# 4302305 - Lista de Exercícios V

Louis Bergamo Radial
8992822

27 de abril de 2024

**Teorema 1: Teorema de Noether**

Seja $L$ uma lagrangiana invariante em relação ao subgrupo a um parâmetro de difeomorfismos $h^s$, isto é,

$$h^0(q^k(t)) = q^k(t) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial s} L\left(h^s(q^k), \frac{\partial}{\partial t} h^s(q^k), t\right) = 0,$$

então a quantidade $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial h^s \circ q^k}{\partial s}\Big|_{s=0}$ é conservada.

*Demonstração.* Sejam $q^k(t)$ coordenadas generalizadas que satisfazem as equações de Euler-Lagrange. Como $L$ é invariante por transformações de $h^s$, segue que $\tilde{q}^k(s,t) = h^s \circ q^k(t)$ também satisfazem as equações de Euler-Lagrange.

Ainda pela invariância pelo subgrupo a um parâmetro de difeomorfismos, temos

$$\frac{\partial L(\tilde{q}^k, \dot{\tilde{q}}^k, t)}{\partial s}\bigg|_{s=0} = \frac{\partial L}{\partial q^k} \frac{\partial \tilde{q}^k}{\partial s}\bigg|_{s=0} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial \dot{\tilde{q}}^k}{\partial s}\bigg|_{s=0} = 0.$$

Como $\tilde{q}^k$ satisfazem as equações de Euler-Lagrange, temos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\right) \frac{\partial \tilde{q}^k}{\partial s}\bigg|_{s=0} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial \tilde{q}}{\partial t}\bigg|_{s=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial \tilde{q}^k}{\partial s}\bigg|_{s=0}\right) = 0,$$

como queríamos demonstrar. □

## Exercício 2

**Lema 1: Sistema de partículas livres**

Seja um sistema de $N$ partículas livres de posições $\boldsymbol{x}_{(i)}$ e massas $m_i$ com lagrangiana dada por

$$L = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \langle \dot{\boldsymbol{x}}_{(i)}, \dot{\boldsymbol{x}}_{(i)} \rangle - \sum_{i \neq j}^{N} V_{ij},$$

onde $V_{ij} = V\left(\|\boldsymbol{x}_{(i)} - \boldsymbol{x}_{(j)}\|\right)$. Definindo as coordenadas $q^k_{(i)}$ tais que $\boldsymbol{x}_{(i)} = q^k_{(i)} \boldsymbol{e}_k$, onde os vetores $\boldsymbol{e}_k$ formam uma base ortonormal para $\mathbb{R}^3$, os momentos canonicamente conjugados a estas coordenadas são dados por

$$p_{(i)k} = m_i g_{\ell k} \dot{q}^{\ell}_{(i)},$$

para $i = 1, \ldots, N$, e $k = 1, 2, 3$, onde $g_{\ell k} = \langle \boldsymbol{e}_\ell, \boldsymbol{e}_k \rangle$ é o tensor métrico Euclidiano.

*Demonstração.* Em termos dessas coordenadas, a lagrangiana do sistema é

$$L = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i g_{\ell n} \dot{q}^{\ell}_{(i)} \dot{q}^{n}_{(i)} - \sum_{i \neq j}^{N} V_{ij}.$$

Assim, o momento canonicamente conjugado $p_{(i)k}$ à coordenada $q^k_{(i)}$ é dado por

$$p_{(i)k} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k_{(i)}} = \frac{1}{2} m_i g_{\ell n} \delta^{\ell}_{k} \dot{q}^{n}_{(i)} + \frac{1}{2} m_i g_{\ell n} \delta^{n}_{k} \dot{q}^{\ell}_{(i)} = m_i g_{\ell k} \dot{q}^{\ell}_{(i)},$$

como proposto. □

**Exercício 1: Homogeneidade do espaço**

Considere a lagrangiana do Lema 1.

