

# 4302305 - Lista de Exercícios IV

Louis Bergamo Radial  
8992822

7 de maio de 2024

## Exercício 1

### Lema 1: Partícula em um campo eletromagnético externo

A lagrangiana de uma partícula de massa  $m$  e carga  $e$  em um campo eletromagnético externo definido pelo potencial escalar  $\phi$  e pelo potencial vetor  $A$  é dada por

$$L = \frac{1}{2} m g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j - e\phi + e g_{ij} A^i \dot{x}^j,$$

onde  $g_{ij}$  é o tensor métrico Euclidiano.

*Demonstração.* Uma partícula de massa  $m$  e carga  $e$  em um campo eletromagnético externo está sujeita à força de Lorentz dada por

$$F = e (E + v \times B),$$

onde  $E$  é o campo elétrico e  $B$  é o campo magnético.

Podemos definir os campos elétrico e magnético a partir de um potencial escalar  $\phi$  e um potencial vetor  $A$ ,

$$E = -\nabla\phi - \frac{\partial A}{\partial t} \quad \text{e} \quad B = \nabla \times A,$$

de modo que as equações de Maxwell ainda sejam satisfeitas. Neste caso, a força de Lorentz é dada por

$$F = e \left( -\nabla\phi - \frac{\partial A}{\partial t} + v \times (\nabla \times A) \right).$$

Notemos que

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial x^i} \dot{x}^i + \frac{\partial A}{\partial t} \implies -\frac{\partial A}{\partial t} = \langle v, \nabla \rangle A - \frac{dA}{dt}$$

e que

$$v \times (\nabla \times A) = \nabla \langle v, A \rangle - \langle v, \nabla \rangle A,$$

uma vez que  $\frac{\partial v}{\partial x^i} = 0$ . Dessa forma, segue que

$$\begin{aligned} F &= e \left( -\nabla\phi - \frac{dA}{dt} + \nabla \langle v, A \rangle \right) \\ &= e \left[ -\nabla(\phi - \langle v, A \rangle) - \frac{dA}{dt} \right]. \end{aligned}$$

Definindo o operador  $\nabla_v = e_x \frac{\partial}{\partial v_x} + e_y \frac{\partial}{\partial v_y} + e_z \frac{\partial}{\partial v_z}$  e notando que tanto  $A$  quanto  $\phi$  não dependem das velocidades, temos

$$-A = \nabla_v (\phi - \langle v, A \rangle),$$

de modo que a força de Lorentz seja dada por

$$\mathbf{F} = e \left[ -\nabla(\phi - \langle \mathbf{v}, \mathbf{A} \rangle) + \frac{d}{dt} \nabla_v (\phi - \langle \mathbf{v}, \mathbf{A} \rangle) \right].$$

Isto é, mostramos que a força de Lorentz resulta de um potencial generalizado  $U = e\phi - e\langle \mathbf{v}, \mathbf{A} \rangle$

$$F_k = -\frac{\partial U}{\partial x^k} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{x}^k} \right),$$

portanto a lagrangiana é dada por

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} m \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle - e\phi + e\langle \mathbf{v}, \mathbf{A} \rangle \\ &= \frac{1}{2} m g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j - e\phi + e g_{ij} A^i \dot{x}^j, \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. □

### Lema 2: Invariância de calibre

Os campos elétrico  $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$  e magnético  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  são invariantes por transformações de calibre,

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \nabla f \quad \text{e} \quad \tilde{\phi} = \phi - \frac{\partial f}{\partial t},$$

onde  $f$  é um campo escalar suave. Ainda, a lagrangiana

$$\tilde{L} = \frac{1}{2} m g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j - e\tilde{\phi} + e g_{ij} \tilde{A}^i \dot{x}^j$$

é equivalente à lagrangiana dada pelo [Lema 1](#).

*Demonstração.* Como todo gradiente é irrotacional, temos

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times (\mathbf{A} + \nabla f) = \nabla \times \tilde{\mathbf{A}},$$

para qualquer campo escalar diferenciável  $f$ . Ainda, para  $f$  suave, as derivadas parciais em relação às posições e ao tempo comutam, de modo que

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\ &= -\nabla\phi + \nabla \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \nabla f - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\ &= -\nabla \left( \phi + \frac{\partial f}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{A} + \nabla f) \\ &= -\nabla \tilde{\phi} - \frac{\partial \tilde{\mathbf{A}}}{\partial t}, \end{aligned}$$

como desejado.

