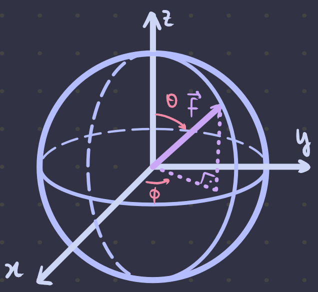
Mecânica I

Lista de exercícios I

1. Utilizando coordenadas esféricas obtenha



Podemos parametrizar uma esfera de raio ρ com a aplicação

$$\vec{f} : (0,\pi) \times (0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(\theta, \phi) \longmapsto \rho \cos\phi \sin\theta \, \vec{e}_x + \rho \sin\phi \sin\theta \, \vec{e}_y + \rho \cos\theta \, \vec{e}_z,$$

em que θ é o ângulo polar, definido a partir do eixo z, e ϕ é o ângulo azimutal, definido a partir do eixo x. De fato, temos $z = \rho\cos\theta$ por definição, portanto

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = \rho^2 \sin^2\theta,$$

de modo que $x = \rho \sin\theta \cos\phi$ e $y = \rho \sin\theta \sin\phi$ pela definição do ângulo azimutal, como proposto. Assim, os vetores tangentes à superfície da esfera são dados por

$$\vec{u} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial \theta} = \rho \cos\phi \cos\theta \, \vec{e}_x + \rho \sin\phi \cos\theta \, \vec{e}_y - \rho \sin\theta \, \vec{e}_z \quad \text{e} \quad \vec{v} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial \phi} = -\rho \sin\phi \sin\theta \, \vec{e}_x + \rho \cos\phi \sin\theta \, \vec{e}_y.$$

Com isso, definimos os versores do sistema de coordenadas esféricas $\{\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi\}$ por

$$\vec{e}_\rho = \frac{\vec{f}}{\|\vec{f}\|} = \cos\phi \sin\theta \, \vec{e}_x + \sin\phi \sin\theta \, \vec{e}_y + \cos\theta \, \vec{e}_z,$$
$$\vec{e}_\theta = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \cos\phi \cos\theta \, \vec{e}_x + \sin\phi \cos\theta \, \vec{e}_y - \sin\theta \, \vec{e}_z, \text{ e}$$
$$\vec{e}_\phi = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = -\sin\phi \, \vec{e}_x + \cos\phi \, \vec{e}_y.$$

Notemos que $\vec{e}_\rho \times \vec{e}_\theta = \vec{e}_\phi$ e $\vec{e}_\theta \times \vec{e}_\phi = \vec{e}_\rho$, portanto $\{\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi\}$ é uma base ortonormal positivamente orientada de $\mathbb{R}^3$, como desejado.

(a) a velocidade de uma partícula.

Para uma partícula de posição $\vec{r} = r\,\vec{e}_\rho$, sua velocidade $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ é

$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_\rho + r \frac{d}{dt}\vec{e}_\rho$$
$$= \dot{r}\,\vec{e}_\rho + r\dot{\theta} \frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \theta} + r\dot{\phi} \frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \phi}$$
$$= \dot{r}\,\vec{e}_\rho + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + r\dot{\phi} \sin\theta \, \vec{e}_\phi,$$

onde $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$, $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ e $\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt}$.

(b) a aceleração de uma partícula.

Seja $\vec{\xi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ uma função tal que $\|\vec{\xi}(t)\| = 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$, então

$$\langle \vec{\xi}(t), \vec{\xi}(t) \rangle = 1 \Rightarrow \left\langle \frac{d\vec{\xi}}{dt}, \vec{\xi} \right\rangle = 0,$$

isto é, $\frac{d\vec{\xi}}{dt}$ e $\vec{\xi}$ são ortogonais para todo $t \in \mathbb{R}$. Como consequência, $\frac{d}{dt}\vec{e}_\phi = \alpha\,\vec{e}_\rho + \beta\,\vec{e}_\theta$ para funções α, β de θ e de ϕ que não se anulam simultaneamente para $\dot{\phi} \neq 0$. Pela ortogonalidade da base,

$$\alpha = \langle \tfrac{d}{dt}\vec{e}_\phi, \vec{e}_\rho \rangle \quad \text{e} \quad \beta = \langle \tfrac{d}{dt}\vec{e}_\phi, \vec{e}_\theta \rangle.$$

