{\mu\mu}}{2g_{\lambda\lambda}} & &= 0 \end{aligned}$$

são todos os coeficientes da conexão para o caso de uma métrica diagonal.

Exercício 5

Utilizando os resultados do exercício anterior, os coeficientes da conexão de Levi-Civita para as coordenadas esféricas no espaço Euclidiano são dados por

$$\begin{aligned}\Gamma^r_{\theta\theta} &= -\frac{\partial_r(r^2)}{2} = -r & \Gamma^r_{\phi\phi} &= -\frac{\partial_r(r^2 \sin^2 \theta)}{2} = -r \sin^2 \theta \\ \Gamma^\theta_{\theta r} &= \frac{\partial_r(r^2)}{2r^2} = \frac{1}{r} & \Gamma^\theta_{\phi\phi} &= -\frac{\partial_\theta(r^2 \sin^2 \theta)}{2r^2} = -\sin \theta \cos \theta \\ \Gamma^\phi_{\phi r} &= \frac{\partial_r(r^2 \sin^2 \theta)}{r^2 \sin^2 \theta} = \frac{1}{r} & \Gamma^\phi_{\phi\theta} &= \frac{\partial_\theta(r^2 \sin^2 \theta)}{r^2 \sin^2 \theta} = \cot \theta,\end{aligned}$$

e os outros termos são ou nulos ou obtidos pela simetria da conexão.

Seja uma curva

$$\begin{aligned}\gamma : I \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \lambda &\mapsto (x^r(\lambda), x^\theta(\lambda), x^\phi(\lambda)).\end{aligned}$$

Assim, para que γ seja uma geodésica, devemos ter

$$\frac{d^2 x^k}{d\lambda^2} + \Gamma^k_{ij} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda} = 0$$

para k igual a r , θ e ϕ . Assim, de forma explícita, as equações da geodésica são dadas por

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta = 0 \\ \ddot{\theta} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta} - \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta = 0 \\ \ddot{\phi} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\phi} + 2\dot{\phi}\dot{\theta} \cot \theta = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta = 0 \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta = 0 \\ r\ddot{\phi} \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\phi} + 2\dot{\phi}\dot{\theta} \cos \theta = 0 \end{cases},$$

onde, para simplificar, denotamos $r = x^r$, $\theta = x^\theta$ e $\phi = x^\phi$ e os pontos sobre as variáveis denotam que estas funções componente foram derivadas em relação ao parâmetro afim λ .

Em analogia ao movimento de uma partícula em mecânica clássica, sabemos que as equações acima especificam uma partícula se movendo ao longo de uma curva γ com aceleração nula, isto é, cada equação é uma componente da aceleração desta partícula. Desse modo, como o parâmetro λ é afim, uma vez que buscamos uma geodésica, sabemos que o vetor tangente à curva é constante. Integrando mais uma vez, obtemos que a solução deste sistema de equações é uma reta.

Exercício 6

Um espaço topológico é uma dupla (M, \mathcal{O}_M) composta por um conjunto M e uma topologia \mathcal{O}_M . Um subconjunto U de M é dito ser aberto em relação a este espaço topológico se $U \in \mathcal{O}_M$. Uma aplicação $f : M \rightarrow N$ entre espaços topológicos (M, \mathcal{O}_M) e (N, \mathcal{O}_N) é dita contínua se sua pré-imagem de um aberto é aberta, e é dita um homeomorfismo se for bijetiva e tanto f quanto f^{-1} forem contínuas. Se existe um homeomorfismo entre dois espaços topológicos, estes são ditos homeomorfos.

Se existe um número inteiro n tal que todo aberto $U \in \mathcal{O}_M$ é homeomorfo a \mathbb{R}^n , em relação à topologia usual do espaço Euclidiano, dizemos que (M, \mathcal{O}_M) é um espaço topológico localmente Euclidiano de dimensão n . Ainda, para cada aberto $U \in \mathcal{O}_M$ existe um homeomorfismo $x : U \rightarrow x(U) \subset \mathbb{R}^n$, e chamamos o par (U, x) de carta local. Um atlas \mathcal{A}_M é uma coleção de cartas locais tal que a união dos abertos cobre o conjunto M .

