# 4302305 - Lista de Exercícios V

Louis Bergamo Radial
8992822

11 de maio de 2024

## Exercício 1

**Lema 1: Equações de Euler-Lagrange**

Seja o funcional

$$S[f] = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, L\left(t, f(t), \dot{f}(t), \dots, f^{(n)}(t)\right)$$

definido com as condições de contorno fixas para as primeiras $n-1$ derivadas de $f$ nas extremidades $t = t_1$ e $t = t_2$. Se $q(t)$ é uma curva estacionária para o funcional $S$, então

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\left(\frac{\partial L}{\partial q^{(k)}}\right) = 0.$$

*Demonstração.* Calculemos a variação de $S$ para uma curva $f$ dada por $f = q + \delta q$, com $\delta q^{(k)} = 0$ em $t_1$ e em $t_2$ para $k \leq n-1$. Temos

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \left[L\left(t, q + \delta q, \dot{q} + \delta\dot{q}, \dots, q^{(n)} + \delta q^{(n)}\right) - L\left(t, q, \dot{q}, \dots, q^{(n)}\right)\right] \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial q}\delta\dot{q} + \dots + \frac{\partial L}{\partial q^{(n)}}\delta q^{(n)}\right) \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \sum_{k=1}^{n}\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \frac{\partial L}{\partial q^{(k)}}\delta q^{(k)}
\end{aligned}$$

Mostremos por indução que para uma função suave $\psi$ vale

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \psi \delta q^{(k)} = (-1)^k \frac{\mathrm{d}^k \psi}{\mathrm{d}t^k}\delta q$$

para $1 \leq k \leq n$. Para $k = 1$, segue de integração por partes que

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \psi \delta\dot{q} &= \psi\delta q\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\delta q \\
&= -\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\delta q,
\end{aligned}$$

visto que $\delta q(t_2) = \delta q(t_1) = 0$, portanto a expressão sugerida é válida para o caso $k = 1$. Suponhamos que seja válida para algum $k \leq n-1$, então por integração por partes temos

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \psi \delta q^{(k+1)} = \psi \delta q^{(k)}\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\delta q^{(k)},$$

portanto como $\delta q^{(k)}(t_2) = \delta q^{(k)} = 0$ para todo $k \leq n-1$, temos

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \psi \delta q^{(k+1)} &= -(-1)^k \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\right)\delta q \\ &= (-1)^{k+1} \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \frac{\mathrm{d}^{k+1}\psi}{\mathrm{d}t^{k+1}} \delta q\end{aligned}$$

ao usar a hipótese indutiva, isto é, a expressão é válida para $k+1 \leq n$ também. Dessa forma, pelo princípio de indução finita, segue que a expressão vale para todo $1 \leq k \leq n$.

Com este último resultado temos

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \frac{\partial L}{\partial q^{(k)}} \delta q^{(k)} = (-1)^k \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\left(\frac{\partial L}{\partial q^{(k+1)}}\right)\delta q,$$

para todo $1 \leq k \leq n$. Assim, temos

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left(\frac{\partial L}{\partial q} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\left(\frac{\partial L}{\partial q^{(k)}}\right)\right)\delta q \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left[\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\left(\frac{\partial L}{\partial q^{(k)}}\right)\right]\delta q,\end{aligned}$$

portanto pelo lema fundamental do cálculo de variações segue que

$$\delta S = 0 \implies \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\left(\frac{\partial L}{\partial q^{(k)}}\right) = 0,$$

visto que $\delta q$ é arbitrário. □

**Exercício 1: Lagrangiana para o oscilador harmônico**

A lagrangiana de um sistema é dada por

$$L = -\frac{1}{2} m q \ddot{q} - \frac{1}{2} m \omega_0^2 q^2.$$

Determine as equações de movimento.

