4302305 - Lista de Exercícios VIII

Louis Bergamo Radial
8992822

9 de junho de 2024

Exercício 3

Exercício 3: Espalhamento por uma esfera dura

Determine a seção de choque diferencial do espalhamento de partículas por uma esfera dura de raio R, isto é, a energia potencial de interação é $U = \infty$ para $r < R$ e $U = 0$ para $r > R$.

Resolução. Para que haja colisão, a distância de visada deve ser tal que $|\rho| < R$. Neste caso, o ângulo φ dado pela distância de maior aproximação é

$$\begin{aligned}\varphi &= \int_R^\infty \mathrm{d}r \, \frac{\rho}{r^2\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2}}} \\ &= \int_0^{\frac{\rho}{R}} \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \\ &= \arcsin\left(\frac{\rho}{R}\right).\end{aligned}$$

Dessa forma, o ângulo de espalhamento $\chi = \pi - 2\varphi$ satisfaz

$$\rho = R\sin\left(\frac{\pi - \chi}{2}\right) = R\cos\left(\frac{\chi}{2}\right).$$

Diferenciando em relação à χ, temos

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\chi} = -\frac{R}{2}\sin\left(\frac{\chi}{2}\right) \implies \frac{\rho}{\sin\chi}\left|\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\chi}\right| = \frac{R^2 \sin\left(\frac{\chi}{2}\right)\cos\left(\frac{\chi}{2}\right)}{2\sin\chi} = \frac{R^2}{4}.$$

Logo,

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{R^2}{4}$$

é a seção de choque diferencial. □

Exercício 5

Exercício 5: Espalhamento por um potencial repulsivo $U = \alpha r^{-2}$

Determinar a seção de choque diferencial do espalhamento por um potencial repulsivo $U(r) = \alpha r^{-2}$, com $\alpha > 0$.

Resolução. O ângulo φ dado pela distância de maior aproximação r_{min} é

$$\varphi = \int_{r_{\text{min}}}^{\infty} \mathrm{d}r \, \frac{\rho}{r^2\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2\alpha}{mv_\infty^2 r^2}}},$$

para uma partícula de massa m com distância de visada ρ e velocidade inicial v_∞. Da conservação de energia, a distância de maior aproximação satisfaz

$$1 = \frac{2\alpha}{mr_{\text{min}}^2 v_\infty^2} + \frac{\rho^2}{r_{\text{min}}^2} \implies r_{\text{min}} = \sqrt{\rho^2 + \frac{2\alpha}{mv_\infty^2}}.$$

Logo, com a substituição de variáveis $\xi = \frac{r_{\text{min}}}{r}$, temos

$$\varphi = \frac{\rho}{r_{\text{min}}} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{\pi\rho}{2r_{\text{min}}}.$$

Assim, o ângulo de espalhamento $\chi = \pi - 2\varphi$ é tal que

$$\frac{\pi - \chi}{\pi} = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + \frac{2\alpha}{mv_\infty^2}}} \implies \rho^2 = \frac{2\alpha}{mv_\infty^2} \frac{(\chi - \pi)^2}{\chi(2\pi - \chi)}.$$

Derivando em relação a χ,

$$\begin{aligned}
\rho \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\chi} &= \frac{\alpha}{mv_\infty^2} \left[\frac{2(\chi - \pi)}{\chi(2\pi - \chi)} - \frac{(\chi - \pi)^2}{\chi^2(2\pi - \chi)} + \frac{(\chi - \pi)^2}{\chi(2\pi - \chi)^2} \right] \\
&= \frac{\alpha}{mv_\infty^2} \frac{(\chi - \pi)\left[2\chi(2\pi - \chi) - (\chi - \pi)(2\pi - \chi) + \chi(\chi - \pi)\right]}{\chi^2(2\pi - \chi)^2} \\
&= \frac{2\alpha}{mv_\infty^2} \frac{(\chi - \pi)\left[2\pi\chi - \chi^2 + (\chi - \pi)^2\right]}{\chi^2(2\pi - \chi)^2} \\
&= \frac{2\pi^2\alpha}{mv_\infty^2} \frac{\chi - \pi}{\chi^2(2\pi - \chi)^2}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{2\pi^2\alpha}{mv_\infty^2} \frac{|\chi - \pi|}{\chi^2(2\pi - \chi)^2 \sin\chi}$$

é a seção de choque diferencial para este espalhamento. □