

4302305 - Lista de Exercícios IV

Louis Bergamo Radial
8992822

10 de maio de 2024

Exercício 1

Em uma variedade de dimensão n dotada de métrica e uma conexão de Levi-Civita, o tensor de curvatura tem n^4 componentes. Contraindo o tensor de curvatura com o tensor métrico, temos as simetrias dadas por

$$R_{\alpha\rho\mu\nu} = -R_{\alpha\rho\nu\mu} = -R_{\rho\alpha\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\rho},$$

além da identidade de Jacobi,

$$R_{\alpha\rho\mu\nu} + R_{\alpha\mu\nu\rho} + R_{\alpha\nu\rho\mu} = 0.$$

Como o tensor é antissimétrico no primeiro e no último par de índices, temos que cada par pode assumir $m = \binom{n}{2}$ valores diferentes. Desse modo, como podemos trocar os pares de índices, segue que o tensor tem no máximo $\frac{m(m+1)}{2}$ componentes independentes. Na identidade de Jacobi, todos os índices devem ser distintos para que a equação não seja reduzida às condições de antissimetria, portanto temos $\binom{n}{4}$ outros vínculos para as componentes do tensor de curvatura. Assim, o número de componentes independentes do tensor de Riemann é dado por

$$\frac{m(m+1)}{2} - \binom{n}{4} = \frac{n(n-1)}{8} (3n^2 - 3n + 6 - (n-2)(n-3)) = \frac{n^2(n^2-1)}{12}.$$

Notemos que o tensor de Ricci é um tensor simétrico, portanto um limite superior para o número de suas componentes independentes é dado por $\frac{n(n+1)}{2}$. Desse modo, temos que em $n = 3$ o número de componentes independentes do tensor de Ricci e do tensor de Riemann são iguais!

Já vimos que as componentes do tensor de Riemann são dadas por

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = g_{\mu\sigma} R^\sigma_{\nu\alpha\beta} = g_{\mu\sigma} \left(\partial_\alpha \Gamma^\sigma_{\beta\nu} - \partial_\beta \Gamma^\sigma_{\alpha\nu} + \Gamma^\sigma_{\alpha\rho} \Gamma^\rho_{\beta\nu} - \Gamma^\sigma_{\beta\rho} \Gamma^\rho_{\alpha\nu} \right)$$

em qualquer sistema de coordenadas. Em coordenadas normais de Riemann, as primeiras derivadas da métrica e os coeficientes da conexão se anulam, de modo que

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\alpha\beta} &= \frac{1}{2} g_{\mu\sigma} \left[\partial_\alpha (g^{\sigma\rho} (\partial_\beta g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\beta} - \partial_\rho g_{\beta\nu})) - \partial_\beta (g^{\sigma\rho} (\partial_\alpha g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\alpha} - \partial_\rho g_{\alpha\nu})) \right] \\ &= \frac{1}{2} g_{\mu\sigma} g^{\sigma\rho} \left[\partial_\alpha (\partial_\beta g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\beta} - \partial_\rho g_{\beta\nu}) - \partial_\beta (\partial_\alpha g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\alpha} - \partial_\rho g_{\alpha\nu}) \right] \\ &= \frac{1}{2} \delta^\rho_\mu (\partial_\alpha \partial_\beta g_{\rho\nu} + \partial_\alpha \partial_\nu g_{\rho\beta} - \partial_\alpha \partial_\rho g_{\beta\nu} - \partial_\beta \partial_\alpha g_{\rho\nu} - \partial_\beta \partial_\nu g_{\rho\alpha} + \partial_\beta \partial_\rho g_{\alpha\nu}) \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\alpha \partial_\nu g_{\mu\beta} - \partial_\alpha \partial_\mu g_{\beta\nu} - \partial_\beta \partial_\nu g_{\mu\alpha} + \partial_\beta \partial_\mu g_{\alpha\nu}), \end{aligned}$$

onde utilizamos que $\partial_\alpha \partial_\beta = \partial_\beta \partial_\alpha$. Assim, ainda nas coordenadas normais de Riemann, temos

$$\nabla_\lambda R_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\partial_\lambda \partial_\alpha \partial_\nu g_{\mu\beta} - \partial_\lambda \partial_\alpha \partial_\mu g_{\beta\nu} - \partial_\lambda \partial_\beta \partial_\nu g_{\mu\alpha} + \partial_\lambda \partial_\beta \partial_\mu g_{\alpha\nu} \right),$$

então ao permutar ciclicamente (α, β, λ) , obtemos

$$\nabla_\alpha R_{\mu\nu\beta\lambda} = \frac{1}{2} \left(\partial_\alpha \partial_\beta \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\alpha \partial_\beta \partial_\mu g_{\lambda\nu} - \partial_\alpha \partial_\lambda \partial_\nu g_{\mu\beta} + \partial_\alpha \partial_\lambda \partial_\mu g_{\beta\nu} \right)$$

e

$$\nabla_\beta R_{\mu\nu\lambda\alpha} = \frac{1}{2} \left(\partial_\beta \partial_\lambda \partial_\nu g_{\mu\alpha} - \partial_\beta \partial_\lambda \partial_\mu g_{\alpha\nu} - \partial_\beta \partial_\alpha \partial_\nu g_{\mu\lambda} + \partial_\beta \partial_\alpha \partial_\mu g_{\lambda\nu} \right),$$

portanto ao somar as três equações obtemos

$$\nabla_\lambda R_{\mu\nu\alpha\beta} + \nabla_\alpha R_{\mu\nu\beta\lambda} + \nabla_\beta R_{\mu\nu\lambda\alpha} = 0.$$

Deste modo, em qualquer outro sistema de coordenadas vale a segunda identidade de Bianchi, expressa acima.

