4302305 - Lista de exercícios 2

Louis Bergamo Radial
8992822

6 de abril de 2024

Lema 1: Trajetória de um potencial central

Um sistema com massa reduzida μ submetido a um potencial central $U = U(r)$ tem trajetória definida pela integração da relação

$$\frac{L}{r^2\sqrt{2\mu\left(E - U(r) - \frac{L^2}{2\mu r^2}\right)}}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \pm 1, \tag{1}$$

onde $L = \mu r^2 \dot{\theta}$ é o momento angular e E é a energia do sistema.

Demonstração. Segue da conservação do momento angular em sistemas com potencial central que

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{L}{\mu r^2}, \tag{2}$$

ou então, ao multiplicar $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta}$ em ambos os lados da equação e utilizando a regra da cadeia,

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mu r^2}{L}. \tag{3}$$

Pela conservação da energia do sistema, temos

$$\frac{1}{2}\mu\left\langle\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right\rangle + U(r) = E. \tag{4}$$

Em coordenadas polares, temos $\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\theta$, portanto

$$\begin{aligned}
\left\langle\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right\rangle &= \left\langle \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta, \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta \right\rangle && (5)\\
&= \dot{r}^2 + \left(r\dot{\theta}\right)^2 && (6)\\
&= \dot{r}^2 + r^2\left(\frac{L}{\mu r^2}\right)^2 && (7)\\
&= \dot{r}^2 + \frac{L^2}{\mu^2 r^2}. && (8)
\end{aligned}$$

Assim, a equação da energia do sistema pode ser escrita como

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} + U(r). \tag{9}$$

Isolando $\dot{r}$, obtemos

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \pm\sqrt{\frac{2}{\mu}}\sqrt{E - U(r) - \frac{L^2}{2\mu r^2}}. \tag{10}$$

Multiplicando ambos os lados por $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta}$ e utilizando a regra da cadeia, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} &= \pm\sqrt{\frac{2}{\mu}}\sqrt{E - U(r) - \frac{L^2}{2\mu r^2}}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta} \quad (11)\\ &= \pm\frac{r^2}{L}\sqrt{2\mu\left(E - U(r) - \frac{L^2}{2\mu r^2}\right)}. \quad (12)\end{aligned}$$

Dividindo ambos os lados pelo lado direito, obtemos a expressão dada no Lema 1. □

Exercício 2

Considere um corpo submetido a um potencial central

$$U(r) = \frac{1}{2}\mu\omega^2 r^2.$$

(a) Descreva qualitativamente os movimentos possíveis.
Consideremos o potencial efetivo

$$U_{\mathrm{ef}}(r) = \frac{1}{2}\mu\omega^2 r^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2}. \tag{13}$$

Temos

$$\frac{\mathrm{d}U_{\mathrm{ef}}}{\mathrm{d}r} = \mu\omega^2 r - \frac{L^2}{\mu r^3} \quad \text{e} \quad \frac{\mathrm{d}^2U_{\mathrm{ef}}}{\mathrm{d}r^2} = \mu\omega^2 + 3\frac{L^2}{\mu r^4}. \tag{14}$$

Notemos que $\frac{\mathrm{d}U_{\mathrm{ef}}}{\mathrm{d}r} = 0$ apenas para $r = r_0 \equiv \sqrt{\frac{L}{\mu\omega}}$, já que $r > 0$. Ainda, temos

$$U_{\mathrm{ef}}(r_0) \equiv U_0 = L\omega \quad \text{e} \quad \left(\frac{\mathrm{d}^2U_{\mathrm{ef}}}{\mathrm{d}r^2}\right)_{r=r_0} = 4\mu\omega^2 > 0, \tag{15}$$

isto é, o valor mínimo do potencial efetivo é U_0, que ocorre em $r = r_0$.

