

4302305 - Lista de Exercícios IV

Louis Bergamo Radial
8992822

20 de abril de 2024

Exercício 1

Exercício 1: Movimento em um campo magnético uniforme

Uma partícula de massa m move-se na presença de um campo magnético constante $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$.

- (a) Mostre que o potencial vetor $\mathbf{A} = \frac{B}{2}(-y\mathbf{e}_x + x\mathbf{e}_y)$ está associado a este campo magnético.
- (b) Utilizando o formalismo Lagrangiano obtenha a equação de movimento desta partícula.
- (c) Obtenha a trajetória desta partícula utilizando a condição inicial que $\mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$ e que $\mathbf{v}(0) = a\mathbf{e}_x + b\mathbf{e}_y$, onde a e b são constantes.

Resolução. Notemos que

$$\nabla \times (-y\mathbf{e}_x + x\mathbf{e}_y) = 2\mathbf{e}_z,$$

portanto o potencial vetor \mathbf{A} dado é associado ao campo magnético uniforme \mathbf{B} .

Em unidades CGS gaussianas, a lagrangiana de uma partícula de carga Q e massa m em um campo eletromagnético é dada por

$$L = \frac{1}{2}m\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle - Q\phi + \frac{Q}{c}\langle \mathbf{v}, \mathbf{A} \rangle,$$

onde \mathbf{v} é a velocidade da partícula e ϕ é o potencial escalar. Neste caso, como não há a presença de um campo elétrico, temos

$$L(q^1, \dot{q}^1, q^2, \dot{q}^2) = \frac{1}{2}m g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j + \frac{QB}{2c} \epsilon_{ij} q^i \dot{q}^j,$$

onde $q^1 = x$, $q^2 = y$, ϵ_{ij} é o símbolo de Levi-Civita, e g_{ij} é o tensor métrico Euclidiano. Assim, pelas equações de Euler-Lagrange temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^k} &= 0 \implies \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} g_{ij} \delta_k^i \dot{q}^j + \frac{1}{2} g_{ij} \dot{q}^i \delta_k^j + \frac{QB}{2c} \epsilon_{ij} q^i \delta_k^j \right) - \frac{QB}{2c} \epsilon_{ij} \delta_k^i \dot{q}^j = 0 \\ &\implies \frac{d}{dt} \left(g_{kj} \dot{q}^j + \frac{QB}{2c} \epsilon_{ik} q^i \right) - \frac{QB}{2c} \epsilon_{kj} \dot{q}^j = 0 \\ &\implies g_{kj} \ddot{q}^j + \frac{QB}{2c} \epsilon_{ik} \dot{q}^i - \frac{QB}{2c} \epsilon_{kj} \dot{q}^j = 0 \\ &\implies \ddot{q}_k + \frac{QB}{c} \epsilon_{ik} \dot{q}^i = 0. \end{aligned}$$

De forma explícita, temos as equações de movimento

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = \omega \dot{q}_2 \\ \ddot{q}_2 = -\omega \dot{q}_1, \end{cases} \implies \begin{cases} \ddot{x} = \omega \dot{y} \\ \ddot{y} = -\omega \dot{x}, \end{cases}$$

onde $\omega = \frac{QB}{2m}$.

Integrando a primeira equação em relação ao tempo no intervalo $[0, t]$, temos

$$\dot{x}(t) - \dot{x}(0) = \omega(y(t) - y(0)) \implies \dot{x}(t) = a + \omega y(t).$$

Substituindo na segunda equação, temos a equação diferencial linear não homogênea

$$\ddot{y} + \omega^2 y = -\omega a,$$

cujas soluções são

$$y(t) = \alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t) - \frac{a}{\omega},$$

para constantes de integração α, β . Como $y(0) = 0$ e $\dot{y}(0) = b$, temos

$$y(t) = \frac{b}{\omega} \sin(\omega t) - \frac{a}{\omega} [1 - \cos(\omega t)].$$

Assim,

$$\dot{x}(t) = b \sin(\omega t) + a \cos(\omega t) \implies x(t) = \frac{b}{\omega} [1 - \cos(\omega t)] + \frac{a}{\omega} \sin(\omega t).$$

Deste modo, a partícula tem posição dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}_0 + \left[\frac{a}{\omega} \sin(\omega t) - \frac{b}{\omega} \cos(\omega t) \right] \mathbf{e}_x + \left[\frac{b}{\omega} \sin(\omega t) + \frac{a}{\omega} \cos(\omega t) \right] \mathbf{e}_y \\ &= \mathbf{r}_0 + \rho [\cos(\varphi - \omega t) \mathbf{e}_x + \sin(\varphi - \omega t) \mathbf{e}_y], \end{aligned}$$

onde $\mathbf{r}_0 = \frac{b}{\omega} \mathbf{e}_x - \frac{a}{\omega} \mathbf{e}_y$, $\rho = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{\omega^2}}$ e $\varphi \in [0, 2\pi]$ é tal que

$$\rho \cos \varphi = -\frac{b}{\omega} \quad \text{e} \quad \rho \sin \varphi = \frac{a}{\omega}.$$

Notemos que

$$\langle \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0, \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0 \rangle = \rho^2,$$

portanto a trajetória da partícula descreve um círculo de raio ρ centrado em \mathbf{r}_0 com frequência angular constante ω . \square

Exercício 2

Exercício 2: Energia de uma partícula em um campo eletromagnético externo

Uma partícula encontra-se na presença de um campo eletromagnético independente do tempo. Utilizando o formalismo lagrangiano, obtenha a energia do sistema.

Resolução. Para uma lagrangiana L qualquer, a função energia h é definida por

$$h = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \dot{q}^k - L,$$

com a propriedade

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

Como a lagrangiana para uma partícula de massa m e carga Q em um campo eletromagnético externo com potencial escalar ϕ e potencial vetor A é dada por

$$L = \frac{1}{2}m g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j - Q\phi + \frac{Q}{c} g_{ij} A^i \dot{x}^j,$$

onde x^i são as suas coordenadas cartesianas e g_{ij} o tensor métrico Euclidiano, a função energia neste caso é dada por

$$\begin{aligned} h &= \left(m g_{ij} \dot{x}^i \delta_k^j + \frac{Q}{c} g_{ij} A^i \delta_k^j \right) \dot{x}^k - \left(\frac{1}{2} m g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j - Q\phi + \frac{Q}{c} g_{ij} A^i \dot{x}^j \right) \\ &= m g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k + \frac{Q}{c} g_{ik} A^i \dot{x}^k - \left(\frac{1}{2} m g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k - Q\phi + \frac{Q}{c} g_{ik} A^i \dot{x}^k \right) \\ &= \frac{1}{2} m g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k + Q\phi \\ &= \frac{1}{2} m \langle v, v \rangle + Q\phi. \end{aligned}$$

No caso em que o campo eletromagnético não depende do tempo, temos que a função energia é constante no tempo. \square