

# 4302305 - Lista de exercícios 2

Louis Bergamo Radial  
8992822

9 de abril de 2024

## Lema 1: Trajetória de um potencial central

Um sistema com massa reduzida  $\mu$  submetido a um potencial central  $U = U(r)$  tem trajetória definida pela integração da relação

$$\frac{L}{r^2 \sqrt{2\mu \left( E - U(r) - \frac{L^2}{2\mu r^2} \right)}} \frac{dr}{d\theta} = \pm 1, \quad (1)$$

onde  $L = \mu r^2 \dot{\theta}$  é o momento angular e  $E$  é a energia do sistema.

*Demonstração.* Segue da conservação do momento angular em sistemas com potencial central que

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{\mu r^2}, \quad (2)$$

ou então, ao multiplicar  $\frac{dt}{d\theta}$  em ambos os lados da equação e utilizando a regra da cadeia,

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{\mu r^2}{L}. \quad (3)$$

Pela conservação da energia do sistema, temos

$$\frac{1}{2}\mu \left\langle \frac{d\vec{r}}{dt}, \frac{d\vec{r}}{dt} \right\rangle + U(r) = E. \quad (4)$$

Em coordenadas polares, temos  $\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta$ , portanto

$$\left\langle \frac{d\vec{r}}{dt}, \frac{d\vec{r}}{dt} \right\rangle = \langle \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta, \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta \rangle \quad (5)$$

$$= \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 \quad (6)$$

$$= \dot{r}^2 + r^2 \left( \frac{L}{\mu r^2} \right)^2 \quad (7)$$

$$= \dot{r}^2 + \frac{L^2}{\mu^2 r^2}. \quad (8)$$

Assim, a equação da energia do sistema pode ser escrita como

$$E = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} + U(r). \quad (9)$$

Isolando  $\dot{r}$ , obtemos

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu}} \sqrt{E - U(r) - \frac{L^2}{2\mu r^2}}. \quad (10)$$

Multiplicando ambos os lados por  $\frac{dt}{d\theta}$  e utilizando a regra da cadeia, obtemos

$$\frac{dr}{d\theta} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu}} \sqrt{E - U(r) - \frac{L^2}{2\mu r^2}} \frac{dt}{d\theta} \quad (11)$$

$$= \pm \frac{r^2}{L} \sqrt{2\mu \left( E - U(r) - \frac{L^2}{2\mu r^2} \right)}. \quad (12)$$

Dividindo ambos os lados pelo lado direito, obtemos a expressão dada no [Lema 1](#).  $\square$

## Exercício 2

Considere um corpo submetido a um potencial central

$$U(r) = \frac{1}{2}\mu\omega^2 r^2.$$

**(a) Descreva qualitativamente os movimentos possíveis.**

Consideremos o potencial efetivo

$$U_{\text{ef}}(r) = \frac{1}{2}\mu\omega^2 r^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2}. \quad (13)$$

Temos

$$\frac{dU_{\text{ef}}}{dr} = \mu\omega^2 r - \frac{L^2}{\mu r^3} \quad \text{e} \quad \frac{d^2U_{\text{ef}}}{dr^2} = \mu\omega^2 + 3\frac{L^2}{\mu r^4}. \quad (14)$$

Notemos que  $\frac{dU_{\text{ef}}}{dr} = 0$  apenas para  $r = r_0 \equiv \sqrt{\frac{L}{\mu\omega}}$ , já que  $r > 0$ . Ainda, temos

$$U_{\text{ef}}(r_0) \equiv U_0 = L\omega \quad \text{e} \quad \left( \frac{d^2U_{\text{ef}}}{dr^2} \right)_{r=r_0} = 4\mu\omega^2 > 0, \quad (15)$$

isto é, o valor mínimo do potencial efetivo é  $U_0$ , que ocorre em  $r = r_0$ .

