4302305 - Lista de Exercícios VI

Louis Bergamo Radial
8992822

11 de maio de 2024

Exercício 1

Exercício 1: Movimento de uma partícula sujeita a um sistema de vínculos

Considere o movimento de uma partícula em três dimensões que está sujeita aos vínculos

(a) $(x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x + xy\,\mathrm{d}z = 0 \quad \text{e} \quad (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}y + yz\,\mathrm{d}z = 0$;

(b) $(x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}z = 0 \quad \text{e} \quad (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}y + yz\,\mathrm{d}z = 0$.

Decida se cada um dos sistemas é holonômico.

Resolução do item (a). Dividindo os vínculos por $\mathrm{d}t$ obtemos

$$a_{11}\dot{x} + a_{13}\dot{z} = 0 \quad \text{e} \quad a_{22}\dot{y} + a_{23}\dot{z} = 0,$$

onde $a_{11} = a_{22} = x^2 + y^2$, $a_{13} = xy$, e $a_{23} = yz$. Utilizando a lagrangiana $L = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$, obtemos as equações de movimento

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \lambda^1 a_{11} \\ m\ddot{y} = \lambda^2 a_{22} \\ m\ddot{z} = \lambda^1 a_{13} + \lambda^2 a_{23} \\ a_{11}\dot{x} + a_{13}\dot{z} = 0 \\ a_{22}\dot{y} + a_{23}\dot{z} = 0, \end{cases}$$

para multiplicadores de Lagrange λ^1 e λ^2.

Multiplicando as duas últimas equações por λ^1 e λ^2 e somando-as, obtemos

$$\lambda^1 a_{11}\dot{x} + \lambda^2 a_{22}\dot{y} + \left(\lambda^1 a_{13} + \lambda^2 a_{23}\right)\dot{z} = 0.$$

Substituindo as três primeiras equações temos

$$m\left(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}\right) = 0 \implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = 0.$$

Isto é, a energia cinética é uma integral de movimento deste sistema, logo as forças não realizam trabalho. TODO: Dessa forma, as forças são de vínculo, portanto o sistema é holonômico. □

Resolução do item (b). Integremos diretamente o sistema, notando que podemos isolar $z\,\mathrm{d}z$ em ambas equações. Temos então a equação diferencial ordinária a variáveis separáveis

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}y}{y},$$

cuja solução é $y = kx$, para alguma constante de integração $k \in \mathbb{R}$. Substituindo na primeira equação de vínculo, obtemos

$$z\,\mathrm{d}z = -(1+k^2)x\,\mathrm{d}x \implies x^2(1+k^2) + z^2 = \ell^2 \implies x^2 + y^2 + z^2 = \ell^2,$$

para uma constante de integração $\ell \in \mathbb{R}$. Deste modo, concluímos que este vínculo é equivalente ao vínculo holonômico da interseção do plano $y - kx = 0$ com a esfera de raio $|\ell|$ centrada na origem $x^2 + y^2 + z^2 = \ell^2$, portanto o sistema é holonômico. □

Exercício 2

Exercício 2: Multiplicadores de Lagrange

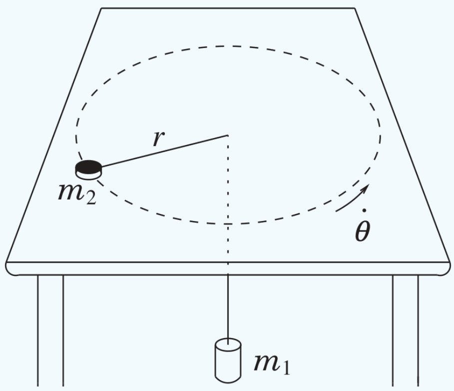

Figura 1: Sistema do Exercício 2

No sistema da Figura 1, a massa m_2 move-se sem atrito sobre uma mesa horizontal, enquanto a massa m_1 pode mover-se apenas na direção ortogonal à mesa.
Utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange, obtenha a tensão no fio, o qual é inextensível, em termos da quantidade conservada e de r.

Resolução. Utilizemos a lagrangiana

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{z}^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + m_1 g z,$$

onde z é a distância da massa m_1 à mesa, sujeita ao vínculo

$$\dot{r} + \dot{z} = 0.$$

Assim, as equações de movimento são dadas por

$$\begin{cases} m_1\ddot{z} - m_1 g = \lambda \\ m_2\ddot{r} - m_2 r\dot{\theta}^2 = \lambda \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_2 r^2\dot{\theta}\right) = 0 \\ \dot{r} + \dot{z} = 0 \end{cases}$$

com o multiplicador de Lagrange λ.