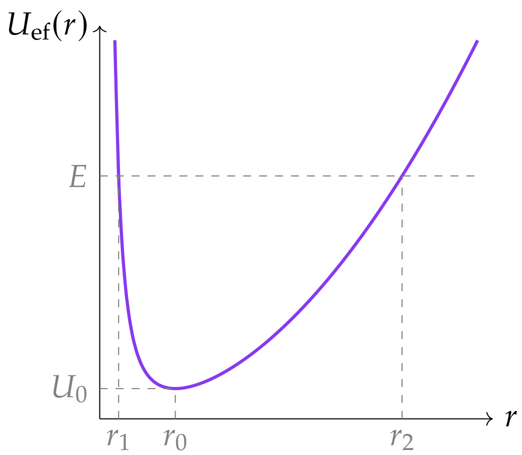

Figura 1: Potencial efetivo para o potencial central $U(r) = \frac{1}{2}\mu\omega^2 r^2$.

Substituindo $\mu = \frac{L}{\omega r_0^2}$ na expressão do potencial efetivo, podemos escrever

$$U_{\mathrm{ef}}(r) = \frac{U_0}{2}\left[\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 + \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-2}\right]. \tag{16}$$

Nesta forma é fácil ver que se $U_{\mathrm{ef}}(r_1) = U_{\mathrm{ef}}(r_2)$, então $r_1 = r_2$ ou $r_1 r_2 = r_0^2$. Desta forma, dada uma energia $E \geq U_0$ do sistema, ou a trajetória é circular, no caso de $E = U_0$, ou o movimento é oscilatório entre os pontos de retorno r_1 e r_2, que satisfazem a relação descrita anteriormente e são dados por

$$r_1 = r_0\sqrt{\frac{E}{U_0} - \sqrt{\left(\frac{E}{U_0}\right)^2 - 1}} \quad \text{e} \quad r_2 = r_0\sqrt{\frac{E}{U_0} + \sqrt{\left(\frac{E}{U_0}\right)^2 - 1}}. \tag{17}$$

Assim, para órbitas não circulares sempre há dois pontos de retorno distintos, portanto o movimento é sempre oscilatório.

(b) Dada a energia do corpo E, obtenha a sua trajetória.

Pelo Lema 1, temos

$$\pm(\theta - \theta_i) = \frac{L}{\sqrt{\mu}}\int_{\theta_i}^{\theta} \mathrm{d}\varphi \frac{1}{r^2\sqrt{2E - U_0\left[\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 + \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-2}\right]}}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}, \tag{18}$$

para um ângulo inicial θ_i. Utilizando que $\frac{L}{\sqrt{\mu}} = r_0\sqrt{U_0}$ e a substituição de variáveis $r = r(\varphi)$, obtemos

$$\pm(\theta - \theta_i) = \int_{r_i}^{r(\theta)} \frac{r_0\,\mathrm{d}R}{R^2}\sqrt{\frac{U_0}{2E - U_0\left[\left(\frac{R}{r_0}\right)^2 + \left(\frac{R}{r_0}\right)^{-2}\right]}}, \tag{19}$$

onde $r_i = r(\theta_i)$ Com a substituição de variáveis $\rho = \frac{r_0}{r}$, temos

$$\begin{aligned}\pm(\theta - \theta_i) &= -\int_{\frac{r_0}{r_i}}^{\frac{r_0}{r(\theta)}} \frac{\mathrm{d}\rho}{\sqrt{2\frac{E}{U_0} - \rho^2 - \rho^{-2}}} && (20)\\ &= -\int_{\frac{r_0}{r_i}}^{\frac{r_0}{r(\theta)}} \frac{\rho\,\mathrm{d}\rho}{\sqrt{2\lambda\rho^2 - \rho^4 - 1}}, && (21)\end{aligned}$$

onde $\lambda = \frac{E}{U_0}$. Notando que

$$\begin{aligned}2\lambda\rho^2 - \rho^4 - 1 &= \lambda^2 - 1 - \left(\rho^2 - \lambda\right)^2 && (22)\\ &= \left(\lambda^2 - 1\right)\left[1 - \left(\frac{\rho^2 - \lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 1}}\right)^2\right], && (23)\end{aligned}$$

segue que

$$\pm(\theta - \theta_i) = -\int_{\frac{r_0}{r_i}}^{\frac{r_0}{r(\theta)}} \frac{\rho\,\mathrm{d}\rho}{\sqrt{\lambda^2 - 1}}\left[1 - \left(\frac{\rho^2 - \lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 1}}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{24}$$