Tornemos nossa atenção para o caso particular bidimensional e consideremos o tensor $X_{\mu\nu\alpha\beta} = g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}$. Notemos que

$$\begin{aligned} X_{\nu\mu\alpha\beta} &= g_{\nu\alpha}g_{\mu\beta} - g_{\nu\beta}g_{\mu\alpha} & X_{\mu\nu\beta\alpha} &= g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha} - g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} & X_{\alpha\beta\mu\nu} &= g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu} \\ &= -(g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}) & &= -(g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}) & &= g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha} \\ &= -X_{\mu\nu\alpha\beta} & &= -X_{\mu\nu\alpha\beta} & &= X_{\mu\nu\alpha\beta}, \end{aligned}$$

isto é, o tensor $X_{\mu\nu\alpha\beta}$ tem as simetrias do tensor de Riemann. Nesta dimensão há apenas uma componente independente para estes tensores, portanto $R_{\mu\nu\alpha\beta} = KX_{\mu\nu\alpha\beta}$ para alguma constante K . Podemos obter a relação desta constante com o escalar de curvatura $R = g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}R_{\mu\nu\alpha\beta}$ de forma a escrever o tensor de Riemann em termos do tensor métrico e do escalar de curvatura,

$$\begin{aligned} R &= Kg^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}X_{\mu\nu\alpha\beta} \\ &= Kg^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}(g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}) \\ &= Kg^{\mu\alpha}(2g_{\mu\alpha} - g_{\mu\alpha}) \\ &= 2K, \end{aligned}$$

portanto,

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{R}{2}(g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}).$$

É interessante notar que a constante $K = \frac{R}{2}$ é a chamada curvatura Gaussiana de uma superfície da teoria clássica de geometria diferencial. O tratamento original feito por Gauss foi inicialmente de modo extrínseco, estudando superfícies imersas no espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 e induzindo uma métrica nesta superfície a partir da métrica Euclidiana, chamada de primeira forma fundamental. Utilizando a abordagem intrínseca obtivemos o mesmo resultado, fato esse relacionado com o teorema de Whitney, que diz sobre a capacidade de imersão de qualquer variedade diferenciável de dimensão n em algum \mathbb{R}^d com $d \geq n$.

Exercício 2

No exercício 1, vimos que em duas dimensões temos

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{R}{2} (g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}),$$

portanto

$$R_{2121} = \frac{R}{2}(g_{22}g_{11} - g_{21}g_{12}) = \frac{R}{2}g,$$

de modo que R_{2121} se anula se e somente se o escalar de curvatura R se anula, uma vez que o tensor métrico é não degenerado. Como consequência, se $R_{2121} = 0$, segue que $R_{\mu\nu\alpha\beta} = 0$, isto é, a variedade é plana.

Consideremos a métrica de uma variedade bidimensional dada por

$$g_{11} = 1 + u^2, \quad g_{12} = 2v - u, \quad g_{21} = 2v - u, \quad \text{e} \quad g_{22} = 1 + \kappa v^2,$$

para um parâmetro $\kappa > 0$. Notando que $g = 1 + 4uv + \kappa u^2 v^2 + (\kappa - 4)v^2$, temos

$$g^{11} = \frac{1 + \kappa v^2}{g}, \quad g^{12} = \frac{u - 2v}{g}, \quad g^{21} = \frac{u - 2v}{g}, \quad \text{e} \quad g^{22} = \frac{1 + u^2}{g}.$$

