

4302305 - Lista de Exercícios V

Louis Bergamo Radial
8992822

27 de abril de 2024

Teorema 1: Teorema de Noether

Seja L uma lagrangiana invariante em relação ao subgrupo a um parâmetro de difeomorfismos h^s , isto é,

$$h^0(q^k(t)) = q^k(t) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial s} L \left(h^s(q^k), \frac{\partial}{\partial t} h^s(q^k), t \right) = 0,$$

então a quantidade $\left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial h^s \circ q^k}{\partial s} \right|_{s=0}$ é conservada.

Demonstração. Sejam $q^k(t)$ coordenadas generalizadas que satisfazem as equações de Euler-Lagrange. Como L é invariante por transformações de h^s , segue que $\tilde{q}^k(s, t) = h^s \circ q^k(t)$ também satisfazem as equações de Euler-Lagrange.

Ainda pela invariância pelo subgrupo a um parâmetro de difeomorfismos, temos

$$\left. \frac{\partial L(\tilde{q}^k, \dot{\tilde{q}}^k, t)}{\partial s} \right|_{s=0} = \left. \frac{\partial L}{\partial q^k} \frac{\partial \tilde{q}^k}{\partial s} \right|_{s=0} + \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial \dot{\tilde{q}}^k}{\partial s} \right|_{s=0} = 0.$$

Como \tilde{q}^k satisfazem as equações de Euler-Lagrange, temos

$$\frac{d}{dt} \left(\left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial \tilde{q}^k}{\partial s} \right|_{s=0} \right) + \left. \frac{\partial L}{\partial \tilde{q}^k} \frac{\partial \tilde{q}^k}{\partial s} \right|_{s=0} = \frac{d}{dt} \left(\left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial \tilde{q}^k}{\partial s} \right|_{s=0} \right) = 0,$$

como queríamos demonstrar. □

Exercício 2

Lema 1: Sistema de partículas livres

Seja um sistema de N partículas livres de posições $\mathbf{x}_{(i)}$ e massas m_i com lagrangiana dada por

$$L = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \langle \dot{\mathbf{x}}_{(i)}, \dot{\mathbf{x}}_{(i)} \rangle - \sum_{i \neq j}^N V_{ij},$$

onde $V_{ij} = V(\|\mathbf{x}_{(i)} - \mathbf{x}_{(j)}\|)$. Definindo as coordenadas $q_{(i)}^k$ tais que $\mathbf{x}_{(i)} = q_{(i)}^k \mathbf{e}_k$, onde os vetores \mathbf{e}_k formam uma base ortonormal para \mathbb{R}^3 , os momentos canonicamente conjugados a estas coordenadas são dados por

$$p_{(i)k} = m_i g_{\ell k} \dot{q}_{(i)}^\ell,$$

para $i = 1, \dots, N$, e $k = 1, 2, 3$, onde $g_{\ell k} = \langle \mathbf{e}_\ell, \mathbf{e}_k \rangle$ é o tensor métrico Euclidiano.

Demonstração. Em termos dessas coordenadas, a lagrangiana do sistema é

$$L = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i g_{\ell n} \dot{q}_{(i)}^\ell \dot{q}_{(i)}^n - \sum_{i \neq j}^N V_{ij}.$$

Assim, o momento canonicamente conjugado $p_{(i)k}$ à coordenada $q_{(i)}^k$ é dado por

$$p_{(i)k} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{(i)}^k} = \frac{1}{2} m_i g_{\ell n} \delta_k^\ell \dot{q}_{(i)}^n + \frac{1}{2} m_i g_{\ell n} \delta_k^n \dot{q}_{(i)}^\ell = m_i g_{\ell k} \dot{q}_{(i)}^\ell,$$

como proposto. □

Exercício 2: Homogeneidade do espaço

Considere a lagrangiana do [Lema 1](#).

- (a) A transformação $\mathbf{x}_{(i)} \rightarrow \mathbf{x}_{(i)} + s\mathbf{n}$ é uma simetria do sistema?
- (b) Qual é a quantidade conservada e seu significado físico?