*Resolução.* Pelas Equações de Euler-Lagrange, temos

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) + \frac{\partial L}{\partial q} = 0 &\implies \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(-\frac{1}{2} m q\right) + \left(-\frac{1}{2} m \ddot{q} - m\omega_0^2 q\right) = 0 \\ &\implies m\ddot{q} + m\omega_0^2 q = 0,\end{aligned}$$

isto é, a lagrangiana dada descreve um oscilador harmônico. □

# Exercício 2

**Teorema 1: Teorema de Noether**

Seja $L$ uma lagrangiana invariante em relação ao subgrupo a um parâmetro de difeomorfismos $h^s$, isto é,

$$h^0(q^k(t)) = q^k(t) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial s} L\left(h^s(q^k), \frac{\partial}{\partial t} h^s(q^k), t\right) = 0,$$

então a quantidade $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial h^s \circ q^k}{\partial s}\Big|_{s=0}$ é conservada.

*Demonstração.* Sejam $q^k(t)$ coordenadas generalizadas que satisfazem as equações de Euler-Lagrange. Como $L$ é invariante por transformações de $h^s$, segue que $\tilde{q}^k(s,t) = h^s \circ q^k(t)$ também satisfazem as equações de Euler-Lagrange.

Ainda pela invariância pelo subgrupo a um parâmetro de difeomorfismos, temos

$$\frac{\partial L(\tilde{q}^k, \dot{\tilde{q}}^k, t)}{\partial s}\bigg|_{s=0} = \frac{\partial L}{\partial q^k} \frac{\partial \tilde{q}^k}{\partial s}\bigg|_{s=0} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial \dot{\tilde{q}}^k}{\partial s}\bigg|_{s=0} = 0.$$

Como $\tilde{q}^k$ satisfazem as equações de Euler-Lagrange, temos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\right) \frac{\partial \tilde{q}^k}{\partial s}\bigg|_{s=0} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial \tilde{q}}{\partial t}\bigg|_{s=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial \tilde{q}^k}{\partial s}\bigg|_{s=0}\right) = 0,$$

como queríamos demonstrar. □

**Lema 2: Sistema de partículas livres**

Seja um sistema de $N$ partículas livres de posições $\boldsymbol{x}_{(i)}$ e massas $m_i$ com lagrangiana dada por

$$L = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \langle \dot{\boldsymbol{x}}_{(i)}, \dot{\boldsymbol{x}}_{(i)} \rangle - \sum_{i \neq j}^{N} V_{ij},$$

onde $V_{ij} = V\left(\|\boldsymbol{x}_{(i)} - \boldsymbol{x}_{(j)}\|\right)$. Definindo as coordenadas $q^k_{(i)}$ tais que $\boldsymbol{x}_{(i)} = q^k_{(i)} \boldsymbol{e}_k$, onde os vetores $\boldsymbol{e}_k$ formam uma base ortonormal para $\mathbb{R}^3$, os momentos canonicamente conjugados a estas coordenadas são dados por

$$p_{(i)k} = m_i g_{\ell k} \dot{q}^\ell_{(i)},$$

para $i = 1, \ldots, N$, e $k = 1, 2, 3$, onde $g_{\ell k} = \langle \boldsymbol{e}_\ell, \boldsymbol{e}_k \rangle$ é o tensor métrico Euclidiano.

*Demonstração.* Em termos dessas coordenadas, a lagrangiana do sistema é

$$L = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i g_{\ell n} \dot{q}^\ell_{(i)} \dot{q}^n_{(i)} - \sum_{i \neq j}^{N} V_{ij}.$$

Assim, o momento canonicamente conjugado $p_{(i)k}$ à coordenada $q^k_{(i)}$ é dado por

$$p_{(i)k} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k_{(i)}} = \frac{1}{2} m_i g_{\ell n} \delta^\ell_k \dot{q}^n_{(i)} + \frac{1}{2} m_i g_{\ell n} \delta^n_k \dot{q}^\ell_{(i)} = m_i g_{\ell k} \dot{q}^\ell_{(i)},$$

como proposto. □

**Exercício 2: Homogeneidade do espaço**

Considere a lagrangiana do Lema 2.

