4302305 - Lista de Exercícios VIII

Louis Bergamo Radial
8992822

15 de junho de 2024

Exercício 1

Exercício 2

Exercício 3

Exercício 1: Espalhamento por uma esfera dura

Determine a seção de choque diferencial do espalhamento de partículas por uma esfera dura de raio R, isto é, a energia potencial de interação é $U = \infty$ para $r < R$ e $U = 0$ para $r > R$.

Resolução. Para que haja colisão, a distância de visada deve ser tal que $|\rho| < R$. Neste caso, o ângulo φ dado pela distância de maior aproximação é

$$\begin{aligned}
\varphi &= \int_R^\infty \mathrm{d}r \, \frac{\rho}{r^2\sqrt{1-\frac{\rho^2}{r^2}}} \\
&= \int_0^{\frac{\rho}{R}} \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \\
&= \arcsin\left(\frac{\rho}{R}\right).
\end{aligned}$$

Dessa forma, o ângulo de espalhamento $\chi = \pi - 2\varphi$ satisfaz

$$\rho = R\sin\left(\frac{\pi-\chi}{2}\right) = R\cos\left(\frac{\chi}{2}\right).$$

Diferenciando em relação à χ, temos

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\chi} = -\frac{R}{2}\sin\left(\frac{\chi}{2}\right) \implies \frac{\rho}{\sin\chi}\left|\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\chi}\right| = \frac{R^2\sin\left(\frac{\chi}{2}\right)\cos\left(\frac{\chi}{2}\right)}{2\sin\chi} = \frac{R^2}{4}.$$

Logo,

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{R^2}{4}$$

é a seção de choque diferencial. □

Exercício 4

Exercício 2: Determinar potencial a partir da seção de choque diferencial

Dada a seção de choque diferencial de espalhamento em função da energia E, determine a energia potencial de interação $U(r)$. Assuma que o potencial seja repulsivo e monotonicamente decrescente. Também assuma $E > U(0)$ e $U(\infty) = 0$.

Resolução. Da definição da seção de choque diferencial, temos

$$2\pi\rho\left|\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}\right| = \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\theta} \implies \pi\rho^2(\chi) = \int_\chi^\pi \mathrm{d}\theta\,\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\theta}$$

para um ângulo de espalhamento χ, já que devemos ter $\rho(\pi) = 0$ e a distância de visada deve diminuir com o ângulo de espalhamento. Desse modo, dada a seção de choque diferencial, podemos terminar $\rho(\chi)$ e a função inversa $\chi(\rho)$.

Seja $r_0(\rho)$ a distância de maior aproximação para um espalhamento com distância de visada ρ, então

$$\pi - \chi(\rho) = 2\rho\int_{r_0(\rho)}^\infty \frac{\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{1-\left(\frac{\rho}{r}\right)^2 - \frac{U(r)}{E}}}.$$

Com a mudança de variáveis $s = r^{-1}$, temos

$$\begin{aligned}\pi - \chi(\rho) &= 2\rho\int_0^{\frac{1}{r_0(\rho)}} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{1-(s\rho)^2 - \frac{U(s^{-1})}{E}}}\\ &= 2\int_0^{\frac{1}{r_0(\rho)}} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{\rho^{-2}\left(1-\frac{U(s^{-1})}{E}\right) - s^2}}.\end{aligned}$$

Definindo $x = \rho^{-2}$, $w(s) = \sqrt{1-\frac{U(s^{-1})}{E}}$, $\psi(x) = \chi\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)$, e $s_0(x) = \frac{1}{r_0\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)}$ segue que

$$\pi - \psi(x) = 2\int_0^{s_0(x)} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{xw^2(s) - s^2}},$$

Utilizando o operador $\int_0^\alpha \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\alpha - x}}$, temos

$$\int_0^\alpha \mathrm{d}x\,\frac{\pi-\psi(x)}{\sqrt{\alpha-x}} = 2\int_0^\alpha \mathrm{d}x\int_0^{s_0(x)}\mathrm{d}s\,\left[(xw^2(s)-s^2)(\alpha-x)\right]^{-\frac{1}{2}}$$

