4302305 - Lista de Exercícios V

Louis Bergamo Radial
8992822

5 de maio de 2024

Teorema 1: Teorema de Noether

Seja L uma lagrangiana invariante em relação ao subgrupo a um parâmetro de difeomorfismos h^s, isto é,

$$h^0(q^k(t)) = q^k(t) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial s} L\left(h^s(q^k), \frac{\partial}{\partial t} h^s(q^k), t\right) = 0,$$

então a quantidade $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial h^s \circ q^k}{\partial s}\Big|_{s=0}$ é conservada.

Demonstração. Sejam $q^k(t)$ coordenadas generalizadas que satisfazem as equações de Euler-Lagrange. Como L é invariante por transformações de h^s, segue que $\tilde{q}^k(s,t) = h^s \circ q^k(t)$ também satisfazem as equações de Euler-Lagrange.

Ainda pela invariância pelo subgrupo a um parâmetro de difeomorfismos, temos

$$\left.\frac{\partial L(\tilde{q}^k, \dot{\tilde{q}}^k, t)}{\partial s}\right|_{s=0} = \left.\frac{\partial L}{\partial q^k} \frac{\partial \tilde{q}^k}{\partial s}\right|_{s=0} + \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial \dot{\tilde{q}}^k}{\partial s}\right|_{s=0} = 0.$$

Como $\tilde{q}^k$ satisfazem as equações de Euler-Lagrange, temos

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\right) \frac{\partial \tilde{q}^k}{\partial s}\right|_{s=0} + \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial \tilde{q}}{\partial t}\right|_{s=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left.\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial \tilde{q}^k}{\partial s}\right|_{s=0}\right) = 0,$$

como queríamos demonstrar. □

Teorema 2: Teorema de Noether generalizado

Se a ação é *quase-invariante* sob a transformação infinitesimal

$$t \to \tilde{t} = t + \epsilon X(q(t), t) \qquad q^k(t) \to \tilde{q}^k(\tilde{t}) = q^k(t) + \epsilon \psi^k(q(t), \dot{q}(t), t),$$

isto é, se existe uma função $G = G(q(t), t)$ tal que

$$\Delta S = \int_{\tilde{t}_A}^{\tilde{t}_B} \mathrm{d}\tilde{t}\, \tilde{L} - \int_{t_A}^{t_B} \mathrm{d}t \left(L + \epsilon \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} G(q(t), t)\right) = 0,$$

onde $\tilde{L} = L\left(\tilde{q}(\tilde{t}), \frac{\mathrm{d}\tilde{q}}{\mathrm{d}\tilde{t}}, \tilde{t}\right)$ e $L = L\left(q(t), \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}, t\right)$, então a quantidade

$$I = hX - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \psi^k + G$$

é a integral de movimento associada à simetria, com a função energia dada por $h = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \dot{q}^k - L$.

Demonstração. Notemos que

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{t}}{\mathrm{d}t} = 1 + \epsilon\dot{X} \quad \text{e} \quad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tilde{t}} = 1 - \epsilon\dot{X}$$

em primeira ordem em ϵ. Assim, as velocidades generalizadas sob a transformação infinitesimal são dadas por

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{q}^k}{\mathrm{d}\tilde{t}} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tilde{t}}\frac{\mathrm{d}\tilde{q}}{\mathrm{d}t} = (1-\epsilon\dot{X})(\dot{q}^k + \epsilon\dot{\psi}^k) = \dot{q}^k + \epsilon\xi^k,$$

onde definimos $\xi^k = \dot{\psi}^k - \dot{X}\dot{q}^k$. Com isso a lagrangiana avaliada após a transformação é

$$\begin{aligned}\tilde{L} &= L(q(t) + \epsilon\psi, \dot{q}(t) + \epsilon\xi, t + \epsilon X) \\ &= L + \epsilon\left(\psi^k\frac{\partial L}{\partial q^k} + \xi^k\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} + X\frac{\partial L}{\partial t}\right).\end{aligned}$$

Se a ação é quase-invariante por esta transformação, temos

$$\begin{aligned}\Delta S &= \int_{\tilde{t}_A}^{\tilde{t}_B} \mathrm{d}\tilde{t}\,\tilde{L} - \int_{t_A}^{t_B}\mathrm{d}t\,\left(L + \epsilon\dot{G}\right) \\ &= \int_{t_A}^{t_B}\mathrm{d}t\,\left(\tilde{L}\frac{\mathrm{d}\tilde{t}}{\mathrm{d}t} - L - \epsilon\dot{G}\right) \\ &= \epsilon\int_{t_A}^{t_B}\mathrm{d}t\,\left[L\dot{X} + \psi^k\frac{\partial L}{\partial q^k} + \xi^k\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^k} + X\frac{\partial L}{\partial t} - \dot{G}\right] = 0.\end{aligned}$$

