

Mecânica I

Lista de exercícios I

1. Utilizando coordenadas esféricas obtenha



Podemos parametrizar uma esfera de raio ρ com a aplicação

$$\vec{f}: (0, \pi) \times (0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(\theta, \phi) \longmapsto \rho \cos \phi \sin \theta \vec{e}_x + \rho \sin \phi \sin \theta \vec{e}_y + \rho \cos \theta \vec{e}_z,$$

em que θ é o ângulo polar, definido a partir do eixo z , e ϕ é o ângulo azimutal, definido a partir do eixo x . De fato, temos $z = \rho \cos \theta$ por definição, portanto

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = \rho^2 \sin^2 \theta,$$

de modo que $x = \rho \sin \theta \cos \phi$ e $y = \rho \sin \theta \sin \phi$ pela definição do ângulo azimutal, como proposto.

Assim, os vetores tangentes à superfície da esfera são dados por

$$\vec{u} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial \theta} = \rho \cos \phi \cos \theta \vec{e}_x + \rho \sin \phi \cos \theta \vec{e}_y - \rho \sin \theta \vec{e}_z \quad \text{e} \quad \vec{v} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial \phi} = -\rho \sin \phi \sin \theta \vec{e}_x + \rho \cos \phi \sin \theta \vec{e}_y.$$

Com isso, definimos os versores do sistema de coordenadas esféricas $\{\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi\}$ por

$$\vec{e}_\rho = \frac{\vec{f}}{\|\vec{f}\|} = \cos \phi \sin \theta \vec{e}_x + \sin \phi \sin \theta \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_z,$$

$$\vec{e}_\theta = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \cos \phi \cos \theta \vec{e}_x + \sin \phi \cos \theta \vec{e}_y - \sin \theta \vec{e}_z, \quad \text{e}$$

$$\vec{e}_\phi = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = -\sin \phi \vec{e}_x + \cos \phi \vec{e}_y.$$

Notemos que $\vec{e}_\rho \times \vec{e}_\theta = \vec{e}_\phi$ e $\vec{e}_\theta \times \vec{e}_\phi = \vec{e}_\rho$, portanto $\{\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi\}$ é uma base ortonormal positivamente orientada de \mathbb{R}^3 , como desejado.

(a) a velocidade de uma partícula.

Para uma partícula de posição $\vec{r} = r \vec{e}_\rho$, sua velocidade $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ é

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \dot{r} \vec{e}_\rho + r \frac{d}{dt} \vec{e}_\rho \\ &= \dot{r} \vec{e}_\rho + r \dot{\theta} \frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \theta} + r \dot{\phi} \frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \phi} \\ &= \dot{r} \vec{e}_\rho + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r \dot{\phi} \sin \theta \vec{e}_\phi, \end{aligned}$$

onde $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$, $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ e $\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt}$.

(b) a aceleração de uma partícula.

Seja $\vec{\xi}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma função tal que $\|\vec{\xi}(t)\| = 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$, então

$$\langle \vec{\xi}(t), \vec{\xi}(t) \rangle = 1 \Rightarrow \left\langle \frac{d\vec{\xi}}{dt}, \vec{\xi} \right\rangle = 0,$$

isto é, $\frac{d\vec{\xi}}{dt}$ e $\vec{\xi}$ são ortogonais para todo $t \in \mathbb{R}$. Como consequência, $\frac{d}{dt} \vec{e}_\phi = \alpha \vec{e}_\rho + \beta \vec{e}_\theta$ para funções α, β de θ e de ϕ que não se anulam simultaneamente para $\dot{\phi} \neq 0$. Pela ortogonalidade da base,

$$\alpha = \left\langle \frac{d}{dt} \vec{e}_\phi, \vec{e}_r \right\rangle \quad e \quad \beta = \left\langle \frac{d}{dt} \vec{e}_\phi, \vec{e}_\theta \right\rangle.$$

Temos $\frac{d}{dt} \vec{e}_\phi = -\dot{\phi} (\cos \phi \vec{e}_x + \sin \phi \vec{e}_y)$, logo

$$\alpha = -\dot{\phi} (\cos^2 \phi \sin \theta + \sin^2 \phi \sin \theta) = -\dot{\phi} \sin \theta \quad e \quad \beta = -\dot{\phi} (\cos^2 \phi \cos \theta + \sin^2 \phi \cos \theta) = -\dot{\phi} \cos \theta,$$

de modo que $\frac{d}{dt} \vec{e}_\phi = -\dot{\phi} \sin \theta \vec{e}_r - \dot{\phi} \cos \theta \vec{e}_\theta$.

De forma mais direta obtemos $\frac{d}{dt} \vec{e}_\theta$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{e}_\theta &= \dot{\phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \vec{e}_\theta + \dot{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{e}_\theta \\ &= \dot{\phi} (-\sin \phi \cos \theta \vec{e}_x + \cos \phi \cos \theta \vec{e}_y) + \dot{\theta} (-\cos \phi \sin \theta \vec{e}_x - \sin \phi \sin \theta \vec{e}_y - \cos \theta \vec{e}_z) \\ &= \dot{\phi} \cos \theta \vec{e}_\phi - \dot{\theta} \vec{e}_r. \end{aligned}$$

