

4302305 - Lista de Exercícios VI

Louis Bergamo Radial
8992822

11 de maio de 2024

Exercício 1

Exercício 1: Movimento de uma partícula sujeita a um sistema de vínculos

Considere o movimento de uma partícula em três dimensões que está sujeita aos vínculos

$$(a) \quad (x^2 + y^2) dx + xy dz = 0 \quad \text{e} \quad (x^2 + y^2) dy + yz dz = 0;$$

$$(b) \quad (x^2 + y^2) dx + xz dz = 0 \quad \text{e} \quad (x^2 + y^2) dy + yz dz = 0.$$

Decida se cada um dos sistemas é holonômico.

Resolução do item (a). Dividindo os vínculos por dt obtemos

$$a_{11}\dot{x} + a_{13}\dot{z} = 0 \quad \text{e} \quad a_{22}\dot{y} + a_{23}\dot{z} = 0,$$

onde $a_{11} = a_{22} = x^2 + y^2$, $a_{13} = xy$, e $a_{23} = yz$. Utilizando a lagrangiana $L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$, obtemos as equações de movimento

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \lambda^1 a_{11} \\ m\ddot{y} = \lambda^2 a_{22} \\ m\ddot{z} = \lambda^1 a_{13} + \lambda^2 a_{23} \\ a_{11}\dot{x} + a_{13}\dot{z} = 0 \\ a_{22}\dot{y} + a_{23}\dot{z} = 0, \end{cases}$$

para multiplicadores de Lagrange λ^1 e λ^2 .

Multiplicando as duas últimas equações por λ^1 e λ^2 e somando-as, obtemos

$$\lambda^1 a_{11}\dot{x} + \lambda^2 a_{22}\dot{y} + (\lambda^1 a_{13} + \lambda^2 a_{23})\dot{z} = 0.$$

Substituindo as três primeiras equações temos

$$m(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}) = 0 \implies \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv^2 \right) = 0.$$

Isto é, a energia cinética é uma integral de movimento deste sistema, logo as forças não realizam trabalho. **TODO: Dessa forma, as forças são de vínculo, portanto o sistema é holonômico.** \square

Resolução do item (b). Integremos diretamente o sistema, notando que podemos isolar z dz em ambas equações. Temos então a equação diferencial ordinária a variáveis separáveis

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y},$$

cuja solução é $y = kx$, para alguma constante de integração $k \in \mathbb{R}$. Substituindo na primeira equação de vínculo, obtemos

$$z \, dz = -(1 + k^2)x \, dx \implies x^2(1 + k^2) + z^2 = \ell^2 \implies x^2 + y^2 + z^2 = \ell^2,$$

para uma constante de integração $\ell \in \mathbb{R}$. Deste modo, concluímos que este vínculo é equivalente ao vínculo holonômico da interseção do plano $y - kx = 0$ com a esfera de raio $|\ell|$ centrada na origem $x^2 + y^2 + z^2 = \ell^2$, portanto o sistema é holonômico. \square

Exercício 2

Exercício 2: Multiplicadores de Lagrange

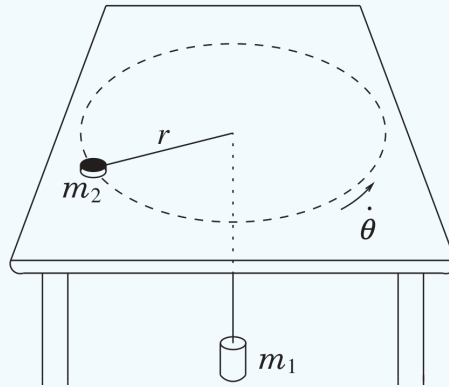


Figura 1: Sistema do Exercício 2

No sistema da Figura 1, a massa m_2 move-se sem atrito sobre uma mesa horizontal, enquanto a massa m_1 pode mover-se apenas na direção ortogonal à mesa.

Utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange, obtenha a tensão no fio, o qual é inextensível, em termos da quantidade conservada e de r .

Resolução. Utilizemos a lagrangiana

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{z}^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + m_1gz,$$

onde z é a distância da massa m_1 à mesa, sujeita ao vínculo

$$\dot{r} + \dot{z} = 0.$$

Assim, as equações de movimento são dadas por

$$\begin{cases} m_1\ddot{z} - m_1g = \lambda \\ m_2\ddot{r} - m_2r\dot{\theta}^2 = \lambda \\ \frac{d}{dt}(m_2r^2\dot{\theta}) = 0 \\ \dot{r} + \dot{z} = 0 \end{cases}$$

com o multiplicador de Lagrange λ .