Com a substituição de variáveis $\xi = \frac{\rho^2 - \lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 1}}$, obtemos

$$\pm 2(\theta - \theta_i) = -\int_{\xi\left(\frac{r_0}{r_i}\right)}^{\xi\left(\frac{r_0}{r(\theta)}\right)} \frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{1 - \psi^2}} = \arccos\left(\frac{\left(\frac{r_0}{r(\theta)}\right)^2 - \lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 1}}\right) - \arccos\left(\frac{\left(\frac{r_0}{r_i}\right)^2 - \lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 1}}\right). \tag{25}$$

Definimos

$$\phi = 2\theta_i \mp \arccos\left(\frac{\left(\frac{r_0}{r_i}\right)^2 - \lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 1}}\right) \tag{26}$$

respeitando a escolha de sinal na equação anterior. Desse modo,

$$\cos(2\theta - \phi) = \frac{\left(\frac{r_0}{r(\theta)}\right)^2 - \lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 1}}. \tag{27}$$

Isolando $r(\theta)$, obtemos a equação da trajetória

$$r(\theta) = r_0\left[\frac{E}{U_0} + \sqrt{\left(\frac{E}{U_0}\right)^2 - 1}\cos(2\theta - \phi)\right]^{-\frac{1}{2}} \tag{28}$$

$$= r_0\sqrt{\frac{U_0}{E}}\left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{U_0}{E}\right)^2}\cos(2\theta - \phi)\right]^{-\frac{1}{2}} \tag{29}$$

$$= \frac{L}{\sqrt{\mu E}}\left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{L\omega}{E}\right)^2}\cos(2\theta - \phi)\right]^{-\frac{1}{2}} \tag{30}$$

para este potencial central.

Exercício 3

Considere um corpo submetido a um potencial central

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}$$

onde $\alpha, \beta > 0$.

(a) Existem órbitas circulares? Qual a condição para que isso ocorra?

Consideremos o potencial efetivo

$$U_{\text{ef}}(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2} + \frac{L^2}{2\mu r^2} \tag{31}$$

$$= -\alpha r^{-1} + \frac{2\mu\beta + L^2}{2\mu}r^{-2} \tag{32}$$

Temos

$$\frac{\mathrm{d}U_{\text{ef}}}{\mathrm{d}r} = \alpha r^{-2} - \frac{2\mu\beta + L^2}{\mu}r^{-3} \quad \text{e} \quad \frac{\mathrm{d}^2U_{\text{ef}}}{\mathrm{d}r^2} = -\alpha r^{-3} + 3\frac{2\beta\mu + L^2}{\mu}r^{-4}. \tag{33}$$

Notemos que $\frac{\mathrm{d}U_{\text{ef}}}{\mathrm{d}r} = 0$ apenas para $r = r_0 \equiv \frac{2\beta\mu + L^2}{\mu\alpha}$. Ainda, temos

$$U_{\text{ef}}(r_0) \equiv U_0 = -\frac{\alpha}{2r_0} \quad \text{e} \quad \left(\frac{\mathrm{d}^2U_{\text{ef}}}{\mathrm{d}r^2}\right)_{r=r_0} = \alpha r_0^3 > 0, \tag{34}$$

isto é, o valor mínimo do potencial efetivo é U_0, que ocorre em $r = r_0$.

