

4302305 - Lista de Exercícios V

Louis Bergamo Radial
8992822

5 de maio de 2024

Exercício 1

Exercício 2

Teorema 1: Teorema de Noether

Seja L uma lagrangiana invariante em relação a um parâmetro de difeomorfismos h^s , isto é,

$$h^0(q^k(t)) = q^k(t) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial s} L \left(h^s(q^k), \frac{\partial}{\partial t} h^s(q^k), t \right) = 0,$$

então a quantidade $\left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial h^s \circ q^k}{\partial s} \right|_{s=0}$ é conservada.

Demonstração. Sejam $q^k(t)$ coordenadas generalizadas que satisfazem as equações de Euler-Lagrange. Como L é invariante por transformações de h^s , segue que $\tilde{q}^k(s, t) = h^s \circ q^k(t)$ também satisfazem as equações de Euler-Lagrange.

Ainda pela invariância pelo subgrupo a um parâmetro de difeomorfismos, temos

$$\left. \frac{\partial L(\tilde{q}^k, \dot{\tilde{q}}^k, t)}{\partial s} \right|_{s=0} = \left. \frac{\partial L}{\partial q^k} \frac{\partial \tilde{q}^k}{\partial s} \right|_{s=0} + \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial \dot{\tilde{q}}^k}{\partial s} \right|_{s=0} = 0.$$

Como \tilde{q}^k satisfazem as equações de Euler-Lagrange, temos

$$\frac{d}{dt} \left(\left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial \tilde{q}^k}{\partial s} \right|_{s=0} \right) + \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial \tilde{q}^k}{\partial t} \right|_{s=0} = \frac{d}{dt} \left(\left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial \tilde{q}^k}{\partial s} \right|_{s=0} \right) = 0,$$

como queríamos demonstrar. □

Lema 1: Sistema de partículas livres

Seja um sistema de N partículas livres de posições $\mathbf{x}_{(i)}$ e massas m_i com lagrangiana dada por

$$L = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \langle \dot{\mathbf{x}}_{(i)}, \dot{\mathbf{x}}_{(i)} \rangle - \sum_{i \neq j}^N V_{ij},$$

onde $V_{ij} = V(\|\mathbf{x}_{(i)} - \mathbf{x}_{(j)}\|)$. Definindo as coordenadas $q_{(i)}^k$ tais que $\mathbf{x}_{(i)} = q_{(i)}^k \mathbf{e}_k$, onde os vetores \mathbf{e}_k formam uma base ortonormal para \mathbb{R}^3 , os momentos canonicamente conjugados

a estas coordenadas são dados por

$$p_{(i)k} = m_i g_{\ell k} \dot{q}_{(i)}^\ell,$$

para $i = 1, \dots, N$, e $k = 1, 2, 3$, onde $g_{\ell k} = \langle \mathbf{e}_\ell, \mathbf{e}_k \rangle$ é o tensor métrico Euclidiano.

Demonstração. Em termos dessas coordenadas, a lagrangiana do sistema é

$$L = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i g_{\ell n} \dot{q}_{(i)}^\ell \dot{q}_{(i)}^n - \sum_{i \neq j}^N V_{ij}.$$

Assim, o momento canonicamente conjugado $p_{(i)k}$ à coordenada $q_{(i)}^k$ é dado por

$$p_{(i)k} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{(i)}^k} = \frac{1}{2} m_i g_{\ell n} \delta_k^\ell \dot{q}_{(i)}^n + \frac{1}{2} m_i g_{\ell n} \delta_k^n \dot{q}_{(i)}^\ell = m_i g_{\ell k} \dot{q}_{(i)}^\ell,$$

como proposto. □

Exercício 1: Homogeneidade do espaço

Considere a lagrangiana do [Lema 1](#).

- (a) A transformação $\mathbf{x}_{(i)} \rightarrow \mathbf{x}_{(i)} + s\mathbf{n}$ é uma simetria do sistema?
- (b) Qual é a quantidade conservada e seu significado físico?

