4302305 - Lista de Exercícios V

Louis Bergamo Radial
8992822

27 de abril de 2024

Teorema 1: Teorema de Noether

Seja L uma lagrangiana invariante em relação ao subgrupo a um parâmetro de difeomorfismos h^s, isto é,

$$h^0(q^k(t)) = q^k(t) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial s} L\left(h^s(q^k), \frac{\partial}{\partial t} h^s(q^k), t\right) = 0,$$

então a quantidade $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial h^s \circ q^k}{\partial s}\Big|_{s=0}$ é conservada.

Demonstração. Sejam $q^k(t)$ coordenadas generalizadas que satisfazem as equações de Euler-Lagrange. Como L é invariante por transformações de h^s, segue que $\tilde{q}^k(s,t) = h^s \circ q^k(t)$ também satisfazem as equações de Euler-Lagrange.

Ainda pela invariância pelo subgrupo a um parâmetro de difeomorfismos, temos

$$\frac{\partial L(\tilde{q}^k, \dot{\tilde{q}}^k, t)}{\partial s}\bigg|_{s=0} = \frac{\partial L}{\partial q^k} \frac{\partial \tilde{q}^k}{\partial s}\bigg|_{s=0} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial \dot{\tilde{q}}^k}{\partial s}\bigg|_{s=0} = 0.$$

Como $\tilde{q}^k$ satisfazem as equações de Euler-Lagrange, temos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\right) \frac{\partial \tilde{q}^k}{\partial s}\bigg|_{s=0} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial \tilde{q}}{\partial t}\bigg|_{s=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial \tilde{q}^k}{\partial s}\bigg|_{s=0}\right) = 0,$$

como queríamos demonstrar. □

Exercício 2

Lema 1: Sistema de partículas livres

Seja um sistema de N partículas livres de posições $\boldsymbol{x}_{(i)}$ e massas m_i com lagrangiana dada por

$$L = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \langle \dot{\boldsymbol{x}}_{(i)}, \dot{\boldsymbol{x}}_{(i)} \rangle - \sum_{i \neq j}^{N} V_{ij},$$

onde $V_{ij} = V\left(\|\boldsymbol{x}_{(i)} - \boldsymbol{x}_{(j)}\|\right)$. Definindo as coordenadas $q^k_{(i)}$ tais que $\boldsymbol{x}_{(i)} = q^k_{(i)} \boldsymbol{e}_k$, onde os vetores $\boldsymbol{e}_k$ formam uma base ortonormal para $\mathbb{R}^3$, os momentos canonicamente conjugados a estas coordenadas são dados por

$$p_{(i)k} = m_i g_{\ell k} \dot{q}^\ell_{(i)},$$

para $i = 1, \ldots, N$, e $k = 1, 2, 3$, onde $g_{\ell k} = \langle \boldsymbol{e}_\ell, \boldsymbol{e}_k \rangle$ é o tensor métrico Euclidiano.

Demonstração. Em termos dessas coordenadas, a lagrangiana do sistema é

$$L = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i g_{\ell n} \dot{q}^{\ell}_{(i)} \dot{q}^{n}_{(i)} - \sum_{i \neq j}^{N} V_{ij}.$$

Assim, o momento canonicamente conjugado $p_{(i)k}$ à coordenada $q^k_{(i)}$ é dado por

$$p_{(i)k} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k_{(i)}} = \frac{1}{2} m_i g_{\ell n} \delta^{\ell}_k \dot{q}^n_{(i)} + \frac{1}{2} m_i g_{\ell n} \delta^n_k \dot{q}^{\ell}_{(i)} = m_i g_{\ell k} \dot{q}^{\ell}_{(i)},$$

como proposto. □

Exercício 2: Homogeneidade do espaço

Considere a lagrangiana do Lema 1.

(a) A transformação $\boldsymbol{x}_{(i)} \longrightarrow \boldsymbol{x}_{(i)} + s\boldsymbol{n}$ é uma simetria do sistema?

(b) Qual é a quantidade conservada e seu significado físico?

