4302305 - Lista de Exercícios VI

Louis Bergamo Radial
8992822

7 de maio de 2024

Exercício 1

Exercício 1: Movimento de uma partícula sujeita a um sistema de vínculos

Considere o movimento de uma partícula em três dimensões que está sujeita aos vínculos

$$(x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}z = 0 \quad \text{e} \quad (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}y + yz\,\mathrm{d}z = 0.$$

Decida se o sistema é holonômico.

Resolução. Integremos diretamente o sistema, notando que podemos isolar $z\,\mathrm{d}z$ em ambas equações. Temos então a equação diferencial ordinária a variáveis separáveis

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}y}{y},$$

cuja solução é $y = kx$, para alguma constante de integração $k \in \mathbb{R}$. Substituindo na primeira equação de vínculo, obtemos

$$z\,\mathrm{d}z = -(1 + k^2)x\,\mathrm{d}x \implies x^2(1 + k^2) + z^2 = \ell^2 \implies x^2 + y^2 + z^2 = \ell^2,$$

para uma constante de integração $\ell \in \mathbb{R}$. Deste modo, concluímos que este vínculo é equivalente ao vínculo holonômico da interseção do plano $y - kx = 0$ com a esfera de raio ℓ centrada na origem $x^2 + y^2 + z^2 = \ell^2$, portanto o sistema é holonômico. □

Exercício 2

Exercício 2: Multiplicadores de Lagrange

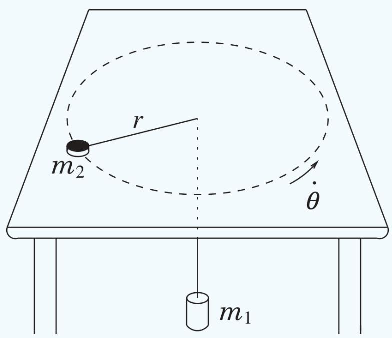

Figura 1: Sistema do Exercício 2

No sistema da Figura 1, a massa m_2 move-se sem atrito sobre uma mesa horizontal, enquanto

a massa m_1 pode mover-se apenas na direção ortogonal à mesa.
Utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange, obtenha a tensão no fio, o qual é inextensível, em termos da quantidade conservada e de r.

Resolução. Utilizemos a lagrangiana

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{z}^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + m_1 g z,$$

onde z é a distância da massa m_1 à mesa, sujeita ao vínculo

$$\dot{r} + \dot{z} = 0.$$

Assim, as equações de movimento são dadas por

$$\begin{cases} m_1\ddot{z} - m_1 g = \lambda \\ m_2\ddot{r} - m_2 r\dot{\theta}^2 = \lambda \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_2 r^2\dot{\theta}\right) = 0 \\ \dot{r} + \dot{z} = 0 \end{cases}$$

com o multiplicador de Lagrange λ.

Como a coordenada θ é cíclica e não aparece em nenhum vínculo, temos a quantidade conservada $J = m_2 r^2\dot{\theta}$, que é a projeção do momento angular da massa m_2 na direção ortogonal à mesa. Com isso, a segunda equação pode ser escrita como

$$m_2\ddot{r} - \frac{J^2}{m_2 r^3} = \lambda.$$

Multiplicando esta equação por m_1 e somando à primeira equação multiplicada por m_2 temos

$$m_1 m_2(\ddot{z} + \ddot{r}) - m_1 m_2 g - \frac{m_1 J^2}{m_2 r^3} = (m_1 + m_2)\lambda.$$

Deste modo, derivando o vínculo em relação a t e substituindo nesta última equação, obtemos o multiplicador de Lagrange

$$\lambda = -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left(\frac{J^2}{m_2^2 r^3} + g\right),$$

que corresponde à tensão no fio. □