Física Matemática II
Segunda Lista de Exercícios e Tarefas

Louis Bergamo Radial
8992822

23 de junho de 2024

Exercício 1

Proposição 1: Corda Pendurada

A solução da equação da corda pendurada,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - g\frac{\partial}{\partial z}\left(z\frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0,$$

com $g > 0$, que descreve o movimento de pequenas oscilações de uma corda de comprimento L localizada, quando em repouso, no intervalo $z \in [0, L]$ do eixo vertical, pendurada pelo seu extremo superior e com condições iniciais $u(z,0) = u_0(z)$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(z,0) = v_0(z)$ é

$$u(z,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cos\left(\frac{\alpha_k^0}{2}\sqrt{\frac{g}{L}}t\right) + b_k \sin\left(\frac{\alpha_k^0}{2}\sqrt{\frac{g}{L}}t\right)\right] J_0\left(\alpha_k^0\sqrt{\frac{z}{L}}\right),$$

onde

$$a_k = \frac{1}{(J_1(\alpha_k^0))^2 L}\int_0^L \mathrm{d}z\, u_0(z) J_0\left(\alpha_k^0\sqrt{\frac{z}{L}}\right) \quad \text{e} \quad b_k = \frac{2}{(J_1(\alpha_k^0))^2\sqrt{gL}\alpha_k^0}\int_0^L \mathrm{d}z\, v_0(z) J_0\left(\alpha_k^0\sqrt{\frac{z}{L}}\right),$$

com α_k^0 o k-ésimo zero positivo da função de Bessel J_0.

Demonstração. Suponhamos que $u(z,t) = U(z)T(t)$ é solução da equação diferencial a derivadas parciais, sujeita à condição de contorno $U(L) = 0$. Substituindo na equação, obtemos

$$U\ddot{T} - gU'T - gzU''T = 0 \implies \frac{1}{g}\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \frac{U'(z) + zU''(z)}{U(z)}.$$

Notemos que o lado esquerdo da equação é função apenas de t e o lado direito, apenas de z, portanto ambos os lados devem ser iguais a uma constante $\lambda \in \mathbb{R}$, isto é

$$\begin{cases} \frac{1}{g}\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \lambda \\ \frac{U'(z)+zU''(z)}{U(z)} = \lambda \end{cases} \iff \begin{cases} \ddot{T}(t) - g\lambda T(t) = 0 \\ zU''(z) + U'(z) - \lambda U(z) = 0. \end{cases}$$

No caso em que $\lambda = 0$, temos $T(t) = At + B$ e $U(z) = C\ln z + D$. Como a singularidade em $z = 0$ não tem significado físico, segue que $C = 0$ e como $U(L) = 0$, segue que $U(z) = 0$. Isto é, o caso

$\lambda = 0$ só admite a solução trivial. Assim, consideraremos $\lambda = -\nu^2$, para algum ν ou imaginário ou real.

Seja $\zeta^2 = 4\nu^2 z$ e seja $\eta(\zeta) = u(z)$. Substituindo

$$\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z} = \frac{2\nu^2}{\zeta}, \quad \frac{\mathrm{d}^2\zeta}{\mathrm{d}z^2} = -\frac{(2\nu^2)^2}{\zeta^3}, \quad \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\zeta}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z}, \quad \text{e} \quad \frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}z^2} = \frac{\mathrm{d}^2\eta}{\mathrm{d}\zeta^2}\left(\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z}\right)^2 + \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\zeta}\frac{\mathrm{d}^2\zeta}{\mathrm{d}z^2},$$

na equação diferencial obtemos

$$\frac{\zeta^2}{4\nu^2}\left(\frac{(2\nu^2)^2}{\zeta^2}\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\mathrm{d}\zeta^2} - \frac{(2\nu^2)^2}{\zeta^3}\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\zeta}\right) + \frac{2\nu^2}{\zeta}\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\zeta} + \nu^2\eta(\zeta) = 0 \implies \zeta^2\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\mathrm{d}\zeta^2} + \zeta\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\zeta} + \zeta^2\eta(\zeta) = 0.$$

Com essa mudança de variáveis, obtemos uma equação de Bessel de ordem zero em ζ para η, portanto

$$\eta(\zeta) = \beta J_0(\zeta),$$

visto que a singularidade em $z = 0$ não tem significado físico. Desse modo, a solução geral da equação para $U(z)$ é

$$U(z) = \beta J_0(2\nu\sqrt{z}),$$

e então da condição de contorno temos

$$\nu_k = \frac{\alpha_k^0}{2\sqrt{L}}, \quad \text{com} \quad k \in \mathbb{N}^*$$

onde α_k^0 é o k-ésimo zero positivo da função de Bessel J_0.