Resolução. Definimos $\tilde{\boldsymbol{x}}_{(i)}(s,t) = \boldsymbol{x}_{(i)}(t) + s\boldsymbol{n}$, notando que $\tilde{\boldsymbol{x}}_{(i)}(0,t) = \boldsymbol{x}_{(i)}(t)$ para todo t. Assim, temos

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}_{(i)} = \dot{\boldsymbol{x}}_{(i)} \quad \text{e} \quad \tilde{\boldsymbol{x}}_{(i)} - \tilde{\boldsymbol{x}}_{(j)} = \boldsymbol{x}_{(i)} - \boldsymbol{x}_{(j)},$$

para todos $i, j = 1, \ldots, N$. Dessa forma, é evidente que

$$\begin{aligned} \tilde{L} = L(\tilde{\boldsymbol{x}}_{(i)}, \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}_{(i)}, t) &= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \langle \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}_{(i)}, \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}_{(i)} \rangle - \sum_{i \neq j}^{N} V\left(\|\tilde{\boldsymbol{x}}_{(i)} - \tilde{\boldsymbol{x}}_{(j)}\| \right) \\ &= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \langle \dot{\boldsymbol{x}}_{(i)}, \dot{\boldsymbol{x}}_{(i)} \rangle - \sum_{i \neq j}^{N} V\left(\|\boldsymbol{x}_{(i)} - \boldsymbol{x}_{(j)}\| \right) = L(\boldsymbol{x}_{(i)}, \dot{\boldsymbol{x}}_{(i)}, t), \end{aligned}$$

isto é, a lagrangiana é invariante por translações na direção $\boldsymbol{n}$, $\frac{\partial \tilde{L}}{\partial s} = 0$. Como não há dependência explícita com os cossenos diretores de $\boldsymbol{n}$, segue que a lagrangiana é invariante por translações espaciais.

Notemos que $\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{x}}}{\partial s} = \boldsymbol{n}$, portanto $\frac{\partial \tilde{q}^k_{(i)}}{\partial s} = n^k$, onde $\boldsymbol{n} = n^k \boldsymbol{e}_k$. Pelo Teorema de Noether, segue que a quantidade

$$Q = \sum_{i=1}^{N} p_{(i)k} \left. \frac{\partial \tilde{q}^k_{(i)}}{\partial s} \right|_{s=0}$$

é conservada. Pelo Lema 1, obtemos

$$\begin{aligned} Q = \sum_{i=1}^{N} m_i g_{\ell k} \dot{q}^{\ell}_{(i)} n^k &= \sum_{i=1}^{N} \langle m_i \dot{q}^{\ell}_{(i)} \boldsymbol{e}_\ell, n^k \boldsymbol{e}_k \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{N} \langle m_i \dot{\boldsymbol{x}}_{(i)}, \boldsymbol{n} \rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{x}}_{(i)}, \boldsymbol{n} \right\rangle, \end{aligned}$$

isto é, a projeção do momento total do sistema na direção $\boldsymbol{n}$ é conservada. Como esta relação é válida para qualquer direção $\boldsymbol{n}$, obtemos que a homogeneidade do espaço implica a conservação do momento total do sistema $\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{x}}_{(i)}$. □

Exercício 3

Exercício 3: Isotropia do espaço

Considere a lagrangiana do Lema 1. Dada uma rotação infinitesimal na direção $\boldsymbol{n}$ por um ângulo s, a transformação é

$$\boldsymbol{x}_{(i)} \longrightarrow \boldsymbol{x}_{(i)} + \left[s\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}_{(i)}\right].$$

Obtenha a quantidade conservada associada a rotações.

Resolução. Definimos $\tilde{\boldsymbol{x}}_{(i)}(s,t) = \boldsymbol{x}_{(i)}(t) + \left[s\boldsymbol{n}, \tilde{\boldsymbol{x}}_{(i)}\right]$, notando que $\tilde{\boldsymbol{x}}_{(i)}(0,t) = \boldsymbol{x}_{(i)}(t)$ para todo t. Mostremos que a distância em relação à origem é a mesma para todo s, em ordem linear em s. Temos

$$\begin{aligned}\left\langle \tilde{\boldsymbol{x}}_{(i)}, \tilde{\boldsymbol{x}}_{(i)} \right\rangle &= \left\langle \boldsymbol{x}_{(i)} + \left[s\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}_{(i)}\right], \boldsymbol{x}_{(i)} + \left[s\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}_{(i)}\right] \right\rangle \\ &= \left\langle \boldsymbol{x}_{(i)}, \boldsymbol{x}_{(i)} \right\rangle + 2\left\langle \boldsymbol{x}_{(i)}, \left[s\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}_{(i)}\right] \right\rangle + s^2 \left\langle \left[\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}_{(i)}\right], \left[\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}_{(i)}\right] \right\rangle \\ &= \left\langle \boldsymbol{x}_{(i)}, \boldsymbol{x}_{(i)} \right\rangle + O(s^2),\end{aligned}$$

