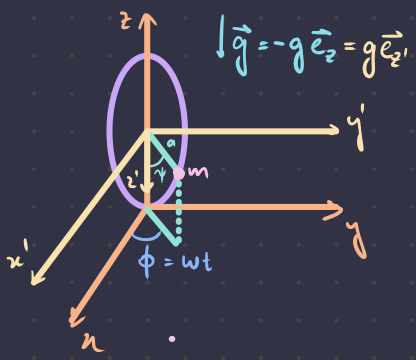
Mecânica I

Exercícios para P1

1.



Consideremos os versores de coordenadas esféricas

$$\vec{e}_r = \cos\phi \sin\psi \, \vec{e}_{x'} + \sin\phi \sin\psi \, \vec{e}_{y'} + \cos\psi \, \vec{e}_{z'}$$

$$\vec{e}_\psi = \cos\phi \cos\psi \, \vec{e}_{x'} + \sin\phi \cos\psi \, \vec{e}_{y'} - \sin\psi \, \vec{e}_{z'} = \frac{\partial}{\partial\psi}\vec{e}_r$$

$$\vec{e}_\phi = -\sin\phi \, \vec{e}_{x'} + \cos\phi \, \vec{e}_{y'} = \frac{1}{\sin\psi}\frac{\partial}{\partial\phi}\vec{e}_r .$$

A posição da conta no sistema de coordenadas S' é $\vec{r}' = a\vec{e}_r$, então sua velocidade é dada por

$$\dot{\vec{r}}' = a\frac{d}{dt}\vec{e}_r = a\left(\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \psi}\frac{d\psi}{dt} + \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \phi}\frac{d\phi}{dt}\right) = a\left(\dot\psi\,\vec{e}_\psi + \dot\phi \sin\psi \, \vec{e}_\phi\right).$$

Desse modo, sua energia cinética é

$$T = \frac{1}{2} m a^2 \left(\dot\psi^2 + \dot\phi^2 \sin^2\psi\right).$$

Utilizando a referência $z' = a$ para o potencial, temos

$$U = mg(a - z') = mga(1 - \cos\psi).$$

A lagrangiana do sistema é

$$L(\psi, \dot\psi, t) = \frac{1}{2} m a^2 \left(\dot\psi^2 + \omega^2 \sin^2\psi\right) + mga\cos\psi,$$

onde os termos constantes foram removidos e foi utilizado o vínculo $\phi = \omega t$.
↳ é vínculo, né?

Assim, temos

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot\psi}\right] - \frac{\partial L}{\partial \psi} = 0 \Rightarrow ma^2\ddot\psi - ma^2\omega^2 \sin\psi\cos\psi - mga\sin\psi = 0$$

$$\Rightarrow a\ddot\psi + (g - a\omega^2\cos\psi)\sin\psi = 0.$$

Notemos que as soluções constantes $\psi = 0$, $\psi = \arccos\left(\frac{g}{a\omega^2}\right)$ e $\psi = \pi$ satisfazem a equação de movimento. De fato, nestes casos vale $(g - a\omega^2\cos\psi)\sin\psi = 0$ e $\ddot\psi = 0$, portanto são soluções da equação de movimento.

Seja $\psi_0 \in \{0, \arccos(\frac{g}{a\omega^2}), \pi\}$ um ponto de equilíbrio, e consideremos uma solução do tipo $\tilde\psi = \psi_0 + \delta\psi$, então

$$(g - a\omega^2\cos\tilde\psi)\sin\tilde\psi = \delta\psi \cdot \frac{d}{d\psi}\Big|_{\psi=\psi_0}(g - a\omega^2\cos\psi)\sin\psi$$

$$= \delta\psi \cdot (g\cos\psi_0 - a\omega^2\cos 2\psi_0),$$

de modo que a equação de movimento se torna

$$\delta\ddot\psi + \left(\frac{g}{a}\cos\psi_0 - \omega^2\cos 2\psi_0\right)\delta\psi = 0.$$