Consideremos agora duas cartas $(U, x), (V, y) \in \mathcal{A}_M$ tal que $U \cap V \neq \emptyset$.

$$\begin{array}{ccc} & U \cap V & \\ x \swarrow & & \searrow y \\ x(U \cap V) & \xrightarrow{y \circ x^{-1}} & y(U \cap V) \end{array}$$

Como uma composição de homeomorfismos, segue que a aplicação de transição $y \circ x^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um homeomorfismo, isto é, contínua. Como uma função em \mathbb{R}^n , podemos utilizar análise usual para decidir se esta função é diferenciável. Duas cartas locais $(U, x), (V, y)$ são ditas C^k -compatíveis se ou $U \cap V \neq \emptyset$ e a aplicação de transição $y \circ x^{-1}$ é de classe C^k ou se $U \cap V = \emptyset$. Ainda, um atlas é dito C^k -compatível se todo par de cartas locais são C^k -compatíveis.

Uma variedade diferenciável $(M, \mathcal{O}_M, \mathcal{A}_M)$ é um espaço topológico (M, \mathcal{O}_M) localmente Euclidiano munido de um atlas maximal suave \mathcal{A}_M , isto é, um atlas C^∞ -compatível com a propriedade de que se uma carta (U, x) é compatível com uma carta $(V, y) \in \mathcal{A}_M$, então $(U, x) \in \mathcal{A}_M$. A estrutura diferencial dada pelo atlas permite definir em todo ponto $p \in M$ um espaço vetorial $T_p M$, chamado de espaço tangente no ponto p , cujos elementos são derivações na álgebra $C^\infty(M)$ de funções suaves $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Geometricamente, cada elemento $X \in T_p M$ é um operador de derivada direcional ao longo de alguma curva suave $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ que passa por $p = \gamma(0)$. O espaço dual $T_p^* M$ é chamado de espaço cotangente no ponto p , cujos elementos são relacionados com as curvas de nível de funções suaves $C^\infty(M)$.

Utilizando o atlas da variedade, podemos definir um atlas para a união disjunta dos espaços tangentes, construindo assim o fibrado tangente TM , que é também uma variedade diferenciável. Uma aplicação suave $p \mapsto X_p$ que associa um ponto p da variedade a um vetor $X_p \in T_p M \subset TM$ do fibrado tangente é chamada de campo de vetores. Analogamente, definimos o fibrado cotangente T^*M , em que uma aplicação suave $p \mapsto \omega_p$ que associa um ponto $p \in M$ a um elemento $\omega_p \in T_p^* M \subset T^*M$ é chamada de 1-forma diferencial, ou campo de covetores. Uma função multilinear de campos de vetores e de 1-formas diferenciais é chamada de tensor na variedade.

Resumindo de forma mais informal, uma variedade diferenciável é um conjunto M que localmente se parece com algum espaço Euclidiano \mathbb{R}^n , e no qual podemos definir ponto a ponto um espaço vetorial, que é intimamente relacionado à estrutura diferencial fornecida à M por um atlas de cartas de coordenadas locais. Um tensor no contexto de uma variedade diferenciável é uma função multilinear de vetores e 1-formas definida em todo ponto da variedade.

Exercício 7

Consideremos duas cartas locais de coordenadas locais (U, x) e (U, x') , com

$$\partial_\alpha = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \partial'_\mu \quad \text{e} \quad g_{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} g'_{\mu\nu}.$$

Pela definição dos coeficientes da conexão de Levi-Civita em uma carta \tilde{x} ,

$$\tilde{\Gamma}^\lambda_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} \tilde{g}^{\lambda\omega} \left(\tilde{\partial}_\rho \tilde{g}_{\omega\sigma} + \tilde{\partial}_\sigma \tilde{g}_{\omega\rho} - \tilde{\partial}_\omega \tilde{g}_{\rho\sigma} \right),$$

podemos obter a transformação destes coeficientes. Temos

$$\begin{aligned} \partial_\gamma g_{\alpha\beta} &= \partial_\gamma \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} g'_{\mu\nu} \right) \\ &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \partial_\gamma g'_{\mu\nu} + g'_{\mu\nu} \partial_\gamma \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \right) \\ &= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \partial'_\lambda g'_{\mu\nu} + g'_{\mu\nu} \left(\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\gamma \partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\gamma \partial x^\beta} \right) \end{aligned}$$

portanto, por permutações cíclicas de α, β, γ e renomeando alguns índices que estão sendo somados, temos

