

4302305 - Lista de Exercícios IV

Louis Bergamo Radial
8992822

12 de maio de 2024

Exercício 1

Lema 1: Partícula em um campo eletromagnético externo

A lagrangiana de uma partícula de massa m e carga e em um campo eletromagnético externo definido pelo potencial escalar ϕ e pelo potencial vetor A é dada por

$$L = \frac{1}{2} m g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j - e\phi + e g_{ij} A^i \dot{x}^j,$$

onde g_{ij} é o tensor métrico Euclidiano.

Demonstração. Uma partícula de massa m e carga e em um campo eletromagnético externo está sujeita à força de Lorentz dada por

$$F = e (E + v \times B),$$

onde E é o campo elétrico e B é o campo magnético.

Podemos definir os campos elétrico e magnético a partir de um potencial escalar ϕ e um potencial vetor A ,

$$E = -\nabla\phi - \frac{\partial A}{\partial t} \quad \text{e} \quad B = \nabla \times A,$$

de modo que as equações de Maxwell ainda sejam satisfeitas. Neste caso, a força de Lorentz é dada por

$$F = e \left(-\nabla\phi - \frac{\partial A}{\partial t} + v \times (\nabla \times A) \right).$$

Notemos que

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial x^i} \dot{x}^i + \frac{\partial A}{\partial t} \implies -\frac{\partial A}{\partial t} = \langle v, \nabla \rangle A - \frac{dA}{dt}$$

e que

$$v \times (\nabla \times A) = \nabla \langle v, A \rangle - \langle v, \nabla \rangle A,$$

uma vez que $\frac{\partial v}{\partial x^i} = 0$. Dessa forma, segue que

$$\begin{aligned} F &= e \left(-\nabla\phi - \frac{dA}{dt} + \nabla \langle v, A \rangle \right) \\ &= e \left[-\nabla(\phi - \langle v, A \rangle) - \frac{dA}{dt} \right]. \end{aligned}$$

Definindo o operador $\nabla_v = e_x \frac{\partial}{\partial v_x} + e_y \frac{\partial}{\partial v_y} + e_z \frac{\partial}{\partial v_z}$ e notando que tanto A quanto ϕ não dependem das velocidades, temos

$$-A = \nabla_v (\phi - \langle v, A \rangle),$$

de modo que a força de Lorentz seja dada por

$$\mathbf{F} = e \left[-\nabla(\phi - \langle \mathbf{v}, \mathbf{A} \rangle) + \frac{d}{dt} \nabla_v (\phi - \langle \mathbf{v}, \mathbf{A} \rangle) \right].$$

Isto é, mostramos que a força de Lorentz resulta de um potencial generalizado $U = e\phi - e\langle \mathbf{v}, \mathbf{A} \rangle$

$$F_k = -\frac{\partial U}{\partial x^k} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{x}^k} \right),$$

portanto a lagrangiana é dada por

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} m \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle - e\phi + e\langle \mathbf{v}, \mathbf{A} \rangle \\ &= \frac{1}{2} m g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j - e\phi + e g_{ij} A^i \dot{x}^j, \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. □

Lema 2: Invariância de calibre

Os campos elétrico $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ e magnético $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ são invariantes por transformações de calibre,

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \nabla f \quad \text{e} \quad \tilde{\phi} = \phi - \frac{\partial f}{\partial t},$$

onde f é um campo escalar suave. Ainda, a lagrangiana

$$\tilde{L} = \frac{1}{2} m g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j - e\tilde{\phi} + e g_{ij} \tilde{A}^i \dot{x}^j$$

é equivalente à lagrangiana dada pelo [Lema 1](#).

Demonstração. Como todo gradiente é irrotacional, temos

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times (\mathbf{A} + \nabla f) = \nabla \times \tilde{\mathbf{A}},$$

para qualquer campo escalar diferenciável f . Ainda, para f suave, as derivadas parciais em relação às posições e ao tempo comutam, de modo que

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\ &= -\nabla\phi + \nabla \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \nabla f - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\ &= -\nabla \left(\phi + \frac{\partial f}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{A} + \nabla f) \\ &= -\nabla \tilde{\phi} - \frac{\partial \tilde{\mathbf{A}}}{\partial t}, \end{aligned}$$

como desejado.

