4300337 - Lista de Exercícios VI

Louis Bergamo Radial
8992822

30 de junho de 2024

Exercício 1

Para um oscilador harmônico de massa $m = 0.2\,\mathrm{kg}$, amplitude de movimento $A = 1\,\mathrm{m}$, e frequência de oscilação $f = \frac{\omega}{2\pi} = 5\,\mathrm{Hz}$, temos a densidade de energia dada por

$$\rho(t, \boldsymbol{x}) = mc^2 \delta\left(x - A\cos\omega t\right)\delta(y)\delta(z).$$

A uma distância $D = 10\,\mathrm{m} \gg A$, podemos utilizar a aproximação de zona de radiação e determinar o momento de quadrupolo $q_{ij}(t)$, dado por

$$q_{ij}(t) = \int_\Sigma \mathrm{d}^3x\,\left(x_i x_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}\|\boldsymbol{x}\|^2\right)\rho(t, \boldsymbol{x}),$$

para obter a perturbação na métrica h_{ij} a partir de

$$h_{ij}(t, \boldsymbol{x}) = \frac{2G}{Dc^6}\ddot{q}_{ij}(t_R),$$

onde $t_R = t - \frac{D}{c}$ é o tempo retardado.

Notemos que pela expressão da densidade, as componentes q_{ij} com índices distintos e com um índice igual a dois ou três se anulam, isto é, $q_{12} = q_{13} = q_{23} = 0$, de modo que resta apenas determinar os termos q_{11}, q_{22}, e q_{33}. Temos

$$\begin{aligned}
q_{11}(t) &= \frac{1}{2}\int_\Sigma \mathrm{d}^3x\,\left(x^2 - y^2 - z^2\right)\rho(t, \boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}mc^2A^2\cos^2\omega t = \frac{1 + \cos 2\omega t}{4}mc^2A^2 \\
q_{22}(t) &= \frac{1}{2}\int_\Sigma \mathrm{d}^3x\,\left(y^2 - x^2 - z^2\right)\rho(t, \boldsymbol{x}) = -\frac{1}{2}mc^2A^2\cos^2\omega t = -q_{11}(t) \\
q_{33}(t) &= \frac{1}{2}\int_\Sigma \mathrm{d}^3x\,\left(z^2 - x^2 - y^2\right)\rho(t, \boldsymbol{x}) = -\frac{1}{2}mc^2A^2\cos^2\omega t = -q_{11}(t),
\end{aligned}$$

portanto a perturbação da métrica é dada por

$$h_{11} = -\frac{2mA^2\omega^2G}{Dc^4}\cos(2\omega t_R) \quad \text{e} \quad h_{22} = h_{33} = \frac{2mA^2\omega^2G}{Dc^4}\cos(2\omega t_R),$$

e vemos que a frequência de oscilação é $2f = 10\,\mathrm{Hz}$. Tomando a raiz do valor quadrático médio das perturbações para obter os estresses, obtemos

$$h_+ = \frac{\sqrt{2}mA^2\omega^2G}{Dc^4} = 2.307 \times 10^{-43} \quad \text{e} \quad h_\times = 0.$$

A potência irradiada pela onda gravitacional é dada por

$$P = \frac{G}{5c^9}\left\langle \frac{\mathrm{d}^3 Q_{ij}}{\mathrm{d}t^3}\frac{\mathrm{d}^3 Q^{ij}}{\mathrm{d}t^3}\right\rangle,$$

onde Q_{ij} é o momento de quadrupolo reduzido,

$$Q_{ij} = q_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta^{k\ell}q_{k\ell}.$$

Notando que q_{ij} é nulo para todo $i \neq j$ e que $q_{22} = q_{33} = -q_{11}$, temos

$$Q_{11} = \frac{4}{3}q_{11}, \quad Q_{22} = -\frac{2}{3}q_{11}, \quad \text{e} \quad Q_{33} = -\frac{2}{3}q_{11}$$

como as únicas componentes não nulas. Como $\ddot{q}_{11} = -4\omega^2 q_{11}$, temos $\dddot{q}_{11} = -4\omega^2\dot{q}_{11}$, logo

$$\frac{\mathrm{d}^3 Q_{ij}}{\mathrm{d}t^3}\frac{\mathrm{d}^3 Q^{ij}}{\mathrm{d}t^3} = \frac{8}{3}\left(\frac{\mathrm{d}^3 q_{11}}{\mathrm{d}t^3}\right)^2 = \frac{64}{3}\omega^4\left(\dot{q}_{11}\right)^2 = \frac{16}{3}m^2c^4A^4\omega^6\sin^2 2\omega t.$$