Como a coordenada θ é cíclica e não aparece em nenhum vínculo, temos a quantidade conservada $J = m_2 r^2\dot{\theta}$, que é a projeção do momento angular da massa m_2 na direção ortogonal à mesa. Com isso, a segunda equação pode ser escrita como

$$m_2\ddot{r} - \frac{J^2}{m_2 r^3} = \lambda.$$

Multiplicando esta equação por m_1 e somando à primeira equação multiplicada por m_2 temos

$$m_1 m_2(\ddot{z} + \ddot{r}) - m_1 m_2 g - \frac{m_1 J^2}{m_2 r^3} = (m_1 + m_2)\lambda.$$

Deste modo, derivando o vínculo em relação a t e substituindo nesta última equação, obtemos o multiplicador de Lagrange

$$\lambda = -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left(\frac{J^2}{m_2^2 r^3} + g\right),$$

que corresponde à tensão no fio. □

Exercício 3

Exercício 3: Osciladores harmônicos sujeitos a um vínculo

Considere N osciladores harmônicos de massa unitária cujas posições são x_k. As frequências dos osciladores são distintas, isto é, se $k \neq j$ então $\omega_k \neq \omega_j$. Este sistema está sujeito ao vínculo

$$\sum_{k=1}^{N} x_k^2 = 1.$$

(a) Utilizando multiplicadores de Lagrange, mostre que as equações de movimento são

$$\ddot{x}_k + \omega_k^2 x_k = \lambda x_k.$$

(b) Mostre que

$$\sum_{k=1}^{N} \left(x_k \ddot{x}_k + \dot{x}_k^2 \right) = 0$$

e obtenha as equações de movimento eliminando o multiplicador de Lagrange.

(c) Mostre que as N quantidades

$$F_k(x_k, \dot{x}_k) = x_k^2 + \sum_{\ell \neq k} \frac{(x_\ell \dot{x}_k - \dot{x}_\ell x_k)^2}{\omega_k^2 - \omega_\ell^2}$$

são constantes de movimento.

Resolução. Consideramos a lagrangiana

$$L = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \left(\dot{x}_k^2 - \omega_k^2 x_k^2 \right)$$

sujeita ao vínculo

$$\sum_{k=1}^{N} x_k \dot{x}_k = 0.$$

Assim, as equações de movimento são dadas por

$$\ddot{x}_k + \omega_k^2 x_k = \lambda x_k,$$

para um multiplicador de Lagrange λ.

Multiplicando esta equação por x_k e somando sobre k, temos

$$\sum_{k=1}^{N} \left(x_k \ddot{x}_k + \omega_k^2 x_k^2 \right) = \lambda \sum_{k=1}^{N} x_k^2,$$

então de $\sum_{k=1}^{N} x_k^2 = 1$, segue que

$$\lambda = \sum_{\ell=1}^{N} \left(x_\ell \ddot{x}_\ell + \omega_\ell^2 x_\ell^2 \right).$$

Derivando o vínculo em relação ao tempo, temos

$$\sum_{\ell=1}^{N} \left(x_\ell \ddot{x}_\ell + \dot{x}_\ell^2 \right) = 0 \implies \sum_{\ell=1}^{N} x_\ell \ddot{x}_\ell = -\sum_{\ell=1}^{N} \dot{x}_\ell^2,$$

portanto

$$\lambda = \sum_{\ell=1}^{N} \left(\omega_\ell^2 x_\ell^2 - \dot{x}_\ell^2\right).$$

Substituindo nas equações de movimento, temos

$$\ddot{x}_k + \left[\omega_k^2 - \sum_{\ell=1}^{N} \left(\omega_\ell^2 x_\ell^2 - \dot{x}_\ell^2\right)\right] x_k = 0.$$

Mostremos que a quantidade

$$F_k(x_k, \dot{x}_k) = x_k^2 + \sum_{\ell \neq k} \frac{(x_\ell \dot{x}_k - \dot{x}_\ell x_k)^2}{\omega_k^2 - \omega_\ell^2}$$

