

# 4302305 - Lista de Exercícios VII

Louis Bergamo Radial  
8992822

9 de junho de 2024

## Exercício 4

### Exercício 1

Um anel fino de massa  $m$  e raio  $R$  oscila num plano vertical em torno do ponto fixo  $O$ , como mostrado na Figura 1. Uma conta de massa  $m$  move-se sem atrito ao redor do anel.

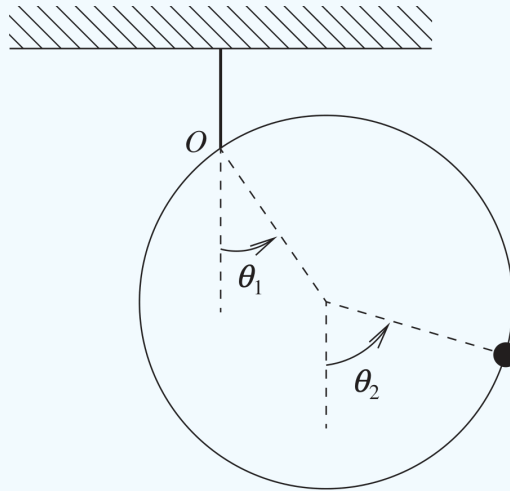


Figura 1: Sistema do Exercício 1

(a) Mostre que a lagrangiana do sistema é

$$L = \frac{3}{2}mR^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}_2^2 + mR^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + 2mgR \cos \theta_1 + mgR \cos \theta_2.$$

(b) Considerando pequenas oscilações, obtenha os modos normais e respectivas frequências.

(c) Obtenha a solução para a condição inicial  $\theta_1(0) = 0$ ,  $\theta_2(0) = \theta_0$ , e  $\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0$ .

*Resolução.* Tomando o ponto  $O$  como a origem do sistema de coordenadas, a posição da conta é dada por

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + R(\sin \theta_2 \mathbf{e}_x - \cos \theta_2 \mathbf{e}_y),$$

em que  $\mathbf{r}_1 = R(\sin \theta_1 \mathbf{e}_x - \cos \theta_1 \mathbf{e}_y)$  é a posição do centro de massa do anel. As velocidades da conta e do centro de massa do anel são dadas por

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = R\dot{\theta}_1(\cos \theta_1 \mathbf{e}_x + \sin \theta_1 \mathbf{e}_y) \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{r}}_2 = \dot{\mathbf{r}}_1 + R\dot{\theta}_2(\cos \theta_2 \mathbf{e}_x + \sin \theta_2 \mathbf{e}_y),$$

portanto a energia cinética da conta é

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2}m \left[ R^2\dot{\theta}_1^2 + 2\langle \dot{\mathbf{r}}_1, R\dot{\theta}_2(\cos \theta_2 \mathbf{e}_x + \sin \theta_2 \mathbf{e}_y) \rangle + R^2\dot{\theta}_2^2 \right] \\ &= \frac{1}{2}mR^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) + mR^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2(\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2) \\ &= \frac{1}{2}mR^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) + mR^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2). \end{aligned}$$

O momento de inércia do anel pelo eixo que passa por seu centro de massa é  $mR^2$ , portanto o momento de inércia pelo ponto  $O$  é  $2mR^2$ , pelo teorema dos eixos paralelos. Assim, a energia cinética do anel é dada por  $T_1 = mR^2\dot{\theta}_1^2$ , de forma que a energia cinética do sistema é

$$T = \frac{3}{2}mR^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}_2^2 + mR^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2).$$

A energia potencial do sistema é dada por

$$\begin{aligned} V &= mg\langle \mathbf{r}_1, \mathbf{e}_y \rangle + mg\langle \mathbf{r}_2, \mathbf{e}_y \rangle \\ &= -2mgR \cos \theta_1 - mgR \cos \theta_2, \end{aligned}$$

portanto a lagrangiana do sistema é

$$L = \frac{3}{2}mR^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}_2^2 + mR^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + 2mgR \cos \theta_1 + mgR \cos \theta_2.$$

