Física Matemática II
Segunda Lista de Exercícios

Louis Bergamo Radial
8992822

5 de junho de 2024

Exercício 1

Exercício 2

Proposição 1: Expansão binomial

Para todos $x, \alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$, com $|x| < 1$, vale a *expansão binomial*

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-k+1)\Gamma(k+1)} x^k.$$

Ainda, para $|x| < 1$

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Consideremos a equação diferencial ordinária de primeira ordem

$$(1+x)y'(x) - \alpha y(x) = 0.$$

Tomemos $|x| < 1$ como a região de analiticidade da equação diferencial e procuremos uma solução do tipo $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$. Substituindo na equação, temos

$$(1+x)\sum_{k=0}^{\infty} k c_k x^{k-1} - \alpha \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0 \implies \sum_{k=0}^{\infty} \left[(k+1)c_{k+1} + (k-\alpha)c_k\right] x^k = 0,$$

portanto os coeficientes da série de potências são dados pela relação de recorrência

$$c_{k+1} = \frac{\alpha - k}{k+1} c_k$$

para $k \in \mathbb{N}$.

Limitemo-nos inicialmente ao caso em que $\alpha = n \in \mathbb{N}$. Pela relação de recorrência os coeficientes c_k com $k > n$ são todos nulos, então a solução da equação diferencial é dada pelo polinômio

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k.$$

Neste caso, os coeficientes do polinômio são dados por

$$c_k = \binom{n}{k} c_0,$$

o que podemos verificar por indução em k. Notemos que

$$\binom{n}{0} c_0 = c_0,$$

isto é, a afirmação segue para $k = 0$. Suponhamos que seja válida para $k = m < n$, então da relação de recorrência, temos

$$c_{m+1} = \frac{n-m}{m+1} c_m = \frac{n-m}{m+1} \binom{n}{m} c_0 = \frac{n!}{(n-m-1)!(m+1)!} c_0 = \binom{n}{m+1} c_0,$$

portanto é válida para $k = m+1$. Pelo princípio da indução finita, obtemos a solução geral da equação diferencial

$$y(x) = c_0 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

para $\alpha = n \in \mathbb{N}$.

Consideremos agora o caso $\alpha \notin \mathbb{N}$. Mostremos por indução em k que

$$c_k = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-k+1)\Gamma(k+1)} c_0$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Notemos que

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(1)} c_0 = c_0$$

portanto a expressão é válida para $k = 0$. Suponhamos que vale para $k = m$, então da relação de recorrência segue que

$$\begin{aligned}
c_{m+1} = \frac{\alpha - m}{m+1} c_m \implies c_{m+1} &= \frac{\alpha - m}{m+1} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-m+1)\Gamma(m+1)} c_0 \\
\implies c_{m+1} &= \frac{\alpha - m}{(\alpha-m)\Gamma(\alpha-m)} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(m+1)\Gamma(m+1)} c_0 \\
\implies c_{m+1} &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-m)\Gamma(m+2)} c_0,
\end{aligned}$$

isto é, vale também para $k = m+1$. Pelo princípio de indução finita, a expressão proposta é válida para todo número natural k. Assim, a solução geral para $\alpha \notin \mathbb{N}$ é

$$y(x) = c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-k+1)\Gamma(k+1)} x^k.$$

Em resumo, a solução para o problema de valor inicial

$$(1+x)y'(x) - \alpha y(x) = 0, \quad y(0) = 1$$

é dada por

$$y(x) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-k+1)\Gamma(k+1)} x^k, & \text{se } \alpha \notin \mathbb{N} \\ \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{k} x^k, & \text{se } \alpha \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

para $|x| < 1$.

Para concluir a demonstração, mostremos que $f(x) = (1+x)^\alpha$ é solução do problema de valor inicial. Temos $f(0) = 1$ e

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} \implies (1+x)f'(x) - \alpha f(x) = 0.$$

Desse modo, pela unicidade de soluções, verificamos a validade da expansão binomial. □

Proposição 2: Expansão binomial e símbolos de Pochhammer

Para $x \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$, estão definidos os *símbolos de Pochhammer* por

$$(x)_n = \begin{cases} x(x+1)\dots(x+n-1) = \prod_{\ell=0}^{n-1}(x+\ell), & \text{se } n \geq 1 \\ 1, & \text{se } n = 0. \end{cases}$$

Assim, a expansão binomial pode ser escrita como

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha+1-k)_k}{k!} x^k$$

para $|x| < 1$.

Demonstração. Mostremos que para $\alpha \in \mathbb{N}$

$$\frac{(\alpha+1-k)_k}{k!} = \begin{cases} \binom{\alpha}{k}, & \text{se } k \leq \alpha \\ 0, & \text{se } k > \alpha. \end{cases}$$

É fácil ver que para $k = 0$ e para $\alpha = 0$ a igualdade segue. Pela definição para $k, \alpha \geq 1$, temos

$$(\alpha+1-k)_k = \prod_{\ell=0}^{k-1}(\alpha+1-k+\ell) = \prod_{\ell=1-k}^{0}(\alpha+\ell),$$

isto é, $(\alpha+1-k)_k$ se anula se $\alpha \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$, ou equivalente, se $\alpha < k$. Para $\alpha \geq k$, temos

$$(\alpha+1-k)_k = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha+1-k) = \frac{\alpha!}{(\alpha-k)!},$$

portanto

$$\frac{(\alpha+1-k)_k}{k!} = \binom{\alpha}{k},$$

como desejado.