(a) A transformação $\boldsymbol{x}_{(i)} \to \boldsymbol{x}_{(i)} + s\boldsymbol{n}$ é uma simetria do sistema?

(b) Qual é a quantidade conservada e seu significado físico?

*Resolução.* Definimos $\tilde{\boldsymbol{x}}_{(i)}(s,t) = \boldsymbol{x}_{(i)}(t) + s\boldsymbol{n}$, notando que $\tilde{\boldsymbol{x}}_{(i)}(0,t) = \boldsymbol{x}_{(i)}(t)$ para todo $t$. Assim, temos

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}_{(i)} = \dot{\boldsymbol{x}}_{(i)} \quad \text{e} \quad \tilde{\boldsymbol{x}}_{(i)} - \tilde{\boldsymbol{x}}_{(j)} = \boldsymbol{x}_{(i)} - \boldsymbol{x}_{(j)},$$

para todos $i, j = 1, \ldots, N$. Dessa forma, é evidente que

$$\begin{aligned}
\tilde{L} = L(\tilde{\boldsymbol{x}}_{(i)}, \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}_{(i)}, t) &= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \langle \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}_{(i)}, \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}_{(i)} \rangle - \sum_{i \neq j}^{N} V\left( \| \tilde{\boldsymbol{x}}_{(i)} - \tilde{\boldsymbol{x}}_{(j)} \| \right) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \langle \dot{\boldsymbol{x}}_{(i)}, \dot{\boldsymbol{x}}_{(i)} \rangle - \sum_{i \neq j}^{N} V\left( \| \boldsymbol{x}_{(i)} - \boldsymbol{x}_{(j)} \| \right) = L(\boldsymbol{x}_{(i)}, \dot{\boldsymbol{x}}_{(i)}, t),
\end{aligned}$$

isto é, a lagrangiana é invariante por translações na direção $\boldsymbol{n}$, $\frac{\partial \tilde{L}}{\partial s} = 0$. Como não há dependência explícita com os cossenos diretores de $\boldsymbol{n}$, segue que a lagrangiana é invariante por translações espaciais.

Notemos que $\frac{\partial \tilde{x}}{\partial s} = \boldsymbol{n}$, portanto $\frac{\partial \tilde{q}^k_{(i)}}{\partial s} = n^k$, onde $\boldsymbol{n} = n^k \boldsymbol{e}_k$. Pelo Teorema de Noether, segue que a quantidade

$$Q = \sum_{i=1}^{N} p_{(i)k} \left. \frac{\partial \tilde{q}^k_{(i)}}{\partial s} \right|_{s=0}$$

é conservada. Pelo Lema 2, obtemos

$$\begin{aligned}
Q = \sum_{i=1}^{N} m_i g_{\ell k} \dot{q}^{\ell}_{(i)} n^k &= \sum_{i=1}^{N} \langle m_i \dot{q}^{\ell}_{(i)} \boldsymbol{e}_{\ell}, n^k \boldsymbol{e}_k \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{N} \langle m_i \dot{\boldsymbol{x}}_{(i)}, \boldsymbol{n} \rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{x}}_{(i)}, \boldsymbol{n} \right\rangle,
\end{aligned}$$

isto é, a projeção do momento total do sistema na direção $\boldsymbol{n}$ é conservada. Como esta relação é válida para qualquer direção $\boldsymbol{n}$, obtemos que a homogeneidade do espaço implica a conservação do momento total do sistema $\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{x}}_{(i)}$. □

# Exercício 3

**Exercício 3: Isotropia do espaço**

Considere a lagrangiana do Lema 2. Dada uma rotação infinitesimal na direção $\boldsymbol{n}$ por um ângulo $s$, a transformação é

$$\boldsymbol{x}_{(i)} \to \boldsymbol{x}_{(i)} + \left[s\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}_{(i)}\right].$$

Obtenha a quantidade conservada associada a rotações.