Como a coordenada θ é cíclica e não aparece em nenhum vínculo, temos a quantidade conservada $J = m_2r^2\dot{\theta}$, que é a projeção do momento angular da massa m_2 na direção ortogonal à mesa. Com isso, a segunda equação pode ser escrita como

$$m_2\ddot{r} - \frac{J^2}{m_2r^3} = \lambda.$$

Multiplicando esta equação por m_1 e somando à primeira equação multiplicada por m_2 temos

$$m_1m_2(\ddot{z} + \ddot{r}) - m_1m_2g - \frac{m_1J^2}{m_2r^3} = (m_1 + m_2)\lambda.$$

Deste modo, derivando o vínculo em relação a t e substituindo nesta última equação, obtemos o multiplicador de Lagrange

$$\lambda = -\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2} \left(\frac{J^2}{m_2^2r^3} + g \right),$$

que corresponde à tensão no fio. □

Exercício 3

Exercício 4

Exercício 3: Transformações de calibre

O campo eletromagnético é invariante pela transformação de gauge

$$\mathbf{A} \rightarrow \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \nabla f \quad \text{e} \quad \phi \rightarrow \tilde{\phi} = \phi - \frac{\partial f}{\partial t},$$

onde $f(\mathbf{r}, t)$ é uma função diferenciável arbitrária. Como essa transformação afeta a lagrangiana do sistema? E sua hamiltoniana?

Resolução. A lagrangiana para uma partícula de massa m e carga q que se move em um campo eletromagnético externo é dada por

$$L = \frac{1}{2} m g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j - e\phi + e g_{ij} A^i \dot{q}^j$$

portanto o momento p_k canonicamente conjugado à coordenada q^k é dado por

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} = m g_{ik} \dot{q}^i + e g_{ik} A^i.$$

Desse modo, a hamiltoniana é obtida ao expressar a quantidade $H = p_k \dot{q}^k - L$ em termos de q^k e p_k . Da expressão do momento, obtemos

$$\dot{q}^j = \frac{g^{j\ell} p_\ell - e A^j}{m},$$

portanto

$$\begin{aligned} H &= p_k \frac{g^{k\ell} p_\ell - e A^k}{m} - \frac{1}{2} m g_{ij} \left(\frac{g^{in} p_n - e A^i}{m} \right) \left(\frac{g^{j\ell} p_\ell - e A^j}{m} \right) + e\phi - e g_{ij} A^i \frac{g^{j\ell} p_\ell - e A^j}{m} \\ &= e\phi + \frac{g^{k\ell} p_\ell - e A^k}{m} \left[p_k - \frac{1}{2} m g_{ik} \left(\frac{g^{in} p_n - e A^i}{m} \right) - e g_{ik} A^i \right] \\ &= e\phi + \frac{g^{k\ell} p_\ell - e A^k}{m} \left[p_k - \frac{1}{2} g_{ik} g^{in} p_n + e \frac{1}{2} g_{ik} A^i - e g_{ik} A^i \right] \\ &= \frac{1}{2m} (g^{k\ell} p_\ell - e A^k) (p_k - e g_{ik} A^i) + e\phi \end{aligned}$$

é a hamiltoniana do sistema.

Com uma transformação de calibre, obtemos a lagrangiana

$$\begin{aligned} \tilde{L} &= \frac{1}{2} m g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j - e\tilde{\phi} + e g_{ij} \tilde{A}^i \dot{q}^j \\ &= \frac{1}{2} m g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j - e \left(\phi - \frac{\partial f}{\partial t} \right) + e g_{ij} \left(A^i + g^{in} \frac{\partial f}{\partial q^n} \right) \dot{q}^j \\ &= \frac{1}{2} m g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j - e\phi + e \frac{\partial f}{\partial t} + e g_{ij} A^i \dot{q}^j + e g_{ij} g^{in} \frac{\partial f}{\partial q^n} \dot{q}^j \\ &= L + e \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q^j} \dot{q}^j \right) \\ &= L + e \frac{df}{dt}. \end{aligned}$$