Para $\alpha \notin \mathbb{N}$, mostremos por indução em k que

$$(\alpha+1-k)_k = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-k+1)}.$$

Pela definição, o resultado segue para $k = 0$. Suponhamos que a expressão seja válida para algum $m \in \mathbb{N}$, então

$$\begin{aligned}
(\alpha-m)_{m+1} &= \prod_{\ell=0}^{m}(\alpha-m+\ell) \\
&= (\alpha-m)\prod_{\ell=0}^{m-1}(\alpha+1-m+\ell) \\
&= (\alpha-m)(\alpha+1-m)_m \\
&= \frac{(\alpha-m)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-m+1)} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-m)},
\end{aligned}$$

portanto a identidade é satisfeita por $m+1$. Pelo princípio de indução, temos

$$\frac{(\alpha+1-k)_k}{k!} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-k+1)\Gamma(k+1)}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

Dessa forma, temos

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha+1-k)_k}{k!}x^k$$

para $|x| < 1$. □

Exercício 3

Proposição 3: Solução da equação de Airy

A solução geral da equação de Airy,

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - xy(x) = 0$$

é a função inteira dada por

$$y(x) = c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3k+1)!!!}{(3k+1)!} x^{3k} + c_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3k+2)!!!}{(3k+2)!} x^{3k+1}, \quad \text{com } c_0, c_1 \in \mathbb{C},$$

onde $n!!! = n(n-3)(n-6)\dots(n_3+3)n_3$, com n_3 dado pelo resto natural da divisão de n por três e $0!!! = 1$.

Demonstração. Notemos que a equação é do tipo

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + q(x)y(x) = 0,$$

com $p(x) = 0$ e $q(x) = -x$. Como p e q são funções inteiras, então uma solução do tipo $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ converge em todo o plano complexo, isto é, a solução é uma função inteira.

Para uma solução deste tipo temos

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sum_{k=0}^{\infty} k c_k x^{k-1} \quad \text{e} \quad \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2},$$

portanto obtemos

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2} - \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+1} = 0$$

ao substituir na equação diferencial. Manipulando os índices das séries, temos

$$2c_2 + \sum_{k=0}^{\infty} \left[(k+3)(k+2)c_{k+3} - c_k\right] x^{k+1} = 0,$$

portanto obtemos $c_2 = 0$ e a relação de recorrência

$$c_{k+3} = \frac{c_k}{(k+3)(k+2)}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Dessa forma, é fácil ver que para todo $\ell \in \mathbb{N}$, temos $c_{3\ell+2} = 0$.

Mostremos por indução que

$$c_{3\ell} = \frac{(3\ell+1)!!!}{(3\ell+1)!} c_0 \quad \text{e} \quad c_{3\ell+1} = \frac{(3\ell+2)!!!}{(3\ell+2)!} c_1$$

para todo $\ell \in \mathbb{N}$. Para $\ell = 0$ temos

$$\frac{1!!!}{1!} c_0 = c_0 \quad \text{e} \quad \frac{2!!!}{2!} c_1 = c_1,$$

portanto as expressões valem neste caso. Suponhamos que as igualdades sejam satisfeitas para algum $m \in \mathbb{N}$, então das relações de recorrência temos

$$
\begin{aligned}
c_{3m+3} &= \frac{c_{3m}}{(3m+3)(3m+2)} \\
&= \frac{(3m+1)!!!}{(3m+3)(3m+2)(3m+1)!} c_0 \\
&= \frac{(3m+4)(3m+1)!!!}{(3m+4)!} c_0 \\
&= \frac{(3m+4)!!!}{(3m+4)!} c_0
\end{aligned}
$$

e semelhantemente

$$
\begin{aligned}
c_{3m+4} &= \frac{c_{3m+1}}{(3m+4)(3m+3)} \\
&= \frac{(3m+5)(3m+2)!!!}{(3m+5)(3m+4)(3m+3)(3m+2)!} c_1 \\
&= \frac{(3m+5)!!!}{(3m+5)!} c_1,
\end{aligned}
$$

isto é, as identidades são satisfeitas por $m+1$. Pelo princípio da indução finita, segue que as expressões são válidas para todo $\ell \in \mathbb{N}$.

Logo, a solução geral da equação de Airy é a função inteira

$$
y(x) = c_0 \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(3\ell+1)!!!}{(3\ell+1)!} x^{3\ell} + c_1 \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(3\ell+2)!!!}{(3\ell+2)!} x^{3\ell+1},
$$

com $c_0, c_1 \in \mathbb{N}$. $\square$

Exercício 4

Proposição 4: Solução não singular da equação de Laguerre

A *equação de Laguerre*,

$$x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + (1-x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \lambda y(x) = 0,$$

tem uma solução em forma de séries de potências dada por

$$y_1(x) = c_0\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-k+1)}{(k!)^2}x^k\right],$$

para uma constante $c_0 \in \mathbb{C}$. No caso particular em que $\lambda = n \in \mathbb{N}$, temos a solução polinomial

$$l_n(x) = c_0\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\binom{n}{k}x^k.$$

Demonstração. Notemos que a equação diferencial pode ser escrita como

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1-x}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{\lambda}{x}y(x) = 0,$$

deixando evidente que os coeficientes que acompanham $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ e $y(x)$ apresentam um polo simples em $x = 0$. Deste modo, podemos aplicar o método de Frobenius e buscar uma solução do tipo $y_1(x) = x^r\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k$, com $c_0 \neq 0$.

Para uma solução deste tipo, temos

$$\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} = x^{r-1}\sum_{k=0}^{\infty}(r+k)c_kx^k \quad \text{e} \quad \frac{\mathrm{d}^2y_1}{\mathrm{d}x^2} = x^{r-2}\sum_{k=0}^{\infty}(r+k)(r+k-1)c_kx^k.$$

Substituindo na equação diferencial,

$$\begin{aligned}
0 &= x^{r-1}\sum_{k=0}^{\infty}(r+k)(r+k-1)c_kx^k + x^{r-1}\sum_{k=0}^{\infty}(r+k)c_kx^k - x^r\sum_{k=0}^{\infty}(r+k)c_kx^k + \lambda x^r\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k \\
&= x^{r-1}\sum_{k=0}^{\infty}(r+k)^2c_kx^k + x^{r-1}\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda-r-k)c_kx^{k+1} \\
&= x^{r-1}\sum_{k=0}^{\infty}(r+k)^2c_kx^k + x^{r-1}\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda-r-k+1)c_{k-1}x^k \\
&= x^{r-1}\left[r^2c_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[(r+k)^2c_k + (\lambda-r-k+1)c_{k-1}\right]x^k\right],
\end{aligned}$$

portanto como $c_0 \neq 0$, devemos ter $r = 0$. Dessa forma, obtemos a relação de recorrência

$$c_{k+1} = -\frac{\lambda-k}{(k+1)^2}c_k,$$

para $k \in \mathbb{N}$.