Podemos agora calcular os coeficientes da conexão de Levi-Civita, dados por

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{11} &= \frac{1}{2}g^{1m}(\partial_1 g_{1m} + \partial_1 g_{1m} - \partial_m g_{11}) & \Gamma^1_{12} &= \frac{1}{2}g^{1m}(\partial_1 g_{2m} + \partial_2 g_{1m} - \partial_m g_{12}) \\ &= g^{1m}\partial_1 g_{1m} - \frac{1}{2}g^{11}\partial_1 g_{11} & &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_1 g_{21} + \partial_2 g_{11} - \partial_1 g_{12}) + \frac{1}{2}g^{12}(\partial_1 g_{22} + \partial_2 g_{12} - \partial_2 g_{12}) \\ &= \frac{1}{2}g^{11}\partial_1 g_{11} + g^{12}\partial_1 g_{12} & &= \frac{1}{2}g^{11}\partial_2 g_{11} + \frac{1}{2}g^{12}\partial_1 g_{22} \\ &= \frac{\kappa u v^2 + 2v}{g}, & &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{22} &= \frac{1}{2}g^{1m}(\partial_2 g_{2m} + \partial_2 g_{2m} - \partial_m g_{22}) & \Gamma^2_{11} &= \frac{1}{2}g^{2m}(\partial_1 g_{1m} + \partial_1 g_{1m} - \partial_m g_{11}) \\ &= g^{1m}\partial_2 g_{2m} - \frac{1}{2}g^{12}\partial_2 g_{22} & &= g^{2m}\partial_1 g_{1m} - \frac{1}{2}g^{21}\partial_1 g_{11} \\ &= g^{11}\partial_2 g_{21} + \frac{1}{2}g^{12}\partial_2 g_{22} & &= \frac{1}{2}g^{21}\partial_1 g_{11} + g^{22}\partial_1 g_{12} \\ &= \frac{2 + \kappa u v}{g}, & &= \frac{-1 - 2uv}{g}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma^2_{12} &= \frac{1}{2}g^{2m}(\partial_1 g_{2m} + \partial_2 g_{1m} - \partial_m g_{12}) & \Gamma^2_{22} &= \frac{1}{2}g^{2m}(\partial_2 g_{2m} + \partial_2 g_{2m} - \partial_m g_{22}) \\ &= \frac{1}{2}g^{21}(\partial_1 g_{21} + \partial_2 g_{11} - \partial_1 g_{12}) + \frac{1}{2}g^{22}(\partial_1 g_{22} + \partial_2 g_{12} - \partial_2 g_{12}) & &= g^{2m}\partial_2 g_{2m} - \frac{1}{2}g^{22}\partial_2 g_{22} \\ &= \frac{1}{2}g^{21}\partial_2 g_{11} + \frac{1}{2}g^{22}\partial_1 g_{22} & &= g^{21}\partial_2 g_{21} + \frac{1}{2}g^{22}\partial_2 g_{22} \\ &= 0, & &= \frac{2u + (\kappa - 4)v + \kappa u^2 v}{g}. \end{aligned}$$

Com isso, podemos calcular a componente R_{2121} do tensor de Riemann por

$$\begin{aligned} R_{2121} &= g_{2s}R^s_{121} = g_{2s}(\partial_2 \Gamma^s_{11} - \partial_1 \Gamma^s_{21} + \Gamma^s_{2r}\Gamma^r_{11} - \Gamma^s_{1r}\Gamma^r_{21}) \\ &= g_{2s}(\partial_2 \Gamma^s_{11} + \Gamma^s_{22}\Gamma^2_{11}) \\ &= g_{21}(\partial_2 \Gamma^1_{11} + \Gamma^1_{22}\Gamma^2_{11}) + g_{22}(\partial_2 \Gamma^2_{11} + \Gamma^2_{22}\Gamma^2_{11}) \\ &= g_{21}\frac{(\kappa - 4)(uv - 2v^2)}{g^2} + g_{22}\frac{(\kappa - 4)u^2 v}{g^2} \\ &= (\kappa - 4)v\frac{\kappa u^2 v^2 + 4uv - 4v^2}{g^2}, \end{aligned}$$

com os detalhes omitidos¹ por simplicidade. Deste modo, vemos que R_{2121} é identicamente nulo se e so-

¹Com rascunho disponível no [repositório](#).

mente se $\kappa = 4$, portanto a variedade cuja métrica é dada por

$$ds^2 = (1 + u^2) du^2 + (1 + 4v^2) dv^2 + 2(2v - u) du dv$$

tem tensor de curvatura identicamente nulo, enquanto que a variedade cuja métrica é dada por

$$ds^2 = (1 + u^2) du^2 + (1 + 2v^2) dv^2 + 2(2v - u) du dv$$

tem tensor de curvatura não nulo.

Exercício 3

Exercício 4

Consideremos a ação de Einstein-Hilbert com uma constante cosmológica Λ ,

$$S_{\text{EH}} = \kappa_G \int_M d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda),$$

onde $\kappa_G = \frac{1}{16\pi G}$. A variação da ação devido à variação $g^{\mu\nu} \rightarrow g^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu}$ é dada por

$$\begin{aligned} \delta S_{\text{EH}} &= \kappa_G \int_M d^4x [(R - 2\Lambda)\delta\sqrt{-g} + \sqrt{-g}\delta R] \\ &= \kappa_G \int_M d^4x \sqrt{-g} \left[\left(\frac{1}{2}R - \Lambda \right) \frac{\delta g}{g} + R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} \right], \end{aligned}$$

portanto precisamos determinar as variações δg e $\delta R_{\mu\nu}$.

Em uma carta de coordenadas $g_{\mu\nu}$ pode ser considerada como uma matriz invertível, de modo que pela fórmula de Jacobi² temos

$$\delta g = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = -g g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}.$$

Assim, temos

$$\delta S_{\text{EH}} = \kappa_G \int_M d^4x \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} + \kappa_G \int_M d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu},$$

e nos resta mostrar que a segunda integral se anula.