Como determinamos a lagrangiana a partir dos campos \mathbf{E} e \mathbf{B} , é de se esperar que a invariância de calibre seja refletida nesta função também. Notemos que

$$\begin{aligned} -\tilde{\phi} + g_{ij} \tilde{A}^i \dot{x}^j &= -\phi + \frac{\partial f}{\partial t} + g_{ij} \left(A^i + g^{ik} \frac{\partial f}{\partial x^k} \right) \dot{x}^j \\ &= -\phi + g_{ij} A^i \dot{x}^j + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x^j} \dot{x}^j \\ &= -\phi + g_{ij} A^i \dot{x}^j + \frac{df}{dt}, \end{aligned}$$

portanto $\tilde{L} = L + \frac{df}{dt}$, com f só dependendo das posições e do tempo. Desse modo, as lagrangianas são de fato equivalentes. \square

Exercício 1: Movimento em um campo magnético uniforme

Uma partícula de massa m move-se na presença de um campo magnético constante $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$.

- Mostre que o potencial vetor $\mathbf{A} = \frac{B}{2}(-y\mathbf{e}_x + x\mathbf{e}_y)$ está associado a este campo magnético.
- Utilizando o formalismo Lagrangiano obtenha a equação de movimento desta partícula.
- Obtenha a trajetória desta partícula utilizando a condição inicial que $\mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$ e que $\mathbf{v}(0) = a\mathbf{e}_x + b\mathbf{e}_y$, onde a e b são constantes.

Resolução. Notemos que

$$\nabla \times (-y\mathbf{e}_x + x\mathbf{e}_y) = 2\mathbf{e}_z,$$

portanto o potencial vetor \mathbf{A} dado é associado ao campo magnético uniforme \mathbf{B} .

Pelo [Lema 1](#), a lagrangiana de uma partícula de carga Q e massa m em um campo eletromagnético é dada por

$$L = \frac{1}{2}m\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle - Q\phi + Q\langle \mathbf{v}, \mathbf{A} \rangle,$$

onde \mathbf{v} é a velocidade da partícula e ϕ é o potencial escalar. Ainda, pelo [Lema 2](#), a escolha de calibre não influencia as equações de movimento. Neste caso, como não há a presença de um campo elétrico, e como tomamos $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 0$, segue que ϕ é constante. Desse modo, a lagrangiana pode ser escrita como

$$L(q^1, \dot{q}^1, q^2, \dot{q}^2) = \frac{1}{2}m g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j + \frac{QB}{2} \epsilon_{ij} q^i \dot{q}^j,$$

onde $q^1 = x$, $q^2 = y$, ϵ_{ij} é o símbolo de Levi-Civita, e g_{ij} é o tensor métrico Euclidiano. Assim, pelas equações de Euler-Lagrange temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^k} &= 0 \implies \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m g_{ij} \delta_k^i \dot{q}^j + \frac{1}{2}g_{ij} \dot{q}^i \delta_k^j + \frac{QB}{2} \epsilon_{ij} q^i \delta_k^j \right) - \frac{QB}{2} \epsilon_{ij} \delta_k^i \dot{q}^j = 0 \\ &\implies \frac{d}{dt} \left(m g_{kj} \dot{q}^j + \frac{QB}{2} \epsilon_{ik} q^i \right) - \frac{QB}{2} \epsilon_{kj} \dot{q}^j = 0 \\ &\implies m g_{kj} \ddot{q}^j + \frac{QB}{2} \epsilon_{ik} \dot{q}^i - \frac{QB}{2} \epsilon_{kj} \dot{q}^j = 0 \\ &\implies m \ddot{q}_k + QB \epsilon_{ik} \dot{q}^i = 0. \end{aligned}$$

De forma explícita, temos as equações de movimento

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = \omega \dot{q}_2 \\ \ddot{q}_2 = -\omega \dot{q}_1, \end{cases} \implies \begin{cases} \ddot{x} = \omega \dot{y} \\ \ddot{y} = -\omega \dot{x}, \end{cases}$$

onde $\omega = \frac{QB}{m}$.