Mostremos por indução em k que

$$c_k = (-1)^k\frac{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-k+1)}{(k!)^2}c_0$$

para $k \geq 1$. Para $k = 1$ temos

$$-\frac{\lambda}{(1!)^2} c_0 = c_1,$$

portanto a expressão é válida neste caso. Suponhamos que a igualdade siga para algum $m \in \mathbb{N}$, então da relação de recorrência temos

$$\begin{aligned} c_{m+1} &= -\frac{\lambda - m}{(m+1)^2} c_m \\ &= -(-1)^m \frac{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-m+1)(\lambda-m)}{(m+1)^2(m!)^2} c_0 \\ &= (-1)^{m+1} \frac{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-m)}{[(m+1)!]^2} c_0, \end{aligned}$$

isto é, a expressão é satisfeita para $m+1$. Pelo princípio da indução finita, a igualdade segue para todo $k \geq 1$. Assim, mostramos que a equação de Laguerre admite uma solução do tipo

$$y_1(x) = c_0 \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-k+1)}{(k!)^2} x^k \right].$$

No caso em que $\lambda = n \in \mathbb{N}$, vemos da relação de recorrência que $c_{n+1} = 0$, portanto todo coeficiente subsequente da série se anula. Dessa forma, temos a solução polinomial

$$\begin{aligned} l_n(x) &= c_0 \left[1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{(k!)^2} x^k \right] \\ &= c_0 \left[1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!(k!)^2} x^k \right] \\ &= c_0 \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} x^k \end{aligned}$$

da equação de Laguerre. □

Definição 1: Polinômios de Laguerre

Os *polinomômios de Laguerre* $L_n(x)$ são definidos por

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!} \binom{n}{k} x^k,$$

portanto são soluções das equações de Laguerre,

$$x \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + (1-x) \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + n y(x) = 0$$

com $n \in \mathbb{N}$, que não apresentam singularidade em $x = 0$.

Lema 1: Regra de Pascal

Para $m, \ell \in \mathbb{N}$ com $m \geq \ell \geq 1$, vale

$$\binom{m}{\ell} + \binom{m}{\ell-1} = \binom{m+1}{\ell}.$$

Demonstração. Computemos diretamente a soma dos coeficientes binomiais,

$$\begin{aligned}
\binom{m}{\ell} + \binom{m}{\ell-1} &= \frac{m!}{(m-\ell)!\ell!} + \frac{m!}{(m-\ell+1)!(\ell-1)!} \\
&= \frac{m!}{(m-\ell)!(\ell-1)!}\left[\frac{1}{\ell} + \frac{1}{m-\ell+1}\right] \\
&= \frac{(m+1)m!}{(m-\ell)!(\ell-1)!\ell(m+1-\ell)} \\
&= \frac{(m+1)!}{(m+1-\ell)!\ell!} \\
&= \binom{m+1}{\ell},
\end{aligned}$$

como desejado. □

Lema 2: Regra de Leibniz

Para duas funções f, g diferenciáveis pelo menos n vezes, então

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(fg) = \sum_{\ell=0}^{k}\binom{k}{\ell}\frac{\mathrm{d}^{k-\ell}f}{\mathrm{d}x^{k-\ell}}\frac{\mathrm{d}^{\ell}g}{\mathrm{d}x^{\ell}}$$

para todo $k \leq n$.

Demonstração. Para $k = 0$ a igualdade é trivialmente satisfeita e para $k = 1$ temos a regra de Leibniz usual

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)g(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}g + f\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}.$$

Suponhamos que a igualdade é satisfeita para algum $1 \leq m < n$, então, utilizando o Lema 1,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^{m+1}}{\mathrm{d}x^{m+1}}(fg) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}(fg)\right] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sum_{\ell=0}^{m}\binom{m}{\ell}\frac{\mathrm{d}^{m-\ell}f}{\mathrm{d}x^{m-\ell}}\frac{\mathrm{d}^{\ell}g}{\mathrm{d}x^{\ell}}\right] \\
&= \sum_{\ell=0}^{m}\binom{m}{\ell}\left[\frac{\mathrm{d}^{m-\ell+1}f}{\mathrm{d}x^{m-\ell+1}}\frac{\mathrm{d}^{\ell}g}{\mathrm{d}x^{\ell}} + \frac{\mathrm{d}^{m-\ell}f}{\mathrm{d}x^{m-\ell}}\frac{\mathrm{d}^{\ell+1}g}{\mathrm{d}x^{\ell+1}}\right] \\
&= \sum_{\ell=0}^{m}\binom{m}{\ell}\frac{\mathrm{d}^{m-\ell+1}f}{\mathrm{d}x^{m-\ell+1}}\frac{\mathrm{d}^{\ell}g}{\mathrm{d}x^{\ell}} + \sum_{\ell=1}^{m+1}\binom{m}{\ell-1}\frac{\mathrm{d}^{m-\ell+1}f}{\mathrm{d}x^{m-\ell+1}}\frac{\mathrm{d}^{\ell}g}{\mathrm{d}x^{\ell}} \\
&= \frac{\mathrm{d}^{m+1}f}{\mathrm{d}x^{m+1}} + \sum_{\ell=1}^{m}\left[\binom{m}{\ell} + \binom{m}{\ell-1}\right]\frac{\mathrm{d}^{m-\ell+1}f}{\mathrm{d}x^{m-\ell+1}}\frac{\mathrm{d}^{\ell}g}{\mathrm{d}x^{\ell}} + \frac{\mathrm{d}^{m+1}g}{\mathrm{d}x^{m+1}} \\
&= \sum_{\ell=0}^{m+1}\binom{m+1}{\ell}\frac{\mathrm{d}^{m-\ell+1}f}{\mathrm{d}x^{m-\ell+1}}\frac{\mathrm{d}^{\ell}g}{\mathrm{d}x^{\ell}},
\end{aligned}$$

isto é, a igualdade é satisfeita para $m + 1 \leq n$. Pelo princípio de indução finita, a igualdade é satisfeita para todo $k \leq n$, como proposto. □

