

4302305 - Lista de exercícios 2

Louis Bergamo Radial
8992822

18 de março de 2024

Lema 1: Trajetória de um potencial central

Um sistema com massa reduzida μ submetido a um potencial central $U = U(r)$ tem trajetória definida pela integração da relação

$$\frac{L}{r^2 \sqrt{2\mu \left(E - U(r) - \frac{L^2}{2\mu r^2} \right)}} \frac{dr}{d\theta} = \pm 1, \quad (1)$$

onde $L = \mu r^2 \dot{\theta}$ é o momento angular e E é a energia do sistema.

Demonstração. Segue da conservação do momento angular em sistemas com potencial central que

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{\mu r^2}, \quad (2)$$

ou então, ao multiplicar $\frac{dt}{d\theta}$ em ambos os lados da equação e utilizando a regra da cadeia,

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{\mu r^2}{L}. \quad (3)$$

Pela conservação da energia do sistema, temos

$$\frac{1}{2}\mu \left\langle \frac{d\vec{r}}{dt}, \frac{d\vec{r}}{dt} \right\rangle + U(r) = E. \quad (4)$$

Em coordenadas polares, temos $\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta$, portanto

$$\left\langle \frac{d\vec{r}}{dt}, \frac{d\vec{r}}{dt} \right\rangle = \langle \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta, \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta \rangle \quad (5)$$

$$= \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 \quad (6)$$

$$= \dot{r}^2 + r^2 \left(\frac{L}{\mu r^2} \right)^2 \quad (7)$$

$$= \dot{r}^2 + \frac{L^2}{\mu^2 r^2}. \quad (8)$$

Assim, a equação da energia do sistema pode ser escrita como

$$E = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} + U(r). \quad (9)$$

Isolando \dot{r} , obtemos

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu}} \sqrt{E - U(r) - \frac{L^2}{2\mu r^2}}. \quad (10)$$

Multiplicando ambos os lados por $\frac{dt}{d\theta}$ e utilizando a regra da cadeia, obtemos

$$\frac{dr}{d\theta} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu}} \sqrt{E - U(r) - \frac{L^2}{2\mu r^2}} \frac{dt}{d\theta} \quad (11)$$

$$= \pm \frac{r^2}{L} \sqrt{2\mu \left(E - U(r) - \frac{L^2}{2\mu r^2} \right)}. \quad (12)$$

Dividindo ambos os lados pelo lado direito, obtemos a expressão dada no [Lema 1](#). \square

Exercício 2

Considere um corpo submetido a um potencial central

$$U(r) = \frac{1}{2}\mu\omega^2 r^2.$$

(a) Descreva qualitativamente os movimentos possíveis.

Consideremos o potencial efetivo

$$U_{\text{ef}}(r) = \frac{1}{2}\mu\omega^2 r^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2}. \quad (13)$$

Temos

$$\frac{dU_{\text{ef}}}{dr} = \mu\omega^2 r - \frac{L^2}{\mu r^3} \quad \text{e} \quad \frac{d^2U_{\text{ef}}}{dr^2} = \mu\omega^2 + 3\frac{L^2}{\mu r^4}. \quad (14)$$

Notemos que $\frac{dU_{\text{ef}}}{dr} = 0$ apenas para $r = r_0 \equiv \sqrt{\frac{L}{\mu\omega}}$, já que $r > 0$. Ainda, temos

$$U_{\text{ef}}(r_0) \equiv U_0 = L\omega \quad \text{e} \quad \left(\frac{d^2U_{\text{ef}}}{dr^2} \right)_{r=r_0} = 4\mu\omega^2 > 0, \quad (15)$$

isto é, o valor mínimo do potencial efetivo é U_0 , que ocorre em $r = r_0$.