Para uma configuração de equilíbrio  $q^{(0)} = (\theta_1^{(0)}, \theta_2^{(0)})$ , devemos ter

$$\left. \frac{\partial V}{\partial \theta_k} \right|_{q^{(0)}} = 0 \implies \theta_k^{(0)} = n_k \pi,$$

com  $n_k \in \mathbb{Z}$  e  $k \in \{1, 2\}$ . Definimos

$$V_{k\ell} = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_k \partial \theta_\ell} \right|_{q^{(0)}}$$

e representamos matricialmente por

$$[V_{k\ell}] = \begin{bmatrix} 2mgR(-1)^{n_1} & 0 \\ 0 & mgR(-1)^{n_2} \end{bmatrix}.$$

Para que  $q^{(0)}$  seja um ponto de equilíbrio, devemos ter  $n_1$  e  $n_2$  pares, isto é,  $q^{(0)} \equiv (0, 0)$ . Expandindo a lagrangiana em até segunda ordem de  $\theta_k$  em torno de  $q^{(0)}$ , temos

$$L = \frac{1}{2}T_{k\ell}\dot{\theta}_k\dot{\theta}_\ell - \frac{1}{2}V_{k\ell}\theta_k\theta_\ell,$$

com

$$[T_{k\ell}] = \begin{bmatrix} 3mR^2 & mR^2 \\ mR^2 & mR^2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [V_{k\ell}] = \begin{bmatrix} 2mgR & 0 \\ 0 & mgR \end{bmatrix}.$$

Aplicando Euler-Lagrange, temos as equações de movimento dadas por

$$T_{kn}\ddot{\theta}_k + V_{kn}\theta_k = 0.$$

Com o ansatz  $\theta_k = \vartheta_k e^{i\omega t}$ , temos

$$(V_{kn} - \omega^2 T_{kn}) \vartheta_k e^{i\omega t} = 0.$$

Matricialmente,

$$\begin{bmatrix} 2mgR - 3mR^2\omega^2 & -mR^2\omega^2 \\ -mR^2\omega^2 & mgR - mR^2\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Para uma solução não trivial, esta matriz deve ter determinante nulo, portanto temos a equação

$$(2mgR - 3mR^2\omega^2)(mgR - mR^2\omega^2) = (mR^2\omega^2)^2 \iff 2R^2\omega^4 - 5gR\omega^2 + 2g^2 = 0,$$

cujas soluções são

$$\omega^2 = \frac{5gR \pm 3gR}{4R^2} \implies \omega_+^2 = \frac{2g}{R} \quad \text{e} \quad \omega_-^2 = \frac{g}{2R}.$$

Substituindo esses resultados na matriz podemos determinar os autovetores associados à estas frequências de oscilação. Para  $\omega^2 = \omega_+^2$ ,

$$\begin{bmatrix} -4mgR & -2mgR \\ -2mgR & -mgR \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vartheta_1^+ \\ \vartheta_2^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} \vartheta_1^+ \\ \vartheta_2^+ \end{bmatrix} = c_+ \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

para uma constante  $c_+ \in \mathbb{C}$  qualquer. Para  $\omega^2 = \omega_-^2$ ,

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}mgR & -\frac{1}{2}mgR \\ -\frac{1}{2}mgR & \frac{1}{2}mgR \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vartheta_1^- \\ \vartheta_2^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} \vartheta_1^- \\ \vartheta_2^- \end{bmatrix} = c_- \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

para uma constante  $c_- \in \mathbb{C}$  qualquer.

Desse modo, tomando a parte real das soluções, obtemos os modos normais

$$\begin{bmatrix} \theta_1^+(t) \\ \theta_2^+(t) \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \cos\left(\sqrt{\frac{2g}{R}}t + \varphi_+\right) \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} \theta_1^-(t) \\ \theta_2^-(t) \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cos\left(\sqrt{\frac{g}{2R}}t + \varphi_-\right),$$

com frequências de oscilação  $\sqrt{\frac{2g}{R}}$  e  $\sqrt{\frac{g}{2R}}$ . Logo, a solução geral é dada pela combinação linear dos modos normais,

$$\begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \cos\left(\sqrt{\frac{2g}{R}}t + \varphi_+\right) + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cos\left(\sqrt{\frac{g}{2R}}t + \varphi_-\right),$$

para constantes  $\alpha, \beta > 0$  e  $\varphi_+, \varphi_- \in [0, 2\pi]$  determinadas a partir das condições iniciais.