Lema 3: ℓ-ésima derivada de um monômio

Para $k, \ell \in \mathbb{N}$, temos

$$\frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}x^\ell} x^k = \begin{cases} \frac{k!}{(k-\ell)!} x^{k-\ell}, & \text{se } k \geq \ell \\ 0, & \text{se } k < \ell. \end{cases}$$

Demonstração. Mostremos por indução em k que $\frac{\mathrm{d}^{k+1} x^k}{\mathrm{d}x^{k+1}} = 0$. Claramente a igualdade é válida para $k = 0$, pois $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} 1 = 0$. Suponhamos que a igualdade é satisfeita para algum $m \in \mathbb{N}$, então

$$\frac{\mathrm{d}^{m+2}}{\mathrm{d}x^{m+2}} x^{m+1} = \frac{\mathrm{d}^{m+1}}{\mathrm{d}x^{m+1}} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^{m+1} \right] = (m+1) \frac{\mathrm{d}^{m+1}}{\mathrm{d}x^{m+1}} x^m = 0,$$

isto é, a expressão também vale para $m+1$. Pelo princípio de indução finita, segue que $\frac{\mathrm{d}^{k+1} x^k}{\mathrm{d}x^{k+1}} = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Assim, mostramos que para $\ell > k$, vale $\frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}x^\ell} x^k = 0$.

Consideremos agora o caso em que $\ell \leq k$. Mostremos por indução em ℓ que $\frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}x^\ell} x^k = \frac{k!}{(k-\ell)!} x^{k-\ell}$. Trivialmente para $\ell = 0$ temos $\frac{k!}{k!} x^k = x^k$. Suponhamos que a igualdade é satisfeita para algum $n < k$, então

$$\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}} x^k = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left[\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} x^k \right] = \frac{k!}{(k-n)!} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^{k-n} = \frac{k!}{(k-n-1)!} x^{k-n-1},$$

isto é, a expressão é válida para $n+1$. Pelo princípio de indução finita, a igualdade é satisfeita para todo $\ell \leq k$. □

Proposição 5: Representação de Rodrigues

Os polinômios de Laguerre podem ser dados por

$$L_n(x) = e^x \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} (x^n e^{-x}),$$

chamada de representação de Rodrigues para os polinômios de Laguerre.

Demonstração. Notemos que, para todo $\ell \in \mathbb{N}$, temos

$$\frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}x^\ell} (e^{-x}) = (-1)^\ell e^{-x}.$$

Pelos Lemas 2 e 3, temos

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} (x^n e^{-x}) = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} \frac{\mathrm{d}^{n-\ell}}{\mathrm{d}x^{n-\ell}} (x^n) \frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}x^\ell} (e^{-x}) = e^{-x} \sum_{\ell=0}^{n} (-1)^\ell \binom{n}{\ell} \frac{n!}{\ell!} x^\ell.$$

Assim, obtemos

$$e^x \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} (x^n e^{-x}) = \sum_{\ell=0}^{n} (-1)^\ell \binom{n}{\ell} \frac{n!}{\ell!} x^\ell = L_n(x),$$

como desejado. □

Lema 4: Integração por partes

Seja $k \geq 1$ um número natural, então

$$\int_a^b \mathrm{d}x\, \frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k} g(x) = \sum_{\ell=0}^{k-1} (-1)^\ell \left. \frac{\mathrm{d}^{k-\ell-1} f}{\mathrm{d}x^{k-\ell-1}} \frac{\mathrm{d}^\ell g}{\mathrm{d}x^\ell} \right|_a^b + (-1)^k \int_a^b \mathrm{d}x\, f(x) \frac{\mathrm{d}^k g}{\mathrm{d}x^k}.$$

para quaisquer funções suaves f, g. Para um dado k, se para todo $0 \leq \ell \leq k-1$

$$\left. \frac{\mathrm{d}^{k-\ell-1} f}{\mathrm{d}x^{k-\ell-1}} \frac{\mathrm{d}^\ell g}{\mathrm{d}x^\ell} \right|_a^b = 0,$$

então

$$\int_a^b \mathrm{d}x\, \frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k} g(x) = (-1)^k \int_a^b \mathrm{d}x\, f(x) \frac{\mathrm{d}^k g}{\mathrm{d}x^k}.$$

Demonstração. Para $k = 1$, temos a familiar relação de integração por partes,

$$\int_a^b \mathrm{d}x\, \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} g(x) = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b \mathrm{d}x\, f(x) \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$$

portanto a expressão é válida. Suponhamos que a identidade seja satisfeita para algum $j < n$, então