Resolução. Definimos $\tilde{\mathbf{x}}_{(i)}(s, t) = \mathbf{x}_{(i)}(t) + s\mathbf{n}$, notando que $\tilde{\mathbf{x}}_{(i)}(0, t) = \mathbf{x}_{(i)}(t)$ para todo t . Assim, temos

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_{(i)} = \dot{\mathbf{x}}_{(i)} \quad \text{e} \quad \tilde{\mathbf{x}}_{(i)} - \tilde{\mathbf{x}}_{(j)} = \mathbf{x}_{(i)} - \mathbf{x}_{(j)},$$

para todos $i, j = 1, \dots, N$. Dessa forma, é evidente que

$$\begin{aligned} \tilde{L} = L(\tilde{\mathbf{x}}_{(i)}, \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_{(i)}, t) &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \langle \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_{(i)}, \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_{(i)} \rangle - \sum_{i \neq j}^N V(\|\tilde{\mathbf{x}}_{(i)} - \tilde{\mathbf{x}}_{(j)}\|) \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \langle \dot{\mathbf{x}}_{(i)}, \dot{\mathbf{x}}_{(i)} \rangle - \sum_{i \neq j}^N V(\|\mathbf{x}_{(i)} - \mathbf{x}_{(j)}\|) = L(\mathbf{x}_{(i)}, \dot{\mathbf{x}}_{(i)}, t), \end{aligned}$$

isto é, a lagrangiana é invariante por translações na direção \mathbf{n} , $\frac{\partial \tilde{L}}{\partial s} = 0$. Como não há dependência explícita com os cossenos diretores de \mathbf{n} , segue que a lagrangiana é invariante por translações espaciais.

Notemos que $\frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}}{\partial s} = \mathbf{n}$, portanto $\frac{\partial \tilde{q}_{(i)}^k}{\partial s} = n^k$, onde $\mathbf{n} = n^k \mathbf{e}_k$. Pelo [Teorema de Noether](#), segue que a quantidade

$$Q = \sum_{i=1}^N p_{(i)k} \frac{\partial \tilde{q}_{(i)}^k}{\partial s} \Big|_{s=0}$$

é conservada. Pelo [Lema 1](#), obtemos

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{i=1}^N m_i g_{\ell k} \dot{q}_{(i)}^{\ell} n^k = \sum_{i=1}^N \langle m_i \dot{q}_{(i)}^{\ell} e_{\ell}, n^k e_k \rangle \\ &= \sum_{i=1}^N \langle m_i \dot{\mathbf{x}}_{(i)}, \mathbf{n} \rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{x}}_{(i)}, \mathbf{n} \right\rangle, \end{aligned}$$

isto é, a projeção do momento total do sistema na direção \mathbf{n} é conservada. Como esta relação é válida para qualquer direção \mathbf{n} , obtemos que a homogeneidade do espaço implica a conservação do momento total do sistema $\sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{x}}_{(i)}$. \square

Exercício 3

Exercício 2: Isotropia do espaço

Considere a lagrangiana do [Lema 1](#). Dada uma rotação infinitesimal na direção \mathbf{n} por um ângulo s , a transformação é

$$\mathbf{x}_{(i)} \rightarrow \mathbf{x}_{(i)} + [s\mathbf{n}, \mathbf{x}_{(i)}].$$

Obtenha a quantidade conservada associada a rotações.

Resolução. Definimos $\tilde{\mathbf{x}}_{(i)}(s, t) = \mathbf{x}_{(i)}(t) + [s\mathbf{n}, \mathbf{x}_{(i)}]$, notando que $\tilde{\mathbf{x}}_{(i)}(0, t) = \mathbf{x}_{(i)}(t)$ para todo t . Mostremos que a distância em relação à origem é a mesma para todo s , em ordem linear em s . Temos

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\mathbf{x}}_{(i)}, \tilde{\mathbf{x}}_{(i)} \rangle &= \langle \mathbf{x}_{(i)} + [s\mathbf{n}, \mathbf{x}_{(i)}], \mathbf{x}_{(i)} + [s\mathbf{n}, \mathbf{x}_{(i)}] \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}_{(i)}, \mathbf{x}_{(i)} \rangle + 2\langle \mathbf{x}_{(i)}, [s\mathbf{n}, \mathbf{x}_{(i)}] \rangle + s^2 \langle [\mathbf{n}, \mathbf{x}_{(i)}], [\mathbf{n}, \mathbf{x}_{(i)}] \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}_{(i)}, \mathbf{x}_{(i)} \rangle + O(s^2), \end{aligned}$$

