4302305 - Lista de Exercícios IV

Louis Bergamo Radial
8992822

13 de maio de 2024

Exercício 1

Lema 1: Partícula em um campo eletromagnético externo

A lagrangiana de uma partícula de massa m e carga e em um campo eletromagnético externo definido pelo potencial escalar ϕ e pelo potencial vetor $\boldsymbol{A}$ é dada por

$$L = \frac{1}{2} m g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j - e\phi + e g_{ij} A^i \dot{x}^j,$$

onde g_{ij} é o tensor métrico Euclidiano.

Demonstração. Uma partícula de massa m e carga e em um campo eletromagnético externo está sujeita à força de Lorentz dada por

$$\boldsymbol{F} = e\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\right),$$

onde $\boldsymbol{E}$ é o campo elétrico e $\boldsymbol{B}$ é o campo magnético.

Podemos definir os campos elétrico e magnético a partir de um potencial escalar ϕ e um potencial vetor $\boldsymbol{A}$,

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A},$$

de modo que as equações de Maxwell ainda sejam satisfeitas. Neste caso, a força de Lorentz é dada por

$$\boldsymbol{F} = e\left(-\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A})\right).$$

Notemos que

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x^i}\dot{x}^i + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \implies -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{\nabla} \rangle \boldsymbol{A} - \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}$$

e que

$$\boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{\nabla}\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{A} \rangle - \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{\nabla} \rangle \boldsymbol{A},$$

uma vez que $\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^i} = 0$. Dessa forma, segue que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} &= e\left(-\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\nabla}\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{A} \rangle\right) \\ &= e\left[-\boldsymbol{\nabla}(\phi - \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{A} \rangle) - \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\right]. \end{aligned}$$

Definindo o operador $\boldsymbol{\nabla}_v = \boldsymbol{e}_x \frac{\partial}{\partial v_x} + \boldsymbol{e}_y \frac{\partial}{\partial v_y} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial}{\partial v_z}$ e notando que tanto $\boldsymbol{A}$ quanto ϕ não dependem das velocidades, temos

$$-\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\nabla}_v \left(\phi - \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{A} \rangle\right),$$

de modo que a força de Lorentz seja dada por

$$\boldsymbol{F} = e\left[-\boldsymbol{\nabla}(\phi - \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{A}\rangle) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{v}}\left(\phi - \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{A}\rangle\right)\right].$$

Isto é, mostramos que a força de Lorentz resulta de um potencial generalizado $U = e\phi - e\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{A}\rangle$

$$F_k = -\frac{\partial U}{\partial x^k} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{x}^k}\right),$$

portanto a lagrangiana é dada por

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle - e\phi + e\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{A}\rangle \\ &= \frac{1}{2}m g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j - e\phi + e g_{ij}A^i\dot{x}^j, \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. □

Lema 2: Invariância de calibre

Os campos elétrico $\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$ e magnético $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}$ são invariantes por transformações de calibre,

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla} f \quad \text{e} \quad \tilde{\phi} = \phi - \frac{\partial f}{\partial t},$$

onde f é um campo escalar suave. Ainda, a lagrangiana

$$\tilde{L} = \frac{1}{2}m g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j - e\tilde{\phi} + e g_{ij}\tilde{A}^i\dot{x}^j$$

é equivalente à lagrangiana dada pelo Lema 1.

Demonstração. Como todo gradiente é irrotacional, temos

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\nabla}\times\left(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla} f\right) = \boldsymbol{\nabla}\times\tilde{\boldsymbol{A}},$$

para qualquer campo escalar diferenciável f. Ainda, para f suave, as derivadas parciais em relação às posições e ao tempo comutam, de modo que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= -\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \\ &= -\boldsymbol{\nabla}\phi + \boldsymbol{\nabla}\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\nabla} f - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \\ &= -\boldsymbol{\nabla}\left(\phi + \frac{\partial f}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla} f\right) \\ &= -\boldsymbol{\nabla}\tilde{\phi} - \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{A}}}{\partial t}, \end{aligned}$$

como desejado.