Isto é, a frequência de oscilação de pequenas amplitudes é

$$\omega_0(\psi_0) = \sqrt{\frac{g}{a}\cos\psi_0 - \omega^2\cos 2\psi_0},$$

válido para $\frac{g}{a}\cos\psi_0 - \omega^2 \cos 2\psi_0 > 0$. Temos em torno de $\psi_0 = 0$,

$$g - a\omega^2 > 0 \Longrightarrow \omega_0(0) = \sqrt{\frac{g}{a} - \omega^2},$$

em torno de $\psi_0 = \arccos\left(\frac{g}{a\omega^2}\right)$,

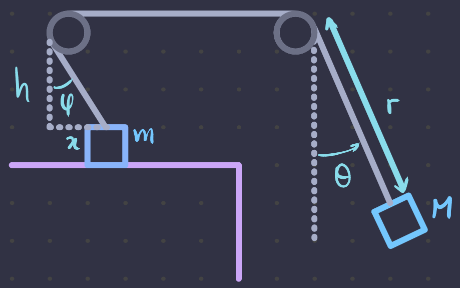
$$a\omega^2 - g > 0 \Longrightarrow \omega_0\left(\arccos\left(\frac{g}{a\omega^2}\right)\right) = \sqrt{\omega^2 - \frac{g^2}{a^2\omega^2}} = \frac{1}{a|\omega|}\sqrt{(a\omega^2 - g)(a\omega^2 + g)},$$

e em torno de $\psi_0 = \pi$, não existe valor de ω tal que

$$-\frac{g}{a} - \omega^2 > 0,$$

portanto $\omega_0(\pi)$ não está definido. Resumindo, $\psi = \pi$ é um ponto de equilíbrio instável, $\psi = 0$ é um ponto de equilíbrio estável com pequenas oscilações de frequência $\sqrt{\frac{g}{a} - \omega^2}$ no caso em que $g > a\omega^2$, e $\psi = \arccos\left(\frac{g}{a\omega^2}\right)$ é um ponto de equilíbrio estável com pequenas oscilações de frequência $\sqrt{\omega^2 - \frac{g^2}{a^2\omega^2}}$ no caso em que $g < a\omega^2$.

3.



Para um fio inextensível temos

$$\frac{d}{dt}(h\sec\varphi + r) = 0 \Longrightarrow \exists \ell > 0 : h\sec\varphi + r = \ell,$$

onde $\operatorname{tg}\varphi = \frac{x}{h}$. Neste caso, a energia cinética do sistema é

$$T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} M(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$
$$= \frac{1}{2} m h^2 \dot{\varphi}^2 \sec^4\varphi + \frac{1}{2} M\left[h^2\dot{\varphi}^2 \operatorname{tg}^2\varphi \sec^2\varphi + (\ell - h\sec\varphi)^2\dot{\theta}^2\right]$$

e a energia potencial é

$$U = Mg(\ell - h - r\cos\theta) = Mg\ell(1 - \cos\theta) - Mgh(1 - \cos\theta\sec\varphi),$$

onde a energia potencial gravitacional da massa m foi ignorada por ser constante. Desse modo, removendo outros termos constantes, a lagrangiana do sistema é

$$L = \frac{1}{2} m h^2\dot{\varphi}^2 \sec^4\varphi + \frac{1}{2} M\left[h^2\dot{\varphi}^2(\sec^4\varphi - \sec^2\varphi) + (\ell - h\sec\varphi)^2\dot{\theta}^2\right] + Mg\ell\cos\theta - Mgh\sec\varphi\cos\theta$$
$$= \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 h^2\left[(M+m)\sec^4\varphi - M\sec^2\varphi\right] - Mgh\sec\varphi\cos\theta + \frac{1}{2} M(\ell - h\sec\varphi)^2\dot{\theta}^2 + Mg\ell\cos\theta.$$

A partir das equações de Euler-Lagrange, obtemos as equações de movimento

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right] - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left[M\dot{\theta}(\ell - h\sec\varphi)^2\right] + Mg\ell\sin\theta - Mgh\sec\varphi\cos\theta = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{(\ell - h\sec\varphi)\ddot{\theta} - 2h\dot{\theta}\dot{\varphi}\sec\varphi\operatorname{tg}\varphi + g\sin\theta = 0}$$

e

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right] - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0 \Rightarrow h^2\frac{d}{dt}\left\{\dot{\varphi}\left[(M+m)\sec^4\varphi - M\sec^2\varphi\right]\right\} - \frac{h^2\dot{\varphi}^2}{2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[(M+m)\sec^4\varphi - M\sec^2\varphi\right] + Mgh\sec\varphi\operatorname{tg}\varphi\cos\theta - \frac{M\dot{\theta}^2}{2}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\ell - h\sec\varphi)^2 = 0$$

$$\Rightarrow h^2\ddot{\varphi}\left[(M+m)\sec^4\varphi - M\sec^2\varphi\right] + \frac{h^2\dot{\varphi}^2}{2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[(M+m)\sec^4\varphi - M\sec^2\varphi\right] + Mgh\sec\varphi\operatorname{tg}\varphi\cos\theta + Mh\dot{\theta}^2(\ell - h\sec\varphi)\sec\varphi\operatorname{tg}\varphi = 0$$