Assim, como $\nu \in \mathbb{R}$, a solução geral da equação da corda pendurada é

$$u(z,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cos\left(\frac{\alpha_k^0}{2}\sqrt{\frac{g}{L}}t\right) + b_k \sin\left(\frac{\alpha_k^0}{2}\sqrt{\frac{g}{L}}t\right)\right] J_0\left(\alpha_k^0\sqrt{\frac{z}{L}}\right),$$

para $z \in [0, L]$. Das condições iniciais temos

$$u_0(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_0\left(\alpha_k^0\sqrt{\frac{z}{L}}\right) \quad \text{e} \quad v_0(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k^0}{2}\sqrt{\frac{g}{L}} b_k J_0\left(\alpha_k^0\sqrt{\frac{z}{L}}\right),$$

portanto podemos determinar os coeficientes a_k e b_k com as relações de ortogonalidade

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\, x J_0(\alpha_k^0 x) J_0(\alpha_\ell^0 x) = \delta_{k\ell}\frac{(J_1(\alpha_k^0))^2}{2}.$$

Com a substituição de variáveis $x^2 = \frac{z}{L}$ temos

$$\int_0^L \mathrm{d}z\, J_0\left(\alpha_k^0\sqrt{\frac{z}{L}}\right) J_0\left(\alpha_\ell^0\sqrt{\frac{z}{L}}\right) = 2L\int_0^1 \mathrm{d}x\, x J_0(\alpha_k^0 x) J_0(\alpha_\ell^0 x) = \delta_{k\ell}(J_1(\alpha_k^0))^2 L.$$

Multiplicando as equações para as condições iniciais por $J_0\left(\alpha_\ell^0\sqrt{\frac{z}{L}}\right)$ e integrando em z no intervalo $[0, L]$, temos

$$a_k = \frac{1}{(J_1(\alpha_k^0))^2 L}\int_0^L \mathrm{d}z\, u_0(z) J_0\left(\alpha_k^0\sqrt{\frac{z}{L}}\right) \quad \text{e} \quad b_k = \frac{2}{(J_1(\alpha_k^0))^2\sqrt{gL}\,\alpha_k^0}\int_0^L \mathrm{d}z\, v_0(z) J_0\left(\alpha_k^0\sqrt{\frac{z}{L}}\right),$$

como desejado. □

Exercício 2

Proposição 2: Membrana circular com amortecimento

Considere a equação de ondas com amortecimento

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \gamma\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla^2 u = 0,$$

com $c, \gamma > 0$, no interior de um disco de raio $R > 0$, com $|u(\rho,\varphi,t)| < \infty$, sujeita à condição de contorno de Dirichlet $u(R,\varphi,t) = 0$ e às condições iniciais $u(\rho,\varphi,0) = 0$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(\rho,\varphi,0) = v_0(\rho)$, onde

$$v_0(\rho) = \begin{cases} V, & \rho \in [0, R_0] \\ 0, & \rho \in [R_0, R], \end{cases}$$

para $0 < R_0 < R$. A solução desta equação de ondas é

Demonstração. Suponhamos que a solução seja da forma $u(\rho,\varphi,t) = \Xi(\rho,\varphi)T(t)$, então, ao substituir na equação diferencial obtemos

$$\frac{1}{c^2}\Xi\ddot{T} + \gamma\Xi\dot{T} - \nabla^2\Xi T = 0 \implies \frac{\nabla^2\Xi(\rho,\varphi)}{\Xi(\rho,\varphi)} = \frac{\ddot{T}(t) + c^2\gamma\dot{T}(t)}{c^2T(t)}.$$

Como o lado direito é apenas função de t e o lado esquerdo é função apenas de ρ,φ, segue que ambos são iguais a uma constante $\lambda \in \mathbb{R}$, isto é,

$$\nabla^2\Xi(\rho,\varphi) = \lambda\Xi(\rho,\varphi) \quad \text{e} \quad \ddot{T}(t) + c^2\gamma\dot{T}(t) - \lambda c^2T(t) = 0.$$

Notemos que no caso em que $\lambda = 0$, a equação para Ξ se torna a equação de Laplace, portanto como $\Xi(R,\varphi) = 0$ e Ξ é pelo menos duas vezes diferenciável, então[1] $\Xi(\rho,\varphi) = 0$. Desse modo, para uma solução não trivial, devemos ter $\lambda \neq 0$. Por este motivo, tomaremos $\lambda = -\nu^2$, para algum ν ou real ou imaginário.