*Resolução.* Definimos $\tilde{\boldsymbol{x}}_{(i)}(s,t) = \boldsymbol{x}_{(i)}(t) + \left[s\boldsymbol{n}, \tilde{\boldsymbol{x}}_{(i)}\right]$, notando que $\tilde{\boldsymbol{x}}_{(i)}(0,t) = \boldsymbol{x}_{(i)}(t)$ para todo $t$. Mostremos que a distância em relação à origem é a mesma para todo $s$, em ordem linear em $s$. Temos

$$\begin{aligned}
\left\langle \tilde{\boldsymbol{x}}_{(i)}, \tilde{\boldsymbol{x}}_{(i)} \right\rangle &= \left\langle \boldsymbol{x}_{(i)} + \left[s\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}_{(i)}\right], \boldsymbol{x}_{(i)} + \left[s\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}_{(i)}\right] \right\rangle \\
&= \left\langle \boldsymbol{x}_{(i)}, \boldsymbol{x}_{(i)} \right\rangle + 2\left\langle \boldsymbol{x}_{(i)}, \left[s\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}_{(i)}\right] \right\rangle + s^2\left\langle \left[\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}_{(i)}\right], \left[\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}_{(i)}\right] \right\rangle \\
&= \left\langle \boldsymbol{x}_{(i)}, \boldsymbol{x}_{(i)} \right\rangle + O(s^2),
\end{aligned}$$

portanto a transformação é uma rotação infinitesimal. Com isso, temos

$$\begin{aligned}
\left\langle \tilde{x}_{(i)} - \tilde{x}_{(j)}, \tilde{x}_{(i)} - \tilde{x}_{(j)} \right\rangle &= \left\langle \boldsymbol{x}_{(i)} - \boldsymbol{x}_{(j)} + \left[s\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}_{(i)}\right] - \left[s\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}_{(j)}\right], \boldsymbol{x}_{(i)} - \boldsymbol{x}_{(j)} + \left[s\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}_{(i)}\right] - \left[s\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}_{(j)}\right] \right\rangle \\
&= \left\langle \boldsymbol{x}_{(i)} - \boldsymbol{x}_{(j)} + \left[s\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}_{(i)} - \boldsymbol{x}_{(j)}\right], \boldsymbol{x}_{(i)} - \boldsymbol{x}_{(j)} + \left[s\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}_{(i)} - \boldsymbol{x}_{(j)}\right] \right\rangle \\
&= \left\langle \boldsymbol{x}_{(i)} - \boldsymbol{x}_{(j)}, \boldsymbol{x}_{(i)} - \boldsymbol{x}_{(j)} \right\rangle + O(s^2),
\end{aligned}$$

portanto as distâncias relativas entre pares de partículas é invariante em ordem linear de $s$. Fica claro que esta transformação preserva a lagrangiana do sistema,

$$\begin{aligned}
\tilde{L} = L(\tilde{\boldsymbol{x}}_{(i)}, \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}_{(i)}, t) &= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \langle \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}_{(i)}, \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}_{(i)} \rangle - \sum_{i \neq j}^{N} V\left(\|\tilde{\boldsymbol{x}}_{(i)} - \tilde{\boldsymbol{x}}_{(j)}\|\right) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \langle \dot{\boldsymbol{x}}_{(i)}, \dot{\boldsymbol{x}}_{(i)} \rangle - \sum_{i \neq j}^{N} V\left(\|\boldsymbol{x}_{(i)} - \boldsymbol{x}_{(j)}\|\right) = L(\boldsymbol{x}_{(i)}, \dot{\boldsymbol{x}}_{(i)}, t),
\end{aligned}$$

isto é, $\frac{\partial \tilde{L}}{\partial s} = 0$ para todo $s$ suficientemente pequeno. Assim, utilizando as coordenadas $q^k_{(i)}$ definidas no Lema 2, temos