Integrando a primeira equação em relação ao tempo no intervalo $[0, t]$, temos

$$\dot{x}(t) - \dot{x}(0) = \omega(y(t) - y(0)) \implies \dot{x}(t) = a + \omega y(t).$$

Substituindo na segunda equação, temos a equação diferencial linear não homogênea

$$\ddot{y} + \omega^2 y = -\omega a,$$

cuja solução é

$$y(t) = \alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t) - \frac{a}{\omega},$$

para constantes de integração α, β . Como $y(0) = 0$ e $\dot{y}(0) = b$, temos

$$y(t) = \frac{b}{\omega} \sin(\omega t) - \frac{a}{\omega} [1 - \cos(\omega t)].$$

Assim,

$$\dot{x}(t) = b \sin(\omega t) + a \cos(\omega t) \implies x(t) = \frac{b}{\omega} [1 - \cos(\omega t)] + \frac{a}{\omega} \sin(\omega t).$$

Deste modo, a partícula tem posição dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}_0 + \left[\frac{a}{\omega} \sin(\omega t) - \frac{b}{\omega} \cos(\omega t) \right] \mathbf{e}_x + \left[\frac{b}{\omega} \sin(\omega t) + \frac{a}{\omega} \cos(\omega t) \right] \mathbf{e}_y \\ &= \mathbf{r}_0 + \rho [\cos(\varphi - \omega t) \mathbf{e}_x + \sin(\varphi - \omega t) \mathbf{e}_y], \end{aligned}$$

onde $\mathbf{r}_0 = \frac{b}{\omega} \mathbf{e}_x - \frac{a}{\omega} \mathbf{e}_y$, $\rho = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{\omega^2}}$ e $\varphi \in [0, 2\pi]$ é tal que

$$\rho \cos \varphi = -\frac{b}{\omega} \quad \text{e} \quad \rho \sin \varphi = \frac{a}{\omega}.$$

Notemos que

$$\langle \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0, \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0 \rangle = \rho^2,$$

portanto a trajetória da partícula descreve um círculo de raio ρ centrado em \mathbf{r}_0 com frequência angular constante ω . \square

Exercício 2

Lema 3: Função energia

Para uma lagrangiana $L = L(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n, t)$, a função energia h é definida por

$$h = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \dot{q}^k - L,$$

com a propriedade

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

Demonstração. Computemos a derivada total em relação ao tempo para a função energia. Temos

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \right) \dot{q}^k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \frac{d\dot{q}^k}{dt} - \frac{\partial L}{\partial t} - \frac{\partial L}{\partial q^k} \frac{dq^k}{dt} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \frac{d\dot{q}^k}{dt} \\ &= \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^k} \right] \dot{q}^k - \frac{\partial L}{\partial t}. \end{aligned}$$

Desse modo, para uma solução das equações de Euler-Lagrange, segue que $\frac{dh}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}$. \square

Exercício 2: Energia de uma partícula em um campo eletromagnético externo

Uma partícula encontra-se na presença de um campo eletromagnético independente do tempo. Utilizando o formalismo lagrangiano, obtenha a energia do sistema.

Resolução. Pelo [Lema 1](#), a lagrangiana de uma partícula de massa m e carga Q em um campo eletromagnético externo com potencial escalar ϕ e potencial vetor A é dada por

$$L = \frac{1}{2} m g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j - Q\phi + Q g_{ij} A^i \dot{x}^j,$$

onde x^i são as suas coordenadas cartesianas e g_{ij} o tensor métrico Euclidiano, a função energia neste caso é dada por

$$\begin{aligned} h &= \left(m g_{ij} \dot{x}^i \delta_k^j + Q g_{ij} A^i \delta_k^j \right) \dot{x}^k - \left(\frac{1}{2} m g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j - Q\phi + Q g_{ij} A^i \dot{x}^j \right) \\ &= m g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k + Q g_{ik} A^i \dot{x}^k - \left(\frac{1}{2} m g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k - Q\phi + Q g_{ik} A^i \dot{x}^k \right) \\ &= \frac{1}{2} m g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k + Q\phi \\ &= \frac{1}{2} m \langle v, v \rangle + Q\phi. \end{aligned}$$

TODO: No caso em que o campo eletromagnético não depende do tempo, temos que a lagrangiana não tem dependência explícita do tempo. Dessa forma, pelo [Lema 3](#), segue que h é uma quantidade conservada. \square

Exercício 3

Exercício 3: Geodésicas do cone

Obtenha as geodésicas de um cone dado por $\theta = \alpha$ em coordenadas esféricas.

Resolução.

□

Exercício 4: Massa em uma cunha

Uma cunha de massa M repousa sobre um plano horizontal. O ângulo do plano inclinado com a horizontal é α . Um corpo de massa m é colocado sobre o plano inclinado com seu centro de massa a uma altura h deste. Desprezando o atrito e usando o formalismo lagrangiano:

- (a) obtenha a lagrangiana que descreve o sistema;
- (b) obtenha as equações de movimento;
- (c) obtenha a solução para o movimento da cunha e do corpo de massa m assumindo que no instante inicial o corpo e a cunha encontram-se parados;
- (d) há alguma quantidade conservada?