Suponhamos agora que $\Xi(\rho,\varphi) = X(\rho)\Phi(\varphi)$, então

$$\begin{aligned}\nabla^2\Xi(\rho,\varphi) + \nu^2\Xi(\rho,\varphi) = 0 &\implies \frac{1}{\rho}X'(\rho)\Phi(\varphi) + X''(\rho)\Phi(\varphi) + \frac{1}{\rho^2}X(\rho)\Phi''(\varphi) + \nu^2X(\rho)\Phi(\varphi) = 0 \\ &\implies \frac{\rho X'(\rho) + \rho^2X''(\rho)}{X(\rho)} + \rho^2\nu^2 = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}.\end{aligned}$$

Como o lado direito depende só de φ e o lado esquerdo depende só de ρ, ambos os lados devem ser iguais a uma constante. Para que a solução não trivial seja 2π-periódica em φ, esta constante deve ser igual ao quadrado de um inteiro não negativo, m^2, de modo que, se $m \neq 0$,

$$\Phi_m(\varphi) = a_m\cos(m\varphi) + b_m\sin(m\varphi) \quad \text{e} \quad \rho^2X''(\rho) + \rho X'(\rho) + (\rho^2\nu^2 - m^2)X(\rho) = 0,$$

e, se $m = 0$, como a solução deve ser limitada,

$$\Phi_0(\varphi) = b_0 \quad \text{e} \quad \rho^2X''(\rho) + \rho X'(\rho) + \rho^2\nu^2X(\rho) = 0.$$

Notemos que obtemos equações de Bessel generalizadas para as equações diferenciais de $X(\rho)$, cujas soluções gerais são

$$X_m(\rho) = aJ_m(\nu\rho),$$

[1] Ver fim da lista para a P2 de Cálculo III.

para todo $m \geq 0$, já que a singularidade em $\rho = 0$ não tem sentido físico. Com a condição de contorno, vemos que ν deve ser real para que $X(R) = 0$, e que

$$\nu_{m,k} = \frac{\alpha_k^m}{R},$$

onde α_k^m é o k-ésimo zero positivo da função de Bessel J_m. Isto é, obtemos a solução geral para $\Xi(\rho, \varphi)$, dada por

$$\Xi_{m,k}(\rho, \varphi) = \left[a_{m,k} \cos(m\varphi) + b_{m,k} \sin(m\varphi)\right] J_m \left(\alpha_k^m \frac{\rho}{R}\right)$$

para $m, k > 0$ e

$$\Xi_{0,k}(\rho, \varphi) = b_0 J_0 \left(\alpha_k^0 \frac{\rho}{R}\right),$$

para $m = 0, k > 0$.

Definindo $2\eta = c^2\gamma$ e $\omega_{m,k} = \nu_{m,k} c$, a equação diferencial para $T(t)$ é

$$\ddot{T}(t) + 2\eta \dot{T}(t) + \omega_{m,k}^2 T(t) = 0,$$

que é a equação diferencial para um oscilador harmônico amortecido, cujas soluções são separadas em três casos distintos,

$$\begin{cases} \text{amortecimento subcrítico:} \quad \eta^2 < \omega_{m,k}^2 \implies T_{m,k}(t) = e^{-\eta t}\left(c_{m,k}\cos(\Omega_{m,k}t) + d_{m,k}\sin(\Omega_{m,k}t)\right); \\ \text{amortecimento crítico:} \quad \eta^2 = \omega_{m,k}^2 \implies T_{m,k}(t) = e^{-\eta t}\left(c_{m,k}t + d_{m,k}\right); \quad \text{e} \\ \text{amortecimento supercrítico:} \quad \eta^2 > \omega_{m,k}^2 \implies T_{m,k}(t) = c_{m,k}e^{(\Omega_{m,k}-\eta)t} + d_{m,k}e^{-(\Omega_{m,k}+\eta)t}, \end{cases}$$