$$\begin{aligned}
\int_a^b \mathrm{d}x\, \frac{\mathrm{d}^{j+1} f}{\mathrm{d}x^{j+1}} g(x) &= \left. \frac{\mathrm{d}^j f}{\mathrm{d}x^j} g(x) \right|_a^b - \int_a^b \mathrm{d}x\, \frac{\mathrm{d}^j f}{\mathrm{d}x^j} \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} \\
&= \left. \frac{\mathrm{d}^j f}{\mathrm{d}x^j} g(x) \right|_a^b - \left[\sum_{\ell=0}^{j-1} (-1)^\ell \left. \frac{\mathrm{d}^{j-\ell-1} f}{\mathrm{d}x^{j-\ell-1}} \frac{\mathrm{d}^{\ell+1} g}{\mathrm{d}x^{\ell+1}} \right|_a^b + (-1)^j \int_a^b \mathrm{d}x\, f(x) \frac{\mathrm{d}^{j+1} g}{\mathrm{d}x^{j+1}} \right] \\
&= \left. \frac{\mathrm{d}^j f}{\mathrm{d}x^j} g(x) \right|_a^b + \sum_{\ell=1}^{j} (-1)^\ell \left. \frac{\mathrm{d}^{j-\ell} f}{\mathrm{d}x^{j-\ell}} \frac{\mathrm{d}^{\ell} g}{\mathrm{d}x^{\ell}} \right|_a^b + (-1)^{j+1} \int_a^b \mathrm{d}x\, f(x) \frac{\mathrm{d}^{j+1} g}{\mathrm{d}x^{j+1}} \\
&= \sum_{\ell=0}^{j} (-1)^\ell \left. \frac{\mathrm{d}^{j-\ell} f}{\mathrm{d}x^{j-\ell}} \frac{\mathrm{d}^{\ell} g}{\mathrm{d}x^{\ell}} \right|_a^b + (-1)^{j+1} \int_a^b \mathrm{d}x\, f(x) \frac{\mathrm{d}^{j+1} g}{\mathrm{d}x^{j+1}}
\end{aligned}$$

isto é, a expressão é satisfeita para $j + 1$. Pelo princípio da indução finita, segue que a identidade é válida para todo $1 \leq k \leq n$.

Para um dado k, se

$$\sum_{\ell=0}^{k-1} (-1)^\ell \left. \frac{\mathrm{d}^{k-\ell-1} f}{\mathrm{d}x^{k-\ell-1}} \frac{\mathrm{d}^\ell g}{\mathrm{d}x^\ell} \right|_a^b = 0,$$

então

$$\int_a^b \mathrm{d}x\, \frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k} g(x) = (-1)^k \int_a^b \mathrm{d}x\, f(x) \frac{\mathrm{d}^k g}{\mathrm{d}x^k}.$$

Uma das maneiras que satisfaz essa condição é simplesmente

$$\left. \frac{\mathrm{d}^{k-\ell-1} f}{\mathrm{d}x^{k-\ell-1}} \frac{\mathrm{d}^\ell g}{\mathrm{d}x^\ell} \right|_a^b = 0,$$

para todo $0 \leq \ell \leq k-1$. ◻

Proposição 6: Relações de ortogonalidade dos polinômios de Laguerre

Para $m, n \in \mathbb{N}$, segue que

$$\int_0^\infty e^{-x} L_m(x) L_n(x) = (n!)^2 \delta_{nm},$$

onde δ_{nm} é o delta de Kronecker.

Demonstração. Mostremos que para $k \in \mathbb{N}$ com $k < n$ que

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x\, e^{-x} x^k L_n(x) = 0.$$

Pela Proposição 5, temos

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x\, e^{-x} x^k L_n(x) = \int_0^\infty \mathrm{d}x\, x^k \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n e^{-x}).$$

Pelos Lemas 2 e 3, temos

$$\frac{\mathrm{d}^s}{\mathrm{d}x^s}(x^n e^{-x}) = \sum_{\ell=0}^{s} \binom{s}{\ell} \frac{\mathrm{d}^{s-\ell}}{\mathrm{d}x^{s-\ell}}(x^n) \frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}x^\ell}(e^{-x}) = e^{-x} \sum_{\ell=0}^{s} (-1)^\ell \binom{s}{\ell} \frac{n!}{(n-s+\ell)!} x^{n-s+\ell}$$

para todos $s, n \in \mathbb{N}$ com $s \leq n$. Com isso, vemos que

$$\lim_{x \to +\infty} x^r \frac{\mathrm{d}^s}{\mathrm{d}x^s}(x^n e^{-x}) = 0 \quad \text{e} \quad x^r \frac{\mathrm{d}^s}{\mathrm{d}x^s}(x^n e^{-x})\bigg|_{x=0} = 0$$

para todo $r \in \mathbb{N}$ e $s < n$. Tomando $r = k - \ell$ e $s = n - \ell - 1$, mostramos que

$$\frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}x^\ell}\left(x^k\right) \frac{\mathrm{d}^{k-\ell-1}}{\mathrm{d}x^{k-\ell-1}} \left[\frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}x^{n-k}}(x^n e^{-x})\right]\bigg|_0^\infty = 0$$

para todo $0 \leq \ell < k \leq n$. Assim, pelo Lema 4, temos

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x\, e^{-x} x^k L_n(x) = (-1)^k k! \int_0^\infty \mathrm{d}x\, \frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}x^{n-k}}(x^n e^{-x}) = (-1)^k k! \frac{\mathrm{d}^{n-k-1}}{\mathrm{d}x^{n-k-1}}(x^n e^{-x})\bigg|_0^\infty = 0,$$

como mostrado anteriormente, tomando $s = n - k - 1$ e $r = 0$.

Consideremos $m, n \in \mathbb{N}$. Sem perdas de generalidade, podemos assumir que $n \geq m$. Desse modo, pela linearidade da integral,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \mathrm{d}x\, e^{-x} L_m(x) L_n(x) &= \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{m!}{k!} \binom{m}{k} \int_0^\infty \mathrm{d}x\, e^{-x} x^k L_n(x) \\
&= \delta_{nm} (-1)^n \int_0^\infty \mathrm{d}x\, e^{-x} x^n L_n(x) \\
&= \delta_{nm} (-1)^n \int_0^\infty \mathrm{d}x\, x^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n e^{-x}) \\
&= \delta_{nm} (-1)^{2n} n! \int_0^\infty \mathrm{d}x\, e^{-x} x^n \\
&= \delta_{nm} n! \Gamma(n+1) = \delta_{nm} (n!)^2,
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. ◻