$$\begin{aligned} \partial_\alpha g_{\beta\gamma} &= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\gamma} \partial'_\lambda g'_{\mu\nu} + g'_{\mu\nu} \left(\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta} \frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} \right) \\ &= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \partial'_\mu g'_{\nu\lambda} + g'_{\nu\mu} \left(\frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} \right) \\ &= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \partial'_\mu g'_{\nu\lambda} + g'_{\mu\nu} \left(\frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} \right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\partial_\beta g_{\gamma\alpha} &= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\beta} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\alpha} \partial'_\lambda g'_{\mu\nu} + g'_{\mu\nu} \left(\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\gamma} \frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} \right) \\
&= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \partial'_\nu g'_{\lambda\mu} + g'_{\nu\mu} \frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} + g'_{\mu\nu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\gamma} \frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} \\
&= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \partial'_\nu g'_{\lambda\mu} + g'_{\mu\nu} \left(\frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\gamma} \frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} \right),
\end{aligned}$$

onde utilizamos que as componentes da métrica são simétricos. Utilizando o guia dos termos sublinhados, obtemos a transformação dos coeficientes da conexão sob mudança de cartas,

$$\begin{aligned}
\Gamma^\rho_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} g^{\rho\gamma} (\partial_\alpha g_{\beta\gamma} + \partial_\beta g_{\gamma\alpha} - \partial_\gamma g_{\alpha\beta}) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\xi} g'^{\sigma\xi} \right) \left[\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \left(\partial'_\mu g'_{\nu\lambda} + \partial'_\nu g'_{\lambda\mu} - \partial'_\lambda g'_{\mu\nu} \right) + 2g'_{\mu\nu} \left(\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\gamma} \right) \right] \\
&= \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\xi} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} g'^{\sigma\xi} \left(\partial'_\mu g'_{\nu\lambda} + \partial'_\nu g'_{\lambda\mu} - \partial'_\lambda g'_{\mu\nu} \right) + \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\xi} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\gamma} g'^{\sigma\xi} g'_{\mu\nu} \left(\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \right) \right] \\
&= \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \delta^\lambda_\xi g'^{\sigma\xi} \left(\partial'_\mu g'_{\nu\lambda} + \partial'_\nu g'_{\lambda\mu} - \partial'_\lambda g'_{\mu\nu} \right) + \delta^\nu_\xi g'^{\sigma\xi} g'_{\mu\nu} \left(\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \right) \right] \\
&= \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \left[\frac{1}{2} g'^{\sigma\lambda} \left(\partial'_\mu g'_{\nu\lambda} + \partial'_\nu g'_{\lambda\mu} - \partial'_\lambda g'_{\mu\nu} \right) \right] + \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} g'^{\sigma\nu} g'_{\mu\nu} \left(\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \right) \\
&= \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \Gamma'^\sigma_{\mu\nu} + \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial^2 x'^\sigma}{\partial x^\alpha \partial x^\beta},
\end{aligned}$$

então pela presença do termo afim $\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial^2 x'^\sigma}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}$ não necessariamente nulo, estes coeficientes não se transformam como tensores.

Para um vetor V^ρ , consideremos o objeto $\partial_\alpha V^\rho$ na carta local de coordenadas x . Em outra carta de coordenadas x' , temos

$$V^\rho = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} V'^\nu,$$

de modo que

$$\begin{aligned}
\partial_\alpha V^\rho &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \partial'_\mu \left(\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} V'^\sigma \right) \\
&= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \partial'_\mu V'^\sigma + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu \partial x'^\sigma} V'^\sigma,
\end{aligned}$$

e por conta do termo afim $\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu \partial x'^\sigma} V'^\sigma$ não necessariamente nulo, este objeto não se transforma como um tensor.

Mostremos que $\nabla_\alpha V^\rho = \partial_\alpha V^\rho + \Gamma^\rho_{\alpha\beta} V^\beta$ se transforma como um tensor. Notemos que

$$\begin{aligned}
\Gamma^\rho_{\alpha\beta} V^\beta &= \left(\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \Gamma'^\sigma_{\mu\nu} + \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial^2 x'^\sigma}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \right) V^\beta \\
&= \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \Gamma'^\sigma_{\mu\nu} V'^\nu + \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial^2 x'^\sigma}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} V^\beta.
\end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}
\nabla_\alpha V^\rho &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \left(\partial'_\mu V'^\sigma + \Gamma'^\sigma_{\mu\nu} V'^\nu \right) + \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial^2 x'^\sigma}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} V^\beta + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu \partial x'^\sigma} V'^\sigma \\
&= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \nabla'_\mu V'^\sigma + \left(\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial^2 x'^\sigma}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} + \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\beta} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu \partial x'^\sigma} \right) V^\beta \\
&= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \nabla'_\mu V'^\sigma + \left(\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\beta} + \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\beta} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \right) V^\beta \\
&= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \nabla'_\mu V'^\sigma + \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\beta} \right) V^\beta \\
&= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \nabla'_\mu V'^\sigma + \left(\partial_\alpha \delta^\rho_\beta \right) V^\beta \\
&= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \nabla'_\mu V'^\sigma,
\end{aligned}$$

já que o $\partial_\alpha \delta^\rho_\beta = 0$. Segue que este objeto se transforma como um tensor.