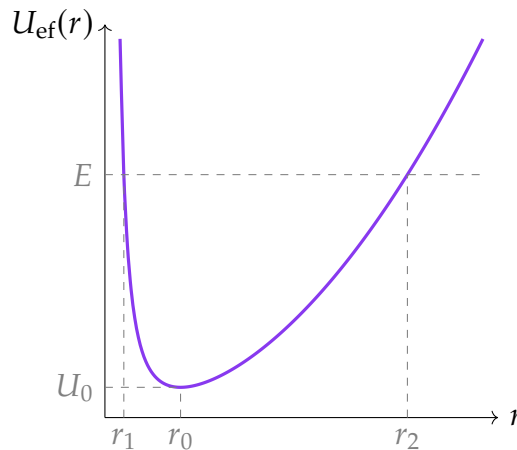


Figura 1: Potencial efetivo para o potencial central $U(r) = \frac{1}{2}\mu\omega^2 r^2$.

Substituindo $\mu = \frac{L}{\omega r_0^2}$ na expressão do potencial efetivo, podemos escrever

$$U_{\text{ef}}(r) = \frac{U_0}{2} \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^2 + \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-2} \right]. \quad (16)$$

Nesta forma é fácil ver que se $U_{\text{ef}}(r_1) = U_{\text{ef}}(r_2)$, então $r_1 = r_2$ ou $r_1 r_2 = r_0^2$. Desta forma, dada uma energia $E \geq U_0$ do sistema, ou a trajetória é circular, no caso de $E = U_0$, ou o movimento é oscilatório entre os pontos de retorno r_1 e r_2 , que satisfazem a relação descrita anteriormente e são dados por

$$r_1 = r_0 \sqrt{\frac{E}{U_0} - \sqrt{\left(\frac{E}{U_0} \right)^2 - 1}} \quad \text{e} \quad r_2 = r_0 \sqrt{\frac{E}{U_0} + \sqrt{\left(\frac{E}{U_0} \right)^2 - 1}}. \quad (17)$$

Assim, para órbitas não circulares sempre há dois pontos de retorno distintos, portanto o movimento é sempre oscilatório.

(b) Dada a energia do corpo E, obtenha a sua trajetória.

Pelo [Lema 1](#), temos

$$\pm (\theta - \theta_i) = \frac{L}{\sqrt{\mu}} \int_{\theta_i}^{\theta} d\varphi \frac{1}{r^2 \sqrt{2E - U_0 \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^2 + \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-2} \right]}} \frac{dr}{d\varphi}, \quad (18)$$

para um ângulo inicial θ_i . Utilizando que $\frac{L}{\sqrt{\mu}} = r_0 \sqrt{U_0}$ e a substituição de variáveis $r = r(\varphi)$, obtemos

$$\pm (\theta - \theta_i) = \int_{r_i}^{r(\theta)} \frac{r_0 dR}{R^2} \sqrt{\frac{U_0}{2E - U_0 \left[\left(\frac{R}{r_0} \right)^2 + \left(\frac{R}{r_0} \right)^{-2} \right]}}, \quad (19)$$

onde $r_i = r(\theta_i)$ Com a substituição de variáveis $\rho = \frac{r_0}{r}$, temos

$$\pm (\theta - \theta_i) = - \int_{\frac{r_0}{r_i}}^{\frac{r_0}{r(\theta)}} \frac{d\rho}{\sqrt{2\frac{E}{U_0} - \rho^2 - \rho^{-2}}} \quad (20)$$

$$= - \int_{\frac{r_0}{r_i}}^{\frac{r_0}{r(\theta)}} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{2\lambda \rho^2 - \rho^4 - 1}}, \quad (21)$$

onde $\lambda = \frac{E}{U_0}$. Notando que

$$2\lambda \rho^2 - \rho^4 - 1 = \lambda^2 - 1 - (\rho^2 - \lambda)^2 \quad (22)$$

$$= (\lambda^2 - 1) \left[1 - \left(\frac{\rho^2 - \lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \right)^2 \right], \quad (23)$$

segue que

$$\pm (\theta - \theta_i) = - \int_{\frac{r_0}{r_i}}^{\frac{r_0}{r(\theta)}} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \left[1 - \left(\frac{\rho^2 - \lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (24)$$