Proposição 7: Polinômios de Laguerre associados

Os *polinômios de Laguerre associados*,

$$L_n^m(x) = \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m} L_n(x) = \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left[e^x \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^n e^{-x}\right)\right],$$

são soluções da *equação de Laguerre associada*,

$$x\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} + (m+1-x)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + (n-m)f(x) = 0,$$

e são dados por

$$L_n^m(x) = (-1)^m \sum_{k=0}^{n-m} (-1)^k \frac{n!}{k!}\binom{n}{m+k} x^k.$$

Demonstração. Utilizando o Lema 2, derivemos a equação de Laguerre m vezes. Temos os resultados parciais

$$\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left(x\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right) = \sum_{\ell=0}^{m}\binom{m}{\ell}\frac{\mathrm{d}^{m-\ell+2}y}{\mathrm{d}x^{m-\ell+2}}\frac{\mathrm{d}^\ell x}{\mathrm{d}x^\ell} = \sum_{\ell=0}^{1}\binom{m}{\ell}\frac{\mathrm{d}^{m-\ell+2}y}{\mathrm{d}x^{m-\ell+2}}x^{1-\ell} = \frac{\mathrm{d}^{m+2}y}{\mathrm{d}x^{m+2}}x + m\frac{\mathrm{d}^{m+1}y}{\mathrm{d}x^{m+1}},$$

e

$$\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left[(1-x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] = \sum_{\ell=0}^{m}\binom{m}{\ell}\frac{\mathrm{d}^{m-\ell+1}y}{\mathrm{d}x^{m-\ell+1}}\frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}x^\ell}(1-x) = \frac{\mathrm{d}^{m+1}y}{\mathrm{d}x^{m+1}}(1-x) - m\frac{\mathrm{d}^m y}{\mathrm{d}x^m}.$$

Ao substituir na equação, temos

$$x\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{\mathrm{d}^m y}{\mathrm{d}x^m}\right) + (m+1-x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}^m y}{\mathrm{d}x^m}\right) + (n-m)\frac{\mathrm{d}^m y}{\mathrm{d}x^m} = 0.$$

Tomando $f(x) = \frac{\mathrm{d}^m y}{\mathrm{d}x^m}$, obtemos a equação de Laguerre associada, cujas soluções sem singularidade em $x = 0$ são a m-ésima derivada dos polinômios de Laguerre, isto é, os polinômios de Laguerre associados,

$$L_n^m(x) = \frac{\mathrm{d}^m L_n}{\mathrm{d}x^m}.$$

Pela Definição 1, temos

$$\begin{aligned}
L_n^m(x) &= \sum_{\ell=0}^{n}(-1)^\ell\frac{n!}{\ell!}\binom{n}{\ell}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}(x^\ell) \\
&= \sum_{\ell=m}^{n}(-1)^\ell\frac{n!}{\ell!}\binom{n}{\ell}\frac{\ell!}{(\ell-m)!}x^{\ell-m} \\
&= \sum_{k=0}^{n-m}(-1)^{k+m}\frac{n!}{k!}\binom{n}{m+k}x^k,
\end{aligned}$$

como desejado. ◻

Exercício 5

Proposição 8: Operador de derivação no espaço de polinômios complexos

Seja $\mathcal{P}_n$ o espaço vetorial complexo $(n+1)$-dimensional de todos os polinômios complexos de grau menor ou igual a n. O operador diferencial nilpotente $D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ pode ser representado matricialmente por

$$D \doteq \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

na base $\{e_0, e_1, \dots, e_n\}$, onde $e_k = \frac{x^k}{k!}$.

Demonstração. Na base dada, temos $De_0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}1 = 0$ e para $1 \leq k \leq n$

$$De_k = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{x^k}{k!} = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = e_{k-1},$$

o que confirma a representação matricial afirmada.

Pelo Lema 3, temos $D^{n+1}e_k = 0$ para todo $0 \leq k \leq n$. Dessa forma, para um polinômio $p \in \mathcal{P}_n$ com $p = \sum_{k=0}^{n} p_k e_k$, temos

$$D^{n+1}p = \sum_{k=0}^{n} p_k D^{n+1} e_k = 0.$$

Assim, segue que o operador D^{n+1} é o operador nulo, isto é, D é nilpotente. □

Lema 5: Binômio de Newton

Para $a, b \in \mathbb{C}$, segue que

$$(a+b)^k = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} a^{k-\ell} b^{\ell}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

Demonstração. A identidade segue trivialmente para $k = 0$ e para $k = 1$ temos

$$\binom{1}{0}a + \binom{1}{1}b = a + b,$$

portanto a igualdade é satisfeita. Suponhamos que a expressão seja válida para algum $m \in \mathbb{N}$, então

$$\begin{aligned}
(a+b)^{m+1} = (a+b)(a+b)^m &= (a+b)\sum_{\ell=0}^{m}\binom{m}{\ell}a^{m-\ell}b^{\ell} \\
&= \sum_{\ell=0}^{m}\binom{m}{\ell}a^{m+1-\ell}b^{\ell} + \sum_{\ell=1}^{m+1}\binom{m}{\ell-1}a^{m+1-\ell}b^{\ell} \\
&= a^{m+1} + b^{m+1} + \sum_{\ell=1}^{m}\left[\binom{m}{\ell} + \binom{m}{\ell-1}\right]a^{m+1-\ell}b^{\ell} \\
&= \sum_{\ell=0}^{m}\binom{m+1}{\ell}a^{m+1-\ell}b^{\ell},
\end{aligned}$$

pelo Lema 1, isto é, $m+1$ também satisfaz a identidade. Dessa forma, pelo princípio da indução finita, segue que é válida para todo $k \in \mathbb{N}$. $\square$

Proposição 9: Exponencial do operador de derivação

Para $t \in \mathbb{C}$, temos

$$\exp(tD) \doteq \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} & \frac{t^n}{n!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \frac{t^{n-3}}{(n-3)!} & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

como a representação matricial do operador $\exp(tD)$ na base $\{e_0, e_1, \dots, e_n\}$ de $\mathcal{P}_n$. Este operador satisfaz

$$\left[\exp(tD)p\right](x) = p(x+t),$$

para todo $p \in \mathcal{P}_n$ e $x \in \mathbb{C}$.