Deste modo, a potência irradiada é

$$P = \frac{8m^2A^4\omega^6 G}{15c^5} = 5.653\times 10^{-46}\,\mathrm{W}.$$

Exercício 2

Consideremos um sistema binário com massas m_1 e m_2 nas posições $\boldsymbol{r}_1$ e $\boldsymbol{r}_2$ em relação ao centro de massa do sistema. Seja $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2 2$ o vetor de posição relativa, então

$$\boldsymbol{r}_1 = \frac{\mu}{m_1}\boldsymbol{r} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{r}_2 = -\frac{\mu}{m_2}\boldsymbol{r},$$

onde $\mu = \frac{m_1 m_2}{M}$ é a massa reduzida do sistema. Em primeira aproximação, tomamos a trajetória da posição relativa como uma órbita circular com frequência angular constante ω,

$$\boldsymbol{r} = r\left[\cos(\omega t)\boldsymbol{e}_x + \sin(\omega t)\boldsymbol{e}_y\right],$$

satisfazendo a terceira lei de Kepler,

$$r^3 = \frac{GM}{\omega^2}.$$

Desta forma, a densidade de energia é

$$\begin{aligned}
\rho(t, \boldsymbol{x}) &= m_1 c^2 \delta\left(\boldsymbol{x} - r_1\left[\cos(\omega t)\boldsymbol{e}_x + \sin(\omega t)\boldsymbol{e}_y\right]\right) + m_2 c^2 \delta\left(\boldsymbol{x} + r_2\left[\cos(\omega t)\boldsymbol{e}_x + \sin(\omega t)\boldsymbol{e}_y\right]\right) \\
&= \left[m_1 c^2 \delta(x - r_1\cos\omega t)\delta(y - r_1\sin\omega t) + m_2 c^2 \delta(x + r_2\cos\omega t)\delta(y + r_2\sin\omega t)\right]\delta(z),
\end{aligned}$$

com $r_1 = \|\boldsymbol{r}_1\|$ e $r_2 = \|\boldsymbol{r}_2\|$. Os componentes do quadrupolo físico $q_{ij}(t)$ são dados por

$$q_{ij}(t) = \int_\Sigma \mathrm{d}^3x \left(x_i x_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}\|\boldsymbol{x}\|^2\right)\rho(t, \boldsymbol{x}),$$

portanto $q_{i3} = 0$, exceto para $i = 3$. Determinemos os componentes restantes q_{11}, q_{12}, q_{22}, e q_{33},

$$\begin{aligned}
q_{11}(t) &= \frac{1}{2}\int_\Sigma \mathrm{d}^3x\,(x^2 - y^2 - z^2)\rho(t, \boldsymbol{x}) \\
&= \frac{1}{2}\left[m_1 c^2 r_1^2 + m_2 c^2 r_2^2\right]\left(\cos^2\omega t - \sin^2\omega t\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[m_1\left(\frac{\mu r}{m_1}\right)^2 + m_2\left(\frac{\mu r}{m_2}\right)^2\right]c^2\cos(2\omega t) \\
&= \frac{1}{2}\mu c^2 r^2\cos(2\omega t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_{12}(t) &= \int_\Sigma \mathrm{d}^3x\, xy\rho(t, \boldsymbol{x}) \\
&= \left[m_1 c^2 r_1^2 + m_2 c^2 r_2^2\right]\cos(\omega t)\sin(\omega t) \\
&= \frac{1}{2}\left[m_1\left(\frac{\mu r}{m_1}\right)^2 + m_2\left(\frac{\mu r}{m_2}\right)^2\right]c^2\sin(2\omega t) \\
&= \frac{1}{2}\mu c^2 r^2\sin(2\omega t),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_{22}(t) &= \frac{1}{2}\int_\Sigma \mathrm{d}^3x\,(y^2 - x^2 - z^2)\rho(t, \boldsymbol{x}) \\
&= \frac{1}{2}\left[m_1 c^2 r_1^2 + m_2 c^2 r_2^2\right]\left(\sin^2\omega t - \cos^2\omega t\right) \\
&= -q_{11}(t),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_{33}(t) &= \frac{1}{2}\int_\Sigma \mathrm{d}^3x\,(z^2 - x^2 - y^2)\rho(t, \boldsymbol{x}) \\
&= -\frac{1}{2}m_1 c^2 r_1^2 - \frac{1}{2}m_2 c^2 r_2^2 \\
&= -\frac{1}{2}\mu c^2 r^2.
\end{aligned}$$