Como determinamos a lagrangiana a partir dos campos $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B}$, é de se esperar que a invariância de calibre seja refletida nesta função também. Notemos que

$$\begin{aligned} -\tilde{\phi} + g_{ij}\tilde{A}^i\dot{x}^j &= -\phi + \frac{\partial f}{\partial t} + g_{ij}\left(A^i + g^{ik}\frac{\partial f}{\partial x^k}\right)\dot{x}^j \\ &= -\phi + g_{ij}A^i\dot{x}^j + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x^j}\dot{x}^j \\ &= -\phi + g_{ij}A^i\dot{x}^j + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}, \end{aligned}$$

portanto $\tilde{L} = L + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$, com f só dependendo das posições e do tempo. Desse modo, as lagrangianas são de fato equivalentes. $\square$

Exercício 1: Movimento em um campo magnético uniforme

Uma partícula de massa m move-se na presença de um campo magnético constante $\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{e}_z$.

(a) Mostre que o potencial vetor $\boldsymbol{A} = \frac{B}{2}(-y\boldsymbol{e}_x + x\boldsymbol{e}_y)$ está associado a este campo magnético.

(b) Utilizando o formalismo Lagrangiano obtenha a equação de movimento desta partícula.

(c) Obtenha a trajetória desta partícula utilizando a condição inicial que $\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{0}$ e que $\boldsymbol{v}(0) = a\boldsymbol{e}_x + b\boldsymbol{e}_y$, onde a e b são constantes.

Resolução. Notemos que

$$\nabla \times \left(-y\boldsymbol{e}_x + x\boldsymbol{e}_y\right) = 2\boldsymbol{e}_z,$$

portanto o potencial vetor $\boldsymbol{A}$ dado é associado ao campo magnético uniforme $\boldsymbol{B}$.

Pelo Lema 1, a lagrangiana de uma partícula de carga Q e massa m em um campo eletromagnético é dada por

$$L = \frac{1}{2}m\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle - Q\phi + Q\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{A}\rangle,$$

onde $\boldsymbol{v}$ é a velocidade da partícula e ϕ é o potencial escalar. Ainda, pelo Lema 2, a escolha de calibre não influencia as equações de movimento. Neste caso, como não há a presença de um campo elétrico, e como tomamos $\frac{\partial A}{\partial t} = 0$, segue que ϕ é constante. Desse modo, a lagrangiana pode ser escrita como

$$L(q^1, \dot{q}^1, q^2, \dot{q}^2) = \frac{1}{2}m g_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j + \frac{QB}{2}\epsilon_{ij}q^i\dot{q}^j,$$

onde $q^1 = x$, $q^2 = y$, ϵ_{ij} é o símbolo de Levi-Civita, e g_{ij} é o tensor métrico Euclidiano. Assim, pelas equações de Euler-Lagrange temos

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^k} = 0 \implies & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m g_{ij}\delta^i_k\dot{q}^j + \frac{1}{2}g_{ij}\dot{q}^i\delta^j_k + \frac{QB}{2}\epsilon_{ij}q^i\delta^j_k\right) - \frac{QB}{2}\epsilon_{ij}\delta^i_k\dot{q}^j = 0 \\
\implies & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m g_{kj}\dot{q}^j + \frac{QB}{2}\epsilon_{ik}q^i\right) - \frac{QB}{2}\epsilon_{kj}\dot{q}^j = 0 \\
\implies & m g_{kj}\ddot{q}^j + \frac{QB}{2}\epsilon_{ik}\dot{q}^i - \frac{QB}{2}\epsilon_{kj}\dot{q}^j = 0 \\
\implies & m\ddot{q}_k + QB\epsilon_{ik}\dot{q}^i = 0.
\end{aligned}$$

De forma explícita, temos as equações de movimento

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = \omega\dot{q}_2 \\ \ddot{q}_2 = -\omega\dot{q}_1, \end{cases} \implies \begin{cases} \ddot{x} = \omega\dot{y} \\ \ddot{y} = -\omega\dot{x}, \end{cases}$$

onde $\omega = \frac{QB}{m}$.

Integrando a primeira equação em relação ao tempo no intervalo $[0, t]$, temos

$$\dot{x}(t) - \dot{x}(0) = \omega(y(t) - y(0)) \implies \dot{x}(t) = a + \omega y(t).$$

Substituindo na segunda equação, temos a equação diferencial linear não homogênea

$$\ddot{y} + \omega^2 y = -\omega a,$$

cuja solução é

$$y(t) = \alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t) - \frac{a}{\omega},$$

para constantes de integração α, β. Como $y(0) = 0$ e $\dot{y}(0) = b$, temos

$$y(t) = \frac{b}{\omega} \sin(\omega t) - \frac{a}{\omega} \left[1 - \cos(\omega t)\right].$$