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_{(i)} = \tilde{q}^k_{(i)} \boldsymbol{e}_k = \left(q^k_{(i)} + \epsilon^{kab} s n_a q_{(i)b}\right) \boldsymbol{e}_k \implies \left.\frac{\partial \tilde{q}^k_{(i)}}{\partial s}\right|_{s=0} = \epsilon^{kab} n_a q_{(i)b},$$

onde $\boldsymbol{n} = n^\ell \boldsymbol{e}_\ell$, de modo que pelo Teorema de Noether a quantidade $Q = \sum_{i=1}^{N} p_{(i)k} \epsilon^{kab} n_a q_{(i)b}$ é conservada. Pelo Lema 2, obtemos

$$\begin{aligned}
Q = \sum_{i=1}^{N} m_i g_{\ell k} \dot{q}^\ell_{(i)} \epsilon^{kab} n_a q_{(i)b} &= \sum_{i=1}^{N} m_i \left\langle \dot{q}^\ell_{(i)} \boldsymbol{e}_\ell, \epsilon^{kab} n_a q_{(i)b} \boldsymbol{e}_k \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{N} \left\langle m_i \dot{\boldsymbol{x}}_{(i)}, \left[\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}_{(i)}\right] \right\rangle = \sum_{i=1}^{N} \left\langle \boldsymbol{n}, \left[\boldsymbol{x}_{(i)}, m_i \dot{\boldsymbol{x}}_{(i)}\right] \right\rangle \\
&= \left\langle \boldsymbol{n}, \sum_{i=1}^{N} \left[\boldsymbol{x}_{(i)}, m_i \dot{\boldsymbol{x}}_{(i)}\right] \right\rangle,
\end{aligned}$$

isto é, a projeção do momento angular total do sistema na direção $\boldsymbol{n}$ é conservada. Como esta relação é válida para qualquer direção $\boldsymbol{n}$, mostramos que a isotropia do espaço implica a conservação do momento angular total do sistema $\sum_{i=1}^{N} \left[\boldsymbol{x}_{(i)}, m_i \dot{\boldsymbol{x}}_{(i)}\right]$. □

# Exercício 4

**Teorema 2: Teorema de Noether generalizado**

Se a ação é *quase-invariante* sob a transformação infinitesimal

$$t \longrightarrow \tilde{t} = t + \epsilon X(q(t), t) \qquad q^k(t) \longrightarrow \tilde{q}^k(\tilde{t}) = q^k(t) + \epsilon\psi^k(q(t), \dot{q}(t), t),$$

isto é, se existe uma função $G = G(q(t), t)$ tal que

$$\Delta S = \int_{\tilde{t}_A}^{\tilde{t}_B} \mathrm{d}\tilde{t}\, \tilde{L} - \int_{t_A}^{t_B} \mathrm{d}t\, \left(L + \epsilon \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} G(q(t), t)\right) = 0,$$

onde $\tilde{L} = L\left(\tilde{q}(\tilde{t}), \frac{\mathrm{d}\tilde{q}}{\mathrm{d}\tilde{t}}, \tilde{t}\right)$ e $L = L\left(q(t), \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}, t\right)$, então a quantidade

$$I = hX - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\psi^k + G$$

é a integral de movimento associada à simetria, com a função energia dada por $h = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\dot{q}^k - L$.

*Demonstração.* Notemos que

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{t}}{\mathrm{d}t} = 1 + \epsilon\dot{X} \quad \text{e} \quad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tilde{t}} = 1 - \epsilon\dot{X}$$

em primeira ordem em $\epsilon$. Assim, as velocidades generalizadas sob a transformação infinitesimal são dadas por