Portanto, a condição necessária e suficiente para que a ação seja quase-invariante por esta transformação é

$$\dot{G} = L\dot{X} + \psi^k\frac{\partial L}{\partial q^k} + (\dot{\psi}^k - \dot{X}\dot{q}^k)\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} + X\frac{\partial L}{\partial t},$$

isto é, o lado direito desta equação deve ser igual à alguma derivada total em relação ao tempo de uma função das posições e do tempo.

Pela definição da função energia temos

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} &= \left(L - \frac{\partial L}{\partial\dot{q}^k}\dot{q}^k\right)\dot{X} + X\frac{\partial L}{\partial t} + \psi^k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^k}\right) + \dot{\psi}^k\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^k} \\ &= -h\dot{X} - \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}X + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\psi^k\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^k}\right) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-hX + \psi^k\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^k}\right),\end{aligned}$$

onde utilizamos as equações de Euler-Lagrange. Desse modo, temos que

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = 0,$$

onde $I = hX - \psi^k\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^k} + G$, como desejado. □

Exercício 1

Exercício 2

Lema 1: Sistema de partículas livres

Seja um sistema de N partículas livres de posições $\boldsymbol{x}_{(i)}$ e massas m_i com lagrangiana dada por

$$L = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \langle \dot{\boldsymbol{x}}_{(i)}, \dot{\boldsymbol{x}}_{(i)} \rangle - \sum_{i \neq j}^{N} V_{ij},$$

onde $V_{ij} = V\left(\|\boldsymbol{x}_{(i)} - \boldsymbol{x}_{(j)}\|\right)$. Definindo as coordenadas $q^k_{(i)}$ tais que $\boldsymbol{x}_{(i)} = q^k_{(i)} \boldsymbol{e}_k$, onde os vetores $\boldsymbol{e}_k$ formam uma base ortonormal para $\mathbb{R}^3$, os momentos canonicamente conjugados a estas coordenadas são dados por

$$p_{(i)k} = m_i g_{\ell k} \dot{q}^{\ell}_{(i)},$$

para $i = 1, \ldots, N$, e $k = 1, 2, 3$, onde $g_{\ell k} = \langle \boldsymbol{e}_\ell, \boldsymbol{e}_k \rangle$ é o tensor métrico Euclidiano.

Demonstração. Em termos dessas coordenadas, a lagrangiana do sistema é

$$L = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i g_{\ell n} \dot{q}^{\ell}_{(i)} \dot{q}^{n}_{(i)} - \sum_{i \neq j}^{N} V_{ij}.$$

Assim, o momento canonicamente conjugado $p_{(i)k}$ à coordenada $q^k_{(i)}$ é dado por

$$p_{(i)k} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k_{(i)}} = \frac{1}{2} m_i g_{\ell n} \delta^{\ell}_{k} \dot{q}^{n}_{(i)} + \frac{1}{2} m_i g_{\ell n} \delta^{n}_{k} \dot{q}^{\ell}_{(i)} = m_i g_{\ell k} \dot{q}^{\ell}_{(i)},$$

como proposto. □

Exercício 1: Homogeneidade do espaço

Considere a lagrangiana do Lema 1.

(a) A transformação $\boldsymbol{x}_{(i)} \longrightarrow \boldsymbol{x}_{(i)} + s\boldsymbol{n}$ é uma simetria do sistema?

(b) Qual é a quantidade conservada e seu significado físico?