Assim, na aproximação de zona de radiação $R \gg r$, a perturbação da métrica é dada por

$$h_{ij}(t, \boldsymbol{x}) = \frac{2G}{Rc^6}\ddot{q}_{ij}(t_R), \text{ com} \quad t_R = t - \frac{R}{c},$$

de forma que

$$h_{11} = -\frac{4G\mu r^2\omega^2}{Rc^4}\cos(2\omega t_R) \quad \text{e} \quad h_{12} = -\frac{4G\mu r^2\omega^2}{Rc^4}\sin(2\omega t_R)$$

e podemos ver que a frequência da onda gravitacional é $f_{\mathrm{GW}} = \frac{\omega}{\pi}$. Tomando a raiz do valor quadrático médio destas componentes, obtemos as deformações induzidas h_+, $h_\times$ e o estresse h

$$h_+ = \sqrt{\left\langle h_{11}^2 \right\rangle} = \frac{2\sqrt{2}G\mu r^2\omega^2}{Rc^4} \quad \text{e} \quad h_\times = \sqrt{\left\langle h_{12}^2 \right\rangle} = \frac{2\sqrt{2}G\mu r^2\omega^2}{Rc^4} \implies h = \frac{\sqrt{h_+^2 + h_\times^2}}{2} = \frac{2G\mu r^2\omega^2}{Rc^4}.$$

Levando em conta que a energia orbital do sistema binário é

$$E_{\mathrm{orb}} = -\frac{GM\mu}{2r}$$

e que sua variação deve ser por conta da potência irradiada pelas ondas gravitacionais, devemos ter

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{orb}}}{\mathrm{d}t} = -P \implies \frac{GM\mu}{2r^2}\dot{r} &= -\frac{32G\mu^2r^4\omega^6}{5c^5} \\ \implies 3r^2\dot{r} &= -\frac{192\mu r^8\omega^6}{5Mc^5}. \end{aligned}$$

Derivando a terceira lei de Kepler, obtemos

$$\begin{aligned} r^3 = \frac{GM}{\omega^2} \implies -\frac{2GM}{\omega^3}\dot{\omega} &= -\frac{192\mu\omega^6}{5Mc^5}\left(\frac{GM}{\omega^2}\right)^{\frac{8}{3}} \\ \implies \dot{\omega} &= \frac{96G^{\frac{5}{3}}}{5c^5}\mu M^{\frac{2}{3}}\omega^{\frac{11}{3}}. \end{aligned}$$

Como vimos, a frequência da onda gravitacional é $f_{\mathrm{GW}} = \frac{\omega}{\pi}$, então

$$\begin{aligned} \dot{f}_{\mathrm{GW}} &= \frac{96G^{\frac{5}{3}}\pi^{\frac{8}{3}}}{5c^5}\mu M^{\frac{2}{3}} f_{\mathrm{GW}}^{\frac{11}{3}} \\ &= \alpha\mathcal{M}^{\frac{5}{3}} f_{\mathrm{GW}}^{\frac{11}{3}}, \end{aligned}$$

onde a constante proporcionalidade α e a *chirp mass* $\mathcal{M}$ são dadas por

$$\alpha = \frac{96G^{\frac{5}{3}}\pi^{\frac{8}{3}}}{5c^5} \quad \text{e} \quad \mathcal{M} = \mu^{\frac{3}{5}}M^{\frac{2}{5}} = \frac{(m_1m_2)^{\frac{3}{5}}}{(m_1+m_2)^{\frac{1}{5}}}.$$