Temos $\frac{d}{dt}\vec{e}_\phi = -\dot{\phi}\,(\cos\phi\,\vec{e}_x + \sin\phi\,\vec{e}_y)$, logo

$$\alpha = -\dot{\phi}\,(\cos^2\phi\sin\theta + \sin^2\phi\sin\theta) = -\dot{\phi}\sin\theta \quad \text{e} \quad \beta = -\dot{\phi}\,(\cos^2\phi\cos\theta + \sin^2\phi\cos\theta) = -\dot{\phi}\cos\theta,$$

de modo que $\frac{d}{dt}\vec{e}_\phi = -\dot{\phi}\sin\theta\,\vec{e}_\rho - \dot{\phi}\cos\theta\,\vec{e}_\theta$.

De forma mais direta obtemos $\frac{d}{dt}\vec{e}_\theta$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\vec{e}_\theta &= \dot{\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\vec{e}_\theta + \dot{\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\vec{e}_\theta \\
&= \dot{\phi}(-\sin\phi\cos\theta\,\vec{e}_x + \cos\phi\cos\theta\,\vec{e}_y) + \dot{\theta}(-\cos\phi\sin\theta\,\vec{e}_x - \sin\phi\sin\theta\,\vec{e}_y - \cos\theta\,\vec{e}_z) \\
&= \dot{\phi}\cos\theta\,\vec{e}_\phi - \dot{\theta}\,\vec{e}_\rho.
\end{aligned}$$

Agora podemos determinar a aceleração da partícula $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \ddot{r}\vec{e}_\rho + \dot{r}\frac{d}{dt}\vec{e}_\rho + \dot{r}(\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{\phi}\sin\theta\,\vec{e}_\phi) + r(\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{\theta}\frac{d}{dt}\vec{e}_\theta + \ddot{\phi}\sin\theta\,\vec{e}_\phi + \dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{e}_\phi + \dot{\phi}\sin\theta\frac{d}{dt}\vec{e}_\phi) \\
&= \ddot{r}\vec{e}_\rho + 2\dot{r}(\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{\phi}\sin\theta\,\vec{e}_\phi) + r(\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - \dot{\theta}^2\vec{e}_\rho + \dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{e}_\phi + \ddot{\phi}\sin\theta\,\vec{e}_\phi + \dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{e}_\phi - \dot{\phi}^2\sin^2\theta\,\vec{e}_\rho - \dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta\,\vec{e}_\theta) \\
&= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta)\vec{e}_\rho + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta)\vec{e}_\theta + (r\ddot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta)\vec{e}_\phi.
\end{aligned}$$

2. Considere um sistema de N partículas. Mostre que a energia cinética total com respeito a um dado referencial é a soma da energia cinética com respeito ao centro de massa mais a energia cinética do centro de massa.

Seja S um referencial em que a i-ésima partícula tem posição $\vec{r}_i$. Definimos a massa total do sistema $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$ e a posição do centro de momento $\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i$. Tomamos S' como o referencial cuja origem é descrita pela posição $\vec{R}$ no referencial S, isto é, S' é o referencial do centro de massa. Em S', a i-ésima partícula tem posição $\vec{r}_i' = \vec{r}_i - \vec{R}$, portanto a energia cinética T' do sistema é