Substituindo $\alpha r_0 = \frac{2\beta\mu + L^2}{\mu}$ na expressão do potencial efetivo, podemos escrever

$$
\begin{aligned}
U_{\text{ef}}(r) &= -\alpha r^{-1} + \frac{\alpha r_0}{2} r^{-2} && (35)\\
&= -\frac{\alpha}{r_0}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{-1} + \frac{\alpha r_0}{2r_0^2}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{-2} && (36)\\
&= U_0\left[2\left(\frac{r}{r_0}\right)^{-1} - \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-2}\right]. && (37)
\end{aligned}
$$

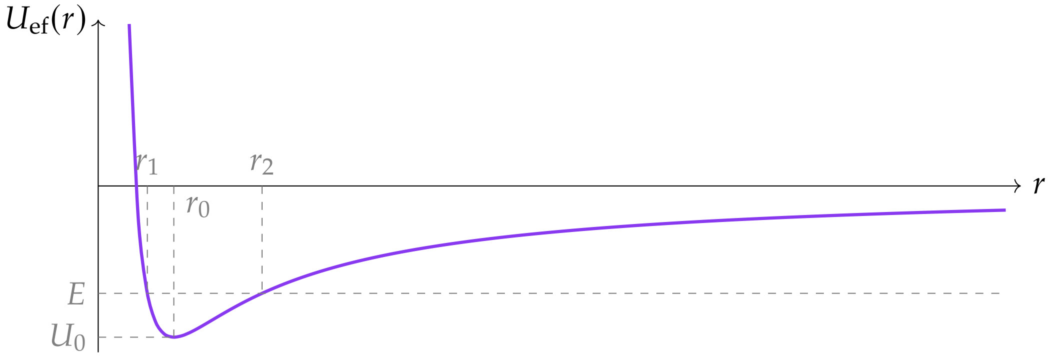

Figura 2: Potencial efetivo para o potencial central $U(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}$.

Se o sistema tiver energia total $E \geq U_0$, um ponto de retorno satisfaz

$$
U_{\text{ef}}(r) = E \implies \frac{\lambda r^2 - 2r_0 r + r_0^2}{r^2} = 0, \tag{38}
$$

com $\lambda = \frac{E}{U_0}$. Caso $\lambda = 0$, há apenas um ponto de retorno em $r = \frac{r_0}{2}$, de modo que a trajetória não é limitada. Caso $\lambda \neq 0$, temos

$$
r = \frac{r_0}{1 \pm \epsilon}, \tag{39}
$$

onde $\epsilon = \sqrt{1-\lambda} \neq 1$. No caso em que $E < 0$, temos $1 > \epsilon \geq 0$, portanto há dois pontos de retorno

$$
r_1 = \frac{r_0}{1+\epsilon} \quad \text{e} \quad r_2 = \frac{r_0}{1-\epsilon}, \tag{40}
$$

de modo que a trajetória é limitada, com o caso especial de $E = U_0$, em que a trajetória é circular $r_1 = r_2 = r_0$. No caso em que $E > 0$, temos $\epsilon > 1$, de modo que há apenas um ponto de retorno

$$
r = \frac{r_0}{1+\epsilon}, \tag{41}
$$

uma vez que $r > 0$, portanto a trajetória não é limitada.

(b) Dada a energia do corpo $E < 0$, obtenha a sua trajetória.

Pelo Lema 1, temos

$$
\begin{aligned}
\pm\,\mathrm{d}\theta &= \frac{L}{\sqrt{2\mu}} \cdot \frac{\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{E - 2U_0\left(\frac{r}{r_0}\right)^{-1} + U_0\left(\frac{r}{r_0}\right)^{-2}}} && (42)\\
&= -\frac{L}{\sqrt{2\mu r_0^2}} \cdot \frac{\mathrm{d}\rho}{\sqrt{E - 2U_0\rho + U_0\rho^2}} && (43)\\
&= -\frac{L}{\sqrt{\mu\alpha r_0}} \cdot \frac{\mathrm{d}\rho}{\sqrt{2\rho - \rho^2 - \lambda}} && (44)
\end{aligned}
$$

onde $\rho = \frac{r_0}{r}$. Recordando que $\mu\alpha r_0 = 2\mu\beta + L^2$ e notando que

$$2\rho - \rho^2 - \lambda = \epsilon^2 - (\rho - 1)^2 \tag{45}$$
$$= \epsilon^2 \left[1 - \left(\frac{\rho - 1}{\epsilon}\right)^2\right], \tag{46}$$

obtemos

$$\pm\sqrt{1 + \frac{2\mu\beta}{L^2}}\,\mathrm{d}\theta = -\frac{\mathrm{d}\rho}{\epsilon}\left[1 - \left(\frac{\rho - 1}{\epsilon}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} \tag{47}$$
$$= -\frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}, \tag{48}$$

com $\xi = \frac{\rho - 1}{\epsilon}$.