Assim,

$$\dot{x}(t) = b \sin(\omega t) + a \cos(\omega t) \implies x(t) = \frac{b}{\omega} \left[1 - \cos(\omega t)\right] + \frac{a}{\omega} \sin(\omega t).$$

Deste modo, a partícula tem posição dada por

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}(t) &= \boldsymbol{r}_0 + \left[\frac{a}{\omega} \sin(\omega t) - \frac{b}{\omega} \cos(\omega t)\right] \boldsymbol{e}_x + \left[\frac{b}{\omega} \sin(\omega t) + \frac{a}{\omega} \cos(\omega t)\right] \boldsymbol{e}_y \\ &= \boldsymbol{r}_0 + \rho \left[\cos(\varphi - \omega t) \boldsymbol{e}_x + \sin(\varphi - \omega t) \boldsymbol{e}_y\right], \end{aligned}$$

onde $\boldsymbol{r}_0 = \frac{b}{\omega} \boldsymbol{e}_x - \frac{a}{\omega} \boldsymbol{e}_y$, $\rho = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{\omega^2}}$ e $\varphi \in [0, 2\pi]$ é tal que

$$\rho \cos \varphi = -\frac{b}{\omega} \quad \text{e} \quad \rho \sin \varphi = \frac{a}{\omega}.$$

Notemos que

$$\langle \boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}_0 \rangle = \rho^2,$$

portanto a a trajetória da partícula descreve um círculo de raio ρ centrado em $\boldsymbol{r}_0$ com frequência angular constante ω. $\square$

Exercício 2

Lema 3: Função energia

Para uma lagrangiana $L = L(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n, t)$, a função energia h é definida por

$$h = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\dot{q}^k - L,$$

com a propriedade

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

Demonstração. Computemos a derivada total em relação ao tempo para a função energia. Temos

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} &= \underline{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\right)\dot{q}^k} + \underline{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\frac{\mathrm{d}\dot{q}^k}{\mathrm{d}t}} - \frac{\partial L}{\partial t} - \underline{\frac{\partial L}{\partial q^k}\frac{\mathrm{d}q^k}{\mathrm{d}t}} - \underline{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\frac{\mathrm{d}\dot{q}^k}{\mathrm{d}t}}\\ &= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^k}\right]\dot{q}^k - \frac{\partial L}{\partial t}.\end{aligned}$$

Desse modo, para uma solução das equações de Euler-Lagrange, segue que $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$. □

Exercício 2: Energia de uma partícula em um campo eletromagnético externo

Uma partícula encontra-se na presença de um campo eletromagnético independente do tempo. Utilizando o formalismo lagrangiano, obtenha a energia do sistema.

Resolução. Pelo Lema 1, a lagrangiana de uma partícula de massa m e carga Q em um campo eletromagnético externo com potencial escalar ϕ e potencial vetor $\boldsymbol{A}$ é dada por

$$L = \frac{1}{2}m g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j - Q\phi + Q g_{ij}A^i\dot{x}^j,$$

onde x^i são as suas coordenadas cartesianas e g_{ij} o tensor métrico Euclidiano, a função energia neste caso é dada por

$$\begin{aligned}h &= \left(m g_{ij}\dot{x}^i\delta^j_k + Q g_{ij}A^i\delta^j_k\right)\dot{x}^k - \left(\frac{1}{2}m g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j - Q\phi + Q g_{ij}A^i\dot{x}^j\right)\\ &= m g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k + Q g_{ik}A^i\dot{x}^k - \left(\frac{1}{2}m g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k - Q\phi + Q g_{ik}A^i\dot{x}^k\right)\\ &= \frac{1}{2}m g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k + Q\phi\\ &= \frac{1}{2}m\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle + Q\phi.\end{aligned}$$

TODO: No caso em que o campo eletromagnético não depende do tempo, temos que a lagrangiana não tem dependência explícita do tempo. Dessa forma, pelo Lema 3, segue que h é uma quantidade conservada. □

Exercício 3

Exercício 3: Geodésicas do cone

Obtenha as geodésicas de um cone dado por $\theta = \alpha$ em coordenadas esféricas.

Resolução. Em $\mathbb{R}^3$, a métrica em uma superfície S é induzida pela métrica Euclidiana, isto é, em um ponto $p \in S$ a métrica é obtida pela restrição do produto interno de $\mathbb{R}^3$ ao espaço tangente T_pS. Dessa forma, a métrica no cone é dada por

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2 \sin^2\alpha \, \mathrm{d}\phi^2,$$

utilizando coordenadas esféricas, isto é, as componentes da métrica são $g_{11} = 1$, $g_{22} = r^2 \sin^2\alpha$, e todas as outras são identicamente nulas.