Podemos utilizar a *chirp mass* para reescrever o estresse h obtido,

$$h = \frac{2G\mu\omega^2}{Rc^4}\left(\frac{GM}{\omega^2}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{2G}{Rc^2}\left(\frac{\pi G}{c^3}f_{\mathrm{GW}}\right)^{\frac{2}{3}}\mathcal{M}^{\frac{5}{3}} = \frac{2G\mathcal{M}}{Rc^2}\left(\frac{\pi G}{c^3}\mathcal{M}f_{\mathrm{GW}}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Exercício 4

Relembremos o resultado obtido para os coeficientes da conexão de Levi-Civita no caso de uma métrica diagonal

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\lambda\lambda} = \frac{\partial_\lambda g_{\lambda\lambda}}{2g_{\lambda\lambda}}, \qquad \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\lambda} = \frac{\partial_\mu g_{\lambda\lambda}}{2g_{\lambda\lambda}}, \qquad \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\mu} = -\frac{\partial_\lambda g_{\mu\mu}}{2g_{\lambda\lambda}}, \qquad \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} = 0,$$

em que não utilizamos a convenção de soma de Einstein, portanto não há nenhuma soma nos termos acima. Recordemos também que, utilizando a convenção de soma, vale

$$\Gamma^{\mu}{}_{\mu\nu} = \frac{\partial_\nu \sqrt{-g}}{\sqrt{-g}},$$

onde g é o determinante da métrica.

Consideremos a métrica dada por $\mathrm{d}s^2 = -\,\mathrm{d}t^2 + a^2(t)\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x_i$, com $-g = a^6(t)$. Utilizando as expressões para os coeficientes da conexão, vemos que os termos $\Gamma^{0}{}_{0\lambda} = \Gamma^{\lambda}{}_{\lambda\lambda} = \Gamma^{i}{}_{\lambda\lambda} = \Gamma^{i}{}_{ij} = 0$, visto que estes termos envolvem derivadas em relação às coordenadas espaciais e que as componentes da métrica não têm dependência com essas variáveis. Resta apenas os coeficientes dados por

$$\Gamma^{0}{}_{ij} = a\dot{a}\delta_{ij} \quad \text{e} \quad \Gamma^{i}{}_{j0} = \frac{\dot{a}}{a}\delta^{i}_{j},$$

onde $\dot{a} = \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}$. Da expressão para o tensor de curvatura de Riemann em coordenadas locais,

$$R^{\sigma}{}_{\mu\rho\nu} = \partial_\rho \Gamma^{\sigma}{}_{\nu\mu} - \partial_\nu \Gamma^{\sigma}{}_{\rho\mu} + \Gamma^{\sigma}{}_{\rho\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu} - \Gamma^{\sigma}{}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\rho\mu},$$

e das simetrias encontradas para os coeficientes da conexão, segue que o tensor de Ricci é