Com a substituição de variáveis $\xi = \frac{\rho^2 - \lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 1}}$, obtemos

$$\pm 2(\theta - \theta_i) = - \int_{\xi\left(\frac{r_0}{r_i}\right)}^{\xi\left(\frac{r_0}{r(\theta)}\right)} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \psi^2}} = \arccos \left(\frac{\left(\frac{r_0}{r(\theta)} \right)^2 - \lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \right) - \arccos \left(\frac{\left(\frac{r_0}{r_i} \right)^2 - \lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \right). \quad (25)$$

Definimos

$$\phi = 2\theta_i \mp \arccos\left(\frac{\left(\frac{r_0}{r_i}\right)^2 - \lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 1}}\right) \quad (26)$$

respeitando a escolha de sinal na equação anterior. Desse modo,

$$\cos(2\theta - \phi) = \frac{\left(\frac{r_0}{r(\theta)}\right)^2 - \lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 1}}. \quad (27)$$

Isolando $r(\theta)$, obtemos a equação da trajetória

$$r(\theta) = r_0 \left[\frac{E}{U_0} + \sqrt{\left(\frac{E}{U_0}\right)^2 - 1 \cos(2\theta - \phi)} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (28)$$

$$= r_0 \sqrt{\frac{U_0}{E}} \left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{U_0}{E}\right)^2 \cos(2\theta - \phi)} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (29)$$

$$= \frac{L}{\sqrt{\mu E}} \left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{L\omega}{E}\right)^2 \cos(2\theta - \phi)} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (30)$$

para este potencial central.

Exercício 3

Considere um corpo submetido a um potencial central

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}$$

onde $\alpha, \beta > 0$.

(a) Existem órbitas circulares? Qual a condição para que isso ocorra?

Consideremos o potencial efetivo

$$U_{\text{ef}}(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2} + \frac{L^2}{2\mu r^2} \quad (31)$$

$$= -\alpha r^{-1} + \frac{2\mu\beta + L^2}{2\mu} r^{-2} \quad (32)$$

Temos

$$\frac{dU_{\text{ef}}}{dr} = \alpha r^{-2} - \frac{2\mu\beta + L^2}{\mu} r^{-3} \quad \text{e} \quad \frac{d^2U_{\text{ef}}}{dr^2} = -\alpha r^{-3} + 3\frac{2\mu\beta + L^2}{\mu} r^{-4}. \quad (33)$$

Notemos que $\frac{dU_{\text{ef}}}{dr} = 0$ apenas para $r = r_0 \equiv \frac{2\mu\beta + L^2}{\mu\alpha}$. Ainda, temos

$$U_{\text{ef}}(r_0) \equiv U_0 = -\frac{\alpha}{2r_0} \quad \text{e} \quad \left(\frac{d^2U_{\text{ef}}}{dr^2}\right)_{r=r_0} = \alpha r_0^{-3} > 0, \quad (34)$$

isto é, o valor mínimo do potencial efetivo é U_0 , que ocorre em $r = r_0$.

Substituindo $\alpha r_0 = \frac{2\beta\mu + L^2}{\mu}$ na expressão do potencial efetivo, podemos escrever

$$U_{\text{ef}}(r) = -\alpha r^{-1} + \frac{\alpha r_0}{2} r^{-2} \quad (35)$$

$$= -\frac{\alpha}{r_0} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-1} + \frac{\alpha r_0}{2r_0^2} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-2} \quad (36)$$

$$= U_0 \left[2 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-1} - \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-2} \right]. \quad (37)$$