Agora podemos determinar a aceleração da partícula $\vec{a} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \ddot{r} \vec{e}_r + \dot{r} \frac{d}{dt} \vec{e}_r + \dot{r} (\dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{\phi} \sin \theta \vec{e}_\phi) + r (\ddot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{\theta} \frac{d}{dt} \vec{e}_\theta + \ddot{\phi} \sin \theta \vec{e}_\phi + \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta \vec{e}_\phi + \dot{\phi} \sin \theta \frac{d}{dt} \vec{e}_\phi) \\ &= \ddot{r} \vec{e}_r + 2\dot{r} (\dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{\phi} \sin \theta \vec{e}_\phi) + r (\ddot{\theta} \vec{e}_\theta - \dot{\theta}^2 \vec{e}_r + \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta \vec{e}_\phi + \ddot{\phi} \sin \theta \vec{e}_\phi + \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta \vec{e}_\phi - \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \vec{e}_r - \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta \vec{e}_\theta) \\ &= (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) \vec{e}_r + (r \ddot{\theta} + 2\dot{r} \dot{\theta} - r \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta) \vec{e}_\theta + (r \ddot{\phi} \sin \theta + 2r \dot{\theta} \dot{\phi} \cos \theta + 2\dot{r} \dot{\phi} \sin \theta) \vec{e}_\phi. \end{aligned}$$

2. Considere um sistema de N partículas. Mostre que a energia cinética total com respeito a um dado referencial é a soma da energia cinética com respeito ao centro de massa mais a energia cinética do centro de massa.

Seja S um referencial em que a i -ésima partícula tem posição \vec{r}_i . Definimos a massa total do sistema $M = \sum_{i=1}^N m_i$ e a posição do centro de massa $\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i$. Tomamos S' como o referencial cuja origem é descrita pela posição \vec{R} no referencial S , isto é, S' é o referencial do centro de massa. Em S' , a i -ésima partícula tem posição $\vec{r}'_i = \vec{r}_i - \vec{R}$, portanto a energia cinética T' do sistema é

$$\begin{aligned} T' &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \langle \dot{\vec{r}}'_i, \dot{\vec{r}}'_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \langle \dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{R}}, \dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{R}} \rangle \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \langle \dot{\vec{r}}_i, \dot{\vec{r}}_i \rangle - \sum_{i=1}^N m_i \langle \dot{\vec{r}}_i, \dot{\vec{R}} \rangle + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \langle \dot{\vec{R}}, \dot{\vec{R}} \rangle \\ &= T - \left\langle \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i, \dot{\vec{R}} \right\rangle + \frac{1}{2} M \langle \dot{\vec{R}}, \dot{\vec{R}} \rangle \\ &= T - \langle M \dot{\vec{R}}, \dot{\vec{R}} \rangle + \frac{1}{2} \langle M \dot{\vec{R}}, \dot{\vec{R}} \rangle \\ &= T - T_{cm}, \end{aligned}$$

em que T é a energia cinética no referencial S e T_{cm} é a energia cinética do centro de massa no referencial S . Desse modo, concluímos que

$$T = T' + T_{cm},$$

como desejado.

5. Obtenha a solução de uma partícula na presença do potencial $U(x) = -U_0 \operatorname{sech}^2(\alpha x)$.

Por conservação de energia, segue que

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 = E - U(x) \Rightarrow \pm dt = \sqrt{\frac{m}{2(E - U(x))}} dx$$

então

$$\begin{aligned} dt &= \beta \left[\lambda^2 + \operatorname{sech}^2(\alpha x) \right]^{-1/2} dx, \\ &= \beta \cosh \alpha x \left[1 + \lambda^2 \cosh^2 \alpha x \right]^{-1/2} dx \\ &= \beta \cosh \alpha x \left[\lambda^2 + 1 + \lambda^2 \sinh^2 \alpha x \right]^{-1/2} dx \\ &= \frac{\beta}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} \cosh \alpha x \left[1 + \left(\frac{\lambda \sinh \alpha x}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} \right)^2 \right]^{-1/2} dx, \end{aligned}$$

onde $\lambda^2 = \frac{E}{U_0}$ e $\beta = \pm \sqrt{\frac{m}{2U_0}}$. Com a substituição

$$\psi = \frac{|\lambda| \sinh \alpha x}{\sqrt{\lambda^2 + 1}}, \quad \frac{d\psi}{|\lambda| \alpha} = \frac{\cosh \alpha x}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} dx,$$

obtemos

$$dt = \frac{\beta}{|\lambda| \alpha} \left[1 + \operatorname{sgn}\left(\frac{E}{U_0}\right) \psi^2 \right]^{-1/2} d\psi, \quad \frac{2E}{m} \frac{1}{m}$$

então

$$|\lambda| \alpha (t - \tau) = \begin{cases} \beta \sinh \psi, & E/U_0 > 0 \\ \beta \sin \psi, & E/U_0 < 0 \end{cases} \Rightarrow x(t) = \begin{cases} \frac{\pm 1}{\alpha} \operatorname{arsinh} \left[\sqrt{1 + \frac{U_0}{E}} \sinh \left(\sqrt{\frac{2E}{m}} \alpha (t - \tau) \right) \right], & \text{se } E > 0 \\ \frac{\pm 1}{\alpha} \operatorname{arsinh} \left[\sqrt{1 + \frac{U_0}{E}} \sin \left(\sqrt{\frac{2|E|}{m}} \alpha (t - \tau) \right) \right], & \text{se } E < 0. \end{cases}$$

Para $E = -U_0$, temos trivialmente $x(t) = x_0$. Para $E = 0$, temos

$$dt = \beta \left[\operatorname{sech}^2(\alpha x) \right]^{-1/2} dx = \beta \cosh \alpha x dx,$$

portanto $x(t) = \frac{\pm 1}{\alpha} \operatorname{arsinh} \left(\sqrt{\frac{2U_0}{m}} \alpha (t - \tau) \right)$.