4302305 - Lista de Exercícios IV

Louis Bergamo Radial
8992822

23 de abril de 2024

Exercício 1

Lema 1: Partícula em um campo eletromagnético externo

A lagrangiana de uma partícula de massa m e carga e em um campo eletromagnético externo definido pelo potencial escalar ϕ e pelo potencial vetor $\boldsymbol{A}$ é dada por

$$L = \frac{1}{2} m g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j - e\phi + e g_{ij} A^i \dot{x}^j,$$

onde g_{ij} é o tensor métrico Euclidiano.

Demonstração. Uma partícula de massa m e carga e em um campo eletromagnético externo está sujeita à força de Lorentz dada por

$$\boldsymbol{F} = e\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\right),$$

onde $\boldsymbol{E}$ é o campo elétrico e $\boldsymbol{B}$ é o campo magnético.

Podemos definir os campos elétrico e magnético a partir de um potencial escalar ϕ e um potencial vetor $\boldsymbol{A}$,

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A},$$

de modo que as equações de Maxwell ainda sejam satisfeitas. Neste caso, a força de Lorentz é dada por

$$\boldsymbol{F} = e\left(-\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A})\right).$$

Notemos que

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x^i}\dot{x}^i + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \implies -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{\nabla}\rangle \boldsymbol{A} - \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}$$

e que

$$\boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{\nabla}\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{A}\rangle - \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{\nabla}\rangle \boldsymbol{A},$$

uma vez que $\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^i} = 0$. Dessa forma, segue que

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} &= e\left(-\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\nabla}\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{A}\rangle\right) \\ &= e\left[-\boldsymbol{\nabla}(\phi - \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{A}\rangle) - \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\right].\end{aligned}$$

Definindo o operador $\boldsymbol{\nabla}_v = \boldsymbol{e}_x \frac{\partial}{\partial v_x} + \boldsymbol{e}_y \frac{\partial}{\partial v_y} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial}{\partial v_z}$ e notando que tanto $\boldsymbol{A}$ quanto ϕ não dependem das velocidades, temos

$$-\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\nabla}_v\left(\phi - \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{A}\rangle\right),$$

de modo que a força de Lorentz seja dada por

$$\boldsymbol{F} = e\left[-\boldsymbol{\nabla}(\phi - \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{A}\rangle) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{v}}\left(\phi - \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{A}\rangle\right)\right].$$

Isto é, mostramos que a força de Lorentz resulta de um potencial generalizado $U = e\phi - e\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{A}\rangle$

$$F_k = -\frac{\partial U}{\partial x^k} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{x}^k}\right),$$

portanto a lagrangiana é dada por

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle - e\phi + e\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{A}\rangle \\ &= \frac{1}{2}m g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j - e\phi + e g_{ij}A^i\dot{x}^j, \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. □

Exercício 1: Movimento em um campo magnético uniforme

Uma partícula de massa m move-se na presença de um campo magnético constante $\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{e}_z$.

(a) Mostre que o potencial vetor $\boldsymbol{A} = \frac{B}{2}(-y\boldsymbol{e}_x + x\boldsymbol{e}_y)$ está associado a este campo magnético.

(b) Utilizando o formalismo Lagrangiano obtenha a equação de movimento desta partícula.

(c) Obtenha a trajetória desta partícula utilizando a condição inicial que $\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{0}$ e que $\boldsymbol{v}(0) = a\boldsymbol{e}_x + b\boldsymbol{e}_y$, onde a e b são constantes.

Resolução. Notemos que

$$\boldsymbol{\nabla} \times \left(-y\boldsymbol{e}_x + x\boldsymbol{e}_y\right) = 2\boldsymbol{e}_z,$$

portanto o potencial vetor $\boldsymbol{A}$ dado é associado ao campo magnético uniforme $\boldsymbol{B}$.

Pelo Lema 1, a lagrangiana de uma partícula de carga Q e massa m em um campo eletromagnético é dada por

$$L = \frac{1}{2}m\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle - Q\phi + Q\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{A}\rangle,$$

onde $\boldsymbol{v}$ é a velocidade da partícula e ϕ é o potencial escalar. Neste caso, como não há a presença de um campo elétrico, e como $\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = 0$, segue que ϕ é constante. Desse modo, a lagrangiana pode ser escrita como

$$L(q^1, \dot{q}^1, q^2, \dot{q}^2) = \frac{1}{2}m g_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j + \frac{QB}{2}\epsilon_{ij}q^i\dot{q}^j,$$

onde $q^1 = x$, $q^2 = y$, ϵ_{ij} é o símbolo de Levi-Civita, e g_{ij} é o tensor métrico Euclidiano. Assim, pelas equações de Euler-Lagrange temos