(a) A transformação $\boldsymbol{x}_{(i)} \longrightarrow \boldsymbol{x}_{(i)} + s\boldsymbol{n}$ é uma simetria do sistema?

(b) Qual é a quantidade conservada e seu significado físico?

*Resolução.* Definimos $\tilde{\boldsymbol{x}}_{(i)}(s,t) = \boldsymbol{x}_{(i)}(t) + s\boldsymbol{n}$, notando que $\tilde{\boldsymbol{x}}(0,t) = \boldsymbol{x}_{(i)}(t)$ para todo $t$. Assim, temos

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}_{(i)} = \dot{\boldsymbol{x}}_{(i)} \quad \text{e} \quad \tilde{\boldsymbol{x}}_{(i)} - \tilde{\boldsymbol{x}}_{(j)} = \boldsymbol{x}_{(i)} - \boldsymbol{x}_{(j)},$$

para todos $i, j = 1, \ldots, N$. Dessa forma, é evidente que

$$\begin{aligned}
\tilde{L} = L(\tilde{\boldsymbol{x}}_{(i)}, \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}_{(i)}, t) &= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \langle \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}_{(i)}, \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}_{(i)} \rangle - \sum_{i \neq j}^{N} V\left( \|\tilde{\boldsymbol{x}}_{(i)} - \tilde{\boldsymbol{x}}_{(j)}\| \right) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \langle \dot{\boldsymbol{x}}_{(i)}, \dot{\boldsymbol{x}}_{(i)} \rangle - \sum_{i \neq j}^{N} V\left( \|\boldsymbol{x}_{(i)} - \boldsymbol{x}_{(j)}\| \right) = L(\boldsymbol{x}_{(i)}, \dot{\boldsymbol{x}}_{(i)}, t),
\end{aligned}$$

isto é, a lagrangiana é invariante por translações na direção $\boldsymbol{n}$, $\frac{\partial \tilde{L}}{\partial s} = 0$. Como não há dependência explícita com os cossenos diretores de $\boldsymbol{n}$, segue que a lagrangiana é invariante por translações espaciais.

Notemos que $\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{x}}}{\partial s} = \boldsymbol{n}$, portanto $\frac{\partial \tilde{q}^k_{(i)}}{\partial s} = n^k$, onde $\boldsymbol{n} = n^k \boldsymbol{e}_k$. Pelo Teorema de Noether, segue que a quantidade

$$Q = \sum_{i=1}^{N} p_{(i)k} \left. \frac{\partial \tilde{q}^k_{(i)}}{\partial s} \right|_{s=0}$$

é conservada. Pelo Lema 1, obtemos

$$\begin{aligned}
Q = \sum_{i=1}^{N} m_i g_{\ell k} \dot{q}^{\ell}_{(i)} n^k &= \sum_{i=1}^{N} \langle m_i \dot{q}^{\ell}_{(i)} \boldsymbol{e}_{\ell}, n^k \boldsymbol{e}_k \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{N} \langle m_i \dot{\boldsymbol{x}}_{(i)}, \boldsymbol{n} \rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{x}}_{(i)}, \boldsymbol{n} \right\rangle,
\end{aligned}$$

isto é, a projeção do momento total do sistema na direção $\boldsymbol{n}$ é conservada. Como esta relação é válida para qualquer direção $\boldsymbol{n}$, obtemos que a homogeneidade do espaço implica a conservação do momento total do sistema $\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{x}}_{(i)}$. □

# Exercício 3

**Exercício 2: Isotropia do espaço**

Considere a lagrangiana do Lema 1. Dada uma rotação infinitesimal na direção $\boldsymbol{n}$ por um ângulo $s$, a transformação é

$$\boldsymbol{x}_{(i)} \to \boldsymbol{x}_{(i)} + \left[s\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}_{(i)}\right].$$

Obtenha a quantidade conservada associada a rotações.