Como determinamos a lagrangiana a partir dos campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ , é de se esperar que a invariância de calibre seja refletida nesta função também. Notemos que

$$\begin{aligned} -\tilde{\phi} + g_{ij} \tilde{A}^i \dot{x}^j &= -\phi + \frac{\partial f}{\partial t} + g_{ij} \left( A^i + g^{ik} \frac{\partial f}{\partial x^k} \right) \dot{x}^j \\ &= -\phi + g_{ij} A^i \dot{x}^j + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x^j} \dot{x}^j \\ &= -\phi + g_{ij} A^i \dot{x}^j + \frac{df}{dt}, \end{aligned}$$

portanto  $\tilde{L} = L + \frac{df}{dt}$ , com  $f$  só dependendo das posições e do tempo. Desse modo, as lagrangianas são de fato equivalentes.  $\square$

### Exercício 1: Movimento em um campo magnético uniforme

Uma partícula de massa  $m$  move-se na presença de um campo magnético constante  $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ .

- Mostre que o potencial vetor  $\mathbf{A} = \frac{B}{2}(-y\mathbf{e}_x + x\mathbf{e}_y)$  está associado a este campo magnético.
- Utilizando o formalismo Lagrangiano obtenha a equação de movimento desta partícula.
- Obtenha a trajetória desta partícula utilizando a condição inicial que  $\mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$  e que  $\mathbf{v}(0) = a\mathbf{e}_x + b\mathbf{e}_y$ , onde  $a$  e  $b$  são constantes.

*Resolução.* Notemos que

$$\nabla \times (-y\mathbf{e}_x + x\mathbf{e}_y) = 2\mathbf{e}_z,$$

portanto o potencial vetor  $\mathbf{A}$  dado é associado ao campo magnético uniforme  $\mathbf{B}$ .

Pelo [Lema 1](#), a lagrangiana de uma partícula de carga  $Q$  e massa  $m$  em um campo eletromagnético é dada por

$$L = \frac{1}{2}m\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle - Q\phi + Q\langle \mathbf{v}, \mathbf{A} \rangle,$$

onde  $\mathbf{v}$  é a velocidade da partícula e  $\phi$  é o potencial escalar. Ainda, pelo [Lema 2](#), a escolha de calibre não influencia as equações de movimento. Neste caso, como não há a presença de um campo elétrico, e como tomamos  $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 0$ , segue que  $\phi$  é constante. Desse modo, a lagrangiana pode ser escrita como

$$L(q^1, \dot{q}^1, q^2, \dot{q}^2) = \frac{1}{2}m g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j + \frac{QB}{2} \epsilon_{ij} q^i \dot{q}^j,$$

onde  $q^1 = x$ ,  $q^2 = y$ ,  $\epsilon_{ij}$  é o símbolo de Levi-Civita, e  $g_{ij}$  é o tensor métrico Euclidiano. Assim, pelas equações de Euler-Lagrange temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^k} &= 0 \implies \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}m g_{ij} \delta_k^i \dot{q}^j + \frac{1}{2}g_{ij} \dot{q}^i \delta_k^j + \frac{QB}{2} \epsilon_{ij} q^i \delta_k^j \right) - \frac{QB}{2} \epsilon_{ij} \delta_k^i \dot{q}^j = 0 \\ &\implies \frac{d}{dt} \left( m g_{kj} \dot{q}^j + \frac{QB}{2} \epsilon_{ik} q^i \right) - \frac{QB}{2} \epsilon_{kj} \dot{q}^j = 0 \\ &\implies m g_{kj} \ddot{q}^j + \frac{QB}{2} \epsilon_{ik} \dot{q}^i - \frac{QB}{2} \epsilon_{kj} \dot{q}^j = 0 \\ &\implies m \ddot{q}_k + QB \epsilon_{ik} \dot{q}^i = 0. \end{aligned}$$

De forma explícita, temos as equações de movimento

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = \omega \dot{q}_2 \\ \ddot{q}_2 = -\omega \dot{q}_1, \end{cases} \implies \begin{cases} \ddot{x} = \omega \dot{y} \\ \ddot{y} = -\omega \dot{x}, \end{cases}$$

onde  $\omega = \frac{QB}{m}$ .