Assim, os coeficientes da conexão são dados por

$$\Gamma^k{}_{ij} = \frac{1}{2} g^{k\ell} \left(\partial_i g_{\ell j} + \partial_j g_{\ell i} - \partial_\ell g_{ij} \right),$$

obtendo

$$\Gamma^1{}_{22} = -r\sin^2\alpha \quad \text{e} \quad \Gamma^2{}_{12} = \frac{1}{r} = \Gamma^2{}_{21},$$

com os outros termos todos nulos. Portanto, as geodésicas de um cone são soluções do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\phi}^2 \sin^2\alpha = 0 \\ \ddot{\phi} + \dfrac{2}{r}\dot{r}\dot{\phi} = 0 \end{cases}.$$

□

Exercício 4: Massa em uma cunha

Uma cunha de massa M repousa sobre um plano horizontal. O ângulo do plano inclinado com a horizontal é α. Um corpo de massa m é colocado sobre o plano inclinado com seu centro de massa a uma altura h deste. Desprezando o atrito e usando o formalismo lagrangiano:

(a) obtenha a lagrangiana que descreve o sistema;

(b) obtenha as equações de movimento;

(c) obtenha a solução para o movimento da cunha e do corpo de massa m assumindo que no instante inicial o corpo e a cunha encontram-se parados;

(d) há alguma quantidade conservada?

Resolução. Seja $\boldsymbol{R} = X\boldsymbol{e}_x$ a posição do vértice de ângulo α da cunha e seja

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r} &= \boldsymbol{R} + h\left(-\sin\alpha\boldsymbol{e}_x + \cos\alpha\boldsymbol{e}_y\right) + d\left(\cos\alpha\boldsymbol{e}_x + \sin\alpha\boldsymbol{e}_y\right)\\ &= \left(X - h\sin\alpha + d\cos\alpha\right)\boldsymbol{e}_x + \left(h\cos\alpha + d\sin\alpha\right)\boldsymbol{e}_y\end{aligned}$$

a posição do centro de massa do corpo de massa m, que se encontra à uma altura h do plano inclinado e uma distância d do eixo ortogonal ao plano inclinado que passa pelo vértice de posição $\boldsymbol{R}$. Deste modo, a velocidade de cada corpo é

$$\dot{\boldsymbol{R}} = \dot{X}\boldsymbol{e}_x \quad \text{e} \quad \dot{\boldsymbol{r}} = \left(\dot{X} + \dot{d}\cos\alpha\right)\boldsymbol{e}_x + \dot{d}\sin\alpha\boldsymbol{e}_y.$$

Portanto, a lagrangiana que descreve o sistema é dada por

$$L = \frac{1}{2}M\dot{X}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{X}^2 + \dot{d}^2 + 2\dot{X}\dot{d}\cos\alpha\right) - mgd\sin\alpha,$$

em que removemos os termos constantes.

As equações de movimento do sistema são dadas pelas equações de Euler-Lagrange,

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial L}{\partial\dot{X}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial X} = 0 \implies (M+m)\ddot{X} + m\ddot{d}\cos\alpha = 0\\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial L}{\partial\dot{d}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial d} = 0 \implies m\ddot{d} + m\ddot{X}\cos\alpha + mg\cos\alpha = 0\end{cases}.$$

Isolando $\ddot{X}$ na primeira equação, encontramos

$$\ddot{X} = -\frac{m}{M+m}\ddot{d}\cos\alpha,$$

portanto o sistema de equações se torna

$$\ddot{d} = -\frac{(M+m)\cos\alpha}{M + m\sin^2\alpha}g \quad \text{e} \quad \ddot{X} = \frac{m\cos^2\alpha}{M + m\sin^2\alpha}g,$$

cuja solução partindo do repouso é

$$d = d_0 - \frac{(M+m)\cos\alpha}{2\left(M + m\sin^2\alpha\right)}gt^2 \quad \text{e} \quad X = X_0 + \frac{m\cos^2\alpha}{2\left(M + m\sin^2\alpha\right)}gt^2,$$

em que as posições iniciais são dadas a partir de d_0 e X_0.

