

# 4302305 - Lista de Exercícios VI

Louis Bergamo Radial  
8992822

7 de maio de 2024

## Exercício 1

### Exercício 1: Movimento de uma partícula sujeita a um sistema de vínculos

Considere o movimento de uma partícula em três dimensões que está sujeita aos vínculos

$$(x^2 + y^2) dx + xz dz = 0 \quad \text{e} \quad (x^2 + y^2) dy + yz dz = 0.$$

Decida se o sistema é holonômico.

*Resolução.* Integremos diretamente o sistema, notando que podemos isolar  $z dz$  em ambas equações. Temos então a equação diferencial ordinária a variáveis separáveis

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y},$$

cujas soluções são  $y = kx$ , para alguma constante de integração  $k \in \mathbb{R}$ . Substituindo na primeira equação de vínculo, obtemos

$$z dz = -(1 + k^2)x dx \implies x^2(1 + k^2) + z^2 = \ell^2 \implies x^2 + y^2 + z^2 = \ell^2,$$

para uma constante de integração  $\ell \in \mathbb{R}$ . Deste modo, concluímos que este vínculo é equivalente ao vínculo holonômico da interseção do plano  $y - kx = 0$  com a esfera de raio  $|\ell|$  centrada na origem  $x^2 + y^2 + z^2 = \ell^2$ , portanto o sistema é holonômico.  $\square$

## Exercício 2

### Exercício 2: Multiplicadores de Lagrange

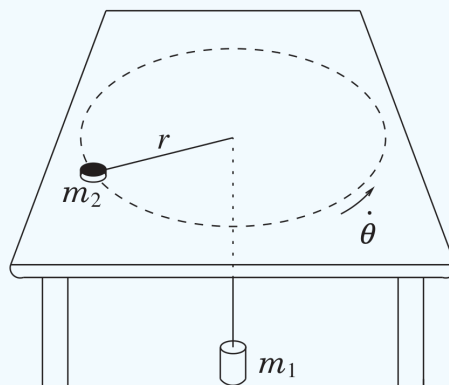


Figura 1: Sistema do Exercício 2

No sistema da [Figura 1](#), a massa  $m_2$  move-se sem atrito sobre uma mesa horizontal, enquanto a massa  $m_1$  pode mover-se apenas na direção ortogonal à mesa. Utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange, obtenha a tensão no fio, o qual é inextensível, em termos da quantidade conservada e de  $r$ .

*Resolução.* Utilizemos a lagrangiana

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{z}^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + m_1gz,$$

onde  $z$  é a distância da massa  $m_1$  à mesa, sujeita ao vínculo

$$\dot{r} + \dot{z} = 0.$$

Assim, as equações de movimento são dadas por

$$\begin{cases} m_1\ddot{z} - m_1g = \lambda \\ m_2\ddot{r} - m_2r\dot{\theta}^2 = \lambda \\ \frac{d}{dt}(m_2r^2\dot{\theta}) = 0 \\ \dot{r} + \dot{z} = 0 \end{cases}$$

com o multiplicador de Lagrange  $\lambda$ .

Como a coordenada  $\theta$  é cíclica e não aparece em nenhum vínculo, temos a quantidade conservada  $J = m_2r^2\dot{\theta}$ , que é a projeção do momento angular da massa  $m_2$  na direção ortogonal à mesa. Com isso, a segunda equação pode ser escrita como

$$m_2\ddot{r} - \frac{J^2}{m_2r^3} = \lambda.$$

Multiplicando esta equação por  $m_1$  e somando à primeira equação multiplicada por  $m_2$  temos

$$m_1m_2(\ddot{z} + \ddot{r}) - m_1m_2g - \frac{m_1J^2}{m_2r^3} = (m_1 + m_2)\lambda.$$

Deste modo, derivando o vínculo em relação a  $t$  e substituindo nesta última equação, obtemos o multiplicador de Lagrange

$$\lambda = -\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2} \left( \frac{J^2}{m_2^2r^3} + g \right),$$

que corresponde à tensão no fio. □