portanto a transformação é uma rotação infinitesimal. Com isso, temos

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\mathbf{x}}_{(i)} - \tilde{\mathbf{x}}_{(j)}, \tilde{\mathbf{x}}_{(i)} - \tilde{\mathbf{x}}_{(j)} \rangle &= \langle \mathbf{x}_{(i)} - \mathbf{x}_{(j)} + [s\mathbf{n}, \mathbf{x}_{(i)}] - [s\mathbf{n}, \mathbf{x}_{(j)}], \mathbf{x}_{(i)} - \mathbf{x}_{(j)} + [s\mathbf{n}, \mathbf{x}_{(i)}] - [s\mathbf{n}, \mathbf{x}_{(j)}] \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}_{(i)} - \mathbf{x}_{(j)} + [s\mathbf{n}, \mathbf{x}_{(i)} - \mathbf{x}_{(j)}], \mathbf{x}_{(i)} - \mathbf{x}_{(j)} + [s\mathbf{n}, \mathbf{x}_{(i)} - \mathbf{x}_{(j)}] \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}_{(i)} - \mathbf{x}_{(j)}, \mathbf{x}_{(i)} - \mathbf{x}_{(j)} \rangle + O(s^2), \end{aligned}$$

portanto as distâncias relativas entre pares de partículas é invariante em ordem linear de s . Fica claro que esta transformação preserva a lagrangiana do sistema,

$$\begin{aligned} \tilde{L} &= L(\tilde{\mathbf{x}}_{(i)}, \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_{(i)}, t) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \langle \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_{(i)}, \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_{(i)} \rangle - \sum_{i \neq j}^N V(\|\tilde{\mathbf{x}}_{(i)} - \tilde{\mathbf{x}}_{(j)}\|) \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \langle \dot{\mathbf{x}}_{(i)}, \dot{\mathbf{x}}_{(i)} \rangle - \sum_{i \neq j}^N V(\|\mathbf{x}_{(i)} - \mathbf{x}_{(j)}\|) = L(\mathbf{x}_{(i)}, \dot{\mathbf{x}}_{(i)}, t), \end{aligned}$$

isto é, $\frac{\partial \tilde{L}}{\partial s} = 0$ para todo s suficientemente pequeno. Assim, utilizando as coordenadas $q_{(i)}^k$ definidas no [Lema 1](#), temos

$$\tilde{\mathbf{x}}_{(i)} = \tilde{q}_{(i)}^k e_k = \left(q_{(i)}^k + \epsilon^{kab} s n_a q_{(i)b} \right) e_k \implies \left. \frac{\partial \tilde{q}_{(i)}^k}{\partial s} \right|_{s=0} = \epsilon^{kab} n_a q_{(i)b},$$

onde $\mathbf{n} = n^\ell \mathbf{e}_\ell$, de modo que pelo **Teorema de Noether** a quantidade $Q = \sum_{i=1}^N p_{(i)k} \epsilon^{kab} n_a q_{(i)b}$ é conservada. Pelo **Lema 1**, obtemos

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{i=1}^N m_i g_{\ell k} \dot{q}_{(i)}^\ell \epsilon^{kab} n_a q_{(i)b} = \sum_{i=1}^N m_i \left\langle \dot{q}_{(i)}^\ell \mathbf{e}_\ell, \epsilon^{kab} n_a q_{(i)b} \mathbf{e}_k \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^N \left\langle m_i \dot{\mathbf{x}}_{(i)}, [\mathbf{n}, \mathbf{x}_{(i)}] \right\rangle = \sum_{i=1}^N \left\langle \mathbf{n}, [\mathbf{x}_{(i)}, m_i \dot{\mathbf{x}}_{(i)}] \right\rangle \\ &= \left\langle \mathbf{n}, \sum_{i=1}^N [\mathbf{x}_{(i)}, m_i \dot{\mathbf{x}}_{(i)}] \right\rangle, \end{aligned}$$

isto é, a projeção do momento angular total do sistema na direção \mathbf{n} é conservada. Como esta relação é válida para qualquer direção \mathbf{n} , mostramos que a isotropia do espaço implica a conservação do momento angular total do sistema $\sum_{i=1}^N [\mathbf{x}_{(i)}, m_i \dot{\mathbf{x}}_{(i)}]$. \square