onde definimos $\Omega_{m,k} = \left|\eta^2 - \omega_{m,k}^2\right|^{\frac{1}{2}}$. Seja $\chi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \{-1, 0, 1\}$ definido por

$$\chi(m,k) = \begin{cases} 1, & \alpha_k^m < \frac{c\gamma R}{2} \\ 0, & \alpha_k^m = \frac{c\gamma R}{2} \\ -1, & \alpha_k^m > \frac{c\gamma R}{2} \end{cases}$$

a função que retorna 1 caso o amortecimento seja supercrítico, 0 se for crítico e -1 se for subcrítico. Então, podemos escrever a solução para $T_{m,k}(t)$ como a solução geral da equação para a membrana circular com amortecimento é

$$u(\rho, \varphi, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \Xi_{m,k}(\rho, \varphi) T_{m,k}(t).$$

TODO: Terminar, dúvidas. □

Exercício 4

Proposição 3: Soluções da equação de Hermite

As soluções gerais da equação de Hermite

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}z^2} - 2z\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z} + \lambda y(z) = 0,$$

com $\lambda \in \mathbb{C}$ constante, são dadas por

$$y(z) = c_0\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{(2k)!}\prod_{\ell=0}^{k-1}(4\ell - \lambda)\right] + c_1\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}\prod_{\ell=0}^{k-1}(4\ell + 2 - \lambda)\right],$$

para todo $z \in \mathbb{C}$, com $c_0, c_1 \in \mathbb{C}$.

Demonstração. Como os coeficientes que acompanham $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}$ e $y(z)$ são funções inteiras, segue que a solução da equação é inteira, logo podemos procurar uma solução do tipo $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$. Substituindo na equação diferencial,

$$0 = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)c_k z^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty}(\lambda - 2k)c_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty}\left[(k+2)(k+1)c_{k+2} + (\lambda - 2k)c_k\right] z^k,$$

obtemos a relação de recorrência

$$c_{k+2} = \frac{2k-\lambda}{(k+2)(k+1)}c_k = \frac{2k-\lambda}{(k+2)!}k!c_k$$

para $k \in \mathbb{N}$.

Mostremos por indução que

$$c_{2k} = \frac{c_0}{(2k)!}\prod_{\ell=0}^{k-1}(4\ell - \lambda) \quad \text{e} \quad c_{2k+1} = \frac{c_1}{(2k+1)!}\prod_{\ell=0}^{k-1}(4\ell + 2 - \lambda)$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Para $k = 0$, as igualdades são verificadas trivialmente. Suponhamos que as igualdades sejam satisfeitas para algum $k = n \in \mathbb{N}$, então da relação de recorrência, temos

$$\begin{aligned} c_{2n+2} &= \frac{4n-\lambda}{(2n+2)!}(2n)!c_{2n} \\ &= \frac{4n-\lambda}{(2n+2)!}c_0\prod_{\ell=0}^{n-1}(4\ell-\lambda) \\ &= \frac{c_0}{(2n+2)!}\prod_{\ell=0}^{n}(4\ell-\lambda) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} c_{2n+3} &= \frac{4n+2-\lambda}{(2n+3)!}(2n+1)!c_{2n+1} \\ &= \frac{4n+2-\lambda}{(2n+3)!}c_1\prod_{\ell=0}^{n-1}(4\ell+2-\lambda) \\ &= \frac{c_1}{(2n+3)!}\prod_{\ell=0}^{n}(4\ell+2-\lambda), \end{aligned}$$

isto é, as expressões são válidas para $n+1$. Pelo princípio da indução finita, as igualdades seguem para todo $k \in \mathbb{N}$.

Dessa forma, a solução geral da equação de Hermite é dada por

$$y(z) = c_0\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{(2k)!}\prod_{\ell=0}^{k-1}(4\ell - \lambda)\right] + c_1\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}\prod_{\ell=0}^{k-1}(4\ell + 2 - \lambda)\right],$$

definida para todo $z \in \mathbb{C}$. No caso particular em que $\lambda = 2m$ para algum $m \in \mathbb{N}$, segue que $c_{m+2} = 0$. Por conseguinte, todos os termos c_{m+2k+2} se anulam para $k \in \mathbb{N}$. Isto é, neste caso há uma solução polinomial de grau m para esta equação. $\square$