Notemos que $s_0(0) = 0$, então, usando o teorema de Fubini, obtemos

$$\int_0^\alpha \mathrm{d}x\,\frac{\pi-\psi(x)}{\sqrt{\alpha-x}} = 2\int_0^{s_0(\alpha)} \mathrm{d}s\int_{x_0(s)}^{\alpha}\mathrm{d}x\,\left[(xw^2(s)-s^2)(\alpha-x)\right]^{-\frac{1}{2}},$$

onde $s_0(x_0(s)) = s$. Como s_0 é dada pela distância de maior aproximação, segue que

$$w^2(s_0)x - s_0^2 = 0 \implies x_0(s) = \frac{s^2}{w^2(s)} = x_0(s),$$

então, notando que

$$(xw^2(s) - s^2)(\alpha - x) = w^2(s)\left[\left(\frac{\alpha - x_0(s)}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{\alpha + x_0(s)}{2}\right)\right],$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^\alpha \mathrm{d}x\, \frac{\pi - \psi(x)}{\sqrt{\alpha - x}} &= 2\int_0^{s_0(\alpha)} \mathrm{d}s \int_{x_0(s)}^\alpha \mathrm{d}x\, \frac{2}{w(s)(\alpha - x_0(s))\sqrt{1 - \left(\frac{2x-\alpha-x_0(s)}{\alpha-x_0(s)}\right)^2}} \\
&= 2\int_0^{s_0(\alpha)} \frac{\mathrm{d}s}{w(s)} \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \\
&= 2\pi \int_0^{s_0(\alpha)} \frac{\mathrm{d}s}{w(s)}.
\end{aligned}$$

Integrando o lado direito por partes e notando que $\lim_{x\to 0}\psi(x) = \lim_{\rho\to\infty}\chi(\rho) = 0$, temos a relação

$$\pi\sqrt{\alpha} - \int_0^\alpha \mathrm{d}x\, \sqrt{\alpha - x}\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} = \pi\int_0^{s_0(\alpha)} \frac{\mathrm{d}s}{w(s)}.$$

Derivando em relação a α em $\alpha = x_0(s)$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{2\sqrt{x_0(s)}} - \int_0^{x_0(s)} \mathrm{d}x\, \frac{1}{2\sqrt{x_0(s) - x}}\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} &= \left(\frac{\mathrm{d}s_0}{\mathrm{d}x}\right)_{x=x_0(s)} \frac{\pi}{w(s)} \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}s}\right)^{-1} \frac{\pi}{w(s)}.
\end{aligned}$$

Reescrevendo e substituindo $x_0(s) = \frac{s^2}{w^2(s)}$,

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{w(s)} &= \pi\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{s}{w(s)}\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{s^2}{w^2(s)}\right)\int_0^{\frac{s^2}{w^2(s)}} \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{\frac{s^2}{w^2(s)} - x}}\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} \\
&= \pi\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{s}{w(s)}\right) - \left(\frac{s}{w(s)}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{s}{w(s)}\right)\int_0^{\frac{s^2}{w^2(s)}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{s^2}{w^2(s)} - x}}\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x},
\end{aligned}$$

donde segue

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{s}{w(s)}\right)\int_0^{\frac{s^2}{w^2(s)}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{s^2}{w^2(s)} - x}}\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} = \frac{\pi}{w(s)}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s} = \pi\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\ln w(s).$$

Como $w(0) = 1$, temos ao integrar em $[0, s]$

$$\begin{aligned}
\pi \ln w(s) &= \int_0^s \mathrm{d}\zeta\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\left(\frac{\zeta}{w(\zeta)}\right)\int_0^{\frac{\zeta^2}{w^2(\zeta)}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{\zeta^2}{w^2(\zeta)} - x}}\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} \\
&= \int_0^{\frac{s}{w(s)}} \mathrm{d}\xi \int_0^{\xi^2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\xi^2 - x}}\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}.
\end{aligned}$$

