

# 4302305 - Lista de exercícios 3

Louis Bergamo Radial  
8992822

7 de maio de 2024

## Exercício 1

Como mostrado na [Figura 1](#),  $x$  é a distância vertical da polia até a massa  $M$  e  $r$  é distância da polia até a massa  $m$ . Então para um fio inextensível, devemos ter  $x + r = \ell$ , onde  $\ell = L - D$  é a constante dada pelo comprimento total  $L$  do fio menos a distância  $D$  entre as polias.

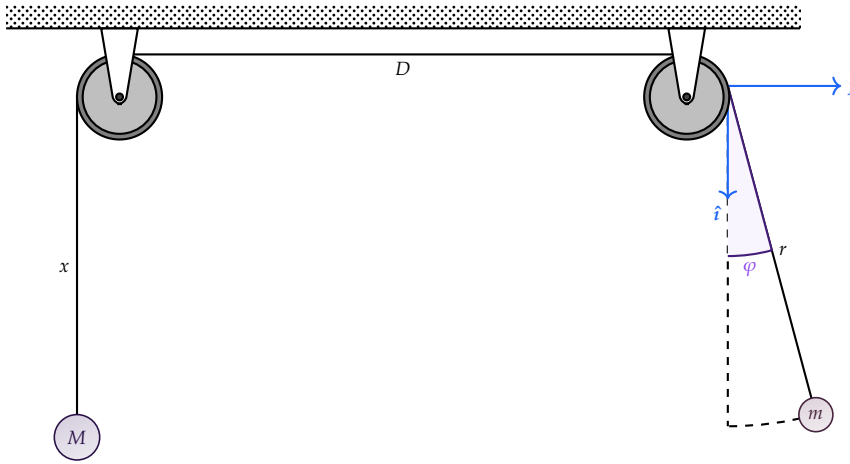


Figura 1: Máquina de Atwood

Com isso, as coordenadas generalizadas escolhidas são  $r, \varphi$ , de modo que as posições das massas  $M$  e  $m$  são dadas por

$$\mathbf{r}_M = (\ell - r)\hat{\mathbf{i}} - D\hat{\mathbf{j}} \quad \text{e} \quad \mathbf{r}_m = r(\cos \varphi \hat{\mathbf{i}} + \sin \varphi \hat{\mathbf{j}}).$$

Assim, a energia cinética do sistema é dada por

$$T = \frac{1}{2}M\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2).$$

Colocando a referência do potencial gravitacional em  $\ell\hat{\mathbf{i}}$ , temos

$$U = Mgr + mg(\ell - r \cos \varphi).$$

Dessa forma, a lagrangiana  $\mathcal{L}$  do sistema é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}M\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - Mgr - mg(\ell - r \cos \varphi) \\ &= \frac{M+m}{2}\dot{r}^2 + \frac{m}{2}r^2\dot{\varphi}^2 - (M - m \cos \varphi)gr - mg\ell. \end{aligned}$$

Utilizando as equações de Euler-Lagrange, obtemos as equações de movimento do sistema. Temos

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = 0 \implies (M + m)\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 + (M - m \cos \varphi)g = 0$$

e

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0 \implies mr^2\ddot{\varphi} + 2mr\dot{r}\dot{\varphi} + mgr \sin \varphi = 0.$$

Assim, as equações de movimento são dadas por

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 + (M - m \cos \varphi)g = 0 \\ r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} + g \sin \varphi = 0 \end{cases}.$$

### Exercício 3

Sendo  $\mathbf{r}_M = x\hat{\mathbf{i}}$  a posição da partícula de massa  $M$ , a posição da partícula de massa  $m$  é dada por

$$\mathbf{r}_m = \mathbf{r}_M + \ell (\cos \varphi \hat{\mathbf{i}} + \sin \varphi \hat{\mathbf{j}}),$$

onde  $\ell$  é o comprimento da barra ideal. Assim, temos

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}}_m &= \dot{\mathbf{r}}_M + \ell \dot{\varphi} (-\sin \varphi \hat{\mathbf{i}} + \cos \varphi \hat{\mathbf{j}}) \\ &= (-\ell \dot{\varphi} \sin \varphi) \hat{\mathbf{i}} + (\dot{x} + \ell \dot{\varphi} \cos \varphi) \hat{\mathbf{j}}\end{aligned}$$

como a velocidade da partícula de massa  $m$ .

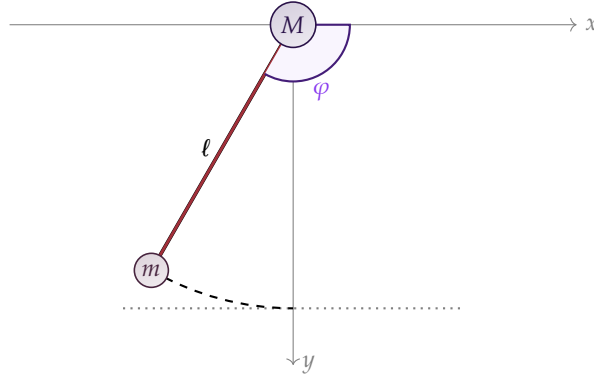


Figura 2: Pêndulo

Desse modo, a energia cinética do sistema é

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\ell^2\dot{\varphi}^2 + \dot{x}^2 + 2\ell\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi) \\ &= \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + m\ell\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi + \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\varphi}^2.\end{aligned}$$

Colocando a referência do potencial gravitacional em  $\ell\hat{\mathbf{j}}$ , temos

$$V = Mgl + mgl(1 - \cos \varphi)$$

como o potencial do sistema. Assim, podemos definir uma lagrangiana  $\mathcal{L}$  equivalente à  $T - V$ , diferindo apenas por constantes, por

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + m\ell\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi + \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\varphi}^2 + mgl\cos\varphi \\ &= \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + m\ell(\dot{x}\dot{\varphi} + g)\cos\varphi + \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\varphi}^2.\end{aligned}$$

Utilizando as equações de Euler-Lagrange, obtemos as equações de movimento do sistema. Temos

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \implies (M+m)\ddot{x} + m\ell\ddot{\varphi}\cos\varphi - m\ell\dot{\varphi}^2\sin\varphi = 0$$

e

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0 \implies m\ell\ddot{x}\cos\varphi - m\ell\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi + m\ell^2\ddot{\varphi} + m\ell(\dot{x}\dot{\varphi} + g)\sin\varphi = 0.$$

Assim, as equações de movimento são dadas por

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x} + m\ell\ddot{\varphi}\cos\varphi - m\ell\dot{\varphi}^2\sin\varphi = 0 \\ \ddot{x}\cos\varphi + \ell\ddot{\varphi} + g\sin\varphi = 0 \end{cases}.$$