Resolução. Definimos $\tilde{\boldsymbol{x}}_{(i)}(s, t) = \boldsymbol{x}_{(i)}(t) + s\boldsymbol{n}$, notando que $\tilde{\boldsymbol{x}}_{(i)}(0, t) = \boldsymbol{x}_{(i)}(t)$ para todo t. Assim, temos

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}_{(i)} = \dot{\boldsymbol{x}}_{(i)} \quad \text{e} \quad \tilde{\boldsymbol{x}}_{(i)} - \tilde{\boldsymbol{x}}_{(j)} = \boldsymbol{x}_{(i)} - \boldsymbol{x}_{(j)},$$

para todos $i, j = 1, \ldots, N$. Dessa forma, é evidente que

$$\begin{aligned} \tilde{L} = L(\tilde{\boldsymbol{x}}_{(i)}, \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}_{(i)}, t) &= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \langle \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}_{(i)}, \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}_{(i)} \rangle - \sum_{i \neq j}^{N} V\left(\|\tilde{\boldsymbol{x}}_{(i)} - \tilde{\boldsymbol{x}}_{(j)}\|\right) \\ &= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \langle \dot{\boldsymbol{x}}_{(i)}, \dot{\boldsymbol{x}}_{(i)} \rangle - \sum_{i \neq j}^{N} V\left(\|\boldsymbol{x}_{(i)} - \boldsymbol{x}_{(j)}\|\right) = L(\boldsymbol{x}_{(i)}, \dot{\boldsymbol{x}}_{(i)}, t), \end{aligned}$$

isto é, a lagrangiana é invariante por translações na direção $\boldsymbol{n}$, $\frac{\partial \tilde{L}}{\partial s} = 0$. Como não há dependência explícita com os cossenos diretores de $\boldsymbol{n}$, segue que a lagrangiana é invariante por translações espaciais.

Notemos que $\frac{\partial \tilde{x}}{\partial s} = \boldsymbol{n}$, portanto $\frac{\partial \tilde{q}^k_{(i)}}{\partial s} = n^k$, onde $\boldsymbol{n} = n^k \boldsymbol{e}_k$. Pelo Teorema de Noether, segue que a quantidade

$$Q = \sum_{i=1}^{N} p_{(i)k} \left. \frac{\partial \tilde{q}^k_{(i)}}{\partial s} \right|_{s=0}$$

é conservada. Pelo Lema 1, obtemos

$$\begin{aligned} Q = \sum_{i=1}^{N} m_i g_{\ell k} \dot{q}^\ell_{(i)} n^k &= \sum_{i=1}^{N} \langle m_i \dot{q}^\ell_{(i)} \boldsymbol{e}_\ell, n^k \boldsymbol{e}_k \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{N} \langle m_i \dot{\boldsymbol{x}}_{(i)}, \boldsymbol{n} \rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{x}}_{(i)}, \boldsymbol{n} \right\rangle, \end{aligned}$$

isto é, a projeção do momento total do sistema na direção $\boldsymbol{n}$ é conservada. Como esta relação é válida para qualquer direção $\boldsymbol{n}$, obtemos que a homogeneidade do espaço implica a conservação do momento total do sistema $\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{x}}_{(i)}$. □

Exercício 3

Exercício 2: Isotropia do espaço

Considere a lagrangiana do Lema 1. Dada uma rotação infinitesimal na direção $\boldsymbol{n}$ por um ângulo s, a transformação é

$$\boldsymbol{x}_{(i)} \longrightarrow \boldsymbol{x}_{(i)} + \left[s\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}_{(i)} \right].$$

Obtenha a quantidade conservada associada a rotações.

Resolução. Definimos $\tilde{\boldsymbol{x}}_{(i)}(s,t) = \boldsymbol{x}_{(i)}(t) + \left[s\boldsymbol{n}, \tilde{\boldsymbol{x}}_{(i)} \right]$, notando que $\tilde{\boldsymbol{x}}_{(i)}(0,t) = \boldsymbol{x}_{(i)}(t)$ para todo t. Mostremos que a distância em relação à origem é a mesma para todo s, em ordem linear em s. Temos

$$\begin{aligned} \left\langle \tilde{\boldsymbol{x}}_{(i)}, \tilde{\boldsymbol{x}}_{(i)} \right\rangle &= \left\langle \boldsymbol{x}_{(i)} + \left[s\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}_{(i)} \right], \boldsymbol{x}_{(i)} + \left[s\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}_{(i)} \right] \right\rangle \\ &= \left\langle \boldsymbol{x}_{(i)}, \boldsymbol{x}_{(i)} \right\rangle + 2\left\langle \boldsymbol{x}_{(i)}, \left[s\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}_{(i)} \right] \right\rangle + s^2 \left\langle \left[\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}_{(i)} \right], \left[\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}_{(i)} \right] \right\rangle \\ &= \left\langle \boldsymbol{x}_{(i)}, \boldsymbol{x}_{(i)} \right\rangle + O(s^2), \end{aligned}$$