Exercício 4

Teorema 2: Teorema de Noether generalizado

Se a ação é *quase-invariante* sob a transformação infinitesimal

$$t \rightarrow \tilde{t} = t + \epsilon X(q(t), t) \quad q^k(t) \rightarrow \tilde{q}^k(\tilde{t}) = q^k(t) + \epsilon \psi^k(q(t), \dot{q}(t), t),$$

isto é, se existe uma função $G = G(q(t), t)$ tal que

$$\Delta S = \int_{\tilde{t}_A}^{\tilde{t}_B} d\tilde{t} \tilde{L} - \int_{t_A}^{t_B} dt \left(L + \epsilon \frac{d}{dt} G(q(t), t) \right) = 0,$$

onde $\tilde{L} = L\left(\tilde{q}(\tilde{t}), \frac{d\tilde{q}}{d\tilde{t}}, \tilde{t}\right)$ e $L = L\left(q(t), \frac{dq}{dt}, t\right)$, então a quantidade

$$I = hX - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \psi^k + G$$

é a integral de movimento associada à simetria, com a função energia dada por $h = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \dot{q}^k - L$.

Demonstração. Notemos que

$$\frac{d\tilde{t}}{dt} = 1 + \epsilon \dot{X} \quad \text{e} \quad \frac{dt}{d\tilde{t}} = 1 - \epsilon \dot{X}$$

em primeira ordem em ϵ . Assim, as velocidades generalizadas sob a transformação infinitesimal são dadas por

$$\frac{d\tilde{q}^k}{d\tilde{t}} = \frac{dt}{d\tilde{t}} \frac{d\tilde{q}^k}{dt} = (1 - \epsilon \dot{X})(\dot{q}^k + \epsilon \dot{\psi}^k) = \dot{q}^k + \epsilon \xi^k,$$

onde definimos $\xi^k = \dot{\psi}^k - \dot{X} \dot{q}^k$. Com isso a lagrangiana avaliada após a transformação é

$$\begin{aligned} \tilde{L} &= L(q(t) + \epsilon \psi, \dot{q}(t) + \epsilon \xi, t + \epsilon X) \\ &= L + \epsilon \left(\psi^k \frac{\partial L}{\partial q^k} + \xi^k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} + X \frac{\partial L}{\partial t} \right). \end{aligned}$$

Se a ação é quase-invariante por esta transformação, temos

$$\begin{aligned}\Delta S &= \int_{\tilde{t}_A}^{\tilde{t}_B} d\tilde{t} \tilde{L} - \int_{t_A}^{t_B} dt (L + \epsilon \dot{G}) \\ &= \int_{t_A}^{t_B} dt \left(\tilde{L} \frac{d\tilde{t}}{dt} - L - \epsilon \dot{G} \right) \\ &= \epsilon \int_{t_A}^{t_B} dt \left[L \dot{X} + \psi^k \frac{\partial L}{\partial q^k} + \xi^k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} + X \frac{\partial L}{\partial t} - \dot{G} \right] = 0.\end{aligned}$$

Portanto, a condição necessária e suficiente para que a ação seja quase-invariante por esta transformação é

$$\dot{G} = L \dot{X} + \psi^k \frac{\partial L}{\partial q^k} + (\dot{\psi}^k - \dot{X} \dot{q}^k) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} + X \frac{\partial L}{\partial t},$$

isto é, o lado direito desta equação deve ser igual à alguma derivada total em relação ao tempo de uma função das posições e do tempo.

Pela definição da função energia temos

$$\begin{aligned}\frac{dG}{dt} &= \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \dot{q}^k \right) \dot{X} + X \frac{\partial L}{\partial t} + \psi^k \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \right) + \dot{\psi}^k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \\ &= -h \dot{X} - \frac{dh}{dt} X + \frac{d}{dt} \left(\psi^k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(-hX + \psi^k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \right),\end{aligned}$$

onde utilizamos as equações de Euler-Lagrange. Desse modo, temos que

$$\frac{dI}{dt} = 0,$$

onde $I = hX - \psi^k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} + G$, como desejado. □

Exercício 3: Transformação de escala

Considere um sistema unidimensional com coordenada generalizada q cuja lagrangiana é

$$L = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q).$$

Uma transformação de escala modifica a variável independente tempo bem como a variável dinâmica q segundo

$$t \rightarrow \tilde{t} = \rho t \quad \text{e} \quad q(t) \rightarrow \tilde{q}(\tilde{t}) = \rho^d q(\rho t),$$

onde a quantidade d é chamada *dimensão de escala* da variável dinâmica q .