Como consideramos conexões de Levi-Civita, a variação da métrica acarreta uma variação dos coeficientes da conexão $\Gamma^\sigma_{\nu\mu} \rightarrow \Gamma^\sigma_{\nu\mu} + \delta\Gamma^\sigma_{\nu\mu}$. Como $\delta\Gamma^\sigma_{\nu\mu}$ é uma componente do **tensor** dado pela diferença entre duas conexões, podemos escrever a sua derivada covariante por

$$\nabla_\rho \delta\Gamma^\sigma_{\nu\mu} = \partial_\rho \delta\Gamma^\sigma_{\nu\mu} + \Gamma^\sigma_{\rho\lambda} \delta\Gamma^\lambda_{\nu\mu} - \Gamma^\lambda_{\rho\nu} \delta\Gamma^\sigma_{\lambda\mu} - \Gamma^\lambda_{\rho\mu} \delta\Gamma^\sigma_{\nu\lambda},$$

em relação à conexão de coeficientes $\Gamma^\sigma_{\nu\mu}$. Como o tensor de curvatura é definido a partir da conexão, isto é,

$$R^\sigma_{\mu\rho\nu} = \partial_\rho \Gamma^\sigma_{\nu\mu} - \partial_\nu \Gamma^\sigma_{\rho\mu} + \Gamma^\sigma_{\rho\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\mu} - \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\rho\mu},$$

sua variação é dada por

$$\begin{aligned} \delta R^\sigma_{\mu\rho\nu} &= \partial_\rho \delta\Gamma^\sigma_{\nu\mu} - \partial_\nu \delta\Gamma^\sigma_{\rho\mu} + \delta\Gamma^\sigma_{\rho\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\mu} + \Gamma^\sigma_{\rho\lambda} \delta\Gamma^\lambda_{\nu\mu} - \delta\Gamma^\sigma_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\rho\mu} - \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} \delta\Gamma^\lambda_{\rho\mu} \\ &= \left(\partial_\rho \delta\Gamma^\sigma_{\nu\mu} + \Gamma^\sigma_{\rho\lambda} \delta\Gamma^\lambda_{\nu\mu} - \delta\Gamma^\sigma_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\rho\mu} \right) - \left(\partial_\nu \delta\Gamma^\sigma_{\rho\mu} + \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} \delta\Gamma^\lambda_{\rho\mu} - \delta\Gamma^\sigma_{\rho\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \right) \\ &= \left(\nabla_\rho \delta\Gamma^\sigma_{\nu\mu} + \Gamma^\lambda_{\rho\nu} \delta\Gamma^\sigma_{\lambda\mu} \right) - \left(\nabla_\nu \delta\Gamma^\sigma_{\rho\mu} + \Gamma^\lambda_{\nu\rho} \delta\Gamma^\sigma_{\lambda\mu} \right) \\ &= \nabla_\rho \delta\Gamma^\sigma_{\nu\mu} - \nabla_\nu \delta\Gamma^\sigma_{\rho\mu}. \end{aligned}$$

Assim, contraindo σ e ρ , obtemos a variação do tensor de Ricci,

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\sigma \delta\Gamma^\sigma_{\nu\mu} - \nabla_\nu \delta\Gamma^\sigma_{\sigma\mu},$$

conhecida como a identidade de Palatini. Desse modo, temos

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} \nabla_\sigma \delta\Gamma^\sigma_{\nu\mu} - g^{\mu\nu} \nabla_\nu \delta\Gamma^\sigma_{\sigma\mu} \\ &= \nabla_\sigma \left(g^{\mu\nu} \delta\Gamma^\sigma_{\nu\mu} \right) - \nabla_\nu \left(g^{\mu\nu} \delta\Gamma^\sigma_{\sigma\mu} \right) \\ &= \nabla_\sigma \left(g^{\mu\nu} \delta\Gamma^\sigma_{\nu\mu} - g^{\mu\sigma} \delta\Gamma^\nu_{\nu\mu} \right), \end{aligned}$$

onde utilizamos a propriedade de que a conexão de Levi-Civita é uma conexão métrica e permutamos os índices ν e σ no segundo termo. Por fim, temos

$$\kappa_G \int_M d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \kappa_G \int_M d^4x \sqrt{-g} \nabla_\sigma \left(g^{\mu\nu} \delta\Gamma^\sigma_{\nu\mu} - g^{\mu\sigma} \delta\Gamma^\nu_{\nu\mu} \right),$$

²Para uma matriz quadrada invertível M , vale $\delta(\det M) = (\det M) \text{tr} (A^{-1} \delta M)$.

que se anula pelo teorema de Stokes, ao impormos que a variação na borda ∂M é nula.

Por fim, obtemos a variação da ação com uma constante cosmológica, dada por

$$\delta S_{\text{EH}} = \kappa_G \int_M d^4x \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu}.$$

Assim, pelo lema fundamental do cálculo de variações, se $\delta S_{\text{EH}} = 0$, devemos ter

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0.$$

Exercício 5

Consideremos a ação

$$S_M = \int_M d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_M,$$

para uma densidade de lagrangiana \mathcal{L}_M que depende da métrica. Definindo o tensor de energia e momento por

$$T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}_M)}{\partial g^{\mu\nu}},$$

a variação da ação para uma variação do tensor métrico $g^{\mu\nu} \rightarrow g^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu}$ é dada por

$$\delta S_M = \int_M d^4x \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}_M)}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \int_M d^4x \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}.$$