Para um tensor Q^ρ_τ , a sua derivada covariante é dada por

$$\nabla_\alpha Q^\rho_\tau = \partial_\alpha Q^\rho_\tau + \Gamma^\rho_{\alpha\beta} Q^\beta_\tau - \Gamma^\gamma_{\alpha\tau} Q^\rho_\gamma.$$

Em relação à carta de coordenadas x' , temos

$$\begin{aligned}
\partial_\alpha Q^\rho_\tau &= \partial_\alpha \left(\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\xi}{\partial x^\tau} Q'^\sigma_\xi \right) \\
&= \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\xi}{\partial x^\tau} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \partial'_\mu Q'^\sigma_\xi + \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial^2 x'^\xi}{\partial x^\alpha \partial x^\tau} Q'^\sigma_\xi + \frac{\partial x'^\xi}{\partial x^\tau} Q'^\sigma_\xi \partial_\alpha \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \\
&= \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\xi}{\partial x^\tau} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \partial'_\mu Q'^\sigma_\xi + \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial^2 x'^\xi}{\partial x^\alpha \partial x^\tau} Q'^\sigma_\xi + \frac{\partial x'^\xi}{\partial x^\tau} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\xi} Q'^\beta_\delta \partial_\alpha \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \\
&= \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\xi}{\partial x^\tau} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \partial'_\mu Q'^\sigma_\xi + \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial^2 x'^\xi}{\partial x^\alpha \partial x^\tau} Q'^\sigma_\xi + \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\beta} Q^\beta_\tau \partial_\alpha \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \\
\Gamma^\rho_{\alpha\beta} Q^\beta_\tau &= \left(\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \Gamma'^\sigma_{\mu\nu} + \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial^2 x'^\sigma}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \right) Q^\beta_\tau \\
&= \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \Gamma'^\sigma_{\mu\nu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x'^\xi}{\partial x^\tau} Q'^\lambda_\xi + \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial^2 x'^\sigma}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} Q^\beta_\tau \\
&= \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\xi}{\partial x^\tau} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \Gamma'^\sigma_{\mu\xi} Q'^\sigma_\xi + \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} Q^\beta_\tau \partial_\alpha \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\beta} \\
\Gamma^\gamma_{\alpha\tau} Q^\rho_\gamma &= \left(\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\omega} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\xi}{\partial x^\tau} \Gamma'^\omega_{\mu\xi} + \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\omega} \frac{\partial^2 x'^\omega}{\partial x^\alpha \partial x^\tau} \right) \left(\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\zeta}{\partial x^\gamma} Q'^\sigma_\zeta \right) \\
&= \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\omega} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\xi}{\partial x^\tau} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\zeta}{\partial x^\gamma} \Gamma'^\omega_{\mu\xi} Q'^\sigma_\zeta + \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\omega} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\zeta}{\partial x^\gamma} Q'^\sigma_\zeta \frac{\partial^2 x'^\omega}{\partial x^\alpha \partial x^\tau} \\
&= \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\xi}{\partial x^\tau} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \Gamma'^\sigma_{\mu\xi} Q'^\sigma_\xi + \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} Q'^\sigma_\zeta \frac{\partial^2 x'^\omega}{\partial x^\alpha \partial x^\tau}
\end{aligned}$$

Assim, ao somar os dois primeiros termos e subtrair o terceiro, os termos sublinhados em verde são cancelados e os termos sublinhados em laranja também uma vez que

$$\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\beta} \partial_\alpha \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} + \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \partial_\alpha \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\beta} = \partial_\alpha \left(\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \right) = \partial_\alpha \delta^\rho_\beta = 0,$$

portanto segue que restam apenas os termos sublinhados em rosa, obtendo

$$\nabla_\alpha Q^\rho_\tau = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\xi}{\partial x^\tau} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \left(\partial'_\mu Q'^\sigma_\xi + \Gamma'^\sigma_{\mu\nu} Q'^\nu_\xi + \Gamma'^\zeta_{\mu\xi} Q'^\sigma_\zeta \right) = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\xi}{\partial x^\tau} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \nabla'_\mu Q'^\sigma_\xi.$$

Dessa forma, verificamos a transformação tensorial da derivada covariante de um tensor Q^ρ_τ .

Exercício 8