Assim, lagrangianas obtidas por uma mudança de calibre são equivalentes! O momento \tilde{p}_k canonicamente conjugado à coordenada q^k é dado por

$$\begin{aligned}\tilde{p}_k &= \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}^k} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} + e \frac{\partial}{\partial \dot{q}^k} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q^j} \dot{q}^j \right) \\ &= p_k + e \frac{\partial f}{\partial q^k},\end{aligned}$$

portanto a hamiltoniana é

$$\begin{aligned}\tilde{H} &= \frac{1}{2m} \left(g^{k\ell} \tilde{p}_\ell - e \tilde{A}^k \right) \left(\tilde{p}_k - e g_{ik} \tilde{A}^i \right) + e \tilde{\phi} \\ &= \frac{1}{2m} \left[g^{k\ell} \left(p_\ell + e \frac{\partial f}{\partial q^\ell} \right) - e \left(A^k + g^{kn} \frac{\partial f}{\partial q^n} \right) \right] \left[\left(p_k + e \frac{\partial f}{\partial q^k} \right) - e g_{ik} \left(A^i + g^{is} \frac{\partial f}{\partial q^s} \right) \right] + e \left(\phi - \frac{\partial f}{\partial t} \right) \\ &= \frac{1}{2m} \left[g^{k\ell} p_\ell - e A^k + e \left(g^{k\ell} \frac{\partial f}{\partial q^\ell} - g^{kn} \frac{\partial f}{\partial q^n} \right) \right] \left[p_k - e g_{ik} A^i + e \left(\frac{\partial f}{\partial q^k} - g_{ik} g^{is} \frac{\partial f}{\partial q^s} \right) \right] + e \phi - e \frac{\partial f}{\partial t} \\ &= \frac{1}{2m} \left(g^{k\ell} p_\ell - e A^k \right) \left(p_k - e g_{ik} A^i \right) + e \phi - e \frac{\partial f}{\partial t} \\ &= H - e \frac{\partial f}{\partial t}.\end{aligned}$$

TODO: Mostrar que as hamiltonianas geram as mesmas equações de movimento. □

Exercício 5

Exercício 4: Variável cíclica e lagrangiana equivalente

Seja q^k uma variável cíclica da lagrangiana $L(q, \dot{q}, t)$, logo sabemos que seu momento conjugado p_k é uma constante de movimento. Se trocarmos L por $\tilde{L} = L + \frac{df(q,t)}{dt}$ sabemos que as equações de movimento não são alteradas. Por outro lado, q^k não é uma coordenada cíclica de \tilde{L} e seu momento canonicamente conjugado não é conservado! Resolva este paradoxo aparente.

Resolução. Para a lagrangiana \tilde{L} , o momento \tilde{p}_k canonicamente conjugado a q^k é dado por

$$\begin{aligned}\tilde{p}_k &= \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}^k} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}^k} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{q}^\ell \frac{\partial f}{\partial q^\ell} \right) \\ &= p_k + \frac{\partial f}{\partial q^k}.\end{aligned}$$

Desta forma, a equação de movimento para esta coordenada é

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{p}_k}{dt} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^k} &= 0 \implies \frac{d}{dt} \left(p_k + \frac{\partial f}{\partial q^k} \right) - \frac{\partial}{\partial q^k} \left(L + \frac{df}{dt} \right) = 0 \\ &\implies \frac{dp_k}{dt} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial q^k} \right) - \frac{\partial}{\partial q^k} \left(\frac{df}{dt} \right) = 0 \\ &\implies \frac{dp_k}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial q^k} + \frac{\partial^2 f}{\partial q^j \partial q^k} \dot{q}^j - \frac{\partial^2 f}{\partial q^k \partial t} - \frac{\partial^2 f}{\partial q^k \partial q^j} \dot{q}^j = 0 \\ &\implies \frac{dp_k}{dt} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial q^k} - \frac{\partial^2 f}{\partial q^k \partial t} \right) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial q^j \partial q^k} - \frac{\partial^2 f}{\partial q^k \partial q^j} \right) \dot{q}^j = 0.\end{aligned}$$

Portanto, se f for de classe C^2 , segue pelo teorema de Schwarz que as derivadas parciais de f comutam, portanto a equação de movimento para esta coordenada é

$$\frac{dp_k}{dt} = 0.$$

Logo, a lei de conservação obtida pela lagrangiana original é também expressa nesta lagrangiana equivalente. \square