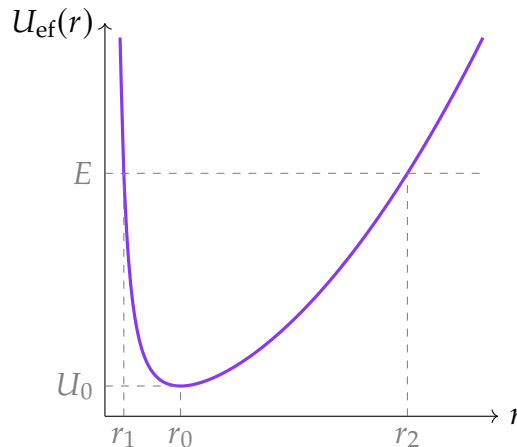


Figura 1: Potencial efetivo para o potencial central  $U(r) = \frac{1}{2}\mu\omega^2 r^2$ .

Substituindo  $\mu = \frac{L}{\omega r_0^2}$  na expressão do potencial efetivo, podemos escrever

$$U_{\text{ef}}(r) = \frac{U_0}{2} \left[ \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 + \left( \frac{r}{r_0} \right)^{-2} \right]. \quad (16)$$

Nesta forma é fácil ver que se  $U_{\text{ef}}(r_1) = U_{\text{ef}}(r_2)$ , então  $r_1 = r_2$  ou  $r_1 r_2 = r_0^2$ . Desta forma, dada uma energia  $E \geq U_0$  do sistema, ou a trajetória é circular, no caso de  $E = U_0$ , ou o movimento é oscilatório entre os pontos de retorno  $r_1$  e  $r_2$ , que satisfazem a relação descrita anteriormente e são dados por

$$r_1 = r_0 \sqrt{\frac{E}{U_0} - \sqrt{\left( \frac{E}{U_0} \right)^2 - 1}} \quad \text{e} \quad r_2 = r_0 \sqrt{\frac{E}{U_0} + \sqrt{\left( \frac{E}{U_0} \right)^2 - 1}}. \quad (17)$$

Assim, para órbitas não circulares sempre há dois pontos de retorno distintos, portanto o movimento é sempre oscilatório.

**(b) Dada a energia do corpo E, obtenha a sua trajetória.**

Pelo [Lema 1](#), temos

$$\pm(\theta - \theta_i) = \frac{L}{\sqrt{\mu}} \int_{\theta_i}^{\theta} d\varphi \frac{1}{r^2 \sqrt{2E - U_0 \left[ \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 + \left( \frac{r}{r_0} \right)^{-2} \right]}} \frac{dr}{d\varphi}, \quad (18)$$

para um ângulo inicial  $\theta_i$ . Utilizando que  $\frac{L}{\sqrt{\mu}} = r_0 \sqrt{U_0}$  e a substituição de variáveis  $r = r(\varphi)$ , obtemos

$$\pm(\theta - \theta_i) = \int_{r_i}^{r(\theta)} \frac{r_0 dR}{R^2} \sqrt{\frac{U_0}{2E - U_0 \left[ \left( \frac{R}{r_0} \right)^2 + \left( \frac{R}{r_0} \right)^{-2} \right]}}, \quad (19)$$

onde  $r_i = r(\theta_i)$ . Com a substituição de variáveis  $\rho = \frac{r_0}{r}$ , temos

$$\pm(\theta - \theta_i) = - \int_{\frac{r_0}{r_i}}^{\frac{r_0}{r(\theta)}} \frac{d\rho}{\sqrt{2\frac{E}{U_0} - \rho^2 - \rho^{-2}}} \quad (20)$$

$$= - \int_{\frac{r_0}{r_i}}^{\frac{r_0}{r(\theta)}} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{2\lambda\rho^2 - \rho^4 - 1}}, \quad (21)$$

onde  $\lambda = \frac{E}{U_0}$ . Notando que

$$2\lambda\rho^2 - \rho^4 - 1 = \lambda^2 - 1 - (\rho^2 - \lambda)^2 \quad (22)$$

$$= (\lambda^2 - 1) \left[ 1 - \left( \frac{\rho^2 - \lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \right)^2 \right], \quad (23)$$

segue que

$$\pm(\theta - \theta_i) = - \int_{\frac{r_0}{r_i}}^{\frac{r_0}{r(\theta)}} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \left[ 1 - \left( \frac{\rho^2 - \lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (24)$$

