4302305 - Lista de exercícios 3

Louis Bergamo Radial
8992822

30 de março de 2024

Exercício 1

Como mostrado na Figura 1, x é a distância vertical da polia até a massa M e r é distância da polia até a massa m. Então para um fio inextensível, devemos ter $x + r = \ell$, onde $\ell = L - D$ é a constante dada pelo comprimento total L do fio menos a distância D entre as polias.

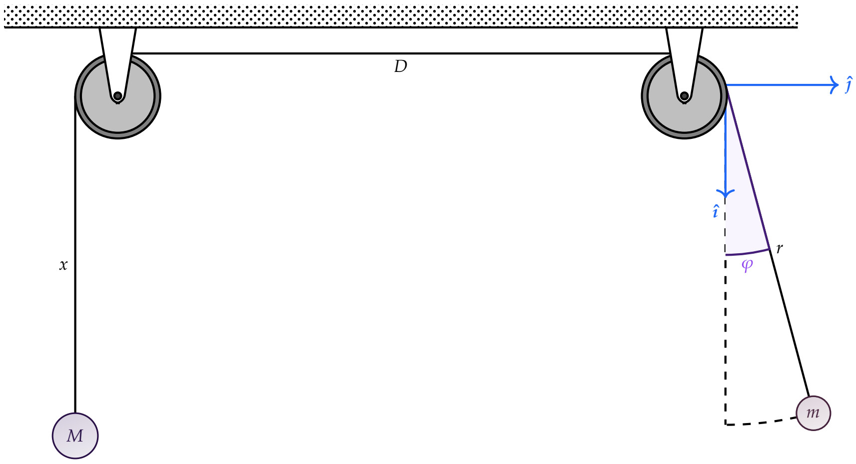

Figura 1: Máquina de Atwood

Com isso, as coordenadas generalizadas escolhidas são r, φ, de modo que as posições das massas M e m são dadas por

$$\boldsymbol{r}_M = (\ell - r)\hat{\boldsymbol{\imath}} - D\hat{\boldsymbol{\jmath}} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{r}_m = r\left(\cos\varphi\hat{\boldsymbol{\imath}} + \sin\varphi\hat{\boldsymbol{\jmath}}\right).$$

Assim, a energia cinética do sistema é dada por

$$T = \frac{1}{2}M\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right).$$

Colocando a referência do potencial gravitacional em $\ell\hat{\boldsymbol{\imath}}$, temos

$$U = Mgr + mg\left(\ell - r\cos\varphi\right).$$

Dessa forma, a lagrangiana $\mathcal{L}$ do sistema é dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}M\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - Mgr - mg\left(\ell - r\cos\varphi\right)\\ &= \frac{M+m}{2}\dot{r}^2 + \frac{m}{2}r^2\dot{\varphi}^2 - (M - m\cos\varphi)gr - mg\ell.\end{aligned}$$

Utilizando as equações de Euler-Lagrange, obtemos as equações de movimento do sistema. Temos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}}\right] - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial r} = 0 \implies (M+m)\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 + (M - m\cos\varphi)g = 0$$

e

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}\right] - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = 0 \implies mr^2\ddot{\varphi} + 2mr\dot{r}\dot{\varphi} + mgr\sin\varphi = 0.$$

Assim, as equações de movimento são dadas por

$$\begin{cases}(M+m)\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 + (M - m\cos\varphi)g = 0 \\ r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} + g\sin\varphi = 0\end{cases}.$$

Exercício 3

Sendo $\boldsymbol{r}_M = x\hat{\boldsymbol{\imath}}$ a posição da partícula de massa M, a posição da partícula de massa m é dada por

$$\boldsymbol{r}_m = \boldsymbol{r}_M + \ell\left(\cos\varphi\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \sin\varphi\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}\right),$$

onde ℓ é o comprimento da barra ideal. Assim, temos

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{r}}_m &= \dot{\boldsymbol{r}}_M + \ell\dot{\varphi}(-\sin\varphi\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \cos\varphi\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}) \\ &= \left(-\ell\dot{\varphi}\sin\varphi\right)\hat{\boldsymbol{\imath}} + \left(\dot{x} + \ell\dot{\varphi}\cos\varphi\right)\hat{\boldsymbol{\jmath}}\end{aligned}$$

como a velocidade da partícula de massa m.

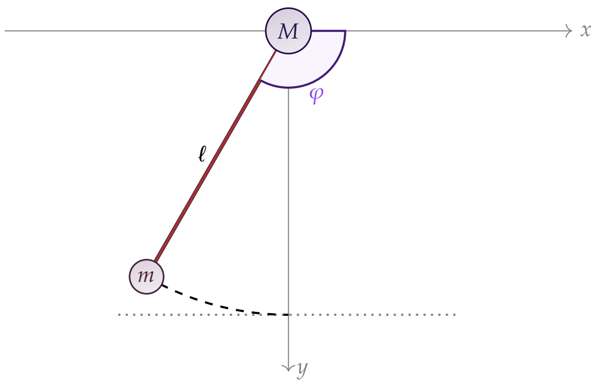

Figura 2: Pêndulo

Desse modo, a energia cinética do sistema é

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\ell^2\dot{\varphi}^2 + \dot{x}^2 + 2\ell\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi\right) \\ &= \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + m\ell\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi + \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\varphi}^2.\end{aligned}$$

Colocando a referência do potencial gravitacional em $\ell\hat{\boldsymbol{\jmath}}$, temos

$$V = Mg\ell + mg\ell(1-\cos\varphi)$$

como o potencial do sistema. Assim, podemos definir uma lagrangiana $\mathcal{L}$ equivalente à $T - V$, diferindo apenas por constantes, por

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + m\ell\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi + \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\varphi}^2 + mg\ell\cos\varphi \\ &= \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + m\ell\left(\dot{x}\dot{\varphi} + g\right)\cos\varphi + \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\varphi}^2.\end{aligned}$$

Utilizando as equações de Euler-Lagrange, obtemos as equações de movimento do sistema. Temos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}\right] - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} = 0 \implies (M+m)\ddot{x} + m\ell\ddot{\varphi}\cos\varphi - m\ell\dot{\varphi}^2\sin\varphi = 0$$

e

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}\right] - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = 0 \implies m\ell\ddot{x}\cos\varphi - m\ell\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi + m\ell^2\ddot{\varphi} + m\ell\left(\dot{x}\dot{\varphi} + g\right)\sin\varphi = 0.$$

Assim, as equações de movimento são dadas por

$$\begin{cases}(M+m)\ddot{x} + m\ell\ddot{\varphi}\cos\varphi - m\ell\dot{\varphi}^2\sin\varphi = 0 \\ \ddot{x}\cos\varphi + \ell\ddot{\varphi} + g\sin\varphi = 0\end{cases}.$$