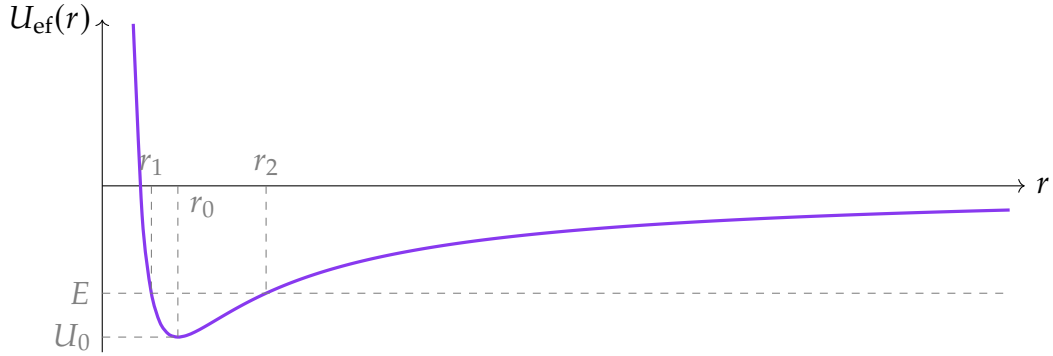


Figura 2: Potencial efetivo para o potencial central $U(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}$.

Se o sistema tiver energia total $E \geq U_0$, um ponto de retorno satisfaz

$$U_{\text{ef}}(r) = E \implies \frac{\lambda r^2 - 2r_0 r + r_0^2}{r^2} = 0, \quad (38)$$

com $\lambda = \frac{E}{U_0}$. Caso $\lambda = 0$, há apenas um ponto de retorno em $r = \frac{r_0}{2}$, de modo que a trajetória não é limitada. Caso $\lambda \neq 0$, temos

$$r = \frac{r_0}{1 \pm \epsilon}, \quad (39)$$

onde $\epsilon = \sqrt{1 - \lambda} \neq 1$. No caso em que $E < 0$, temos $1 > \epsilon \geq 0$, portanto há dois pontos de retorno

$$r_1 = \frac{r_0}{1 + \epsilon} \quad \text{e} \quad r_2 = \frac{r_0}{1 - \epsilon}, \quad (40)$$

de modo que a trajetória é limitada, com o caso especial de $E = U_0$, em que a trajetória é circular $r_1 = r_2 = r_0$. No caso em que $E > 0$, temos $\epsilon > 1$, de modo que há apenas um ponto de retorno

$$r = \frac{r_0}{1 + \epsilon}, \quad (41)$$

uma vez que $r > 0$, portanto a trajetória não é limitada.

(b) Dada a energia do corpo $E < 0$, obtenha a sua trajetória.

Pelo [Lema 1](#), temos

$$\pm d\theta = \frac{L}{\sqrt{2\mu}} \cdot \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - 2U_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-1} + U_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-2}}} \quad (42)$$

$$= -\frac{L}{\sqrt{2\mu r_0^2}} \cdot \frac{d\rho}{\sqrt{E - 2U_0 \rho + U_0 \rho^2}} \quad (43)$$

$$= -\frac{L}{\sqrt{\mu \alpha r_0}} \cdot \frac{d\rho}{\sqrt{2\rho - \rho^2 - \lambda}} \quad (44)$$

onde $\rho = \frac{r_0}{r}$. Recordando que $\mu\alpha r_0 = 2\mu\beta + L^2$ e notando que

$$2\rho - \rho^2 - \lambda = \epsilon^2 - (\rho - 1)^2 \quad (45)$$

$$= \epsilon^2 \left[1 - \left(\frac{\rho - 1}{\epsilon} \right)^2 \right], \quad (46)$$

obtemos

$$\pm \sqrt{1 + \frac{2\mu\beta}{L^2}} d\theta = -\frac{d\rho}{\epsilon} \left[1 - \left(\frac{\rho - 1}{\epsilon} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (47)$$

$$= -\frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}, \quad (48)$$

com $\xi = \frac{\rho - 1}{\epsilon}$.