Com a substituição de variáveis  $\xi = \frac{\rho^2 - \lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 1}}$ , obtemos

$$\pm 2(\theta - \theta_i) = - \int_{\xi\left(\frac{r_0}{r_i}\right)}^{\xi\left(\frac{r_0}{r(\theta)}\right)} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \psi^2}} = \arccos \left( \frac{\left( \frac{r_0}{r(\theta)} \right)^2 - \lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \right) - \arccos \left( \frac{\left( \frac{r_0}{r_i} \right)^2 - \lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \right). \quad (25)$$

Definimos

$$\phi = 2\theta_i \mp \arccos\left(\frac{\left(\frac{r_0}{r_i}\right)^2 - \lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 1}}\right) \quad (26)$$

respeitando a escolha de sinal na equação anterior. Desse modo,

$$\cos(2\theta - \phi) = \frac{\left(\frac{r_0}{r(\theta)}\right)^2 - \lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 1}}. \quad (27)$$

Isolando  $r(\theta)$ , obtemos a equação da trajetória

$$r(\theta) = r_0 \left[ \frac{E}{U_0} + \sqrt{\left(\frac{E}{U_0}\right)^2 - 1 \cos(2\theta - \phi)} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (28)$$

$$= r_0 \sqrt{\frac{U_0}{E}} \left[ 1 + \sqrt{1 - \left(\frac{U_0}{E}\right)^2 \cos(2\theta - \phi)} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (29)$$

$$= \frac{L}{\sqrt{\mu E}} \left[ 1 + \sqrt{1 - \left(\frac{L\omega}{E}\right)^2 \cos(2\theta - \phi)} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (30)$$

para este potencial central.

## Exercício 3

Considere um corpo submetido a um potencial central

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}$$

onde  $\alpha, \beta > 0$ .

**(a) Existem órbitas circulares? Qual a condição para que isso ocorra?**

Consideremos o potencial efetivo

$$U_{\text{ef}}(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2} + \frac{L^2}{2\mu r^2} \quad (31)$$

$$= -\alpha r^{-1} + \frac{2\mu\beta + L^2}{2\mu} r^{-2} \quad (32)$$

Temos

$$\frac{dU_{\text{ef}}}{dr} = \alpha r^{-2} - \frac{2\mu\beta + L^2}{\mu} r^{-3} \quad \text{e} \quad \frac{d^2U_{\text{ef}}}{dr^2} = -\alpha r^{-3} + 3\frac{2\mu\beta + L^2}{\mu} r^{-4}. \quad (33)$$

Notemos que  $\frac{dU_{\text{ef}}}{dr} = 0$  apenas para  $r = r_0 \equiv \frac{2\mu\beta + L^2}{\mu\alpha}$ . Ainda, temos

$$U_{\text{ef}}(r_0) \equiv U_0 = -\frac{\alpha}{2r_0} \quad \text{e} \quad \left(\frac{d^2U_{\text{ef}}}{dr^2}\right)_{r=r_0} = \alpha r_0^{-3} > 0, \quad (34)$$

isto é, o valor mínimo do potencial efetivo é  $U_0$ , que ocorre em  $r = r_0$ .

Substituindo  $\alpha r_0 = \frac{2\beta\mu + L^2}{\mu}$  na expressão do potencial efetivo, podemos escrever

$$U_{\text{ef}}(r) = -\alpha r^{-1} + \frac{\alpha r_0}{2} r^{-2} \quad (35)$$

$$= -\frac{\alpha}{r_0} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-1} + \frac{\alpha r_0}{2r_0^2} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-2} \quad (36)$$

$$= U_0 \left[ 2 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-1} - \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-2} \right]. \quad (37)$$

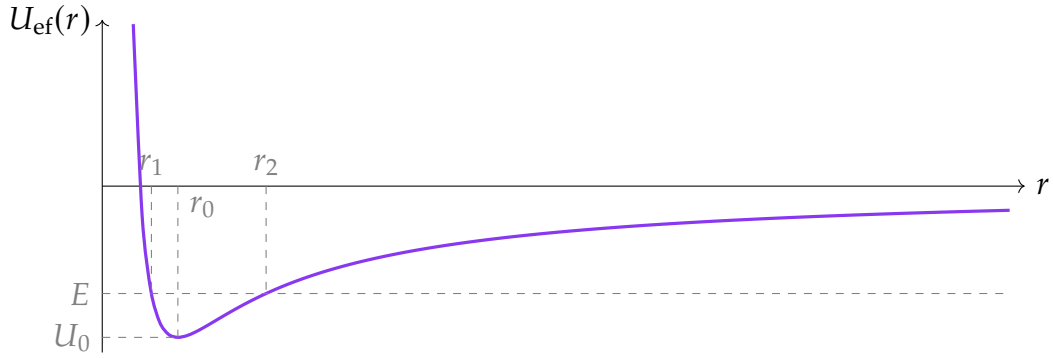


Figura 2: Potencial efetivo para o potencial central  $U(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}$ .