Demonstração. Pelo resultado obtido no Lema 3, segue que

$$D^\ell e_k = \begin{cases} e_{k-\ell}, & \text{se } k \geq \ell \\ 0, & \text{se } k < \ell \end{cases}$$

para todo $0 \leq k \leq n$ e $\ell \in \mathbb{N}$.

Como D é nilpotente com $D^{n+1} = 0$, segue que

$$\exp(tD) = \mathrm{id}_{\mathcal{P}_n} + \sum_{\ell=1}^{n} \frac{t^\ell}{\ell!} D^\ell$$

para todo $t \in \mathbb{C}$. Assim, para um vetor e_k da base, temos

$$\begin{aligned} \exp(tD)e_k &= e_k + \sum_{\ell=1}^{n} \frac{t^\ell}{\ell!} D^\ell e_k = e_k + \sum_{\ell=1}^{k} \frac{t^\ell}{\ell!} e_{k-\ell} \\ &= e_k + te_{k-1} + \frac{t^2}{2} e_{k-2} + \dots + \frac{t^k}{k!} e_0, \end{aligned}$$

o que confirma a representação matricial apresentada.

Notemos que para $x \in \mathbb{C}$, temos

$$\begin{aligned} \left[\exp(tD)e_k\right](x) &= \sum_{\ell=0}^{k} \frac{t^\ell}{\ell!} e_{k-\ell}(x) = \sum_{\ell=0}^{k} \frac{t^\ell}{\ell!} \frac{x^{k-\ell}}{(k-\ell)!} \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{l} t^\ell x^{k-\ell} \\ &= \frac{(t+x)^k}{k!} = e_k(t+x), \end{aligned}$$

pelo Lema 5, para todo $0 \leq k \leq n$. Dessa forma, para um polinômio $p \in \mathcal{P}_n$ qualquer, com $p = \sum_{k=0}^{n} p_k e_k$, temos

$$\left[\exp(tD)p\right](x) = \sum_{k=0}^{n} p_k \left[\exp(tD)e_k\right](x) = \sum_{k=0}^{n} p_k e_k(t+x) = p(t+x),$$

como desejado. $\square$

Exercício 6

Definição 2: Matrizes de Pauli

As *matrizes de Pauli* são definidas por

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Proposição 10: Relações algébricas das matrizes de Pauli

As matrizes de Pauli satisfazem as relações

$$[\sigma_a, \sigma_b] = 2i \sum_{c=1}^{3} \epsilon_{abc}\sigma_c, \quad \{\sigma_a, \sigma_b\} = 2\delta_{ab}\mathbb{1}, \quad \text{e} \quad \sigma_a\sigma_b = \delta_{ab}\mathbb{1} + i\sum_{c=1}^{3} \epsilon_{abc}\sigma_c,$$

onde ϵ_{abc} é o símbolo de Levi-Civita e $\mathbb{1}$ é a matriz identidade.

Demonstração. Calculando os nove possíveis produtos, temos

$$\sigma_1\sigma_1 = \sigma_2\sigma_2 = \sigma_3\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1},$$

$$\begin{aligned}
\sigma_1\sigma_2 &= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = i\sigma_3, & \sigma_2\sigma_1 &= \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = -i\sigma_3, & [\sigma_1, \sigma_2] &= 2i\sigma_3, \\
\sigma_1\sigma_3 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -i\sigma_2, & \sigma_3\sigma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_2, & [\sigma_1, \sigma_3] &= -2i\sigma_2, \\
\sigma_2\sigma_3 &= \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_1, & \sigma_2\sigma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = -i\sigma_1, & [\sigma_2, \sigma_3] &= 2i\sigma_1,
\end{aligned}$$

portanto segue que

$$[\sigma_a, \sigma_b] = 2i \sum_{c=1}^{3} \epsilon_{abc}\sigma_c \quad \text{e} \quad \{\sigma_a, \sigma_b\} = 2\delta_{ab}\mathbb{1}.$$

Somando estas duas expressões, obtemos

$$2\sigma_a\sigma_b = 2\delta_{ab}\mathbb{1} + 2i\sum_{c=1}^{3} \epsilon_{abc}\sigma_c,$$

como desejado. □

Proposição 11: Base de $M_2(\mathbb{C})$

O conjunto $\{\mathbb{1}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ é uma base para o espaço vetorial $M_2(\mathbb{C})$ de matrizes quadradas 2×2 de coeficientes complexos.

Demonstração. Mostremos que este conjunto é linearmente independente. Consideremos a combinação linear nula,

$$\alpha_0\mathbb{1} + \sum_{k=1}^{3} \alpha_k\sigma_k = 0.$$

Os coeficientes da combinação linear são encontrados pelo sistema de equações

$$\begin{cases} \alpha_0 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - i\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + i\alpha_2 = 0 \\ \alpha_0 - \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

cuja única solução é $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Mostremos que este conjunto gera $M_2(\mathbb{C})$. Para uma matriz arbitrária, temos

$$\beta_0 \mathbb{1} + \sum_{k=0}^{3} \beta_k \sigma_k = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \beta_0 + \beta_3 = z_{11} \\ \beta_1 - i\beta_2 = z_{12} \\ \beta_1 + i\beta_2 = z_{21} \\ \beta_0 - \beta_3 = z_{22} \end{cases}$$

cuja solução única,

$$\beta_0 = \frac{z_{11} + z_{22}}{2}, \qquad \beta_1 = \frac{z_{12} + z_{21}}{2}, \qquad \beta_2 = \frac{z_{21} - z_{12}}{2i}, \qquad \beta_3 = \frac{z_{11} - z_{22}}{2},$$

é sempre definida para todos $z_{11}, z_{12}, z_{21}, z_{22} \in \mathbb{C}$. □

Proposição 12: Exponencial de um vetor de Pauli

Seja $\vec{\eta} = \eta_1 \boldsymbol{e}_x + \eta_2 \boldsymbol{e}_y + \eta_3 \boldsymbol{e}_z$ um vetor unitário de $\mathbb{R}^3$. Seja o *vetor de Pauli* a combinação linear

$$\vec{\eta} \cdot \vec{\sigma} = \eta_1 \sigma_1 + \eta_2 \sigma_2 + \eta_3 \sigma_3,$$

então

$$\exp(i\theta \vec{\eta} \cdot \vec{\sigma}) = (\cos\theta)\mathbb{1} + (i \sin\theta)(\vec{\eta} \cdot \vec{\sigma}),$$

para todo $\theta \in \mathbb{C}$.