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu} = R^{\sigma}{}_{\mu\sigma\nu} &= \partial_\sigma \Gamma^{\sigma}{}_{\nu\mu} - \partial_\nu \Gamma^{\sigma}{}_{\sigma\mu} + \Gamma^{\sigma}{}_{\sigma\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu} - \Gamma^{\sigma}{}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\mu} \\
&= \partial_t \Gamma^{0}{}_{\nu\mu} - \delta^0_\nu \partial_t \left(\frac{\partial_\mu \sqrt{-g}}{\sqrt{-g}}\right) + \frac{\partial_\lambda \sqrt{-g}}{\sqrt{-g}}\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu} - \Gamma^{0}{}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{0\mu} - \Gamma^{i}{}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{i\mu} \\
&= \delta^m_\mu \delta^n_\nu \delta_{mn} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a\dot{a}) - \delta^0_\mu \delta^0_\nu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{3\dot{a}}{a}\right) + \frac{3\dot{a}}{a}\delta^m_\mu \delta^n_\nu \delta_{mn} a\dot{a} - \Gamma^{0}{}_{\nu j}\Gamma^{j}{}_{0\mu} - \Gamma^{i}{}_{\nu 0}\Gamma^{0}{}_{i\mu} - \Gamma^{i}{}_{\nu j}\Gamma^{j}{}_{i\mu} \\
&= \delta^m_\mu \delta^n_\nu \delta_{mn}\left(4\dot{a}^2 + a\ddot{a}\right) - \delta^0_\mu \delta^0_\nu \left(\frac{3\ddot{a}}{a} - \frac{3\dot{a}^2}{a^2}\right) - \delta^n_\nu \delta^m_\mu \delta_{mn}\dot{a}^2 - \delta^n_\nu \delta^m_\mu \delta_{mn}\dot{a}^2 - \delta^0_\nu \delta^0_\mu \frac{3\dot{a}^2}{a^2} \\
&= \delta^m_\mu \delta^n_\nu \delta_{mn}\left(2\dot{a}^2 + a\ddot{a}\right) - \delta^0_\mu \delta^0_\nu \left(\frac{3\ddot{a}}{a}\right),
\end{aligned}$$

isto é

$$R_{00} = -\frac{3\ddot{a}}{a}, \quad \text{e} \quad R_{ii} = a\ddot{a} + 2\dot{a}^2,$$

e todas as outras componentes nulas. Assim, o escalar de Ricci é dado por

$$\begin{aligned}
R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} &= \frac{3\ddot{a}}{a} + 3\frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2}{a^2} \\
&= 6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right),
\end{aligned}$$

logo o tensor de Einstein, $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$, tem suas componentes não nulas dadas por

$$G_{00} = 3\frac{\dot{a}^2}{a^2} \quad \text{e} \quad G_{ii} = -2a\ddot{a} - \dot{a}^2.$$

Consideremos as equações de Einstein no vácuo com uma constante cosmológica positiva Λ,

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0 \implies 3\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \Lambda = 0 \quad \text{e} \quad -2a\ddot{a} - \dot{a}^2 + \Lambda a^2 = 0.$$

Utilizando a primeira equação para eliminar o termo $\dot{a}^2$ na segunda equação, obtemos

$$-2a\left(\ddot{a} - \frac{\Lambda}{3}a\right) = 0.$$

Como $a \neq 0$ para que a métrica não seja singular, devemos ter que

$$a(t) = A\exp(Ht) + B\exp(-Ht),$$

onde $H = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}$ e $A, B \in \mathbb{R}$ são constantes não todas nulas. No caso particular de $B = 0$, a métrica seria, portanto,

$$\mathrm{d}s^2 = -\,\mathrm{d}t^2 + A^2 e^{2Ht}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x_i,$$

representando um Universo em expansão.

Neste caso, definimos o tempo conforme $\eta = -\frac{\exp(-Ht)}{H}$, que satisfaz $\dot{\eta} = -H\eta$, isto é,

$$\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}\eta}{H\eta} \implies \mathrm{d}t^2 = \frac{\mathrm{d}\eta^2}{H^2\eta^2}.$$

Deste modo, como $\exp(2Ht) = \left(H\eta\right)^{-2}$, temos

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{-\,\mathrm{d}\eta^2 + \,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x_i}{H^2\eta^2},$$

se tomarmos $A = 1$.

Interpretando $-\frac{\Lambda}{\kappa}g_{\mu\nu}$ como o tensor de energia e momento $T_{\mu\nu}$ das equações de Einstein sem constante cosmológica, temos de

$$T^{\mu}{}_{\nu} = (\rho + p)U^{\mu}U_{\nu} + p\delta^{\mu}{}_{\nu},$$

com $U^0 = H\eta$ e $U^i = 0$, que

$$\begin{aligned}\left(p + \frac{\Lambda}{\kappa}\right)\delta^{\mu}{}_{\nu} &= -(\rho + p)U^{\mu}U_{\nu} \\ &= (\rho + p)\delta^{\mu}_{0}\delta^{0}_{\nu}.\end{aligned}$$

Recordando que $\Lambda = 3H^2$, obtemos

$$\rho = \frac{3H^2}{\kappa} \quad \text{e} \quad p = -\frac{3H^2}{\kappa},$$

isto é, uma constante cosmológica positiva pode ser interpretada como um fluido com pressão negativa.