Resolução. Definimos $\tilde{\mathbf{x}}_{(i)}(s, t) = \mathbf{x}_{(i)}(t) + s\mathbf{n}$, notando que $\tilde{\mathbf{x}}_{(i)}(0, t) = \mathbf{x}_{(i)}(t)$ para todo t . Assim, temos

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_{(i)} = \dot{\mathbf{x}}_{(i)} \quad \text{e} \quad \tilde{\mathbf{x}}_{(i)} - \tilde{\mathbf{x}}_{(j)} = \mathbf{x}_{(i)} - \mathbf{x}_{(j)},$$

para todos $i, j = 1, \dots, N$. Dessa forma, é evidente que

$$\begin{aligned} \tilde{L} = L(\tilde{\mathbf{x}}_{(i)}, \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_{(i)}, t) &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \langle \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_{(i)}, \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_{(i)} \rangle - \sum_{i \neq j}^N V(\|\tilde{\mathbf{x}}_{(i)} - \tilde{\mathbf{x}}_{(j)}\|) \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \langle \dot{\mathbf{x}}_{(i)}, \dot{\mathbf{x}}_{(i)} \rangle - \sum_{i \neq j}^N V(\|\mathbf{x}_{(i)} - \mathbf{x}_{(j)}\|) = L(\mathbf{x}_{(i)}, \dot{\mathbf{x}}_{(i)}, t), \end{aligned}$$

isto é, a lagrangiana é invariante por translações na direção \mathbf{n} , $\frac{\partial \tilde{L}}{\partial s} = 0$. Como não há dependência explícita com os cossenos diretores de \mathbf{n} , segue que a lagrangiana é invariante por translações espaciais.

Notemos que $\frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}}{\partial s} = \mathbf{n}$, portanto $\frac{\partial \tilde{q}_{(i)}^k}{\partial s} = n^k$, onde $\mathbf{n} = n^k \mathbf{e}_k$. Pelo [Teorema de Noether](#), segue que a quantidade

$$Q = \sum_{i=1}^N p_{(i)k} \frac{\partial \tilde{q}_{(i)}^k}{\partial s} \Big|_{s=0}$$

é conservada. Pelo [Lema 1](#), obtemos

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{i=1}^N m_i g_{\ell k} \dot{q}_{(i)}^\ell n^k = \sum_{i=1}^N \langle m_i \dot{q}_{(i)}^\ell \mathbf{e}_\ell, n^k \mathbf{e}_k \rangle \\ &= \sum_{i=1}^N \langle m_i \dot{\mathbf{x}}_{(i)}, \mathbf{n} \rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{x}}_{(i)}, \mathbf{n} \right\rangle, \end{aligned}$$

isto é, a projeção do momento total do sistema na direção \mathbf{n} é conservada. Como esta relação é válida para qualquer direção \mathbf{n} , obtemos que a homogeneidade do espaço implica a conservação do momento total do sistema $\sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{x}}_{(i)}$. □

Exercício 3

Exercício 3: Isotropia do espaço

Considere a lagrangiana do [Lema 1](#). Dada uma rotação infinitesimal na direção \mathbf{n} por um ângulo s , a transformação é

$$\mathbf{x}_{(i)} \rightarrow \mathbf{x}_{(i)} + [s\mathbf{n}, \mathbf{x}_{(i)}].$$

Obtenha a quantidade conservada associada a rotações.

Resolução. Definimos $\tilde{\mathbf{x}}_{(i)}(s, t) = \mathbf{x}_{(i)}(t) + [s\mathbf{n}, \mathbf{x}_{(i)}]$, notando que $\tilde{\mathbf{x}}_{(i)}(0, t) = \mathbf{x}_{(i)}(t)$ para todo t . Mostremos que a distância em relação à origem é a mesma para todo s , em ordem linear em s . Temos

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\mathbf{x}}_{(i)}, \tilde{\mathbf{x}}_{(i)} \rangle &= \langle \mathbf{x}_{(i)} + [s\mathbf{n}, \mathbf{x}_{(i)}], \mathbf{x}_{(i)} + [s\mathbf{n}, \mathbf{x}_{(i)}] \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}_{(i)}, \mathbf{x}_{(i)} \rangle + 2\langle \mathbf{x}_{(i)}, [s\mathbf{n}, \mathbf{x}_{(i)}] \rangle + s^2 \langle [\mathbf{n}, \mathbf{x}_{(i)}], [\mathbf{n}, \mathbf{x}_{(i)}] \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}_{(i)}, \mathbf{x}_{(i)} \rangle + O(s^2), \end{aligned}$$

