Física Matemática II
Terceira Lista de Exercícios e Tarefas

Louis Bergamo Radial
8992822

24 de junho de 2024

Exercício 1

Proposição 1: Função de Green para $u'' = f$

A função de Green para o problema de Sturm

$$\begin{cases} u''(x) = f(x), \\ \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0 \\ \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0 \end{cases}$$

para $x \in [a, b]$ é dada por

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{(\alpha_1 x - a\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 \xi - b\beta_1 - \beta_2)}{(b-a)\alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2}, & a \leq x < \xi \leq b \\ \dfrac{(\alpha_1 \xi - a\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 x - b\beta_1 - \beta_2)}{(b-a)\alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2}, & a \leq \xi < x \leq b \end{cases}$$

caso $(b-a)\alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2 \neq 0$.

Demonstração. Para determinar a função de Green, temos que resolver os problemas

$$\begin{cases} v_1''(x) = 0 \\ \alpha_1 v_1(a) + \alpha_2 v_1'(a) = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} v_2''(x) = 0 \\ \beta_1 v_2(b) + \beta_2 v_2'(b) = 0 \end{cases}$$

e então teremos

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{v_1(x) v_2(\xi)}{\kappa}, & a \leq x < \xi \leq b \\ \dfrac{v_1(\xi) v_2(x)}{\kappa}, & a \leq \xi < x \leq b \end{cases}$$

em que $\kappa = v_1(a)v_2'(a) - v_1'(a)v_2(a)$. Das equações diferenciais, temos $v_1(x) = Ax + B$ e $v_2(x) = Cx + D$, portanto

$$\kappa = v_1(a)v_2'(a) - v_1'(a)v_2(a) = BC - AD.$$

Segue das condições de contorno que

$$\alpha_1 B = -(a\alpha_1 + \alpha_2)A \quad \text{e} \quad \beta_1 D = -(b\beta_1 + \beta_2)C.$$

Assim, como TODO: como mostrar isso sem mentir?

$$\kappa = \frac{BC - AD}{AC} AC = \left(\frac{B}{A} - \frac{D}{C}\right) AC = \frac{(b-a)\alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2}{\alpha_1\beta_1} AC,$$

teremos a função bem definida apenas para

$$(b-a)\alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2 \neq 0.$$

Neste caso,

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{(\alpha_1 x - a\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1\xi - b\beta_1 - \beta_2)}{(b-a)\alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2}, & a \leq x < \xi \leq b \\ \dfrac{(\alpha_1 \xi - a\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 x - b\beta_1 - \beta_2)}{(b-a)\alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2}, & a \leq \xi < x \leq b \end{cases}$$

é a função de Green procurada. □

Exercício 2

Corolário 1. *A função de Green do problema de Sturm $u''(x) = f(x)$ onde u é definida no intervalo $x \in [0,1]$ e satisfaz $u'(0) = 0$ e $u(1) = 0$ é dada por*

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \xi - 1, & 0 \le x < \xi \le 1 \\ x - 1, & 0 \le \xi < x \le 1 \end{cases}$$

Demonstração. Identificando $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1, \beta_1 = 1$, e $\beta_2 = 0$, o resultado segue da Proposição 1. □

Proposição 2: Autovalores e autofunções do problema de Sturm-Liouville $u'' + \lambda u = 0$

Os autovalores e as autofunções normalizadas do problema de Sturm-Liouville

$$u'' + \lambda u = 0,$$

onde u é definida no intervalo $x \in [0,1]$ e satisfaz as condições de contorno $u'(0) = 0$ e $u(1) = 0$ são dados por

$$\lambda_n = \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 \quad \text{e} \quad u_n = \sqrt{2}\cos\left(\frac{2n-1}{2}\pi x\right),$$

para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Demonstração. Notamos que a solução geral da equação diferencial do problema de Sturm-Liouville é

$$u(x) = \begin{cases} A\cosh(\sqrt{-\lambda}x) + B\sinh(\sqrt{-\lambda}x), & \lambda < 0 \\ Ax + B, & \lambda = 0 \\ A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x), & \lambda > 0 \end{cases}.$$

Notemos que pelas condições de contorno, a solução para $\lambda = 0$ é a solução trivial, portanto podemos descartar este caso. Para $\lambda < 0$, segue de $u'(0) = 0$ que $B = 0$, então como o cosseno hiperbólico tem imagem positiva, a única solução de $u(1) = 0$ é $A = 0$, isto é, este caso também leva apenas a soluções triviais. Nos resta apenas o caso $\lambda > 0$, temos de $u'(0) = 0$ que $B = 0$, logo da outra condição de contorno obtemos

$$u(1) = 0 \implies \sqrt{\lambda} = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi, \quad \text{com} \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Deste modo, os autovalores do problema de Sturm-Liouville considerado são

$$\lambda_n = \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2,$$

para $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Para determinar as autofunções normalizadas, notamos que o produto interno para este problema de Sturm-Liouville coincide com o produto interno usual para o espaço de funções integráveis em $[0,1]$. Impondo que $\langle u_n, u_n \rangle = 1$, obtemos

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\, |A|^2 \cos^2\left(\frac{2n-1}{2}\pi x\right) = 1 \implies |A|^2 \int_0^1 \mathrm{d}x\, \frac{1 + \cos((2n-1)\pi x)}{2} = 1 \implies |A| = \sqrt{2},$$

portanto as autofunções normalizadas do problema de Sturm-Liouville são

$$u_n(x) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{2n-1}{2}\pi x\right),$$

para $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. □

Corolário 2. *A função de Green para o problema de Sturm associado é dada por*

$$G(x,\xi) = -\frac{8}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{2m+1}{2}\pi x\right)\cos\left(\frac{2m+1}{2}\pi \xi\right)}{(2m+1)^2},$$

para todo $(x,\xi) \in [0,1]\times[0,1]$.

Demonstração. Pela fórmula de Mercer, temos

$$G(x,\xi) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x)u_n(\xi)}{\lambda_n},$$

onde u_n é a autofunção normalizada associada ao autovalor λ_n do problema de Sturm-Liouville. Pela Proposição 2, segue que

$$\begin{aligned} G(x,\xi) &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[\sqrt{2}\cos\left(\frac{2n-1}{2}\pi x\right)\right]\left[\sqrt{2}\cos\left(\frac{2n-1}{2}\pi \xi\right)\right]}{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2\pi^2} \\ &= -\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{2n-1}{2}\pi x\right)\cos\left(\frac{2n-1}{2}\pi \xi\right)}{(2n-1)^2}. \end{aligned}$$

Fazendo a troca de variável de soma $m = n-1$, obtemos a expressão desejada. □

Corolário 3. *Vale a identidade*

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2}.$$

Demonstração. Pelo Corolário 1 e pela continuidade da função de Green, segue que $G(0,0) = -1$. Desse modo, pelo Corolário 2, temos

$$-\frac{8}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} = -1 \implies \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{\pi^2}{8},$$

como desejado. □

Proposição 3: Solução para o problema de Sturm $u''(x) = (3-x)e^x$

A solução do problema de Sturm

$$u''(x) = (3-x)e^x$$

com condições de contorno $u'(0) = 0$ e $u(1) = 0$ é

$$u(x) =$$

Exercício 4