Notemos que como a lagrangiana não depende explicitamente do tempo, temos que a energia do sistema,

$$E = \frac{1}{2}M\dot{X}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{X}^2 + \dot{d}^2 + 2\dot{X}\dot{d}\cos\alpha\right) + mgd\sin\alpha,$$

é uma integral de movimento. De forma semelhante, como X é uma variável cíclica, temos que o seu momento canonicamente conjugado,

$$p_X = \frac{\partial L}{\partial \dot{X}} = M\dot{X} + m\left(\dot{X} + \dot{d}\cos\alpha\right),$$

é uma outra integral de movimento, que é igual a componente $\boldsymbol{e}_x$ do momento total do sistema. □

Exercício 5

Exercício 5: Massas oscilando em um eixo livre

Dois corpos idênticos de massa m podem mover-se sem atrito ao longo de uma haste e de forma simétrica como mostra a Figura 1.

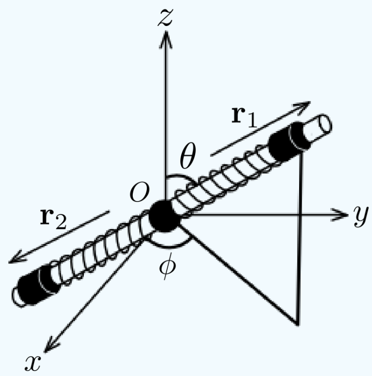

Figura 1: Sistema do Exercício 5

A massa da barra é desprezível e pode rodar livremente em torno do ponto O. Cada massa m está conectada à origem por uma mola de constante elástica $\frac{1}{2}m\omega_0^2$.

(a) Obtenha a lagrangiana que descreve o sistema.

(b) Obtenha as equações de movimento.

(c) Há alguma quantidade conservada? Interprete.

Resolução. Como os corpos se encontram ao longo da haste, temos

$$\boldsymbol{r}_1 = r_1\boldsymbol{e}_r \quad \text{e} \quad \boldsymbol{r}_2 = -r_2\boldsymbol{e}_r,$$

onde $\boldsymbol{e}_r = \cos\phi\sin\theta\boldsymbol{e}_x + \sin\phi\sin\theta\boldsymbol{e}_y + \cos\theta\boldsymbol{e}_z$. Segue que a energia potencial do sistema é dada por

$$U = \frac{1}{4}m\omega_0^2\left(r_1^2 + r_2^2\right) + mg\left(r_1 - r_2\right)\cos\theta$$

e a energia cinética por

$$T = \frac{1}{2}m\left[\dot{r}_1^2 + \dot{r}_2^2 + \left(r_1^2 + r_2^2\right)\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}\sin^2\theta\right)\right].$$

Utilizando o vínculo de que o movimento ocorre de forma simétrica, $r \equiv r_1 = r_2$, temos a lagrangiana

$$L = m\left[\dot{r}^2 + r^2\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta\right)\right] - \frac{1}{2}m\omega_0^2r^2$$

para descrever o sistema.

Pelas equações de Euler-Lagrange, temos

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial r} = 0 \implies 2m\ddot{r} - 2mr\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta\right) + m\omega_0^2 r = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \implies 2mr^2\ddot{\theta} + 4mr\dot{r}\dot{\theta} - 2mr^2\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \implies \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(2mr^2\dot{\phi}\sin^2\theta\right) = 0 \end{cases}$$

Como a lagrangiana não depende de forma explícita do tempo e como ϕ é uma coordenada cíclica temos que a energia e a componente $\boldsymbol{e}_z$ do momento angular do sistema,

$$E = T + U \quad \text{e} \quad J_z = 2mr^2\dot{\phi}\sin^2\theta$$

são conservadas. De fato, o momento angular do sistema é dado por

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{J} &= [\boldsymbol{r}_1, m\dot{\boldsymbol{r}}_1] + [\boldsymbol{r}_2, m\dot{\boldsymbol{r}}_2] \\
&= 2mr\left[\boldsymbol{e}_r, \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + r\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi\right] \\
&= 2mr^2\left(\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\phi - \dot{\phi}\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta\right),
\end{aligned}$$

portanto

$$\begin{aligned}
J_z &= \langle \boldsymbol{J}, \boldsymbol{e}_z\rangle \\
&= 2mr^2\langle\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\phi - \dot{\phi}\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_z\rangle \\
&= 2mr^2\dot{\phi}\sin^2\theta,
\end{aligned}$$

que é a quantidade conservada afirmada. □