Consideremos o caso particular do eletromagnetismo, com a ação dada por

$$S_{EM} = \int_M d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{4} g^{\rho\alpha} g^{\sigma\beta} F_{\rho\sigma} F_{\alpha\beta} \right),$$

onde $F_{\mu\nu}$ é o tensor de Faraday. Assim, variando a métrica e lembrando que o tensor de Faraday é antissimétrico, temos

$$\begin{aligned} \delta S_{EM} &= -\frac{1}{4} \int_M d^4x \sqrt{-g} \delta (g^{\rho\alpha} g^{\sigma\beta} F_{\rho\sigma} F_{\alpha\beta}) - \frac{1}{4} \int_M d^4x F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \delta \sqrt{-g} \\ &= -\frac{1}{4} \int_M d^4x \sqrt{-g} \left(\delta^\rho_\mu \delta^\alpha_\nu g^{\sigma\beta} + g^{\rho\alpha} \delta^\sigma_\mu \delta^\beta_\nu \right) F_{\rho\sigma} F_{\alpha\beta} \delta g^{\mu\nu} + \frac{1}{8} \int_M d^4x \sqrt{-g} g_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \delta g^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{2} \int_M d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} (g^{\sigma\beta} F_{\mu\sigma} F_{\nu\beta} + g^{\rho\alpha} F_{\rho\mu} F_{\alpha\nu}) - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \right] \delta g^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{2} \int_M d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} (g^{\kappa\lambda} F_{\mu\kappa} F_{\nu\lambda} + g^{\kappa\lambda} F_{\kappa\mu} F_{\lambda\nu}) - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \right] \delta g^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{2} \int_M d^4x \sqrt{-g} \left(g^{\kappa\lambda} F_{\kappa\mu} F_{\lambda\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \right) \delta g^{\mu\nu}, \end{aligned}$$

então o tensor de energia e momento é

$$T_{\mu\nu} = F^\kappa_\nu F_{\kappa\mu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma},$$

ou então, com índices contravariantes,

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} T_{\alpha\beta} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \left(F^\kappa_\beta F_{\kappa\alpha} - \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \right) \\ &= F^\mu_\kappa F^{\nu\kappa} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma}. \end{aligned}$$

Consideremos as coordenadas normais de Riemann, em que podemos tomar os resultados conhecidos da Relatividade Restrita. Isto é, nesta carta temos

$$F^{0i} = E^i \quad \text{e} \quad F^{ij} = \epsilon^{ijk} B_k,$$

com as demais componentes dadas pela antissimetria do tensor. A fim de calcular as componentes T^{00} e T^{i0} do tensor de energia e momento, determinamos

$$\begin{aligned} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} &= F_{0\sigma} F^{0\sigma} + F_{i\sigma} F^{i\sigma} & F^\kappa_\kappa F^{0\kappa} &= F^0_k F^{0k} & F^i_\kappa F^{0\kappa} &= F^i_k F^{0k} \\ &= F_{0i} F^{0i} + F_{i0} F^{i0} + F_{ij} F^{ij} & &= \eta_{jk} F^{0j} E^k & &= \eta_{jk} F^{ij} E^k \\ &= -2E_i E^i + \epsilon_{ij\ell} B^\ell \epsilon^{ijk} B_k & &= E_k E^k & &= \epsilon^{ij\ell} E_j B_\ell \\ &= -2\|\mathbf{E}\|^2 + 2\|\mathbf{B}\|^2, & &= \|\mathbf{E}\|^2, & &= (\mathbf{E} \times \mathbf{B})^i. \end{aligned}$$

Assim, obtemos as componentes desejadas,

$$T^{00} = \|\mathbf{E}\|^2 + \frac{2\|\mathbf{B}\|^2 - 2\|\mathbf{E}\|^2}{4} = \frac{\|\mathbf{E}\|^2 + \|\mathbf{B}\|^2}{2} \quad \text{e} \quad T^{i0} = (\mathbf{E} \times \mathbf{B})^i,$$

isto é, T^{00} é a densidade de energia do campo eletromagnético e T^{i0} é a componente i do vetor de Poynting.

Exercício 6

No exercício 1, mostramos que vale

$$R_{\lambda\mu\rho\nu} = \frac{1}{2}R (g_{\lambda\rho}g_{\mu\nu} - g_{\lambda\nu}g_{\mu\rho})$$

no caso particular de variedades bidimensionais. Assim, o tensor de Riemann é dado por

$$R^{\sigma}_{\mu\rho\nu} = g^{\sigma\lambda}R_{\lambda\mu\rho\nu} = \frac{1}{2}Rg^{\sigma\lambda}(g_{\lambda\rho}g_{\mu\nu} - g_{\lambda\nu}g_{\mu\rho}) = \frac{1}{2}R(\delta^{\sigma}_{\rho}g_{\mu\nu} - \delta^{\sigma}_{\nu}g_{\mu\rho}),$$

de modo que o tensor de Ricci é obtido pela contração de σ e ρ ,

$$R_{\mu\nu} = R^{\sigma}_{\mu\sigma\nu} = \frac{1}{2}R(2g_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}) = \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}.$$

Dessa forma, o tensor de Einstein em duas dimensões é identicamente nulo,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 0.$$

Dessa forma, as equações de Einstein $G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$, implicam que o tensor de energia e momento é nulo em toda a variedade.

