4302305 - Lista de Exercícios VII

Louis Bergamo Radial
8992822

1 de junho de 2024

Exercício 4

Exercício 1

Um anel fino de massa m e raio R oscila num plano vertical em torno do ponto fixo O, como mostrado na Figura 1. Uma conta de massa m move-se sem atrito ao redor do anel.

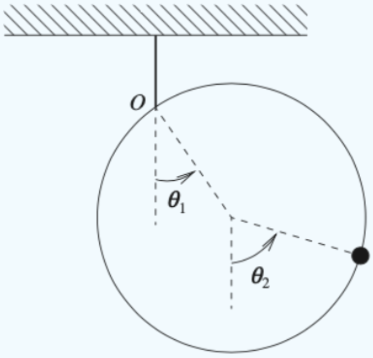

Figura 1: Sistema do Exercício 1

(a) Mostre que a lagrangiana do sistema é

$$L = \frac{3}{2}mR^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}mR\dot{\theta}_2^2 + mR^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) + 2mgR\cos\theta_1 + mgR\cos\theta_2.$$

(b) Considerando pequenas oscilações, obtenha os modos normais e respectivas frequências.

(c) Obtenha a solução para a condição inicial $\theta_1(0) = 0$, $\theta_2(0) = \theta_0$, e $\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0$.

Resolução. Tomando o ponto O como a origem do sistema de coordenadas, a posição da conta é dada por

$$\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_1 + R\left(\sin\theta_2\boldsymbol{e}_x - \cos\theta_2\boldsymbol{e}_y\right),$$

em que $\boldsymbol{r}_1 = R\left(\sin\theta_1\boldsymbol{e}_x - \cos\theta_1\boldsymbol{e}_y\right)$ é a posição do centro de massa do anel. As velocidades da conta e do centro de massa do anel são dadas por

$$\dot{\boldsymbol{r}}_1 = R\dot{\theta}_1\left(\cos\theta_1\boldsymbol{e}_x + \sin\theta_1\boldsymbol{e}_y\right) \quad \text{e} \quad \dot{\boldsymbol{r}}_2 = \dot{\boldsymbol{r}}_1 + R\dot{\theta}_2\left(\cos\theta_2\boldsymbol{e}_x + \sin\theta_2\boldsymbol{e}_y\right),$$

portanto a energia cinética da conta é

$$\begin{aligned}
T_2 &= \frac{1}{2}m\left[R^2\dot{\theta}_1^2 + 2\left\langle\dot{\boldsymbol{r}}_1, R\dot{\theta}_2\left(\cos\theta_2\boldsymbol{e}_x + \sin\theta_2\boldsymbol{e}_y\right)\right\rangle + R^2\dot{\theta}_2^2\right] \\
&= \frac{1}{2}mR^2\left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2\right) + mR^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\left(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2\right) \\
&= \frac{1}{2}mR^2\left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2\right) + mR^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2).
\end{aligned}$$

O momento de inércia do anel pelo eixo que passa por seu centro de massa é mR^2, portanto o momento de inércia pelo ponto O é $2mR^2$, pelo teorema dos eixos paralelos. Assim, a energia cinética do anel é dada por $T_1 = mR^2\dot{\theta}_1^2$, de forma que a energia cinética do sistema é

$$T = \frac{3}{2}mR^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}_2^2 + mR^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2).$$

A energia potencial do sistema é dada por

$$\begin{aligned}
V &= mg\langle\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{e}_y\rangle + mg\langle\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{e}_y\rangle \\
&= -2mgR\cos\theta_1 - mgR\cos\theta_2,
\end{aligned}$$

portanto a lagrangiana do sistema é

$$L = \frac{3}{2} m R^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m R \dot{\theta}_2^2 + m R^2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + 2mgR \cos\theta_1 + mgR\cos\theta_2.$$

Para uma configuração de equilíbrio $q^{(0)} = \left(\theta_1^{(0)}, \theta_2^{(0)}\right)$, devemos ter

$$\left.\frac{\partial V}{\partial \theta_k}\right|_{q^{(0)}} = 0 \implies \theta_k^{(0)} = n_k \pi,$$

com $n_k \in \mathbb{Z}$ e $k \in \{1, 2\}$. Definimos

$$V_{k\ell} = \left.\frac{\partial^2 V}{\partial \theta_k \, \partial \theta_\ell}\right|_{q^{(0)}}$$

e representamos matricialmente por

$$[V_{k\ell}] = \begin{bmatrix} 2mgR(-1)^{n_1} & 0 \\ 0 & mgR(-1)^{n_2} \end{bmatrix}.$$

Para que $q^{(0)}$ seja um ponto de equilíbrio, devemos ter n_1 e n_2 pares, isto é, $q^{(0)} \equiv (0, 0)$. $\square$