Integrando e fazendo as devidas substituições, segue que

$$\pm\sqrt{1 + \frac{2\mu\beta}{L^2}}\,(\theta - \theta_i) = \arccos\left(\frac{\frac{r_0}{r(\theta)} - 1}{\epsilon}\right) - \arccos\left(\frac{\frac{r_0}{r_i} - 1}{\epsilon}\right), \tag{49}$$

onde $r(\theta) = r_i$. Seja

$$\phi = \sqrt{1 + \frac{2\mu\beta}{L^2}}\theta_i \mp \arccos\left(\frac{\frac{r_0}{r_i} - 1}{\epsilon}\right), \tag{50}$$

respeitando a escolha de sinal na Equação (49), de modo que

$$\frac{\frac{r_0}{r(\theta)} - 1}{\epsilon} = \cos\left(\sqrt{1 + \frac{2\mu\beta}{L^2}}\theta - \phi\right). \tag{51}$$

Isolando $r(\theta)$, obtemos a trajetória

$$r(\theta) = \frac{r_0}{1 + \epsilon\cos\left(\sqrt{1 + \frac{2\mu\beta}{L^2}}\theta - \phi\right)} \tag{52}$$
$$= \frac{\frac{2\beta\mu + L^2}{\mu\alpha}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2E(2\beta\mu + L^2)}{\mu\alpha^2}}\cos\left(\sqrt{1 + \frac{2\mu\beta}{L^2}}\theta - \phi\right)} \tag{53}$$

para este potencial.

Exercício 4

No potencial do problema 3, considere que o termo r^{-2} é muito menor que o termo de Kepler. Mostre que a velocidade de precessão da órbita é

$$\dot{\Omega} = \frac{2\pi\mu\beta}{L^2 T}$$

onde L é o momento angular e T o período. O termo extra na forma r^{-2} parece muito com a barreira centrífuga. Por que esse termo causa a precessão da órbita?

O teorema de Bertrand garante que os únicos potenciais centrais para os quais toda órbita limitada é fechada são os potenciais de Kepler e do oscilador harmônico radial

$$U_{\text{Kepler}}(r) = -\alpha r^{-1} \quad \text{e} \quad U_{\text{harmônico}} = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2. \tag{54}$$

Dessa forma, apesar do termo adicional em relação ao potencial de Kepler ser pequeno e do mesmo tipo de função da barreira centrífuga, não é necessário que uma órbita limitada seja fechada para este sistema.

Após um período, a coordenada radial deve retornar ao seu valor inicial. Neste caso, da Equação (49), devemos ter

$$\sqrt{1+\frac{2\mu\beta}{L^2}}\,(\theta-\theta_i) = \pm 2\pi \implies \theta-\theta_i = \frac{\pm 2\pi}{\sqrt{1+\frac{2\mu\beta}{L^2}}}. \tag{55}$$

No caso em que $\sqrt{1+\frac{2\mu\beta}{L^2}} \in \mathbb{Q}$, a órbita para $U_0 < E < 0$ será fechada, visto que após um número inteiro de períodos a variação angular será um múltiplo inteiro de 2π, como garante a Equação (55). Em contrapartida, se $\sqrt{1+\frac{2\mu\beta}{L^2}} \notin \mathbb{Q}$, não existe um número inteiro de períodos que torna a variação angular num múltiplo inteiro de 2π, logo não existem dois instantes distintos em que os pares de coordenadas r e θ são os mesmos, isto é, a órbita não pode ser fechada.

