4302305 - Lista de Exercícios VII

Louis Bergamo Radial
8992822

6 de junho de 2024

Exercício 4

Exercício 1

Um anel fino de massa m e raio R oscila num plano vertical em torno do ponto fixo O, como mostrado na Figura 1. Uma conta de massa m move-se sem atrito ao redor do anel.

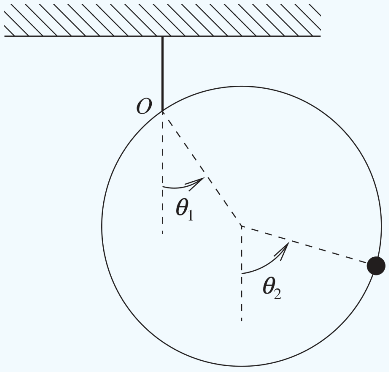

Figura 1: Sistema do Exercício 1

(a) Mostre que a lagrangiana do sistema é

$$L = \frac{3}{2}mR^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}_2^2 + mR^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) + 2mgR\cos\theta_1 + mgR\cos\theta_2.$$

(b) Considerando pequenas oscilações, obtenha os modos normais e respectivas frequências.

(c) Obtenha a solução para a condição inicial $\theta_1(0) = 0$, $\theta_2(0) = \theta_0$, e $\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0$.

Resolução. Tomando o ponto O como a origem do sistema de coordenadas, a posição da conta é dada por

$$\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_1 + R\left(\sin\theta_2\boldsymbol{e}_x - \cos\theta_2\boldsymbol{e}_y\right),$$

em que $\boldsymbol{r}_1 = R\left(\sin\theta_1\boldsymbol{e}_x - \cos\theta_1\boldsymbol{e}_y\right)$ é a posição do centro de massa do anel. As velocidades da conta e do centro de massa do anel são dadas por

$$\dot{\boldsymbol{r}}_1 = R\dot{\theta}_1\left(\cos\theta_1\boldsymbol{e}_x + \sin\theta_1\boldsymbol{e}_y\right) \quad \text{e} \quad \dot{\boldsymbol{r}}_2 = \dot{\boldsymbol{r}}_1 + R\dot{\theta}_2\left(\cos\theta_2\boldsymbol{e}_x + \sin\theta_2\boldsymbol{e}_y\right),$$

portanto a energia cinética da conta é

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2}m\left[R^2\dot{\theta}_1^2 + 2\left\langle\dot{\boldsymbol{r}}_1, R\dot{\theta}_2\left(\cos\theta_2\boldsymbol{e}_x + \sin\theta_2\boldsymbol{e}_y\right)\right\rangle + R^2\dot{\theta}_2^2\right] \\ &= \frac{1}{2}mR^2\left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2\right) + mR^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\left(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2\right) \\ &= \frac{1}{2}mR^2\left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2\right) + mR^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2). \end{aligned}$$

O momento de inércia do anel pelo eixo que passa por seu centro de massa é mR^2, portanto o momento de inércia pelo ponto O é $2mR^2$, pelo teorema dos eixos paralelos. Assim, a energia cinética do anel é dada por $T_1 = mR^2\dot{\theta}_1^2$, de forma que a energia cinética do sistema é

$$T = \frac{3}{2}mR^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}_2^2 + mR^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2).$$

A energia potencial do sistema é dada por

$$\begin{aligned} V &= mg\langle\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{e}_y\rangle + mg\langle\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{e}_y\rangle \\ &= -2mgR\cos\theta_1 - mgR\cos\theta_2, \end{aligned}$$

portanto a lagrangiana do sistema é

$$L = \frac{3}{2} mR^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} mR^2\dot{\theta}_2^2 + mR^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) + 2mgR\cos\theta_1 + mgR\cos\theta_2.$$

Para uma configuração de equilíbrio $q^{(0)} = \left(\theta_1^{(0)}, \theta_2^{(0)}\right)$, devemos ter

$$\left.\frac{\partial V}{\partial \theta_k}\right|_{q^{(0)}} = 0 \implies \theta_k^{(0)} = n_k\pi,$$

com $n_k \in \mathbb{Z}$ e $k \in \{1, 2\}$. Definimos

$$V_{k\ell} = \left.\frac{\partial^2 V}{\partial \theta_k\, \partial \theta_\ell}\right|_{q^{(0)}}$$

e representamos matricialmente por

$$[V_{k\ell}] = \begin{bmatrix} 2mgR(-1)^{n_1} & 0 \\ 0 & mgR(-1)^{n_2} \end{bmatrix}.$$

Para que $q^{(0)}$ seja um ponto de equilíbrio, devemos ter n_1 e n_2 pares, isto é, $q^{(0)} \equiv (0, 0)$.