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^k} = 0 &\implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m g_{ij}\delta^i_k\dot{q}^j + \frac{1}{2}g_{ij}\dot{q}^i\delta^j_k + \frac{QB}{2}\epsilon_{ij}q^i\delta^j_k\right) - \frac{QB}{2}\epsilon_{ij}\delta^i_k\dot{q}^j = 0 \\ &\implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m g_{kj}\dot{q}^j + \frac{QB}{2}\epsilon_{ik}q^i\right) - \frac{QB}{2}\epsilon_{kj}\dot{q}^j = 0 \\ &\implies m g_{kj}\ddot{q}^j + \frac{QB}{2}\epsilon_{ik}\dot{q}^i - \frac{QB}{2}\epsilon_{kj}\dot{q}^j = 0 \\ &\implies m\ddot{q}_k + QB\epsilon_{ik}\dot{q}^i = 0. \end{aligned}$$

De forma explícita, temos as equações de movimento

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = \omega \dot{q}_2 \\ \ddot{q}_2 = -\omega \dot{q}_1, \end{cases} \implies \begin{cases} \ddot{x} = \omega \dot{y} \\ \ddot{y} = -\omega \dot{x}, \end{cases}$$

onde $\omega = \frac{QB}{m}$.

Integrando a primeira equação em relação ao tempo no intervalo $[0, t]$, temos

$$\dot{x}(t) - \dot{x}(0) = \omega(y(t) - y(0)) \implies \dot{x}(t) = a + \omega y(t).$$

Substituindo na segunda equação, temos a equação diferencial linear não homogênea

$$\ddot{y} + \omega^2 y = -\omega a,$$

cuja solução é

$$y(t) = \alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t) - \frac{a}{\omega},$$

para constantes de integração α, β. Como $y(0) = 0$ e $\dot{y}(0) = b$, temos

$$y(t) = \frac{b}{\omega} \sin(\omega t) - \frac{a}{\omega} [1 - \cos(\omega t)] .$$

Assim,

$$\dot{x}(t) = b \sin(\omega t) + a \cos(\omega t) \implies x(t) = \frac{b}{\omega} [1 - \cos(\omega t)] + \frac{a}{\omega} \sin(\omega t).$$

Deste modo, a partícula tem posição dada por

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}(t) &= \boldsymbol{r}_0 + \left[\frac{a}{\omega} \sin(\omega t) - \frac{b}{\omega} \cos(\omega t) \right] \boldsymbol{e}_x + \left[\frac{b}{\omega} \sin(\omega t) + \frac{a}{\omega} \cos(\omega t) \right] \boldsymbol{e}_y \\ &= \boldsymbol{r}_0 + \rho \left[\cos(\varphi - \omega t) \boldsymbol{e}_x + \sin(\varphi - \omega t) \boldsymbol{e}_y \right] , \end{aligned}$$

onde $\boldsymbol{r}_0 = \frac{b}{\omega} \boldsymbol{e}_x - \frac{a}{\omega} \boldsymbol{e}_y$, $\rho = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{\omega^2}}$ e $\varphi \in [0, 2\pi]$ é tal que

$$\rho \cos \varphi = -\frac{b}{\omega} \quad \text{e} \quad \rho \sin \varphi = \frac{a}{\omega}.$$

Notemos que

$$\langle \boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}_0 \rangle = \rho^2,$$

portanto a a trajetória da partícula descreve um círculo de raio ρ centrado em $\boldsymbol{r}_0$ com frequência angular constante ω. □

Exercício 2

Lema 2: Função energia

Para uma lagrangiana $L = L(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n, t)$, a função energia h é definida por

$$h = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \dot{q}^k - L,$$

com a propriedade

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

Demonstração. Computemos a derivada total em relação ao tempo para a função energia. Temos

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} &= \underline{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\right)\dot{q}^k} + \underline{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\frac{\mathrm{d}\dot{q}^k}{\mathrm{d}t}} - \frac{\partial L}{\partial t} - \underline{\frac{\partial L}{\partial q^k}\frac{\mathrm{d}q^k}{\mathrm{d}t}} - \underline{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\frac{\mathrm{d}\dot{q}^k}{\mathrm{d}t}} \\
&= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^k}\right]\dot{q}^k - \frac{\partial L}{\partial t}.
\end{aligned}$$

Desse modo, para uma solução das equações de Euler-Lagrange, segue que $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$. □

Lema 3: Invariância de calibre

Os campos elétrico $\boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$ e magnético $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ são invariantes por transformações de calibre,

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A} + \nabla f \quad \text{e} \quad \tilde{\phi} = \phi - \frac{\partial f}{\partial t},$$

onde f é um campo escalar suave. Ainda, a lagrangiana

$$\tilde{L} = \frac{1}{2} m g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j - e\tilde{\phi} + e g_{ij}\tilde{A}^i\dot{x}^j$$

é equivalente à lagrangiana dada pelo Lema 1.