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{q}^k}{\mathrm{d}\tilde{t}} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tilde{t}}\frac{\mathrm{d}\tilde{q}}{\mathrm{d}t} = (1 - \epsilon\dot{X})(\dot{q}^k + \epsilon\dot{\psi}^k) = \dot{q}^k + \epsilon\xi^k,$$

onde definimos $\xi^k = \dot{\psi}^k - \dot{X}\dot{q}^k$. Com isso a lagrangiana avaliada após a transformação é

$$\begin{aligned} \tilde{L} &= L(q(t) + \epsilon\psi, \dot{q}(t) + \epsilon\xi, t + \epsilon X) \\ &= L + \epsilon\left(\psi^k \frac{\partial L}{\partial q^k} + \xi^k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} + X\frac{\partial L}{\partial t}\right). \end{aligned}$$

Se a ação é quase-invariante por esta transformação, temos

$$\begin{aligned} \Delta S &= \int_{\tilde{t}_A}^{\tilde{t}_B} \mathrm{d}\tilde{t}\, \tilde{L} - \int_{t_A}^{t_B} \mathrm{d}t\, \left(L + \epsilon\dot{G}\right) \\ &= \int_{t_A}^{t_B} \mathrm{d}t\, \left(\tilde{L}\frac{\mathrm{d}\tilde{t}}{\mathrm{d}t} - L - \epsilon\dot{G}\right) \\ &= \epsilon\int_{t_A}^{t_B} \mathrm{d}t\, \left[L\dot{X} + \psi^k\frac{\partial L}{\partial q^k} + \xi^k\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} + X\frac{\partial L}{\partial t} - \dot{G}\right] = 0. \end{aligned}$$

Portanto, a condição necessária e suficiente para que a ação seja quase-invariante por esta transformação é

$$\dot{G} = L\dot{X} + \psi^k\frac{\partial L}{\partial q^k} + (\dot{\psi}^k - \dot{X}\dot{q}^k)\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} + X\frac{\partial L}{\partial t},$$

isto é, o lado direito desta equação deve ser igual à alguma derivada total em relação ao tempo de uma função das posições e do tempo.

Pela definição da função energia temos

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} &= \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\dot{q}^k\right)\dot{X} + X\frac{\partial L}{\partial t} + \psi^k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\right) + \dot{\psi}^k\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \\ &= -h\dot{X} - \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}X + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\psi^k\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\right) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-hX + \psi^k\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\right),\end{aligned}$$

onde utilizamos as equações de Euler-Lagrange. Desse modo, temos que

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = 0,$$

onde $I = hX - \psi^k\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} + G$, como desejado. □

**Exercício 4: Transformação de escala**

Considere um sistema unidimensional com coordenada generalizada $q$ cuja lagrangiana é

$$L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q).$$

Uma transformação de escala modifica a variável independente tempo bem como a variável dinâmica $q$ segundo

$$t \longrightarrow \tilde{t} = \rho t \quad \text{e} \quad q(t) \longrightarrow \tilde{q}(\tilde{t}) = \rho^d q(\rho t),$$

onde a quantidade $d$ é chamada *dimensão de escala* da variável dinâmica $q$.

(a) Derive a forma infinitesimal desta transformação.

(b) Qual o valor que a dimensão de escala $d$ deve ter para que a teoria seja invariante por esta transformação para $V = 0$?

(c) Para o valor de $d$ encontrado, determine a forma mais geral de $V$ para que a teoria seja invariante por transformações de escala.

(d) Usando o teorema de Noether, obtenha a quantidade conservada $D$ pela transformação de escala.

*Resolução.* Para que a transformação seja a identidade, devemos ter $\rho = 1$. Deste modo, podemos parametrizar a transformação ao redor da identidade por

$$t \longrightarrow \tilde{t} = e^{\alpha}t \quad \text{e} \quad q(t) \longrightarrow \tilde{q}(\tilde{t}) = e^{\alpha d}q(\rho t),$$

para algum $\alpha \in \mathbb{R}$. Assim, para $\alpha \ll 1$ temos o gerador infinitesimal desta transformação dado por

$$\begin{aligned} t \longrightarrow \tilde{t} &= (1+\alpha)t & \qquad q(t) \longrightarrow \tilde{q}(\tilde{t}) &= (1+d\alpha)q(t+\alpha t), \\ &= t + \alpha t & &= (1+d\alpha)q(t) + \alpha t\dot{q}(t).\end{aligned}$$