Se o sistema tiver energia total  $E \geq U_0$ , um ponto de retorno satisfaz

$$U_{\text{ef}}(r) = E \implies \frac{\lambda r^2 - 2r_0 r + r_0^2}{r^2} = 0, \quad (38)$$

com  $\lambda = \frac{E}{U_0}$ . Caso  $\lambda = 0$ , há apenas um ponto de retorno em  $r = \frac{r_0}{2}$ , de modo que a trajetória não é limitada. Caso  $\lambda \neq 0$ , temos

$$r = \frac{r_0}{1 \pm \epsilon}, \quad (39)$$

onde  $\epsilon = \sqrt{1 - \lambda} \neq 1$ . No caso em que  $E < 0$ , temos  $1 > \epsilon \geq 0$ , portanto há dois pontos de retorno

$$r_1 = \frac{r_0}{1 + \epsilon} \quad \text{e} \quad r_2 = \frac{r_0}{1 - \epsilon}, \quad (40)$$

de modo que a trajetória é limitada, com o caso especial de  $E = U_0$ , em que a trajetória é circular  $r_1 = r_2 = r_0$ . No caso em que  $E > 0$ , temos  $\epsilon > 1$ , de modo que há apenas um ponto de retorno

$$r = \frac{r_0}{1 + \epsilon}, \quad (41)$$

uma vez que  $r > 0$ , portanto a trajetória não é limitada.

**(b) Dada a energia do corpo  $E < 0$ , obtenha a sua trajetória.**

Pelo [Lema 1](#), temos

$$\pm d\theta = \frac{L}{\sqrt{2\mu}} \cdot \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - 2U_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-1} + U_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-2}}} \quad (42)$$

$$= -\frac{L}{\sqrt{2\mu r_0^2}} \cdot \frac{d\rho}{\sqrt{E - 2U_0 \rho + U_0 \rho^2}} \quad (43)$$

$$= -\frac{L}{\sqrt{\mu \alpha r_0}} \cdot \frac{d\rho}{\sqrt{2\rho - \rho^2 - \lambda}} \quad (44)$$

onde  $\rho = \frac{r_0}{r}$ . Recordando que  $\mu\alpha r_0 = 2\mu\beta + L^2$  e notando que

$$2\rho - \rho^2 - \lambda = \epsilon^2 - (\rho - 1)^2 \quad (45)$$

$$= \epsilon^2 \left[ 1 - \left( \frac{\rho - 1}{\epsilon} \right)^2 \right], \quad (46)$$

obtemos

$$\pm \sqrt{1 + \frac{2\mu\beta}{L^2}} d\theta = -\frac{d\rho}{\epsilon} \left[ 1 - \left( \frac{\rho - 1}{\epsilon} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (47)$$

$$= -\frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}, \quad (48)$$

com  $\xi = \frac{\rho - 1}{\epsilon}$ .

Integrando e fazendo as devidas substituições, segue que

$$\pm \sqrt{1 + \frac{2\mu\beta}{L^2}} (\theta - \theta_i) = \arccos \left( \frac{\frac{r_0}{r(\theta)} - 1}{\epsilon} \right) - \arccos \left( \frac{\frac{r_0}{r_i} - 1}{\epsilon} \right), \quad (49)$$

onde  $r(\theta) = r_i$ . Seja

$$\phi = \sqrt{1 + \frac{2\mu\beta}{L^2}} \theta_i \mp \arccos \left( \frac{\frac{r_0}{r_i} - 1}{\epsilon} \right), \quad (50)$$

respeitando a escolha de sinal na [Equação \(49\)](#), de modo que

$$\frac{\frac{r_0}{r(\theta)} - 1}{\epsilon} = \cos \left( \sqrt{1 + \frac{2\mu\beta}{L^2}} \theta - \phi \right). \quad (51)$$

Isolando  $r(\theta)$ , obtemos a trajetória

$$r(\theta) = \frac{r_0}{1 + \epsilon \cos \left( \sqrt{1 + \frac{2\mu\beta}{L^2}} \theta - \phi \right)} \quad (52)$$

$$= \frac{\frac{2\beta\mu + L^2}{\mu\alpha}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2E(2\beta\mu + L^2)}{\mu\alpha^2}} \cos \left( \sqrt{1 + \frac{2\mu\beta}{L^2}} \theta - \phi \right)} \quad (53)$$

para este potencial.

