4302305 - Lista de Exercícios VI

Louis Bergamo Radial
8992822

5 de maio de 2024

Exercício 1

Exercício 1: Movimento de uma partícula sujeita a um sistema de vínculos

Considere o movimento de uma partícula em três dimensões que está sujeita aos vínculos

(a) $(x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x + xy\,\mathrm{d}z = 0 \quad \text{e} \quad (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}y + yz\,\mathrm{d}z = 0;$

(b) $(x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}z = 0 \quad \text{e} \quad (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}y + yz\,\mathrm{d}z = 0.$

Decida se cada um dos sistemas é holonômico.

Resolução do item (a). Dividindo os vínculos por $\mathrm{d}t$ obtemos

$$a_{11}\dot{x} + a_{13}\dot{z} = 0 \quad \text{e} \quad a_{22}\dot{y} + a_{23}\dot{z} = 0,$$

onde $a_{11} = a_{22} = x^2 + y^2$, $a_{13} = xy$, e $a_{23} = yz$. Utilizando a lagrangiana $L = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$, obtemos as equações de movimento

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \lambda^1 a_{11} \\ m\ddot{y} = \lambda^2 a_{22} \\ m\ddot{z} = \lambda^1 a_{13} + \lambda^2 a_{23} \\ a_{11}\dot{x} + a_{13}\dot{z} = 0 \\ a_{22}\dot{y} + a_{23}\dot{z} = 0, \end{cases}$$

para multiplicadores de Lagrange λ^1 e λ^2.

Multiplicando as duas últimas equações por λ^1 e λ^2 e somando-as, obtemos

$$\lambda^1 a_{11}\dot{x} + \lambda^2 a_{22}\dot{y} + \left(\lambda^1 a_{13} + \lambda^2 a_{23}\right)\dot{z} = 0.$$

Substituindo as três primeiras equações temos

$$m\left(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}\right) = 0 \implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}mv^2 = 0.$$

Isto é, a energia cinética é uma integral de movimento deste sistema, logo as forças não realizam trabalho. Dessa forma, as forças são de vínculo, portanto o sistema é holonômico. □

Resolução do item (b). Integremos diretamente o sistema, notando que podemos isolar $z\,\mathrm{d}z$ em ambas equações. Temos então a equação diferencial ordinária a variáveis separáveis

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}y}{y},$$

cuja solução é $y = kx$, para alguma constante de integração $k \in \mathbb{R}$. Substituindo na primeira equação de vínculo, obtemos

$$z \, \mathrm{d}z = -(1 + k^2)x \, \mathrm{d}x \implies x^2(1 + k^2) + z^2 = \ell^2 \implies x^2 + y^2 + z^2 = \ell^2,$$

para uma constante de integração $\ell \in \mathbb{R}$. Deste modo, concluímos que este vínculo é equivalente ao vínculo holonômico da interseção do plano $y - kx = 0$ com a esfera de raio ℓ centrada na origem $x^2 + y^2 + z^2 = \ell^2$, portanto o sistema é holonômico. □

Exercício 2