Invertendo a ordem de integração conseguimos calcular a integral em ξ,

$$\begin{aligned}
\pi \ln w(s) &= \int_0^{\frac{s^2}{w^2(s)}} \mathrm{d}x \, \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} \int_{\sqrt{x}}^{\frac{s}{w(s)}} \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{\xi^2 - x}} \\
&= \int_0^{\frac{s^2}{w^2(s)}} \mathrm{d}x \, \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} \int_{\sqrt{x}}^{\frac{s}{w(s)}} \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{\xi^2 - x}} \\
&= \int_0^{\frac{s^2}{w^2(s)}} \mathrm{d}x \, \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} \operatorname{arcosh}\left(\frac{s}{w(s)\sqrt{x}}\right).
\end{aligned}$$

Retornando às variáveis originais, temos

$$\pi \ln w(r^{-1}) = \int_\infty^{rw(r^{-1})} \mathrm{d}\rho \, \frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}\rho} \operatorname{arcosh}\left(\frac{\rho}{rw(r^{-1})}\right),$$

que determina $w(r^{-1}) = \sqrt{1 - \frac{U(r)}{E}}$ implicitamente e, portanto, o potencial $U(r)$. TODO: Mostrar que podemos escrever

$$w(r^{-1}) = \exp\left(\frac{1}{\pi} \int_{rw^{-1}}^{\infty} \mathrm{d}\rho \, \frac{\chi(\rho)}{\sqrt{\rho^2 - r^2 w^2(r^{-1})}}\right),$$

como o Landau diz. □

Exercício 5

Exercício 3: Espalhamento por um potencial repulsivo $U = \alpha r^{-2}$

Determinar a seção de choque diferencial do espalhamento por um potencial repulsivo $U(r) = \alpha r^{-2}$, com $\alpha > 0$.

Resolução. O ângulo φ dado pela distância de maior aproximação $r_{\min}$ é

$$\varphi = \int_{r_{\min}}^{\infty} \mathrm{d}r \, \frac{\rho}{r^2\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2\alpha}{mv_\infty^2 r^2}}},$$

para uma partícula de massa m com distância de visada ρ e velocidade inicial v_∞. Da conservação de energia, a distância de maior aproximação satisfaz

$$1 = \frac{2\alpha}{mr_{\min}^2 v_\infty^2} + \frac{\rho^2}{r_{\min}^2} \implies r_{\min} = \sqrt{\rho^2 + \frac{2\alpha}{mv_\infty^2}}.$$

Logo, com a substituição de variáveis $\xi = \frac{r_{\min}}{r}$, temos

$$\varphi = \frac{\rho}{r_{\min}} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{\pi\rho}{2r_{\min}}.$$

Assim, o ângulo de espalhamento $\chi = \pi - 2\varphi$ é tal que

$$\frac{\pi - \chi}{\pi} = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + \frac{2\alpha}{mv_\infty^2}}} \implies \rho^2 = \frac{2\alpha}{mv_\infty^2} \frac{(\chi - \pi)^2}{\chi(2\pi - \chi)}.$$

Derivando em relação a χ,

$$\begin{aligned}
\rho\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\chi} &= \frac{\alpha}{mv_\infty^2}\left[\frac{2(\chi - \pi)}{\chi(2\pi - \chi)} - \frac{(\chi - \pi)^2}{\chi^2(2\pi - \chi)} + \frac{(\chi - \pi)^2}{\chi(2\pi - \chi)^2}\right] \\
&= \frac{\alpha}{mv_\infty^2} \frac{(\chi - \pi)\left[2\chi(2\pi - \chi) - (\chi - \pi)(2\pi - \chi) + \chi(\chi - \pi)\right]}{\chi^2(2\pi - \chi)^2} \\
&= \frac{2\alpha}{mv_\infty^2} \frac{(\chi - \pi)\left[2\pi\chi - \chi^2 + (\chi - \pi)^2\right]}{\chi^2(2\pi - \chi)^2} \\
&= \frac{2\pi^2\alpha}{mv_\infty^2} \frac{\chi - \pi}{\chi^2(2\pi - \chi)^2}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{2\pi^2\alpha}{mv_\infty^2} \frac{|\chi - \pi|}{\chi^2(2\pi - \chi)^2 \sin\chi}$$

é a seção de choque diferencial para este espalhamento. □