é conservada. Notemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell \neq k} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[(x_\ell \dot{x}_k - \dot{x}_\ell x_k)^2\right] &= \sum_{\ell \neq k} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[(x_\ell \dot{x}_k - \dot{x}_\ell x_k)^2\right] \\
&= 2 \sum_{\ell \neq k} (x_\ell \dot{x}_k - \dot{x}_\ell x_k)(x_\ell \ddot{x}_k - \ddot{x}_\ell x_k) \\
&= 2 \sum_{\ell \neq k} (x_\ell \dot{x}_k - \dot{x}_\ell x_k) \left[x_\ell \left(\lambda x_k - \omega_k^2 x_k\right) - \left(\lambda x_\ell - \omega_\ell^2 x_\ell\right) x_k\right] \\
&= 2 \sum_{\ell \neq k} (x_\ell \dot{x}_k - \dot{x}_\ell x_k) \left(\omega_\ell^2 - \omega_k^2\right) x_\ell x_k \\
&= -2 \sum_{\ell \neq k} \left(\omega_k^2 - \omega_\ell^2\right) \left(x_\ell^2 x_k \dot{x}_k - x_\ell \dot{x}_\ell x_k^2\right),
\end{aligned}$$

portanto

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}F_k}{\mathrm{d}t} &= x_k \dot{x}_k - \sum_{\ell \neq k} \left(x_\ell^2 x_k \dot{x}_k - x_\ell \dot{x}_\ell x_k^2\right) \\
&= x_k \dot{x}_k - \sum_{\ell=1}^{N} \left(x_\ell^2 x_k \dot{x}_k - x_\ell \dot{x}_\ell x_k^2\right) \\
&= x_k \dot{x}_k - x_k \dot{x}_k \\
&= 0,
\end{aligned}$$

como desejado. □

Exercício 4

Exercício 4: Transformações de calibre

O campo eletromagnético é invariante pela transformação de gauge

$$\boldsymbol{A} \longrightarrow \tilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla} f \quad \text{e} \quad \phi \longrightarrow \tilde{\phi} = \phi - \frac{\partial f}{\partial t},$$

onde $f(\boldsymbol{r}, t)$ é uma função diferenciável arbitrária. Como essa transformação afeta a lagrangiana do sistema? E sua hamiltoniana?

Resolução. A lagrangiana para uma partícula de massa m e carga q que se move em um campo eletromagnético externo é dada por

$$L = \frac{1}{2} m g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j - e\phi + e g_{ij} A^i \dot{q}^j$$

portanto o momento p_k canonicamente conjugado à coordenada q^k é dado por

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} = m g_{ik} \dot{q}^i + e g_{ik} A^i.$$

Desse modo, a hamiltoniana é obtida ao expressar a quantidade $H = p_k \dot{q}^k - L$ em termos de q^k e p_k. Da expressão do momento, obtemos

$$\dot{q}^j = \frac{g^{j\ell} p_\ell - e A^j}{m},$$

portanto

$$\begin{aligned}
H &= p_k \frac{g^{k\ell} p_\ell - e A^k}{m} - \frac{1}{2} m g_{ij} \left(\frac{g^{in} p_n - e A^i}{m} \right) \left(\frac{g^{j\ell} p_\ell - e A^j}{m} \right) + e\phi - e g_{ij} A^i \frac{g^{j\ell} p_\ell - e A^j}{m} \\
&= e\phi + \frac{g^{k\ell} p_\ell - e A^k}{m} \left[p_k - \frac{1}{2} m g_{ik} \left(\frac{g^{in} p_n - e A^i}{m} \right) - e g_{ik} A^i \right] \\
&= e\phi + \frac{g^{k\ell} p_\ell - e A^k}{m} \left[p_k - \frac{1}{2} g_{ik} g^{in} p_n + e \frac{1}{2} g_{ik} A^i - e g_{ik} A^i \right] \\
&= \frac{1}{2m} \left(g^{k\ell} p_\ell - e A^k \right) \left(p_k - e g_{ik} A^i \right) + e\phi
\end{aligned}$$

é a hamiltoniana do sistema.

Com uma transformação de calibre, obtemos a lagrangiana

$$\begin{aligned}
\tilde{L} &= \frac{1}{2} m g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j - e\tilde{\phi} + e g_{ij} \tilde{A}^i \dot{q}^j \\
&= \frac{1}{2} m g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j - e \left(\phi - \frac{\partial f}{\partial t} \right) + e g_{ij} \left(A^i + g^{in} \frac{\partial f}{\partial q^n} \right) \dot{q}^j \\
&= \frac{1}{2} m g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j - e\phi + e \frac{\partial f}{\partial t} + e g_{ij} A^i \dot{q}^j + e g_{ij} g^{in} \frac{\partial f}{\partial q^n} \dot{q}^j \\
&= L + e \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q^j} \dot{q}^j \right) \\
&= L + e \frac{\mathrm{d} f}{\mathrm{d} t}.
\end{aligned}$$