Resolução. Seja $\mathbf{R} = X\mathbf{e}_x$ a posição do vértice de ângulo α da cunha e seja

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= \mathbf{R} + h(-\sin\alpha\mathbf{e}_x + \cos\alpha\mathbf{e}_y) + d(\cos\alpha\mathbf{e}_x + \sin\alpha\mathbf{e}_y) \\ &= (X - h\sin\alpha + d\cos\alpha)\mathbf{e}_x + (h\cos\alpha + d\sin\alpha)\mathbf{e}_y\end{aligned}$$

a posição do centro de massa do corpo de massa m , que se encontra à uma altura h do plano inclinado e uma distância d do eixo ortogonal ao plano inclinado que passa pelo vértice de posição \mathbf{R} . Deste modo, a velocidade de cada corpo é

$$\dot{\mathbf{R}} = \dot{X}\mathbf{e}_x \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{r}} = (\dot{X} + \dot{d}\cos\alpha)\mathbf{e}_x + \dot{d}\sin\alpha\mathbf{e}_y.$$

Portanto, a lagrangiana que descreve o sistema é dada por

$$L = \frac{1}{2}M\dot{X}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{X}^2 + \dot{d}^2 + 2\dot{X}\dot{d}\cos\alpha) - mgd\sin\alpha,$$

em que removemos os termos constantes.

As equações de movimento do sistema são dadas pelas equações de Euler-Lagrange,

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}}\right) - \frac{\partial L}{\partial X} = 0 \implies (M+m)\ddot{X} + m\ddot{d}\cos\alpha = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{d}}\right) - \frac{\partial L}{\partial d} = 0 \implies m\ddot{d} + m\ddot{X}\cos\alpha + mg\cos\alpha = 0 \end{cases}.$$

Isolando \ddot{X} na primeira equação, encontramos

$$\ddot{X} = -\frac{m}{M+m}\ddot{d}\cos\alpha,$$

portanto o sistema de equações se torna

$$\ddot{d} = -\frac{(M+m)\cos\alpha}{M+m\sin^2\alpha}g \quad \text{e} \quad \ddot{X} = \frac{m\cos^2\alpha}{M+m\sin^2\alpha}g,$$

cujas soluções partindo do repouso é

$$d = d_0 - \frac{(M+m)\cos\alpha}{2(M+m\sin^2\alpha)}gt^2 \quad \text{e} \quad X = X_0 + \frac{m\cos^2\alpha}{2(M+m\sin^2\alpha)}gt^2,$$

em que as posições iniciais são dadas a partir de d_0 e X_0 .

Notemos que como a lagrangiana não depende explicitamente do tempo, temos que a energia do sistema,

$$E = \frac{1}{2}M\dot{X}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{X}^2 + \dot{d}^2 + 2\dot{X}\dot{d}\cos\alpha\right) + mgd\sin\alpha,$$

é uma integral de movimento. De forma semelhante, como X é uma variável cíclica, temos que o seu momento canonicamente conjugado,

$$p_X = \frac{\partial L}{\partial \dot{X}} = M\dot{X} + m\left(\dot{X} + \dot{d}\cos\alpha\right),$$

é uma outra integral de movimento, que é igual a componente e_x do momento total do sistema. \square

Exercício 5

Exercício 5: Massas oscilando em um eixo livre

Dois corpos idênticos de massa m podem mover-se sem atrito ao longo de uma haste e de forma simétrica como mostra a [Figura 1](#).

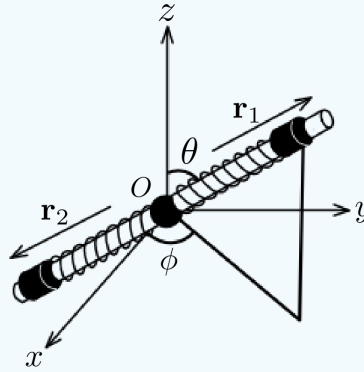


Figura 1: Sistema do [Exercício 5](#)

A massa da barra é desprezível e pode rodar livremente em torno do ponto O . Cada massa m está conectada à origem por uma mola de constante elástica $\frac{1}{2}m\omega_0^2$.

- (a) Obtenha a lagrangiana que descreve o sistema.
- (b) Obtenha as equações de movimento.
- (c) Há alguma quantidade conservada? Interprete.

Resolução.

□