Definindo $X = t$, $\psi = dq(t) + t\dot{q}(t)$, temos

$$\tilde{t} = t + \alpha X \quad \text{e} \quad \tilde{q}(\tilde{t}) = q(t) + \alpha\psi.$$

Desse modo, para que a ação seja quase-invariante pela transformação, devemos ter

$$L\dot{X} + \psi\frac{\partial L}{\partial q} + (\dot{\psi} - \dot{X}\dot{q})\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\dot{q}} + X\frac{\partial L}{\partial t} = \dot{G}$$

para alguma função $G = G(q, t)$. Computando diretamente vemos que

$$\begin{aligned} L\dot{X} + \psi\frac{\partial L}{\partial q} + (\dot{\psi} - \dot{X}\dot{q})\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\dot{q}} + X\frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q) + (dq + t\dot{q})(-V'(q)) + (d\dot{q} + t\ddot{q})m\dot{q} \\ &= \left(d + \frac{1}{2}\right)m\dot{q}^2 - V(q) - (dq + t\dot{q})V'(q) + m\ddot{q}t\dot{q} \\ &= \left(d + \frac{1}{2}\right)m\dot{q}^2 - V(q) - (dq + 2t\dot{q})V'(q), \end{aligned}$$

onde utilizamos a equação de movimento $m\ddot{q} = -V'(q)$. Notemos que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[tV(q)\right] = V(q) + t\dot{q}V'(q),$$

portanto

$$L\dot{X} + \psi\frac{\partial L}{\partial q} + (\dot{\psi} - \dot{X}\dot{q})\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\dot{q}} + X\frac{\partial L}{\partial t} = \left(d + \frac{1}{2}\right)m\dot{q}^2 + \left[V(q) - dqV'(q)\right] - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[2tV(q)\right],$$

isto é, se $d = -\frac{1}{2}$ e o potencial satisfizer a equação diferencial

$$V(q) - dqV'(q) = 0,$$

obtemos $G(q, t) = -2tV(q)$, logo a ação é quase-invariante por transformações de escala.

Neste caso, integrando a equação diferencial, obtemos o potencial

$$V(q) = kq^{-2}$$

para alguma constante de integração $k \in \mathbb{R}$. Ainda, pelo Teorema de Noether generalizado, a quantidade

$$\begin{aligned} D &= hX - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\psi + G \\ &= \left(\frac{1}{2}m\dot{q}^2 + V(q)\right)t - m\dot{q}\left(-\frac{1}{2}q + t\dot{q}\right) - 2tV(q) \\ &= \left(-\frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q)\right)t + \frac{1}{2}m\dot{q}q \\ &= \frac{1}{2}mq\dot{q} - ht \end{aligned}$$

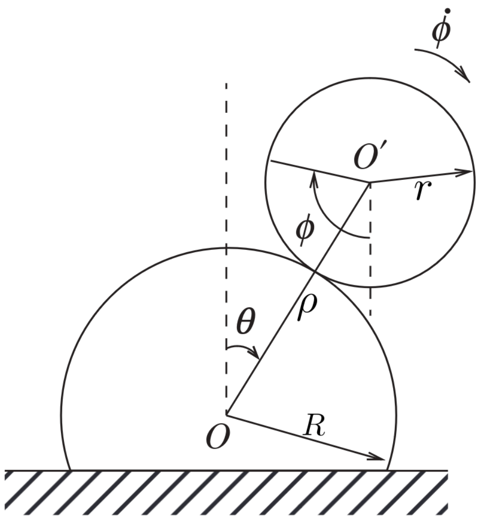
é a integral de movimento associada à transformação de escala. □

# Exercício 5

**Exercício 5: Esfera girando sobre cilindro fixo**

Uma esfera uniforme de massa $m$ e raio $r$ é colocada sobre um cilindro fixo de raio $R$. Sob a ação da gravidade, a esfera começa a rodar sem escorregar do equilíbrio a partir de uma altura do seu centro de massa $r + R - \epsilon$ com $\epsilon \ll r$ e $\epsilon \ll R$. Encontre o ponto onde a esfera se descola do cilindro.