Assim, lagrangianas obtidas por uma mudança de calibre são equivalentes! O momento $\tilde{p}_k$ canonicamente conjugado à coordenada q^k é dado por

$$\begin{aligned}\tilde{p}_k = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}^k} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} + e\frac{\partial}{\partial \dot{q}^k}\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q^j}\dot{q}^j\right) \\ &= p_k + e\frac{\partial f}{\partial q^k},\end{aligned}$$

portanto a hamiltoniana é

$$\begin{aligned}\tilde{H} &= \frac{1}{2m}\left(g^{k\ell}\tilde{p}_\ell - e\tilde{A}^k\right)\left(\tilde{p}_k - eg_{ik}\tilde{A}^i\right) + e\tilde{\phi} \\ &= \frac{1}{2m}\left[g^{k\ell}\left(p_\ell + e\frac{\partial f}{\partial q^\ell}\right) - e\left(A^k + g^{kn}\frac{\partial f}{\partial q^n}\right)\right]\left[\left(p_k + e\frac{\partial f}{\partial q^k}\right) - eg_{ik}\left(A^i + g^{is}\frac{\partial f}{\partial q^s}\right)\right] + e\left(\phi - \frac{\partial f}{\partial t}\right) \\ &= \frac{1}{2m}\left[g^{k\ell}p_\ell - eA^k + e\left(g^{k\ell}\frac{\partial f}{\partial q^\ell} - g^{kn}\frac{\partial f}{\partial q^n}\right)\right]\left[p_k - eg_{ik}A^i + e\left(\frac{\partial f}{\partial q^k} - g_{ik}g^{is}\frac{\partial f}{\partial q^s}\right)\right] + e\phi - e\frac{\partial f}{\partial t} \\ &= \frac{1}{2m}\left(g^{k\ell}p_\ell - eA^k\right)\left(p_k - eg_{ik}A^i\right) + e\phi - e\frac{\partial f}{\partial t} \\ &= H - e\frac{\partial f}{\partial t}.\end{aligned}$$

TODO: Mostrar que as hamiltonianas geram as mesmas equações de movimento. □

Exercício 5

Exercício 5: Variável cíclica e lagrangiana equivalente

Seja q^k uma variável cíclica da lagrangiana $L(q, \dot{q}, t)$, logo sabemos que seu momento conjugado p_k é uma constante de movimento. Se trocarmos L por $\tilde{L} = L + \frac{\mathrm{d}f(q,t)}{\mathrm{d}t}$ sabemos que as equações de movimento não são alteradas. Por outro lado, q^k não é uma coordenada cíclica de $\tilde{L}$ e seu momento canonicamente conjugado não é conservado! Resolva este paradoxo aparente.

Resolução. Para a lagrangiana $\tilde{L}$, o momento $\tilde{p}_k$ canonicamente conjugado a q^k é dado por

$$\begin{aligned}\tilde{p}_k = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}^k} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}^k}\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{q}^\ell \frac{\partial f}{\partial q^\ell}\right)\\ &= p_k + \frac{\partial f}{\partial q^k}.\end{aligned}$$

Desta forma, a equação de movimento para esta coordenada é

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\tilde{p}_k}{\mathrm{d}t} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^k} = 0 &\implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(p_k + \frac{\partial f}{\partial q^k}\right) - \frac{\partial}{\partial q^k}\left(L + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right) = 0\\ &\implies \frac{\mathrm{d}p_k}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f}{\partial q^k}\right) - \frac{\partial}{\partial q^k}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right) = 0\\ &\implies \frac{\mathrm{d}p_k}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial^2 f}{\partial t\, \partial q^k} + \frac{\partial^2 f}{\partial q^j\, \partial q^k}\dot{q}^j - \frac{\partial^2 f}{\partial q^k\, \partial t} - \frac{\partial^2 f}{\partial q^k\, \partial q^j}\dot{q}^j = 0\\ &\implies \frac{\mathrm{d}p_k}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t\, \partial q^k} - \frac{\partial^2 f}{\partial q^k\, \partial t}\right) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial q^j\, \partial q^k} - \frac{\partial^2 f}{\partial q^k\, \partial q^j}\right)\dot{q}^j = 0.\end{aligned}$$

Portanto, se f for de classe C^2, segue pelo teorema de Schwarz que as derivadas parciais de f comutam, portanto a equação de movimento para esta coordenada é

$$\frac{\mathrm{d}p_k}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Logo, a lei de conservação obtida pela lagrangiana original é também expressa nesta lagrangiana equivalente. □