Para a condição inicial  $\theta_1(0) = 0$ ,  $\theta_2(0) = \theta_0$ , e  $\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0$ , temos

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \theta_0 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \cos(\varphi_+) + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cos(\varphi_-) \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -\sqrt{\frac{2g}{R}}\alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \sin(\varphi_+) - \sqrt{\frac{g}{2R}}\beta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \sin(\varphi_-).$$

Definindo  $A_+ = \alpha \cos \varphi_+$ ,  $B_+ = \alpha \sin \varphi_+$ ,  $A_- = \beta \cos \varphi_-$ , e  $B_- = \beta \sin \varphi_-$ , temos o sistema de equações lineares e soluções

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2g}{R}} & 0 & -\sqrt{\frac{g}{2R}} \\ 0 & -2\sqrt{\frac{2g}{R}} & 0 & -\sqrt{\frac{g}{2R}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_+ \\ B_+ \\ A_- \\ B_- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} A_+ \\ B_+ \\ A_- \\ B_- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\theta_0 \\ 0 \\ \frac{1}{3}\theta_0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

de modo que  $\alpha = \beta = \frac{1}{3}\theta_0$  e  $\varphi_+ = \varphi_- = 0$ . Assim,

$$\theta_1(t) = \frac{1}{3}\theta_0 \left[ -\cos\left(\sqrt{\frac{2g}{R}}t\right) + \cos\left(\sqrt{\frac{g}{2R}}t\right) \right] \quad \text{e} \quad \theta_2(t) = \frac{1}{3}\theta_0 \left[ 2\cos\left(\sqrt{\frac{2g}{R}}t\right) + \cos\left(\sqrt{\frac{g}{2R}}t\right) \right]$$

é a solução para as condições iniciais dadas. □

## Exercício 5

### Exercício 2: Espalhamento de duas partículas

Para a interação de duas partículas, obtenha a relação entre a seção de choque diferencial em relação ao ângulo de espalhamento  $\chi$  no centro de massa e ao ângulo de espalhamento  $\vartheta$  no referencial de laboratório.

*Resolução.* A partícula de massa  $m_2$  se encontra em repouso no referencial de laboratório. A partícula de massa  $m_1$  tem velocidade inicial  $v_1^{\text{inicial}} = u$  e é espalhada por um ângulo  $\vartheta$  e tem velocidade terminal  $v_1^{\text{final}} = u_1$ .