Integrando a primeira equação em relação ao tempo no intervalo  $[0, t]$ , temos

$$\dot{x}(t) - \dot{x}(0) = \omega(y(t) - y(0)) \implies \dot{x}(t) = a + \omega y(t).$$

Substituindo na segunda equação, temos a equação diferencial linear não homogênea

$$\ddot{y} + \omega^2 y = -\omega a,$$

cujas soluções são

$$y(t) = \alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t) - \frac{a}{\omega},$$

para constantes de integração  $\alpha, \beta$ . Como  $y(0) = 0$  e  $\dot{y}(0) = b$ , temos

$$y(t) = \frac{b}{\omega} \sin(\omega t) - \frac{a}{\omega} [1 - \cos(\omega t)].$$

Assim,

$$\dot{x}(t) = b \sin(\omega t) + a \cos(\omega t) \implies x(t) = \frac{b}{\omega} [1 - \cos(\omega t)] + \frac{a}{\omega} \sin(\omega t).$$

Deste modo, a partícula tem posição dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}_0 + \left[ \frac{a}{\omega} \sin(\omega t) - \frac{b}{\omega} \cos(\omega t) \right] \mathbf{e}_x + \left[ \frac{b}{\omega} \sin(\omega t) + \frac{a}{\omega} \cos(\omega t) \right] \mathbf{e}_y \\ &= \mathbf{r}_0 + \rho [\cos(\varphi - \omega t) \mathbf{e}_x + \sin(\varphi - \omega t) \mathbf{e}_y], \end{aligned}$$

onde  $\mathbf{r}_0 = \frac{b}{\omega} \mathbf{e}_x - \frac{a}{\omega} \mathbf{e}_y$ ,  $\rho = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{\omega^2}}$  e  $\varphi \in [0, 2\pi]$  é tal que

$$\rho \cos \varphi = -\frac{b}{\omega} \quad \text{e} \quad \rho \sin \varphi = \frac{a}{\omega}.$$

Notemos que

$$\langle \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0, \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0 \rangle = \rho^2,$$

portanto a trajetória da partícula descreve um círculo de raio  $\rho$  centrado em  $\mathbf{r}_0$  com frequência angular constante  $\omega$ .  $\square$

## Exercício 2

### Lema 3: Função energia

Para uma lagrangiana  $L = L(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n, t)$ , a função energia  $h$  é definida por

$$h = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \dot{q}^k - L,$$

com a propriedade

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

*Demonstração.* Computemos a derivada total em relação ao tempo para a função energia. Temos

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \right) \dot{q}^k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \frac{d\dot{q}^k}{dt} - \frac{\partial L}{\partial t} - \frac{\partial L}{\partial q^k} \frac{dq^k}{dt} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \frac{d\dot{q}^k}{dt} \\ &= \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^k} \right] \dot{q}^k - \frac{\partial L}{\partial t}. \end{aligned}$$

Desse modo, para uma solução das equações de Euler-Lagrange, segue que  $\frac{dh}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}$ .  $\square$

### Exercício 2: Energia de uma partícula em um campo eletromagnético externo

Uma partícula encontra-se na presença de um campo eletromagnético independente do tempo. Utilizando o formalismo lagrangiano, obtenha a energia do sistema.

*Resolução.* Pelo [Lema 1](#), a lagrangiana de uma partícula de massa  $m$  e carga  $Q$  em um campo eletromagnético externo com potencial escalar  $\phi$  e potencial vetor  $A$  é dada por

$$L = \frac{1}{2} m g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j - Q\phi + Q g_{ij} A^i \dot{x}^j,$$

onde  $x^i$  são as suas coordenadas cartesianas e  $g_{ij}$  o tensor métrico Euclidiano, a função energia neste caso é dada por

$$\begin{aligned} h &= \left( m g_{ij} \dot{x}^i \delta_k^j + Q g_{ij} A^i \delta_k^j \right) \dot{x}^k - \left( \frac{1}{2} m g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j - Q\phi + Q g_{ij} A^i \dot{x}^j \right) \\ &= m g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k + Q g_{ik} A^i \dot{x}^k - \left( \frac{1}{2} m g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k - Q\phi + Q g_{ik} A^i \dot{x}^k \right) \\ &= \frac{1}{2} m g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k + Q\phi \\ &= \frac{1}{2} m \langle v, v \rangle + Q\phi. \end{aligned}$$

**TODO:** No caso em que o campo eletromagnético não depende do tempo, temos que a lagrangiana não tem dependência explícita do tempo. Dessa forma, pelo [Lema 3](#), segue que  $h$  é uma quantidade conservada.  $\square$