portanto a transformação é uma rotação infinitesimal. Com isso, temos

$$\begin{aligned} \left\langle \tilde{x}_{(i)} - \tilde{x}_{(j)}, \tilde{x}_{(i)} - \tilde{x}_{(j)} \right\rangle &= \left\langle \boldsymbol{x}_{(i)} - \boldsymbol{x}_{(j)} + \left[s\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}_{(i)} \right] - \left[s\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}_{(j)} \right], \boldsymbol{x}_{(i)} - \boldsymbol{x}_{(j)} + \left[s\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}_{(i)} \right] - \left[s\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}_{(j)} \right] \right\rangle \\ &= \left\langle \boldsymbol{x}_{(i)} - \boldsymbol{x}_{(j)} + \left[s\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}_{(i)} - \boldsymbol{x}_{(j)} \right], \boldsymbol{x}_{(i)} - \boldsymbol{x}_{(j)} + \left[s\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}_{(i)} - \boldsymbol{x}_{(j)} \right] \right\rangle \\ &= \left\langle \boldsymbol{x}_{(i)} - \boldsymbol{x}_{(j)}, \boldsymbol{x}_{(i)} - \boldsymbol{x}_{(j)} \right\rangle + O(s^2), \end{aligned}$$

portanto as distâncias relativas entre pares de partículas é invariante em ordem linear de s. Fica claro que esta transformação preserva a lagrangiana do sistema,

$$\begin{aligned} \tilde{L} = L(\tilde{\boldsymbol{x}}_{(i)}, \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}_{(i)}, t) &= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \langle \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}_{(i)}, \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}_{(i)} \rangle - \sum_{i \neq j}^{N} V\left(\| \tilde{\boldsymbol{x}}_{(i)} - \tilde{\boldsymbol{x}}_{(j)} \| \right) \\ &= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \langle \dot{\boldsymbol{x}}_{(i)}, \dot{\boldsymbol{x}}_{(i)} \rangle - \sum_{i \neq j}^{N} V\left(\| \boldsymbol{x}_{(i)} - \boldsymbol{x}_{(j)} \| \right) = L(\boldsymbol{x}_{(i)}, \dot{\boldsymbol{x}}_{(i)}, t), \end{aligned}$$

isto é, $\frac{\partial \tilde{L}}{\partial s} = 0$ para todo s suficientemente pequeno. Assim, utilizando as coordenadas $q^k_{(i)}$ definidas no Lema 1, temos

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_{(i)} = \tilde{q}^k_{(i)} \boldsymbol{e}_k = \left(q^k_{(i)} + \epsilon^{kab} s n_a q_{(i)b} \right) \boldsymbol{e}_k \implies \left. \frac{\partial \tilde{q}^k_{(i)}}{\partial s} \right|_{s=0} = \epsilon^{kab} n_a q_{(i)b},$$

onde $\boldsymbol{n} = n^\ell \boldsymbol{e}_\ell$, de modo que pelo Teorema de Noether a quantidade $Q = \sum_{i=1}^N p_{(i)k} \epsilon^{kab} n_a q_{(i)b}$ é conservada. Pelo Lema 1, obtemos

$$\begin{aligned} Q = \sum_{i=1}^N m_i g_{\ell k} \dot{q}^\ell_{(i)} \epsilon^{kab} n_a q_{(i)b} &= \sum_{i=1}^N m_i \left\langle \dot{q}^\ell_{(i)} \boldsymbol{e}_\ell, \epsilon^{kab} n_a q_{(i)b} \boldsymbol{e}_k \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^N \left\langle m_i \dot{\boldsymbol{x}}_{(i)}, \left[\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}_{(i)} \right] \right\rangle = \sum_{i=1}^N \left\langle \boldsymbol{n}, \left[\boldsymbol{x}_{(i)}, m_i \dot{\boldsymbol{x}}_{(i)} \right] \right\rangle \\ &= \left\langle \boldsymbol{n}, \sum_{i=1}^N \left[\boldsymbol{x}_{(i)}, m_i \dot{\boldsymbol{x}}_{(i)} \right] \right\rangle, \end{aligned}$$

isto é, a projeção do momento angular total do sistema na direção $\boldsymbol{n}$ é conservada. Como esta relação é válida para qualquer direção $\boldsymbol{n}$, mostramos que a isotropia do espaço implica a conservação do momento angular total do sistema $\sum_{i=1}^N \left[\boldsymbol{x}_{(i)}, m_i \dot{\boldsymbol{x}}_{(i)} \right]$. □

Exercício 4

Exercício 3: Transformação de escala

Considere um sistema unidimensional com coordenada generalizada q cuja lagrangiana é

$$L = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q).$$

Uma transformação de escala modifica a variável independente tempo bem como a variável dinâmica q segundo

$$t \longrightarrow \tilde{t} = \rho t \quad \text{e} \quad q(t) \longrightarrow \tilde{q}(\tilde{t}) = \rho^d q(\rho t),$$

onde a quantidade d é chamada *dimensão de escala* da variável dinâmica q.