*Resolução.* Se a esfera começa a girar a partir do repouso pela ação da gravidade, podemos tomar o seu eixo de rotação como paralelo ao eixo do cilindro, e podemos descrever a posição do centro de massa da esfera $O'$ com o ângulo $\theta$ em relação à posição de equilíbrio e com a distância $\rho$ em relação ao eixo cilindro. Ainda, definimos o ângulo $\phi$ a partir da rotação total do ponto de contato inicial.




A energia cinética da esfera é dada pela energia cinética do seu centro de massa e sua energia cinética de rotação, isto é,

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{2}I\dot{\phi}^2,$$

onde $I = \frac{2}{5}mr^2$ é o momento de inércia da esfera em relação ao eixo de rotação. Desse modo, a lagrangiana do sistema pode ser tomada como

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{2}I\dot{\phi}^2 - mg\rho\cos\theta.$$

No ponto de contato, os planos tangentes das superfícies são coincidentes, de modo que a distância de $O'$ até $O$ é dada por $\rho = r + R$. Ainda, como a esfera gira sem escorregar, devemos ter $\rho\dot{\theta} = r\dot{\phi}$. Denotando $q_1 = \rho, q_2 = \theta$ e $q_3 = \phi$, temos os coeficientes de vínculos dados por

$$a_{11} = 1, \quad a_{12} = a_{13} = 0, \quad a_{21} = 0, \quad a_{22} = \rho, \quad \text{e} \quad a_{23} = -r,$$

de forma que os vínculos possam ser escritos da forma $a_{\ell k}\dot{q}^k = 0$, para $\ell \in \{1, 2\}$ e $k \in \{1, 2, 3\}$.

Desse modo, as equações de movimento são dadas por

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^k} = a_{\ell k}\lambda^\ell,$$

para multiplicadores de Lagrange $\lambda^1$ e $\lambda^2$. De forma explícita, temos

$$\begin{cases} m\ddot{\rho} - m\rho\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta = \lambda^1 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\rho^2\dot{\theta}\right) - mg\rho\sin\theta = \rho\lambda^2 \\ I\ddot{\phi} = -r\lambda^2 \end{cases}$$

com os vínculos $\dot{\rho} = 0$ e $\rho\dot{\theta} - r\dot{\phi} = 0$. Substituindo os vínculos nas equações de movimento, obtemos

$$\begin{cases} -m\rho\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta = \lambda^1 \\ m\rho^2\ddot{\theta} - mg\rho\sin\theta = \rho\lambda^2 \\ \frac{\rho}{r}I\ddot{\theta} = -r\lambda^2 \end{cases}.$$

Das equações de movimento, vemos que $\lambda^1$ é a força de contato normal, de modo que a partir do instante em que $\lambda^1 = 0$, isto é,

$$\rho\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta,$$

as superfícies não estão mais em contato. Como não há atrito de deslizamento, a energia se conserva, isto é

$$\begin{aligned} mg(\rho - \epsilon) &= \frac{1}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{2}I\dot{\phi}^2 + mg\rho\cos\theta \\ &= \frac{7}{10}m\rho^2\dot{\theta}^2 + mg\rho\cos\theta. \end{aligned}$$

Para o instante em que a força de contato se anula, temos

$$mg(\rho - \epsilon) = \frac{17}{10}m\rho g\cos\theta \implies \cos\theta = \frac{10}{17}\left(1 - \frac{\epsilon}{\rho}\right).$$

Isto é, a esfera se descola do cilindro em $\theta \approx 53.97°$. $\square$