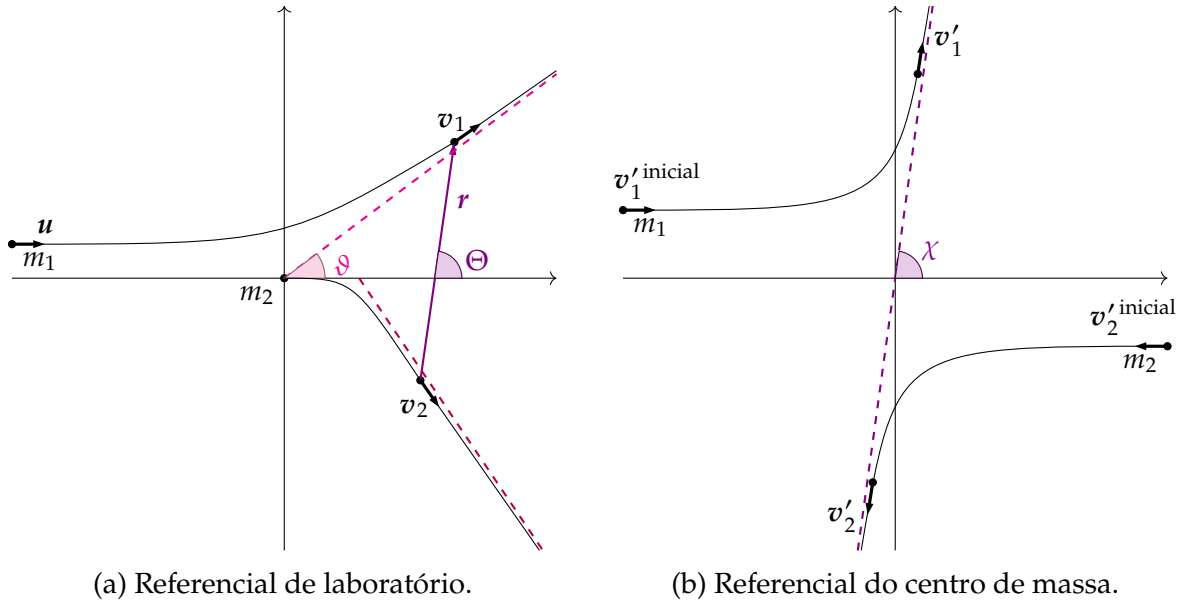


Figura 2: Espalhamento de duas partículas.

Sejam  $r_1$  e  $r_2$  as posições das partículas de massa  $m_1$  e  $m_2$  no referencial de laboratório, então a posição do centro de massa  $R$  e sua velocidade  $V$  são dadas por

$$R = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2} \quad \text{e} \quad V = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

neste mesmo referencial. Da conservação de momento linear, temos

$$V = \frac{m_1}{m_1 + m_2} u = \frac{\mu}{m_2} u,$$

onde  $\mu$  é a massa reduzida definida por  $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$ .

No referencial do centro de massa, a posição da partícula de massa  $m_i$  é  $r'_i = r_i - R$  e sua velocidade,  $v'_i = v_i - V$ . Neste referencial, as velocidades das partículas satisfazem a relação

$$v'_2 = -\frac{m_1}{m_2} v'_1,$$

visto que o centro de massa é o centro de momento. Subtraindo  $v'_1$ , temos

$$v'_1 = \frac{\mu}{m_1} (v'_1 - v'_2) = \frac{\mu}{m_1} \frac{dr}{dt},$$

onde  $r = r_1 - r_2 = r'_1 - r'_2$  é a posição relativa entre as partículas. Seja  $v$  a velocidade relativa final, então

$$u'_1 = \frac{\mu}{m_1} v.$$

Tomando os produtos escalares das velocidades terminais com a direção da velocidade inicial e sua direção ortogonal, obtemos

$$u'_1 \cos \chi + V = u_1 \cos \vartheta \quad \text{e} \quad u'_1 \sin \chi = u_1 \sin \vartheta,$$

portanto

$$\tan \vartheta = \frac{\sin \chi}{\cos \chi + \rho},$$

onde  $\rho = \frac{V}{u'_1} = \frac{m_1 u}{m_2 v}$ . Podemos escrever as relações

$$\sec^2 \vartheta = \frac{1 + 2\rho \cos \chi + \rho^2}{(\cos \chi + \rho)^2} \quad \text{e} \quad \sin \vartheta = \pm \frac{\sin \chi}{\sqrt{1 + 2\rho \cos \chi + \rho^2}}.$$

Derivando a expressão para  $\tan \vartheta$  em relação a  $\vartheta$  e utilizando as relações obtidas, temos

$$\frac{1 + 2\rho \cos \chi + \rho^2}{(\cos \chi + \rho)^2} = \left( \frac{\cos \chi}{\cos \chi + \rho} + \frac{\sin^2 \chi}{(\cos \chi + \rho)^2} \right) \frac{d\chi}{d\vartheta} \implies \frac{d\chi}{d\vartheta} = \frac{1 + 2\rho \cos \chi + \rho^2}{1 + \cos \chi}.$$

O número de partículas espalhadas segundo o ângulo  $\vartheta$  definido na origem do referencial de laboratório e segundo o ângulo  $\chi$  definido na origem do referencial do centro de momento deve ser o mesmo, isto é

$$2\pi |\sin \vartheta d\vartheta| \sigma(\vartheta) = 2\pi |\sin \chi d\chi| \sigma(\chi).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \sigma(\vartheta) &= \left| \frac{\sin \chi d\chi}{\sin \vartheta d\vartheta} \right| \sigma(\chi) \\ &= \frac{(1 + 2\rho \cos \chi + \rho^2)^{\frac{3}{2}}}{1 + \cos \chi} \sigma(\chi) \end{aligned}$$

é a relação entre as seções de choque diferenciais segundo os diferentes ângulos. □