Integrando e fazendo as devidas substituições, segue que

$$\pm \sqrt{1 + \frac{2\mu\beta}{L^2}} (\theta - \theta_i) = \arccos \left(\frac{\frac{r_0}{r(\theta)} - 1}{\epsilon} \right) - \arccos \left(\frac{\frac{r_0}{r_i} - 1}{\epsilon} \right), \quad (49)$$

onde $r(\theta) = r_i$. Seja

$$\phi = \sqrt{1 + \frac{2\mu\beta}{L^2}} \theta_i \mp \arccos \left(\frac{\frac{r_0}{r_i} - 1}{\epsilon} \right), \quad (50)$$

respeitando a escolha de sinal na [Equação \(49\)](#), de modo que

$$\frac{\frac{r_0}{r(\theta)} - 1}{\epsilon} = \cos \left(\sqrt{1 + \frac{2\mu\beta}{L^2}} \theta - \phi \right). \quad (51)$$

Isolando $r(\theta)$, obtemos a trajetória

$$r(\theta) = \frac{r_0}{1 + \epsilon \cos \left(\sqrt{1 + \frac{2\mu\beta}{L^2}} \theta - \phi \right)} \quad (52)$$

$$= \frac{\frac{2\beta\mu + L^2}{\mu\alpha}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2E(2\beta\mu + L^2)}{\mu\alpha^2}} \cos \left(\sqrt{1 + \frac{2\mu\beta}{L^2}} \theta - \phi \right)} \quad (53)$$

para este potencial.

Exercício 4

No potencial do problema 3, considere que o termo r^{-2} é muito menor que o termo de Kepler. Mostre que a velocidade de precessão da órbita é

$$\dot{\Omega} = \frac{2\pi\mu\beta}{L^2 T}$$

onde L é o momento angular e T o período. O termo extra na forma r^{-2} parece muito com a barreira centrífuga. Por que esse termo causa a precessão da órbita?

O teorema de Bertrand garante que os únicos potenciais centrais para os quais toda órbita limitada é fechada são os potenciais de Kepler e do oscilador harmônico radial

$$U_{\text{Kepler}}(r) = -\alpha r^{-1} \quad \text{e} \quad U_{\text{harmônico}} = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2. \quad (54)$$

Dessa forma, apesar do termo adicional em relação ao potencial de Kepler ser pequeno e do mesmo tipo de função da barreira centrífuga, não é necessário que uma órbita limitada seja fechada para este sistema.

Após um período, a coordenada radial deve retornar ao seu valor inicial. Neste caso, da [Equação \(49\)](#), devemos ter

$$\sqrt{1 + \frac{2\mu\beta}{L^2}} (\theta - \theta_i) = \pm 2\pi \implies \theta - \theta_i = \frac{\pm 2\pi}{\sqrt{1 + \frac{2\mu\beta}{L^2}}}. \quad (55)$$

No caso em que $\sqrt{1 + \frac{2\mu\beta}{L^2}} \in \mathbb{Q}$, a órbita para $U_0 < E < 0$ será fechada, visto que após um número inteiro de períodos a variação angular será um múltiplo inteiro de 2π , como garante a [Equação \(55\)](#). Em contrapartida, se $\sqrt{1 + \frac{2\mu\beta}{L^2}} \notin \mathbb{Q}$, não existe um número inteiro de períodos que torna a variação angular num múltiplo inteiro de 2π , logo não existem dois instantes distintos em que os pares de coordenadas r e θ são os mesmos, isto é, a órbita não pode ser fechada.

Tornemos nossa atenção para o caso em que a órbita não pode ser fechada. Se a constante β é pequena, a variação entre o ângulo final e o ângulo inicial deve ser próxima de 2π , isto é,

$$\theta - \theta_i = \pm(2\pi - \dot{\Omega}T), \quad (56)$$

com $|\dot{\Omega}|T \ll 2\pi$, onde T é o período. Assim,

$$2\pi - \dot{\Omega}T = \frac{2\pi}{\sqrt{1 + \frac{2\mu\beta}{L^2}}} \implies \dot{\Omega} = \frac{2\pi}{T} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2\mu\beta}{L^2}}} \right) \quad (57)$$

$$\implies \dot{\Omega} \simeq \frac{2\pi\mu\beta}{L^2T}, \quad (58)$$

onde foi utilizada a aproximação

$$1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2\mu\beta}{L^2}}} \simeq \frac{\mu\beta}{L^2} + O\left(\frac{\mu^2\beta^2}{L^4}\right). \quad (59)$$