Exercício 5

Para a métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker,

$$\mathrm{d}s^2 = -\,\mathrm{d}t^2 + a^2(t)\gamma_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j, \text{ com } \gamma_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{\left[1 + \frac{\kappa}{4}(x^2 + y^2 + z^2)\right]^2},$$

onde κ é a curvatura da seção espacial, o tensor de Einstein é dado por

$$G_{00} = 3\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 3\frac{\kappa}{a^2}, \quad G_{0i} = 0, \quad \text{e} \quad G_{ij} = -\left(2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\kappa}{a^2}\right) g_{ij},$$

e os coeficientes da conexão de Levi-Civita por

$$\Gamma^0{}_{ij} = a\dot{a}\gamma_{ij}, \quad \Gamma^i{}_{0j} = \frac{\dot{a}}{a}\delta^i{}_j, \quad \text{e} \quad \Gamma^k{}_{ij} = 2\kappa\frac{\delta_{ij}x^k - \delta_{ik}x^j - \delta_{jk}x^i}{4 + \kappa(x^2 + y^2 + z^2)},$$

com os outros coeficientes ou nulos ou dados pela simetria da conexão. Consideremos um tensor de energia e momento homogêneo e isotrópico

$$T^\mu{}_\nu = \left[\rho(t) + p(t)\right] U^\mu U_\nu + p(t)\delta^\mu{}_\nu,$$

com $U^0 = 1$ e $U^i = 0$, e calculemos a divergência $\nabla_\mu T^\mu{}_\nu$ explicitamente. Notemos que

$$\nabla_\mu U^\mu = \frac{\partial_\mu(\sqrt{-g}U^\mu)}{\sqrt{-g}} = \frac{\partial_t\sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} = 3\frac{\dot{a}}{a}$$

e que

$$U^\mu\nabla_\mu U_\nu = U^\mu\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}U_\sigma = -\Gamma^0{}_{0\nu} = 0,$$

logo a divergência procurada é dada por

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu T^\mu{}_\nu &= (\dot{\rho} + \dot{p})U_\nu + (\rho + p)\left(U_\nu\nabla_\mu U^\mu + U^\mu\nabla_\mu U_\nu\right) + \dot{p}\delta^0{}_\nu \\
&= \left[\dot{\rho} + \dot{p} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p)\right] U_\nu + \dot{p}\delta^0{}_\nu.
\end{aligned}$$

Da conservação do tensor de energia e momento, $\nabla_\mu T^\mu{}_\nu = 0$, temos

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0,$$

equação a qual nos referiremos por equação de continuidade.

Considerando as equações de Einstein com constante cosmológica, $G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$, obtemos as equações de Friedmann,

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 3\frac{\kappa}{a^2} - \Lambda = 8\pi G\rho \quad \text{e} \quad -2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\kappa}{a^2} + \Lambda = 8\pi G p.$$

Somando a primeira equação dividida por três à segunda equação, obtemos

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{\Lambda}{3} - \frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p),$$

que podemos substituir de volta na segunda equação, resultando em

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= \Lambda - \frac{\kappa}{a^2} - 8\pi G p - 2\left[\frac{\Lambda}{3} - \frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p)\right] \\
&= \frac{\Lambda}{3} - \frac{\kappa}{a^2} + \frac{8\pi G}{3}\rho.
\end{aligned}$$

Definindo $\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}$ e $\rho_\kappa = -\frac{3\kappa}{8\pi G}a^{-2}$ e utilizando o parâmetro de Hubble, $H = \frac{\dot{a}}{a}$, podemos escrever esta última equação como

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\left(\rho_\Lambda + \rho_\kappa + \rho\right).$$

Nesta forma, podemos interpretar o efeito da constante cosmológica e da curvatura da seção espacial como densidades de energia fictícias.