portanto a transformação é uma rotação infinitesimal. Com isso, temos

$$\begin{aligned}\left\langle \tilde{\boldsymbol{x}}_{(i)} - \tilde{\boldsymbol{x}}_{(j)}, \tilde{\boldsymbol{x}}_{(i)} - \tilde{\boldsymbol{x}}_{(j)} \right\rangle &= \left\langle \boldsymbol{x}_{(i)} - \boldsymbol{x}_{(j)} + \left[s\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}_{(i)}\right] - \left[s\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}_{(j)}\right], \boldsymbol{x}_{(i)} - \boldsymbol{x}_{(j)} + \left[s\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}_{(i)}\right] - \left[s\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}_{(j)}\right] \right\rangle \\ &= \left\langle \boldsymbol{x}_{(i)} - \boldsymbol{x}_{(j)} + \left[s\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}_{(i)} - \boldsymbol{x}_{(j)}\right], \boldsymbol{x}_{(i)} - \boldsymbol{x}_{(j)} + \left[s\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}_{(i)} - \boldsymbol{x}_{(j)}\right] \right\rangle \\ &= \left\langle \boldsymbol{x}_{(i)} - \boldsymbol{x}_{(j)}, \boldsymbol{x}_{(i)} - \boldsymbol{x}_{(j)} \right\rangle + O(s^2),\end{aligned}$$

portanto as distâncias relativas entre pares de partículas é invariante em ordem linear de s. Fica claro que esta transformação preserva a lagrangiana do sistema,

$$\begin{aligned}\tilde{L} = L(\tilde{\boldsymbol{x}}_{(i)}, \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}_{(i)}, t) &= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \langle \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}_{(i)}, \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}_{(i)} \rangle - \sum_{i \neq j}^{N} V\left(\|\tilde{\boldsymbol{x}}_{(i)} - \tilde{\boldsymbol{x}}_{(j)}\| \right) \\ &= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \langle \dot{\boldsymbol{x}}_{(i)}, \dot{\boldsymbol{x}}_{(i)} \rangle - \sum_{i \neq j}^{N} V\left(\|\boldsymbol{x}_{(i)} - \boldsymbol{x}_{(j)}\| \right) = L(\boldsymbol{x}_{(i)}, \dot{\boldsymbol{x}}_{(i)}, t),\end{aligned}$$

isto é, $\frac{\partial \tilde{L}}{\partial s} = 0$ para todo s suficientemente pequeno. Assim, utilizando as coordenadas $q^k_{(i)}$ definidas no Lema 1, temos

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_{(i)} = \tilde{q}^k_{(i)} \boldsymbol{e}_k = \left(q^k_{(i)} + \epsilon^{kab} s n_a q_{(i)b} \right) \boldsymbol{e}_k \implies \left. \frac{\partial \tilde{q}^k_{(i)}}{\partial s} \right|_{s=0} = \epsilon^{kab} n_a q_{(i)b},$$

onde $\boldsymbol{n} = n^\ell \boldsymbol{e}_\ell$, de modo que pelo Teorema de Noether a quantidade $Q = \sum_{i=1}^{N} p_{(i)k} \epsilon^{kab} n_a q_{(i)b}$ é conservada. Pelo Lema 1, obtemos

$$\begin{aligned}Q = \sum_{i=1}^{N} m_i g_{\ell k} \dot{q}^\ell_{(i)} \epsilon^{kab} n_a q_{(i)b} &= \sum_{i=1}^{N} m_i \left\langle \dot{q}^\ell_{(i)} \boldsymbol{e}_\ell, \epsilon^{kab} n_a q_{(i)b} \boldsymbol{e}_k \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{N} \left\langle m_i \dot{\boldsymbol{x}}_{(i)}, \left[\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}_{(i)}\right] \right\rangle = \sum_{i=1}^{N} \left\langle \boldsymbol{n}, \left[\boldsymbol{x}_{(i)}, m_i \dot{\boldsymbol{x}}_{(i)}\right] \right\rangle \\ &= \left\langle \boldsymbol{n}, \sum_{i=1}^{N} \left[\boldsymbol{x}_{(i)}, m_i \dot{\boldsymbol{x}}_{(i)}\right] \right\rangle,\end{aligned}$$

isto é, a projeção do momento angular total do sistema na direção $\boldsymbol{n}$ é conservada. Como esta relação é válida para qualquer direção $\boldsymbol{n}$, mostramos que a isotropia do espaço implica a conservação do momento angular total do sistema $\sum_{i=1}^{N} \left[\boldsymbol{x}_{(i)}, m_i \dot{\boldsymbol{x}}_{(i)}\right]$. □