Física Matemática II
Primeira Lista de Exercícios e Tarefas

Louis Bergamo Radial
8992822

23 de junho de 2024

Exercício 1

Definição 1: Isometria

Sejam (M_1, d_1) e (M_2, d_2) dois espaços métricos. Uma aplicação $h : M_1 \to M_2$ é dita uma *isometria* se

$$d_2(h(x), h(y)) = d_1(x, y)$$

para todos $x, y \in M_1$.

Proposição 1: Isometrias são injetoras

Sob as hipóteses anteriores, uma isometria $h : M_1 \to M_2$ é injetora.

Demonstração. Suponhamos que existam $x, y \in M_1$ tais que $h(x) = h(y)$. Assim, $d_2(h(x), h(y)) = 0$. Como h é uma isometria, temos $d_1(x, y) = 0$, logo $x = y$. □

Proposição 2: A aplicação inversa de uma isometria bijetora é uma isometria

Sob as hipóteses anteriores, se $h : M_1 \to M_2$ é uma isometria bijetora, então $h^{-1} : M_1 \to M_2$ é uma isometria.

Demonstração. Sejam $x, y \in M_2$ e sejam $\xi = h^{-1}(x)$ e $\eta = h^{-1}(y)$. Como h é uma isometria, vale $d_1(\xi, \eta) = d_2(h(\xi), h(\eta)) = d_2(x, y)$. Desse modo, vale $d_1(h^{-1}(x), h^{-1}(y)) = d_2(x, y)$. Como x e y são arbitrários, temos que h^{-1} é uma isometria. □

Definição 2: Espaços métricos isométricos

Dois espaços métricos (M_1, d_1) e M_2, d_2 são *isométricos* se existir uma isometria bijetora $h : M_1 \to M_2$.

Lema 1: Isometria e completeza

Sejam (M_1, d_1) e (M_2, d_2) espaços métricos isométricos. Se (M_1, d_1) é completo, então (M_2, d_2) é completo.

Demonstração. Seja $s : \mathbb{N} \to M_2$ uma sequência de Cauchy em relação à métrica d_2. Como os espaços métricos são isométricos, existe uma isometria bijetora $h : M_2 \to M_1$ e com isso podemos definir a sequência $x = h \circ s$.

Mostremos que x é de Cauchy em relação à métrica d_1. Como s é de Cauchy em relação à métrica d_2, dado $\varepsilon > 0$, existe $N > 0$ tal que para todo $n, m > N$

$$d_2(s_n, s_m) < \epsilon.$$

Desse modo, temos

$$d_1(x_n, x_m) = d_1(h(s_n), h(s_m)) = d_2(s_n, s_m) < \epsilon,$$

isto é, x é de Cauchy em (M_1, d_1).

Como (M_1, d_1) é completo, existe $\tilde{x} \in M_1$ tal que dado $\epsilon > 0$, existe $M > 0$ tal que

$$n > M \implies d_1(x_n, \tilde{x}) < \epsilon.$$

Ainda, como h é bijetora, existe $\tilde{s} = h^{-1}(\tilde{x}) \in M_2$, de modo que

$$\begin{aligned} n > M &\implies d_1(h(s_n), h(\tilde{s})) < \epsilon \\ &\implies d_2(s_n, \tilde{s}) < \epsilon. \end{aligned}$$

Assim, s é convergente em (M_2, d_2). $\square$

Exercício 3

Definição 3: Mapa logístico

A aplicação

$$\begin{aligned} T_a : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto ax(1-x) \end{aligned}$$

é chamada de *mapa logístico* ao parâmetro $a \in \mathbb{R}$.

Proposição 3: Pontos fixos do mapa logístico

Os pontos fixos do mapa logístico T_a são dados por

$$x^\alpha = 0 \quad \text{e} \quad x^\beta = \frac{a-1}{a},$$

onde x^β claramente só está definido para $a \neq 0$. O ponto fixo x^β pertence a $[0,1]$ se e somente se $a \geq 1$.

Demonstração. A equação de ponto fixo para T_a é dada por

$$x = ax(1-x) \implies x(a-1-ax) = 0,$$

cujas soluções são justamente x^α e x^β, com x^β definido apenas para $a \neq 0$.

Notemos que $x^\beta = 1 - \frac{1}{a}$, portanto para $a \geq 1$, temos $x^\beta \in [0,1) \subset [0,1]$, uma vez que x^β é crescente para $a > 0$. Para $x^\beta \in [0,1]$, temos

$$\begin{aligned} x^\beta \in [0,1] &\implies 1 - \frac{1}{a} \geq 0 \wedge 1 - \frac{1}{a} \leq 1 \\ &\implies a \notin [0,1) \wedge a \geq 1 \\ &\implies a \geq 1, \end{aligned}$$

como desejado. □

Proposição 4: Restrição do mapa logístico

Seja $A = [0,1]$. Se $a \in [0,4]$, a aplicação $T_a|_A : A \to \mathbb{R}$ é um endomorfismo.

Demonstração. Trivialmente, se $a = 0$ então $T_a(\mathbb{R}) = \{0\} \subset A$, logo $T_0|_A : A \to A$. Assim, podemos supor $a \neq 0$.

Como T_a é uma função suave, pelo teorema de Weierstrass esta função admite valor máximo e mínimo no compacto A. Como

$$\frac{\mathrm{d}T_a}{\mathrm{d}x} = 0 \implies x = \frac{1}{2} \in A,$$

segue que os valores de máximo e mínimo de T_a em A só podem ocorrer em $x = 0$, $x = 1$ e $x = \frac{1}{2}$, cujos valores são $T_a(0) = T_a(1) = 0$ e $T_a(\frac{1}{2}) = \frac{a}{4}$. Desse modo, para $a > 0$ temos que o máximo global de $T_a|_A$ ocorre em $x = \frac{1}{2}$. Assim, segue que

$$a \in (0,4] \implies 0 \leq T_a(x) \leq \frac{a}{4} \leq 1$$

para todo $x \in A$. Concluímos portanto que $T_a(A) \subset A$ para $a \in [0,4]$. □

Proposição 5: Pontos fixos da restrição do mapa logístico

Para $a \in [0,1]$, a aplicação $T_a|_A : A \to A$ tem um único ponto fixo, a saber, $x = 0$. Para $a \in (1,4]$, a aplicação apresenta dois pontos fixos distintos, $x = 0$ e $x = x^\beta$.

Demonstração. Para $a = 0$, a imagem da aplicação é o conjunto $\{0\}$, portanto o único ponto fixo é $x = 0$.

Consideremos $a \in (0,4]$. Pela Proposição 3, os pontos fixos de $T_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são $x^\alpha = 0$ e x^β, com $x^\beta \in A \iff a \geq 1$. Desse modo, para $a \in (0,1)$, o único ponto fixo de $T_a|_A : A \to A$ é $x = 0$. Ainda, para $a = 1$, $x^\beta = 0$, de modo que para $a \in [0,1]$, temos o único ponto fixo $x = 0$ em A. Para $a \in (1,4]$, $x^\beta \neq 0$, de modo que $T_a|_A$ apresente dois pontos fixos distintos em A. □

Proposição 6: Condições para a restrição do mapa logístico ser uma contração

Para $a \in [0,1)$, a aplicação $T_a|_A : A \to A$ é uma contração. Para $a \in (1,4]$, a aplicação não é contrativa.

Demonstração. □