Exercício 7

Consideremos um campo gravitacional fraco, em que podemos tomar a métrica como uma perturbação da métrica de Minkowski $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, onde $h_{\mu\nu}$ é “pequeno”, isto é, consideraremos efeitos dessa perturbação em até primeira ordem. Por exemplo, os isomorfismos musicais são feitos em relação à métrica de Minkowski e tomaremos

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu},$$

com $h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}h_{\alpha\beta}$, de modo que $g_{\mu\nu}g^{\nu\lambda} = \delta^\lambda_\mu + O(h^2)$. É importante ressaltar que, como $g_{\mu\nu}$ e $\eta_{\mu\nu}$ são simétricos, $h_{\mu\nu}$ também o deve ser.

Os coeficientes da conexão de Levi-Civita para essa métrica são dados por

$$\begin{aligned}\Gamma^\sigma_{\nu\mu} &= \frac{1}{2}g^{\sigma\lambda}(\partial_\nu g_{\lambda\mu} + \partial_\mu g_{\lambda\nu} - \partial_\lambda g_{\nu\mu}) \\ &= \frac{1}{2}\eta^{\sigma\lambda}(\partial_\nu h_{\lambda\mu} + \partial_\mu h_{\lambda\nu} - \partial_\lambda h_{\nu\mu}) + O(h^2),\end{aligned}$$

de modo que o tensor de Riemann é dado por

$$\begin{aligned}R^\sigma_{\mu\rho\nu} &= \partial_\rho \Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\sigma_{\mu\rho} + \Gamma^\sigma_{\rho\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\sigma_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\rho\nu} \\ &= \partial_\rho \Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\sigma_{\mu\rho} + O(h^2) \\ &= \frac{1}{2}\eta^{\sigma\lambda}(\partial_\rho \partial_\mu h_{\lambda\nu} + \partial_\rho \partial_\nu h_{\lambda\mu} - \partial_\rho \partial_\lambda h_{\mu\nu}) - \frac{1}{2}\eta^{\sigma\lambda}(\partial_\mu \partial_\rho h_{\lambda\nu} + \partial_\mu \partial_\nu h_{\lambda\rho} - \partial_\mu \partial_\lambda h_{\rho\nu}) \\ &= \frac{1}{2}\eta^{\sigma\lambda}(\partial_\rho \partial_\nu h_{\lambda\mu} - \partial_\rho \partial_\lambda h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h_{\lambda\rho} + \partial_\mu \partial_\lambda h_{\rho\nu}).\end{aligned}$$

Definindo o traço $h = h^\sigma_\sigma = \eta^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}$ e $\bar{h}_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}h$, temos que o tensor de Ricci é dado por

$$\begin{aligned}R_{\mu\nu} &= R^\sigma_{\mu\sigma\nu} = \frac{1}{2}\eta^{\sigma\lambda}(\partial_\sigma \partial_\nu h_{\lambda\mu} - \partial_\sigma \partial_\lambda h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h_{\lambda\sigma} + \partial_\mu \partial_\lambda h_{\sigma\nu}) \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\sigma \partial_\nu h^\sigma_\mu - \partial^\sigma \partial_\sigma h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h + \partial_\mu \partial^\sigma h_{\sigma\nu}) \\ &= \frac{1}{2}(\partial^\sigma \partial_\nu h_{\mu\sigma} + \partial^\sigma \partial_\mu h_{\nu\sigma} - \partial^\sigma \partial_\sigma h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h) \\ &= \frac{1}{2}(\partial^\sigma \partial_\nu \bar{h}_{\mu\sigma} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\sigma} \partial^\sigma \partial_\nu h + \partial^\sigma \partial_\mu \bar{h}_{\nu\sigma} + \frac{1}{2}\eta_{\nu\sigma} \partial^\sigma \partial_\nu h - \partial^\sigma \partial_\sigma h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h) \\ &= \frac{1}{2}(\partial^\sigma \partial_\nu \bar{h}_{\mu\sigma} + \partial^\sigma \partial_\mu \bar{h}_{\nu\sigma} - \partial^\sigma \partial_\sigma h_{\mu\nu})\end{aligned}$$

e o escalar de curvatura por

$$\begin{aligned}R &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + O(h^2) \\ &= \frac{1}{2}(\partial^\sigma \partial^\mu \bar{h}_{\mu\sigma} + \partial^\sigma \partial^\mu \bar{h}_{\mu\sigma} - \partial^\sigma \partial_\sigma \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}) \\ &= \partial^\sigma \partial^\mu \bar{h}_{\mu\sigma} - \frac{1}{2}\partial^\sigma \partial_\sigma h.\end{aligned}$$