Demonstração. Como todo gradiente é irrotacional, temos

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} = \nabla \times (\boldsymbol{A} + \nabla f) = \nabla \times \tilde{\boldsymbol{A}},$$

para qualquer campo escalar diferenciável f. Ainda, para f suave, as derivadas parciais em relação às posições e ao tempo comutam, de modo que

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E} &= -\nabla\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \\
&= -\nabla\phi + \nabla\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\nabla f - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \\
&= -\nabla\left(\phi + \frac{\partial f}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{A} + \nabla f) \\
&= -\nabla\tilde{\phi} - \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{A}}}{\partial t},
\end{aligned}$$

como desejado.

Como determinamos a lagrangiana a partir dos campos $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B}$, é de se esperar que a invariância de calibre seja refletida nesta função também. Notemos que

$$\begin{aligned}
-\tilde{\phi} + g_{ij}\tilde{A}^i\dot{x}^j &= -\phi + \frac{\partial f}{\partial t} + g_{ij}\left(A^i + g^{ik}\frac{\partial f}{\partial x^k}\right)\dot{x}^j \\
&= -\phi + g_{ij}A^i\dot{x}^j + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x^j}\dot{x}^j \\
&= -\phi + g_{ij}A^i\dot{x}^j + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t},
\end{aligned}$$

portanto $\tilde{L} = L + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$, com f só dependendo das posições e do tempo. Desse modo, as lagrangianas são de fato equivalentes. □

Lema 4: Campo eletromagnético constante

Para um campo eletromagnético constante, isto é, $\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = 0$ e $\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0$, existe um potencial escalar $\tilde{\phi}$ e um potencial vetor $\tilde{\boldsymbol{A}}$ que satisfazem $\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} = 0$ e $\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{A}}}{\partial t} = 0$.

Demonstração. Sejam $\boldsymbol{A}$ e ϕ potenciais tais que $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$. Como o campo magnético é constante, segue que $\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$ é irrotacional. Portanto, como $\mathbb{R}^3$ é simplesmente conexo, existe um campo escalar diferenciável ψ tal que $\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = -\nabla\psi$.

Consideremos a transformação de calibre

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A} + \nabla\psi \quad \text{e} \quad \tilde{\phi} = \phi - \frac{\partial \psi}{\partial t},$$

de modo que $\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{A}}}{\partial t} = 0$ e

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\tilde{\phi}.$$

Dessa forma, como $\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = 0$, temos $\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t}$ constante em relação ao tempo, isto é,

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} = \alpha(\boldsymbol{r}).$$

Ainda, como $\nabla\alpha = \boldsymbol{0}$, segue que α é uma constante. Para que o potencial seja nulo no infinito, devemos ter $\alpha = 0$, isto é

$$\tilde{\phi} = \tilde{\phi}(\boldsymbol{r}),$$

portanto o potencial escalar não depende do tempo. □

Exercício 2: Energia de uma partícula em um campo eletromagnético externo

Uma partícula encontra-se na presença de um campo eletromagnético independente do tempo. Utilizando o formalismo lagrangiano, obtenha a energia do sistema.

Resolução. Pelo Lema 1, a lagrangiana de uma partícula de massa m e carga Q em um campo eletromagnético externo com potencial escalar ϕ e potencial vetor $\boldsymbol{A}$ é dada por

$$L = \frac{1}{2} m g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j - Q\phi + Q g_{ij} A^i \dot{x}^j,$$

onde x^i são as suas coordenadas cartesianas e g_{ij} o tensor métrico Euclidiano, a função energia neste caso é dada por

$$\begin{aligned} h &= \left(m g_{ij} \dot{x}^i \delta^j_k + Q g_{ij} A^i \delta^j_k \right) \dot{x}^k - \left(\frac{1}{2} m g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j - Q\phi + Q g_{ij} A^i \dot{x}^j \right) \\ &= m g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k + Q g_{ik} A^i \dot{x}^k - \left(\frac{1}{2} m g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k - Q\phi + Q g_{ik} A^i \dot{x}^k \right) \\ &= \frac{1}{2} m g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k + Q\phi \\ &= \frac{1}{2} m \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle + Q\phi. \end{aligned}$$

No caso em que o campo eletromagnético não depende do tempo, temos pelos Lemas 3 e 4 que a lagrangiana não tem dependência explícita do tempo. Dessa forma, pelo Lema 2, segue que h é uma quantidade conservada. □