(a) Derive a forma infinitesimal desta transformação.

(b) Qual o valor que a dimensão de escala d deve ter para que a teoria seja invariante por esta transformação para $V = 0$?

(c) Para o valor de d encontrado, determine a forma mais geral de V para que a teoria seja invariante por transformações de escala.

(d) Usando o teorema de Noether, obtenha a quantidade conservada D pela transformação de escala.

Resolução. Para que a transformação seja a identidade, devemos ter $\rho = 1$. Deste modo, podemos parametrizar a transformação ao redor da identidade por

$$t \longrightarrow \tilde{t} = e^\alpha t \quad \text{e} \quad q(t) \longrightarrow \tilde{q}(\tilde{t}) = e^{\alpha d} q(\rho t),$$

para algum $\alpha \in \mathbb{R}$. Assim, para $\alpha \ll 1$ temos o gerador infinitesimal desta transformação dado por

$$\begin{aligned} t \longrightarrow \tilde{t} &= (1+\alpha)t \\ &= t + \alpha t \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} q(t) \longrightarrow \tilde{q}(\tilde{t}) &= (1+d\alpha)q(t+\alpha t), \\ &= (1+d\alpha)q(t) + \alpha t\dot{q}(t). \end{aligned}$$

Definindo $X = t$, $\psi = dq(t) + t\dot{q}(t)$, temos

$$\tilde{t} = t + \alpha X \quad \text{e} \quad \tilde{q}(\tilde{t}) = q(t) + \alpha\psi.$$

Desse modo, para que a ação seja quase-invariante pela transformação, devemos ter

$$L\dot{X} + \psi\frac{\partial L}{\partial q} + (\dot{\psi} - \dot{X}\dot{q})\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\dot{q}} + X\frac{\partial L}{\partial t} = \dot{G}$$

para alguma função $G = G(q,t)$. Computando diretamente vemos que

$$\begin{aligned} L\dot{X} + \psi\frac{\partial L}{\partial q} + (\dot{\psi} - \dot{X}\dot{q})\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\dot{q}} + X\frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q) + (dq + t\dot{q})(-V'(q)) + (d\dot{q} + t\ddot{q})m\dot{q} \\ &= \left(d + \frac{1}{2}\right)m\dot{q}^2 - V(q) - (dq + t\dot{q})V'(q) + m\ddot{q}t\dot{q} \\ &= \left(d + \frac{1}{2}\right)m\dot{q}^2 - V(q) - (dq + 2t\dot{q})V'(q), \end{aligned}$$

onde utilizamos a equação de movimento $m\ddot{q} = -V'(q)$. Notemos que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[tV(q)\right] = V(q) + t\dot{q}V'(q),$$

portanto

$$L\dot{X} + \psi\frac{\partial L}{\partial q} + (\dot{\psi} - \dot{X}\dot{q})\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\dot{q}} + X\frac{\partial L}{\partial t} = \left(d + \frac{1}{2}\right)m\dot{q}^2 + \left[V(q) - dqV'(q)\right] - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[2tV(q)\right],$$

isto é, se $d = -\frac{1}{2}$ e o potencial satisfizer a equação diferencial

$$V(q) - dqV'(q) = 0,$$

obtemos $G(q,t) = -2tV(q)$, logo a ação é quase-invariante por transformações de escala.

Neste caso, integrando a equação diferencial, obtemos o potencial

$$V(q) = kq^{-2}$$

para alguma constante de integração $k \in \mathbb{R}$. Ainda, pelo Teorema de Noether generalizado, a quantidade

$$\begin{aligned} D &= hX - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\psi + G \\ &= ht - m\dot{q}\left(-\frac{1}{2}q + t\dot{q}\right) - 2tV(q) \\ &= ht + \frac{1}{2}m\dot{q}q - mt\dot{q}^2 - 2tV(q) \\ &= \frac{1}{2}mq\dot{q} - ht \end{aligned}$$

é a integral de movimento associada à transformação de escala. □

Exercício 5