Desse modo, obtemos a linearização do tensor de Einstein, dada por

$$\begin{aligned}G_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R \eta_{\mu\nu} + O(h^2) \\ &= \frac{1}{2}\left(\partial^\sigma \partial_\nu \bar{h}_{\mu\sigma} + \partial^\sigma \partial_\mu \bar{h}_{\nu\sigma} - \partial^\sigma \partial_\sigma h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \partial^\sigma \partial^\rho \bar{h}_{\rho\sigma} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} \partial^\sigma \partial_\sigma h\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\partial^\sigma \partial_\nu \bar{h}_{\mu\sigma} + \partial^\sigma \partial_\mu \bar{h}_{\nu\sigma} - \partial^\sigma \partial_\sigma h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \partial^\sigma \partial^\rho \bar{h}_{\rho\sigma}\right).\end{aligned}$$

Pela simetria por difeomorfismos, temos liberdade de escolha de calibre para $g_{\mu\nu}$, de forma que podemos escolher o calibre $\partial^\nu h_{\mu\nu} = 0$, de forma que o tensor de Einstein se torna apenas $G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\partial^\sigma \partial_\sigma \bar{h}_{\mu\nu}$. Neste caso, as equações de Einstein são dadas por

$$\partial^\sigma \partial_\sigma \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi G T_{\mu\nu}.$$

Consideremos o caso quase-estático em que o tensor de energia e momento pode ser tomado em primeira aproximação como identicamente nulo exceto por sua componente $T_{00} = \rho$ que só depende das coordenadas espaciais. Neste caso temos

$$\nabla^2 \bar{h}_{00} = -16\pi G\rho,$$

portanto em paralelo com a equação de Poisson, $\nabla^2 \Phi = 4\pi G\rho$, escolhemos $\bar{h}_{00} = -4\Phi$. Além disso, como as outras componentes do tensor de energia e momento são nulas, podemos tomar $\bar{h}_{\mu\nu} = 0$ para todos μ e ν , exceto para $\mu = \nu = 0$. Deste modo o traço de $\bar{h}_{\mu\nu}$ é

$$\bar{h} = g^{\mu\nu} \bar{h}_{\mu\nu} = 4\Phi + O(h^2),$$

e podemos relacioná-lo com o traço de $h_{\mu\nu}$ ao tomar o traço da definição do tensor $\bar{h}_{\mu\nu}$,

$$h = g^{\mu\nu} h_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} \left(\bar{h}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} h \eta_{\mu\nu} \right) + O(h^2) = \bar{h} + 2h \implies h = -\bar{h} = -4\Phi.$$

Assim, obtemos $h_{\mu\nu}$,

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} h \eta_{\mu\nu} = -4\Phi \delta_{\mu}^0 \delta_{\nu}^0 - 2\Phi \eta_{\mu\nu} \implies h_{00} = -2\Phi, \quad h_{ij} = -2\Phi \delta_{ij}, \quad \text{e} \quad h_{0j} = 0,$$

e, portanto, a métrica do campo gravitacional fraco é dada por

$$ds^2 = -(1 + 2\Phi) dt^2 + (1 - 2\Phi) (dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

Exercício 8

Relembremos o resultado obtido para os coeficientes da conexão de Levi-Civita no caso de uma métrica diagonal

$$\Gamma^\lambda_{\lambda\lambda} = \frac{\partial_\lambda g_{\lambda\lambda}}{2g_{\lambda\lambda}}, \quad \Gamma^\lambda_{\mu\lambda} = \frac{\partial_\mu g_{\lambda\lambda}}{2g_{\lambda\lambda}}, \quad \Gamma^\lambda_{\mu\mu} = -\frac{\partial_\lambda g_{\mu\mu}}{2g_{\lambda\lambda}}, \quad \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = 0,$$

em que não utilizamos a convenção de soma de Einstein, portanto não há nenhuma soma nos termos acima.

Deste modo, para uma métrica Lorentziana estática e com simetria esférica, podemos escrever

$$g_{tt} = -e^{b(r)} \quad g_{rr} = e^{a(r)} \quad g_{\theta\theta} = r^2 \quad g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2 \theta,$$

com as outras componentes nulas. Utilizando as expressões para os coeficientes da conexão, vemos que os termos $\Gamma^\lambda_{t\lambda} = \Gamma^\lambda_{\phi\lambda} = \Gamma^t_{\mu\mu} = \Gamma^\phi_{\mu\mu} = 0$, visto que estes termos envolvem derivadas em relação a t ou a ϕ e que as componentes da métrica não têm dependência com essas variáveis. Temos também que os termos $\Gamma^\theta_{\nu\nu} = \Gamma^\theta_{\mu\theta} = 0$ se anulam para $\nu \neq \phi$ e $\mu \neq r$. Obtemos os demais coeficientes computando diretamente com as fórmulas acima,

$$\begin{aligned} \Gamma^t_{tr} &= \frac{1}{2}b' & \Gamma^r_{tt} &= \frac{1}{2}b'e^{b-a} & \Gamma^r_{rr} &= \frac{1}{2}a' \\ \Gamma^r_{\theta\theta} &= -re^{-a} & \Gamma^r_{\phi\phi} &= -r\sin^2\theta e^{-a} & \Gamma^\theta_{r\theta} &= \frac{1}{r} \\ \Gamma^\theta_{\phi\phi} &= -\sin\theta\cos\theta & \Gamma^\phi_{r\phi} &= \frac{1}{r} & \Gamma^\phi_{\theta\phi} &= \cot\theta, \end{aligned}$$

com $a = a(r)$, $b = b(r)$, $a' = \frac{da}{dr}$ e $b' = \frac{db}{dr}$.