## Exercício 4

No potencial do problema 3, considere que o termo  $r^{-2}$  é muito menor que o termo de Kepler. Mostre que a velocidade de precessão da órbita é

$$\dot{\Omega} = \frac{2\pi\mu\beta}{L^2 T}$$

onde  $L$  é o momento angular e  $T$  o período. O termo extra na forma  $r^{-2}$  parece muito com a barreira centrífuga. Por que esse termo causa a precessão da órbita?

O teorema de Bertrand garante que os únicos potenciais centrais para os quais toda órbita limitada é fechada são os potenciais de Kepler e do oscilador harmônico radial

$$U_{\text{Kepler}}(r) = -\alpha r^{-1} \quad \text{e} \quad U_{\text{harmônico}} = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2. \quad (54)$$

Dessa forma, apesar do termo adicional em relação ao potencial de Kepler ser pequeno e do mesmo tipo de função da barreira centrífuga, não é necessário que uma órbita limitada seja fechada para este sistema.

Após um período, a coordenada radial deve retornar ao seu valor inicial. Neste caso, da [Equação \(49\)](#), devemos ter

$$\sqrt{1 + \frac{2\mu\beta}{L^2}} (\theta - \theta_i) = \pm 2\pi \implies \theta - \theta_i = \frac{\pm 2\pi}{\sqrt{1 + \frac{2\mu\beta}{L^2}}}. \quad (55)$$

No caso em que  $\sqrt{1 + \frac{2\mu\beta}{L^2}} \in \mathbb{Q}$ , a órbita para  $U_0 < E < 0$  será fechada, visto que após um número inteiro de períodos a variação angular será um múltiplo inteiro de  $2\pi$ , como garante a [Equação \(55\)](#). Em contrapartida, se  $\sqrt{1 + \frac{2\mu\beta}{L^2}} \notin \mathbb{Q}$ , não existe um número inteiro de períodos que torna a variação angular num múltiplo inteiro de  $2\pi$ , logo não existem dois instantes distintos em que os pares de coordenadas  $r$  e  $\theta$  são os mesmos, isto é, a órbita não pode ser fechada.

Tornemos nossa atenção para o caso em que a órbita não pode ser fechada. Se a constante  $\beta$  é pequena, a variação entre o ângulo final e o ângulo inicial deve ser próxima de  $2\pi$ , isto é,

$$\theta - \theta_i = \pm(2\pi - \dot{\Omega}T), \quad (56)$$

com  $|\dot{\Omega}|T \ll 2\pi$ , onde  $T$  é o período. Assim,

$$2\pi - \dot{\Omega}T = \frac{2\pi}{\sqrt{1 + \frac{2\mu\beta}{L^2}}} \implies \dot{\Omega} = \frac{2\pi}{T} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2\mu\beta}{L^2}}} \right) \quad (57)$$

$$\implies \dot{\Omega} \approx \frac{2\pi\mu\beta}{L^2 T}, \quad (58)$$

onde foi utilizada a aproximação

$$1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2\mu\beta}{L^2}}} \approx \frac{\mu\beta}{L^2} + O\left(\frac{\mu^2\beta^2}{L^4}\right). \quad (59)$$

## Exercício 5

**No problema de Kepler  $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$  com  $\alpha > 0$ , obtenha as soluções com energia positiva.**

O potencial efetivo no problema de Kepler é dado por

$$U_{\text{ef}}(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2}.$$

Podemos obter o ponto  $r_0$  que minimiza o potencial efetivo tomando  $\beta = 0$  nos resultados do exercício 3, então definimos

$$r_0 = \frac{L^2}{\mu\alpha} \quad \text{e} \quad U_0 = -\frac{\alpha}{2r_0}$$

de modo que o potencial efetivo pode ser escrito como

$$U_{\text{ef}}(r) = U_0 \left[ 2 \left( \frac{r}{r_0} \right)^{-1} - \left( \frac{r}{r_0} \right)^{-2} \right],$$

como antes. Desse modo, a trajetória é dada por

$$r(\theta) = \frac{r_0}{1 + \epsilon \cos(\theta - \phi)},$$

onde  $\epsilon = \sqrt{1 - \frac{E}{U_0}}$ , repetindo os argumentos do exercício anterior.