Tornemos nossa atenção para o caso em que a órbita não pode ser fechada. Se a constante β é pequena, a variação entre o ângulo final e o ângulo inicial deve ser próxima de 2π, isto é,

$$\theta-\theta_i = \pm(2\pi - \dot{\Omega}T), \tag{56}$$

com $|\dot{\Omega}|T \ll 2\pi$, onde T é o período. Assim,

$$2\pi - \dot{\Omega}T = \frac{2\pi}{\sqrt{1+\frac{2\mu\beta}{L^2}}} \implies \dot{\Omega} = \frac{2\pi}{T}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2\mu\beta}{L^2}}}\right) \tag{57}$$

$$\implies \dot{\Omega} \simeq \frac{2\pi\mu\beta}{L^2 T}, \tag{58}$$

onde foi utilizada a aproximação

$$1-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2\mu\beta}{L^2}}} \simeq \frac{\mu\beta}{L^2} + O\left(\frac{\mu^2\beta^2}{L^4}\right). \tag{59}$$

Exercício 5

No problema de Kepler $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$ com $\alpha > 0$, obtenha as soluções com energia positiva.

O potencial efetivo no problema de Kepler é dado por

$$U_{\text{ef}}(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2}.$$

Podemos obter o ponto r_0 que minimiza o potencial efetivo tomando $\beta = 0$ nos resultados do exercício 3, então definimos

$$r_0 = \frac{L^2}{\mu\alpha} \quad \text{e} \quad U_0 = -\frac{\alpha}{2r_0}$$

de modo que o potencial efetivo pode ser escrito como

$$U_{\text{ef}}(r) = U_0\left[2\left(\frac{r}{r_0}\right)^{-1} - \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-2}\right],$$

como antes. Desse modo, a trajetória é dada por

$$r(\theta) = \frac{r_0}{1+\epsilon\cos\left(\theta-\phi\right)},$$

onde $\epsilon = \sqrt{1-\frac{E}{U_0}}$, repetindo os argumentos do exercício anterior.

Para simplificar, tomamos $\phi = 0$. Para energias positivas temos $\epsilon > 1$, portanto

$$\begin{aligned}
(1+\epsilon\cos\theta)r = r_0 &\implies r = r_0 - \epsilon x \\
&\implies x^2+y^2 = r_0^2+\epsilon^2x^2-2r_0\epsilon x \\
&\implies \left(\frac{y}{r_0}\right)^2 = 1+(\epsilon^2-1)\left(\frac{x}{r_0}\right)^2 - 2\epsilon\frac{x}{r_0} \\
&\implies \left(\frac{y}{r_0\sqrt{\epsilon^2-1}}\right)^2 = \frac{1}{\epsilon^2-1}+\left(\frac{x}{r_0}\right)^2 - 2\frac{\epsilon}{\epsilon^2-1}\frac{x}{r_0} \\
&\implies \frac{1}{(\epsilon^2-1)^2}+\left(\frac{y}{r_0\sqrt{\epsilon^2-1}}\right)^2 = \left(\frac{x}{r_0}-\frac{\epsilon}{\epsilon^2-1}\right)^2 \\
&\implies \left(\frac{\left(\epsilon^2-1\right)x}{r_0}-\epsilon\right)^2 - \left(\frac{y\sqrt{\epsilon^2-1}}{r_0}\right)^2 = 1 \\
&\implies \left(\frac{x-\frac{\epsilon r_0}{\epsilon^2-1}}{\frac{r_0}{\epsilon^2-1}}\right)^2 - \left(\frac{y}{\frac{r_0}{\sqrt{\epsilon^2-1}}}\right)^2 = 1.
\end{aligned}$$

Assim, para $E > 0$, a trajetória descreve uma hipérbole.

Exercício 6

Obtenha a equação da trajetória de soluções com energia negativa para uma partícula de massa m na presença do potencial central $U(r) = -\frac{\alpha}{r^2}$.

O potencial efetivo para este sistema é

$$U_{\text{ef}}(r) = -\frac{\alpha}{r^2}+\frac{L^2}{2\mu r^2}$$