$$\begin{aligned}
T' &= \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\langle \dot{\vec{r}}_i', \dot{\vec{r}}_i' \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\langle \dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{R}}, \dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{R}} \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\langle \dot{\vec{r}}_i, \dot{\vec{r}}_i \rangle - \sum_{i=1}^{N} m_i\langle \dot{\vec{r}}_i, \dot{\vec{R}} \rangle + \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\langle \dot{\vec{R}}, \dot{\vec{R}} \rangle \\
&= T - \langle \sum_{i=1}^{N} m_i\dot{\vec{r}}_i, \dot{\vec{R}} \rangle + \frac{1}{2}M\langle \dot{\vec{R}}, \dot{\vec{R}} \rangle \\
&= T - \langle M\dot{\vec{R}}, \dot{\vec{R}} \rangle + \frac{1}{2}\langle M\dot{\vec{R}}, \dot{\vec{R}} \rangle \\
&= T - T_{cm},
\end{aligned}$$

em que T é a energia cinética no referencial S e T_{cm} é a energia cinética do centro de massa no referencial S. Desse modo, concluímos que

$$T = T' + T_{cm},$$

como desejado.

5. Obtenha a solução de uma partícula na presença do potencial $U(x) = -U_0 \operatorname{sech}^2(\alpha x)$.

Por conservação de energia, segue que

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 = E - U(x) \implies \pm dt = \sqrt{\frac{m}{2(E - U(x))}}\, dx$$

então

$$\begin{aligned} dt &= \beta \left[\lambda^2 + \operatorname{sech}^2(\alpha x)\right]^{-1/2} dx, \\ &= \beta \cosh \alpha x \left[1 + \lambda^2 \cosh^2 \alpha x\right]^{-1/2} dx \\ &= \beta \cosh \alpha x \left[\lambda^2 + 1 + \lambda^2 \sinh^2 \alpha x\right]^{-1/2} dx \\ &= \frac{\beta}{\sqrt{\lambda^2+1}} \cosh \alpha x \left[1 + \left(\frac{\lambda \sinh \alpha x}{\sqrt{\lambda^2+1}}\right)^2\right]^{-1/2} dx, \end{aligned}$$

onde $\lambda^2 = \frac{E}{U_0}$ e $\beta = \pm\sqrt{\frac{2}{mU_0}}$. Com a substituição

$$\psi = \frac{|\lambda| \sinh \alpha x}{\sqrt{\lambda^2+1}}, \quad \frac{d\psi}{|\lambda|\alpha} = \frac{\cosh \alpha x}{\sqrt{\lambda^2+1}}\, dx,$$

obtemos

$$dt = \frac{\beta}{|\lambda|\alpha}\left[1 + \operatorname{sgn}\left(\frac{E}{U_0}\right)\psi^2\right]^{-1/2} d\psi,$$

$$E \quad \frac{m}{2}$$

então

$$|\lambda|\alpha\,(t-T) = \begin{cases} \beta \sinh \psi, & E/U_0 > 0 \\ \beta \sin \psi, & E/U_0 < 0 \end{cases} \implies x(t) = \begin{cases} \frac{\pm 1}{\alpha} \operatorname{arsinh}\left[\sqrt{1 + \frac{U_0}{E}}\, \sinh\left(\sqrt{\frac{mE}{2}}\, \alpha (t-T)\right)\right], & \text{se } \frac{E}{U_0} > 0 \\ \frac{\pm 1}{\alpha} \operatorname{arsinh}\left[\sqrt{1 + \frac{U_0}{E}}\, \sin\left(\sqrt{\frac{mE}{2}}\, \alpha (t-T)\right)\right], & \text{se } \frac{E}{U_0} < 0. \end{cases}$$

Para $E = -U_0$, temos trivialmente $x(t) = x_0$. Para $E = 0$, temos

$$dt = \beta\left[\operatorname{sech}^2(\alpha x)\right]^{-1/2} dx = \beta \cosh \alpha x \, dx,$$

portanto $x(t) = \frac{\pm 1}{\alpha} \operatorname{arsinh}\left(\sqrt{\frac{mU_0}{2}}\, \alpha (t-T)\right)$.