$$\Rightarrow h\ddot{\varphi}\left[(M+m)\sec^4\varphi - M\sec^2\varphi\right] + h\dot{\varphi}^2\left[2(M+m)\sec^2\varphi - M\right]\sec^2\varphi\operatorname{tg}\varphi + Mg\sec\varphi\operatorname{tg}\varphi\cos\theta + M\dot{\theta}^2(\ell - h\sec\varphi)\sec\varphi\operatorname{tg}\varphi = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{h\ddot{\varphi}\left[(M+m)\sec^2\varphi - M\right] + h\dot{\varphi}^2\left[2(M+m)\sec^2\varphi - M\right]\operatorname{tg}\varphi + Mg\sin\varphi\cos\theta + M\dot{\theta}^2(\ell - h\sec\varphi)\sin\varphi = 0.}$$

4. Para o pêndulo esférico temos

$$L = \frac{1}{2}m\left(r^2\dot\theta^2 + r^2\dot\phi^2\sin^2\theta\right) - mgr\cos\theta$$

como a lagrangiana do sistema. Desse modo, as equações de movimento são

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial\dot\phi}\right] - \frac{\partial L}{\partial\phi} = 0 \Longrightarrow \frac{d}{dt}\left[mr^2\dot\phi\sin^2\theta\right] = 0 \Longrightarrow \boxed{\ddot\phi\sin^2\theta + 2\dot\phi\dot\theta\sin\theta\cos\theta = 0,}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}\right] - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0 \Longrightarrow \boxed{r\ddot\theta - r\dot\phi^2\sin\theta\cos\theta - g\sin\theta = 0.}$$

Como ϕ é uma variável cíclica, a componente z do momento angular, $J_z = mr^2\dot\phi\sin^2\theta$, é conservada. Além disso, como a lagrangiana não depende explicitamente do tempo, a energia $H = \frac{1}{2}m\left(r^2\dot\theta^2 + r^2\dot\phi^2\sin^2\theta\right) + mgr\cos\theta$ é conservada.

Desse modo, a equação de movimento para θ pode ser escrita como

$$mr^2\ddot\theta = \frac{J_z^2}{mr^2}\csc^2\theta\cot\theta + mgr\sin\theta = -\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{J_z^2}{2mr^2\sin^2\theta} + mgr\cos\theta\right].$$

Isto é, podemos definir o potencial efetivo $V_{ef}(\theta) = \frac{J_z^2}{2mr^2\sin^2\theta} + mgr\cos\theta$, donde segue

$$mr^2\ddot\theta = -\frac{\partial}{\partial\theta}V_{ef}(\theta) \quad \text{e} \quad H = \frac{1}{2}mr^2\dot\theta^2 + V_{ef}(\theta).$$

Notemos que um ponto crítico θ_0 de $V_{ef}(\theta)$ satisfaz

$$\frac{\partial}{\partial\theta}V_{ef}\Big|_{\theta=\theta_0} = 0 \Longrightarrow J_z^2\cos\theta_0 = -m^2gr^3\sin^4\theta_0,$$

portanto $\theta_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Ainda, temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}V_{ef}\Big|_{\theta=\theta_0} &= -mgr\cos\theta_0 + \frac{J_z^2}{mr^2}\left(\csc^4\theta_0 + 2\csc^2\theta_0\cot^2\theta_0\right)\\ &= -mgr\cos\theta_0 + \frac{J_z^2}{m^2gr^3\sin^4\theta_0}mgr + \frac{2J_z^2\cos\theta_0}{m^2gr^3\sin^4\theta_0}mgr\cos\theta_0\\ &= -3mgr\cos\theta_0 - \sec\theta_0\, mgr > 0,\end{aligned}$$

portanto θ_0 minimiza V_{ef}. Assim, temos a solução constante $\theta = \theta_0$, que implica $\dot\phi$ constante, isto é, a trajetória é circular. Como o V_{ef} é suave em $(0,\pi)$ e $\lim_{\theta\to0^+}V_{ef}(\theta) = \lim_{\theta\to\pi^-}V_{ef}(\theta) = +\infty$, segue que todo movimento é limitado para o caso $J_z \neq 0$, isto é, θ oscila entre os pontos de retorno definidos pela equação $V_{ef} = H$. No caso em que $J_z = 0$, devemos ter as soluções constantes $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$ ou então a solução $\dot\phi = 0$, que simplifica o pêndulo esférico ao pêndulo plano

$$r\ddot\theta - g\sin\theta = 0 \xLeftrightarrow{\psi = \pi - \theta} r\ddot\psi + g\sin\psi = 0.$$