Demonstração. Pela Proposição 10, temos

$$\begin{aligned} (\vec{\eta} \cdot \vec{\sigma})^2 &= \sum_{k=1}^{3} \eta_k \sigma_k \sum_{\ell=1}^{3} \eta_\ell \sigma_\ell \\ &= \sum_{k=1}^{3} \sum_{\ell=1}^{3} \eta_k \eta_\ell \left(\delta_{k\ell} \mathbb{1} + i \sum_{m=1}^{3} \epsilon_{k\ell m} \sigma_m \right) \\ &= \sum_{k=1}^{3} (\eta_k)^2 \mathbb{1} + i \sum_{k=1}^{3} \sum_{\ell=1}^{3} \sum_{m=1}^{3} \eta_k \eta_\ell \epsilon_{k\ell m} \sigma_m \\ &= \mathbb{1} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3} \sum_{\ell=1}^{3} \eta_k \eta_\ell [\sigma_k, \sigma_\ell] \\ &= \mathbb{1} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3} [\eta_k \sigma_k, \vec{\eta} \cdot \vec{\sigma}] \\ &= \mathbb{1} + \frac{1}{2} [\vec{\eta} \cdot \vec{\sigma}, \vec{\eta} \cdot \vec{\sigma}] \\ &= \mathbb{1}, \end{aligned}$$

onde usamos a bilinearidade e anticomutatividade do comutador.

Mostremos por indução em $m \in \mathbb{N}$ que

$$(i\theta\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma})^{2m} = (-1)^m \theta^{2m}\mathbb{1} \quad \text{e} \quad (i\theta\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma})^{2m+1} = (-1)^m i\theta^{2m+1}\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma},$$

para todo $\theta \in \mathbb{C}$. Essas igualdades seguem trivialmente para $m = 0$ e para $m = 1$ temos

$$(i\theta\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma})^2 = -\theta^2\mathbb{1} \quad \text{e} \quad (i\theta\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma})^3 = -i\theta^3\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma},$$

como proposto. Suponhamos que as igualdades sejam satisfeitas para algum $k \in \mathbb{N}$, então

$$\begin{aligned}(i\theta\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma})^{2k+2} &= (i\theta\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma})(i\theta\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma})^{2k+1}\\ &= (i\theta\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma})\left[(-1)^k i\theta^{2k+1}\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma}\right]\\ &= (-1)^{k+1}\theta^{2k+2}\mathbb{1}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(i\theta\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma})^{2k+3} &= (i\theta\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma})(i\theta\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma})^{2k+2}\\ &= (i\theta\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma})\left[(-1)^{k+1}\theta^{2k+2}\mathbb{1}\right]\\ &= (-1)^{k+1} i\theta^{2k+3}\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma},\end{aligned}$$

isto é, as igualdades são satisfeitas por $k+1$. Pelo princípio da indução finita, são válidas para todo $m \in \mathbb{N}$.

Assim, para todo $\theta \in \mathbb{C}$, temos

$$\begin{aligned}\exp(i\theta\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma}) &= \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(i\theta\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma})^n}{n!}\\ &= \left[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\theta^{2m}}{(2m)!}\right]\mathbb{1} + \left[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\theta^{2m+1}}{(2m+1)!}\right] i\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma}\\ &= (\cos\theta)\mathbb{1} + (i\sin\theta)(\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma}),\end{aligned}$$

como desejado. □

Proposição 13: Solução de uma classe de equações diferenciais

Seja o operador constante

$$H = B_1\sigma_1 + B_2\sigma_2 + B_3\sigma_3,$$

com $B_1, B_2, B_3 \in \mathbb{R}$. A solução da equação diferencial

$$i\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = H\psi(t),$$

onde $\psi(t) = \binom{\psi_1(t)}{\psi_2(t)} \in \mathbb{C}^2$ satisfazendo a condição inicial $\psi(0) = \psi_0 = \binom{\psi_1^0}{\psi_2^0}$, é

$$\psi(t) = \begin{cases}\psi_0, & \text{se } H = 0\\ \cos(Bt)\psi_0 - \frac{i\sin(Bt)}{B}H\psi_0, & \text{se } H \neq 0\end{cases}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, onde $B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + B_3^2}$.

Demonstração. A equação diferencial pode ser escrita como

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = -iH\psi(t),$$

portanto a solução do problema de valor inicial é dada por

$$\psi(t) = \exp(-itH)\psi_0,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Para $H = 0$, temos a solução constante $\psi(t) = \psi_0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Suponhamos que H não seja o operador nulo. Seja $B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + B_3^2}$ e $\vec{\eta} \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$B\vec{\eta} = B_1\boldsymbol{e}_x + B_2\boldsymbol{e}_y + B_3\boldsymbol{e}_z.$$

Assim, temos $H = B\vec{\eta} \cdot \vec{\sigma}$. Com isso, pela Proposição 12, segue que

$$\exp(-itH) = \cos(Bt)\mathbb{1} - (i\sin(Bt))(\vec{\eta} \cdot \vec{\sigma}) = \cos(Bt)\mathbb{1} - \frac{i\sin(Bt)}{B}H.$$

Logo, a solução da equação diferencial é

$$\psi(t) = \cos(Bt)\psi_0 - \frac{i\sin(Bt)}{B}H\psi_0,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. □