Expandindo a lagrangiana em até segunda ordem de θ_k em torno de $q^{(0)}$, temos

$$L = \frac{1}{2} T_{k\ell}\dot{\theta}_k\dot{\theta}_\ell - \frac{1}{2} V_{k\ell}\theta_k\theta_\ell,$$

com

$$[T_{k\ell}] = \begin{bmatrix} 3mR^2 & mR^2 \\ mR^2 & mR^2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [V_{k\ell}] = \begin{bmatrix} 2mgR & 0 \\ 0 & mgR \end{bmatrix}.$$

Aplicando Euler-Lagrange, temos as equações de movimento dadas por

$$T_{kn}\ddot{\theta}_k + V_{kn}\theta_k = 0.$$

Com o ansatz $\theta_k = \vartheta_k e^{i\omega t}$, temos

$$\left(V_{kn} - \omega^2 T_{kn}\right)\vartheta_k e^{i\omega t} = 0.$$

Matricialmente,

$$\begin{bmatrix} 2mgR - 3mR^2\omega^2 & -mR^2\omega^2 \\ -mR^2\omega^2 & mgR - mR^2\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Para uma solução não trivial, esta matriz deve ter determinante nulo, portanto temos a equação

$$(2mgR - 3mR^2\omega^2)(mgR - mR^2\omega^2) = (mR^2\omega^2)^2 \iff 2R^2\omega^4 - 5gR\omega^2 + 2g^2 = 0,$$

cujas soluções são

$$\omega^2 = \frac{5gR \pm 3gR}{4R^2} \implies \omega_+^2 = \frac{2g}{R} \quad \text{e} \quad \omega_-^2 = \frac{g}{2R}.$$

Substituindo esses resultados na matriz podemos determinar os autovetores associados à estas frequências de oscilação. Para $\omega^2 = \omega_+^2$,

$$\begin{bmatrix} -4mgR & -2mgR \\ -2mgR & -mgR \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vartheta_1^+ \\ \vartheta_2^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} \vartheta_1^+ \\ \vartheta_2^+ \end{bmatrix} = c_+ \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

para uma constante $c_+ \in \mathbb{C}$ qualquer. Para $\omega^2 = \omega_-^2$,

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}mgR & -\frac{1}{2}mgR \\ -\frac{1}{2}mgR & \frac{1}{2}mgR \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vartheta_1^- \\ \vartheta_2^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} \vartheta_1^- \\ \vartheta_2^- \end{bmatrix} = c_- \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

para uma constante $c_- \in \mathbb{C}$ qualquer.

Desse modo, tomando a parte real das soluções, obtemos os modos normais

$$\begin{bmatrix}\theta_1^+(t)\\ \theta_2^+(t)\end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix}-1\\ 2\end{bmatrix} \cos\left(\sqrt{\frac{2g}{R}}t + \varphi_+\right) \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix}\theta_1^-(t)\\ \theta_2^-(t)\end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} \cos\left(\sqrt{\frac{g}{2R}}t + \varphi_-\right),$$

com frequências de oscilação $\sqrt{\frac{2g}{R}}$ e $\sqrt{\frac{g}{2R}}$. Logo, a solução geral é dada pela combinação linear dos modos normais,

$$\begin{bmatrix}\theta_1(t)\\ \theta_2(t)\end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix}-1\\ 2\end{bmatrix} \cos\left(\sqrt{\frac{2g}{R}}t + \varphi_+\right) + \beta \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} \cos\left(\sqrt{\frac{g}{2R}}t + \varphi_-\right),$$

para constantes $\alpha, \beta > 0$ e $\varphi_+, \varphi_- \in [0, 2\pi]$ determinadas a partir das condições iniciais.

Para a condição inicial $\theta_1(0) = 0$, $\theta_2(0) = \theta_0$, e $\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0$, temos

$$\begin{bmatrix}0\\ \theta_0\end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix}-1\\ 2\end{bmatrix} \cos(\varphi_+) + \beta \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} \cos(\varphi_-) \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} = -\sqrt{\frac{2g}{R}}\alpha \begin{bmatrix}-1\\ 2\end{bmatrix} \sin(\varphi_+) - \sqrt{\frac{g}{2R}}\beta \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} \sin(\varphi_-).$$

Definindo $A_+ = \alpha\cos\varphi_+, B_+ = \alpha\sin\varphi_+, A_- = \beta\cos\varphi_-$, e $B_- = \beta\sin\varphi_-$, temos o sistema de equações lineares e soluções

$$\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & \sqrt{\frac{2g}{R}} & 0 & -\sqrt{\frac{g}{2R}}\\ 0 & -2\sqrt{\frac{2g}{R}} & 0 & -\sqrt{\frac{g}{2R}}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}A_+\\ B_+\\ A_-\\ B_-\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ \theta_0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix}A_+\\ B_+\\ A_-\\ B_-\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{3}\theta_0\\ 0\\ \frac{1}{3}\theta_0\\ 0\end{bmatrix},$$

de modo que $\alpha = \beta = \frac{1}{3}\theta_0$ e $\varphi_+ = \varphi_- = 0$. Assim,

$$\theta_1(t) = \frac{1}{3}\theta_0 \left[-\cos\left(\sqrt{\frac{2g}{R}}t\right) + \cos\left(\sqrt{\frac{g}{2R}}t\right)\right] \quad \text{e} \quad \theta_2(t) = \frac{1}{3}\theta_0 \left[2\cos\left(\sqrt{\frac{2g}{R}}t\right) + \cos\left(\sqrt{\frac{g}{2R}}t\right)\right]$$

é a solução para as condições iniciais dadas. □