portanto a transformação é uma rotação infinitesimal. Com isso, temos

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\mathbf{x}}_{(i)} - \tilde{\mathbf{x}}_{(j)}, \tilde{\mathbf{x}}_{(i)} - \tilde{\mathbf{x}}_{(j)} \rangle &= \langle \mathbf{x}_{(i)} - \mathbf{x}_{(j)} + [s\mathbf{n}, \mathbf{x}_{(i)}] - [s\mathbf{n}, \mathbf{x}_{(j)}], \mathbf{x}_{(i)} - \mathbf{x}_{(j)} + [s\mathbf{n}, \mathbf{x}_{(i)}] - [s\mathbf{n}, \mathbf{x}_{(j)}] \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}_{(i)} - \mathbf{x}_{(j)} + [s\mathbf{n}, \mathbf{x}_{(i)} - \mathbf{x}_{(j)}], \mathbf{x}_{(i)} - \mathbf{x}_{(j)} + [s\mathbf{n}, \mathbf{x}_{(i)} - \mathbf{x}_{(j)}] \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}_{(i)} - \mathbf{x}_{(j)}, \mathbf{x}_{(i)} - \mathbf{x}_{(j)} \rangle + O(s^2), \end{aligned}$$

portanto as distâncias relativas entre pares de partículas é invariante em ordem linear de s . Fica claro que esta transformação preserva a lagrangiana do sistema,

$$\begin{aligned} \tilde{L} = L(\tilde{\mathbf{x}}_{(i)}, \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_{(i)}, t) &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \langle \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_{(i)}, \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_{(i)} \rangle - \sum_{i \neq j}^N V(\|\tilde{\mathbf{x}}_{(i)} - \tilde{\mathbf{x}}_{(j)}\|) \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \langle \dot{\mathbf{x}}_{(i)}, \dot{\mathbf{x}}_{(i)} \rangle - \sum_{i \neq j}^N V(\|\mathbf{x}_{(i)} - \mathbf{x}_{(j)}\|) = L(\mathbf{x}_{(i)}, \dot{\mathbf{x}}_{(i)}, t), \end{aligned}$$

isto é, $\frac{\partial \tilde{L}}{\partial s} = 0$ para todo s suficientemente pequeno. Assim, utilizando as coordenadas $q_{(i)}^k$ definidas no [Lema 1](#), temos

$$\tilde{\mathbf{x}}_{(i)} = \tilde{q}_{(i)}^k \mathbf{e}_k = \left(q_{(i)}^k + \epsilon^{kab} s n_a q_{(i)b} \right) \mathbf{e}_k \implies \left. \frac{\partial \tilde{q}_{(i)}^k}{\partial s} \right|_{s=0} = \epsilon^{kab} n_a q_{(i)b},$$

onde $\mathbf{n} = n^\ell \mathbf{e}_\ell$, de modo que a quantidade $Q = \sum_{i=1}^N p_{(i)k} \epsilon^{kab} n_a q_{(i)b}$ seja conservada pelo [Teorema de Noether](#). Pelo [Lema 1](#), obtemos

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{i=1}^N m_i g_{\ell k} \dot{q}_{(i)}^\ell \epsilon^{kab} n_a q_{(i)b} = \sum_{i=1}^N m_i \left\langle \dot{q}_{(i)}^\ell \mathbf{e}_\ell, \epsilon^{kab} n_a q_{(i)b} \mathbf{e}_k \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^N \langle m_i \dot{\mathbf{x}}_{(i)}, [\mathbf{n}, \mathbf{x}_{(i)}] \rangle = \sum_{i=1}^N \langle \mathbf{n}, [\mathbf{x}_{(i)}, m_i \dot{\mathbf{x}}_{(i)}] \rangle \\ &= \left\langle \mathbf{n}, \sum_{i=1}^N [\mathbf{x}_{(i)}, m_i \dot{\mathbf{x}}_{(i)}] \right\rangle, \end{aligned}$$

isto é, a projeção do momento angular total do sistema na direção \mathbf{n} é conservada. Como esta relação é válida para qualquer direção \mathbf{n} , mostramos que a isotropia do espaço implica a conservação do momento angular total do sistema $\sum_{i=1}^N [\mathbf{x}_{(i)}, m_i \dot{\mathbf{x}}_{(i)}]$. \square