- Derive a forma infinitesimal desta transformação.
- Qual o valor que a dimensão de escala d deve ter para que a teoria seja invariante por esta transformação para $V = 0$?
- Para o valor de d encontrado, determine a forma mais geral de V para que a teoria seja invariante por transformações de escala.
- Usando o teorema de Noether, obtenha a quantidade conservada D pela transformação de escala.

Resolução. Para que a transformação seja a identidade, devemos ter $\rho = 1$. Deste modo, podemos parametrizar a transformação ao redor da identidade por

$$t \rightarrow \tilde{t} = e^{\alpha} t \quad \text{e} \quad q(t) \rightarrow \tilde{q}(\tilde{t}) = e^{\alpha d} q(\rho t),$$

para algum $\alpha \in \mathbb{R}$. Assim, para $\alpha \ll 1$ temos o gerador infinitesimal desta transformação dado por

$$\begin{aligned} t \rightarrow \tilde{t} &= (1 + \alpha)t \\ &= t + \alpha t \end{aligned} \quad \begin{aligned} q(t) \rightarrow \tilde{q}(\tilde{t}) &= (1 + d\alpha)q(t + \alpha t), \\ &= (1 + d\alpha)q(t) + \alpha t \dot{q}(t). \end{aligned}$$

Definindo $X = t$, $\psi = dq(t) + t\dot{q}(t)$, temos

$$\tilde{t} = t + \alpha X \quad \text{e} \quad \tilde{q}(\tilde{t}) = q(t) + \alpha \psi.$$

Desse modo, para que a ação seja quase-invariante pela transformação, devemos ter

$$L\dot{X} + \psi \frac{\partial L}{\partial q} + (\dot{\psi} - \dot{X}\dot{q}) \frac{dL}{d\dot{q}} + X \frac{\partial L}{\partial t} = \dot{G}$$

para alguma função $G = G(q, t)$. Computando diretamente vemos que

$$\begin{aligned} L\dot{X} + \psi \frac{\partial L}{\partial q} + (\dot{\psi} - \dot{X}\dot{q}) \frac{dL}{d\dot{q}} + X \frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q) + (dq + t\dot{q})(-V'(q)) + (d\dot{q} + t\ddot{q})m\dot{q} \\ &= \left(d + \frac{1}{2}\right)m\dot{q}^2 - V(q) - (dq + t\dot{q})V'(q) + m\ddot{q}t\dot{q} \\ &= \left(d + \frac{1}{2}\right)m\dot{q}^2 - V(q) - (dq + 2t\dot{q})V'(q), \end{aligned}$$

onde utilizamos a equação de movimento $m\ddot{q} = -V'(q)$. Notemos que

$$\frac{d}{dt} [tV(q)] = V(q) + t\dot{q}V'(q),$$

portanto

$$L\dot{X} + \psi \frac{\partial L}{\partial q} + (\dot{\psi} - \dot{X}\dot{q}) \frac{dL}{d\dot{q}} + X \frac{\partial L}{\partial t} = \left(d + \frac{1}{2}\right)m\dot{q}^2 + [V(q) - dqV'(q)] - \frac{d}{dt} [2tV(q)],$$

isto é, se $d = -\frac{1}{2}$ e o potencial satisfizer a equação diferencial

$$V(q) - dqV'(q) = 0,$$

obtemos $G(q, t) = -2tV(q)$, logo a ação é quase-invariante por transformações de escala.

Neste caso, integrando a equação diferencial, obtemos o potencial

$$V(q) = kq^{-2}$$

para alguma constante de integração $k \in \mathbb{R}$. Ainda, pelo [Teorema de Noether generalizado](#), a quantidade

$$\begin{aligned} D &= hX - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\psi + G \\ &= \left(\frac{1}{2}m\dot{q}^2 + V(q)\right)t - m\dot{q}\left(-\frac{1}{2}q + t\dot{q}\right) - 2tV(q) \\ &= \left(-\frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q)\right)t + \frac{1}{2}m\dot{q}q \\ &= \frac{1}{2}mq\dot{q} - ht \end{aligned}$$

é a integral de movimento associada à transformação de escala. □

Exercício 5