Utilizando a equação de continuidade e a equação obtida a partir das equações de Friedmann, podemos obter a evolução do fator de escala para diferentes cenários de constante cosmológica, curvatura, e densidade de energia. Para um universo com apenas matéria fria, isto é, cuja pressão é desprezível, temos da equação de continuidade que

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0 \implies \rho = \rho_0 a^{-3}$$

portanto

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho_0}{3a^3} \implies \dot{a} = \sqrt{\frac{8\pi G\rho_0}{3a}} \implies a(t) \implies a(t) = \left[\frac{3}{2}\left(a_0 + t\sqrt{\frac{8\pi G\rho_0}{3}}\right)\right]^{\frac{2}{3}},$$

onde a_0 e ρ_0 são constantes de integração, logo a evolução do fator de escala é da ordem de $t^{\frac{2}{3}}$. Para um universo com apenas radiação, temos pela isotropia e homogeneidade que $p = \frac{1}{3}\rho$, portanto

$$\dot{\rho} + 4\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0 \implies \rho = \rho_0 a^{-4},$$

então

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho_0}{3a^4} \implies \dot{a} = \sqrt{\frac{8\pi G\rho_0}{3}}a^{-1} \implies a(t) \implies a(t) = \sqrt{2\left(a_0 + t\sqrt{\frac{8\pi G\rho_0}{3}}\right)},$$

isto é, o fator de escala evolui como $t^{\frac{1}{2}}$. Para um universo com apenas constante cosmológica e/ou apenas curvatura espacial, segue da equação de continuidade que $\rho(t) = \rho_0$. Para um universo com apenas curvatura, temos

$$\dot{a} = \sqrt{-\kappa} \implies a(t) = t\sqrt{-\kappa} + a_0,$$

isto é, o fator de escala muda linearmente, e a curvatura espacial deve ser negativa. Para um universo com apenas constante cosmológica, vimos no exercício 4 que o fator de escala muda exponencialmente.

Para um universo com geometria plana com as abundâncias de matéria $\Omega_m = 0.3$ e energia escura $\Omega_\Lambda = 0.7$, a equação para o parâmetro de Hubble é

$$H^2 = H_0^2\left(\Omega_\Lambda + \Omega_m a^{-3}\right)$$

onde $H_0 \approx 70\,\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$ é o parâmetro de Hubble atual. Notemos que

$$H = \frac{\dot{a}}{a} \implies \frac{\mathrm{d}a}{aH} = \mathrm{d}t,$$

então integrando em $[0,1]$ em a e em $[0,T]$ em t, temos a expressão para a idade do universo T,

$$T = \frac{1}{H_0\sqrt{\Omega_m}}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}a}{a\sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m} + a^{-3}}}.$$

Para calcular esta integral, consideremos a mudança de variáveis

$$\frac{\Omega_m}{\Omega_\Lambda}\xi^2 = a^3 \implies \frac{\mathrm{d}a}{a} = \frac{2\,\mathrm{d}\xi}{3\xi},$$

de modo que

$$T = \frac{2}{3H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}}\int_0^{\sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m}}} \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{\xi^2+1}} = \frac{2}{3H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}}\,\mathrm{arsinh}\left(\sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m}}\right) \approx 13.467\times 10^9 \text{ anos.}$$

Exercício 6

Para a métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker,

$$\mathrm{d}s^2 = -\,\mathrm{d}t^2 + a^2(t)\gamma_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j, \text{ com } \gamma_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{\left[1 + \frac{\kappa}{4}(x^2 + y^2 + z^2)\right]^2},$$

onde κ é a curvatura da seção espacial, o escalar de Ricci é dado por

$$R = 6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\kappa}{a^2}\right).$$

Para um fator de escala com comportamento do tipo $a(t) = a_0 t^n$, temos

$$R = 6\left(\frac{n(n-1)}{t^2} + \frac{n^2}{t^2} + \frac{\kappa}{a_0^2 t^{2n}}\right) \implies \lim_{t\to 0^+}|R| = \infty,$$

isto é, $t \to 0$ é uma singularidade em que a curvatura do espaço-tempo é divergente, não importando o tipo de curvatura da seção espacial.