Para simplificar, tomamos  $\phi = 0$ . Para energias positivas temos  $\epsilon > 1$ , portanto

$$\begin{aligned} (1 + \epsilon \cos \theta)r &= r_0 \implies r = r_0 - \epsilon x \\ \implies x^2 + y^2 &= r_0^2 + \epsilon^2 x^2 - 2r_0 \epsilon x \\ \implies \left( \frac{y}{r_0} \right)^2 &= 1 + (\epsilon^2 - 1) \left( \frac{x}{r_0} \right)^2 - 2\epsilon \frac{x}{r_0} \\ \implies \left( \frac{y}{r_0 \sqrt{\epsilon^2 - 1}} \right)^2 &= \frac{1}{\epsilon^2 - 1} + \left( \frac{x}{r_0} \right)^2 - 2\frac{\epsilon}{\epsilon^2 - 1} \frac{x}{r_0} \\ \implies \frac{1}{(\epsilon^2 - 1)^2} + \left( \frac{y}{r_0 \sqrt{\epsilon^2 - 1}} \right)^2 &= \left( \frac{x}{r_0} - \frac{\epsilon}{\epsilon^2 - 1} \right)^2 \\ \implies \left( \frac{(\epsilon^2 - 1)x}{r_0} - \epsilon \right)^2 - \left( \frac{y \sqrt{\epsilon^2 - 1}}{r_0} \right)^2 &= 1 \\ \implies \left( \frac{x - \frac{\epsilon r_0}{\epsilon^2 - 1}}{\frac{r_0}{\epsilon^2 - 1}} \right)^2 - \left( \frac{y}{\frac{r_0}{\sqrt{\epsilon^2 - 1}}} \right)^2 &= 1. \end{aligned}$$

Assim, para  $E > 0$ , a trajetória descreve uma hipérbole.

## Exercício 6

**Obtenha a equação da trajetória de soluções com energia negativa para uma partícula de massa  $\mu$  na presença do potencial central  $U(r) = -\frac{\alpha}{r^2}$ .**

O potencial efetivo para este sistema é

$$U_{\text{ef}}(r) = -\frac{\alpha}{r^2} + \frac{L^2}{2\mu r^2} = -\frac{2\mu\alpha - L^2}{2\mu r^2}.$$

Para energias negativas, devemos ter  $2\mu\alpha - L^2 > 0$ , então pelo [Lema 1](#), segue que

$$\begin{aligned} \pm d\theta &= \frac{L}{r^2 \sqrt{2\mu(\beta^2 r^{-2} - |E|)}} dr \\ &= \frac{L}{r^2 \sqrt{2\mu|E| \left( \frac{\beta^2}{|E|} r^{-2} - 1 \right)}} dr \end{aligned}$$

onde  $\beta^2 = \frac{2\mu\alpha - L^2}{2\mu}$ . Com a mudança de variáveis  $\rho = \frac{\beta}{\sqrt{|E|}} r^{-1} > 1$ , temos

$$\pm d\theta = -\frac{L}{\sqrt{2\mu\beta^2}} \frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2 - 1}},$$



portanto

$$\operatorname{arcosh}\left(\frac{\beta r^{-1}}{\sqrt{|E|}}\right) = \sqrt{\frac{L^2}{2\mu\alpha - L^2}}(\phi - \theta),$$

em que  $\phi$  é um valor que satisfaz as condições iniciais. Isolando  $r$ , obtemos

$$r(\theta) = \sqrt{\frac{2\mu\alpha - L^2}{2\mu|E|}} \operatorname{sech}\left(\sqrt{\frac{L^2}{2\mu\alpha - L^2}}(\theta - \phi)\right).$$