Computemos as componentes R_{tt} , R_{rr} , $R_{\theta\theta}$ e $R_{\phi\phi}$ do tensor de Ricci, dado por

$$R_{\mu\nu} = R^\sigma_{\mu\sigma\nu} = \partial_\sigma \Gamma^\sigma_{\nu\mu} - \partial_\nu \Gamma^\sigma_{\sigma\mu} + \Gamma^\sigma_{\sigma\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\mu} - \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\sigma\mu}.$$

Utilizando os coeficientes da conexão encontrados, temos

$$\begin{aligned} R_{tt} &= \partial_\sigma \Gamma^\sigma_{tt} - \partial_t \Gamma^\sigma_{\sigma t} + \Gamma^\sigma_{\sigma\lambda} \Gamma^\lambda_{tt} - \Gamma^\sigma_{t\lambda} \Gamma^\lambda_{\sigma t} \\ &= \partial_r \Gamma^r_{tt} + \Gamma^\sigma_{\sigma r} \Gamma^r_{tt} - (\Gamma^\sigma_{tt} \Gamma^t_{\sigma t} + \Gamma^\sigma_{tr} \Gamma^r_{\sigma t}) \\ &= \partial_r \Gamma^r_{tt} + \Gamma^\sigma_{\sigma r} \Gamma^r_{tt} - (\Gamma^r_{tt} \Gamma^t_{rt} + \Gamma^t_{tr} \Gamma^r_{tt}) \\ &= \partial_r \Gamma^r_{tt} + (-\Gamma^t_{rt} + \Gamma^r_{rr} + \Gamma^\theta_{\theta r} + \Gamma^\phi_{\phi r}) \Gamma^r_{tt} \\ &= \frac{1}{2}e^{b-a} \left(b'' + b'(b' - a') - \frac{1}{2}b'(b' - a') + \frac{2}{r}b' \right) \\ &= \frac{1}{2}e^{b-a} \left(b'' + \frac{1}{2}b'(b' - a') + \frac{2}{r}b' \right), \end{aligned}$$

e fazendo cálculos análogos para as outras componentes,

$$R_{rr} = \frac{1}{2} \left(-b'' + \frac{1}{2}b'(a' - b') + \frac{2}{r}a' \right) \quad R_{\theta\theta} = 1 - e^{-a} - \frac{r}{2}(b' - a')e^{-a} \quad R_{\phi\phi} = \sin^2\theta R_{\theta\theta}.$$

Se o tensor de Einstein é identicamente nulo, então o tensor de Ricci e o escalar de curvatura são nulos. De fato, temos

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} = 0 &\implies g^{\mu\nu} G_{\mu\nu} = 0 \\ &\implies g^{\mu\nu} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} \right) = 0 \\ &\implies R = 0, \end{aligned}$$

portanto $R_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} = 0$. Dessa forma, no vácuo o tensor de Ricci se anula, portanto temos o sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \frac{1}{2}e^{b-a} (b'' + \frac{1}{2}b'(b' - a') + \frac{2}{r}b') = 0 \\ \frac{1}{2} (-b'' + \frac{1}{2}b'(a' - b') + \frac{2}{r}a') = 0 \\ 1 - e^{-a} - \frac{r}{2}(b' - a')e^{-a} = 0 \\ \sin^2 \theta R_{\theta\theta} = 0. \end{cases}$$

Para $b = -a$, este sistema se torna

$$\begin{cases} \frac{1}{2}e^{2b} (b'' + (b')^2 + \frac{2}{r}b') = 0 \\ \frac{1}{2} (-b'' - (b')^2 - \frac{2}{r}b') = 0 \\ 1 - e^b - rb'e^b = 0, \end{cases}$$

onde a última equação foi removida por ser redundante. Notemos ainda que a primeira equação é igual à segunda exceto por um fator de $-e^{2b}$, portanto a única equação relevante é

$$e^b + rb'e^b = 1 \implies \frac{dr}{r} = \frac{db}{e^{-b} - 1}.$$

Com a substituição de variáveis $\xi = e^{-b} - 1$, temos $db = -\frac{d\xi}{1+\xi}$, portanto

$$-\frac{dr}{r} = \frac{d\xi}{\xi^2 + \xi} \implies \ln\left(\frac{r_0}{r}\right) = \ln \xi - \ln(\xi + 1),$$

para alguma constante de integração r_0 . Assim, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{r_0}{r} &= \frac{\xi}{\xi + 1} \implies \xi = \frac{r_0}{r - r_0} \\ &\implies e^{-b} = e^a = \frac{r}{r - r_0} \\ &\implies e^b = 1 - \frac{r_0}{r}, \end{aligned}$$

portanto encontramos a métrica

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_0}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2.$$

Para encontrar o valor da constante de integração, comparamos a métrica encontrada com a métrica do campo gravitacional fraco, obtendo

$$\frac{r_0}{r} = 2\Phi = \frac{2GM}{r} \implies r_0 = 2GM,$$

isto é,

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2,$$

que é a métrica de Schwarzschild.