

# Física Matemática II

## Primeira Lista de Exercícios

Louis Bergamo Radial  
8992822

23 de junho de 2024

### Exercício 1

#### Proposição 1: Métrica trivial

Seja  $X$  um conjunto não vazio, então  $(X, d_t)$  é um espaço métrico, onde a função  $d_t : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  é a métrica trivial, definida por

$$d_t(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = y, \\ 1, & \text{se } x \neq y, \end{cases}$$

para todo  $x, y \in X$ .

*Demonstração.* Pela definição da métrica trivial, temos

$$d_t(x, y) = 0 \iff x = y$$

para todo  $x, y \in X$ . De mesma forma, pela simetria de relação de igualdade, temos

$$d_t(x, y) = d_t(y, x).$$

Ainda, a imagem da função  $d_t$  é contida na semirreta  $[0, \infty)$ ,

$$d_t(X \times X) = \{0, 1\} \subset [0, \infty).$$

Assim, resta mostrar que a métrica trivial satisfaz a desigualdade triangular.

Consideremos  $x, y, z \in \mathbb{R}$ , então segue que

$$0 \leq d_t(x, z) + d_t(z, y) \leq 2,$$

com os únicos valores possíveis para a soma sendo  $\{0, 1, 2\}$ . No caso em que  $x = y$ , temos  $d_t(x, y) = 0$ , portanto

$$d_t(x, y) \leq d_t(x, z) + d_t(z, y)$$

é satisfeita de forma trivial. No caso em que  $x \neq y$ , temos  $d_t(x, y) = 1$ , portanto pela transitividade da igualdade temos que

$$1 \leq d_t(x, z) + d_t(z, y) \leq 2,$$

já que  $z$  não pode ser igual a tanto  $x$  quanto  $y$ , de modo que

$$d_t(x, y) \leq d_t(x, z) + d_t(z, y).$$

Dessa forma, mostramos que a desigualdade triangular é satisfeita em todos os casos, portanto  $(X, d_t)$  é um espaço métrico.  $\square$

## Exercício 2

### Proposição 2: Métrica do supremo

Seja  $X = C([0, 1])$  o conjunto de todas as funções reais contínuas definidas no intervalo  $[0, 1]$ . Então  $(X, d_\infty)$  é um espaço métrico, com a métrica definida por

$$\begin{aligned} d_\infty : X \times X &\rightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) &\mapsto \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|. \end{aligned}$$

*Demonstração.* Notemos que a imagem da função  $d_\infty$  está contida na semirreta  $[0, \infty)$ .

Para  $f, g \in X$ , temos  $f = g$  se e somente se  $f(x) = g(x)$  para todo  $x \in [0, 1]$ . Portanto,

$$\begin{aligned} f = g &\iff \forall x \in [0, 1] : |f(x) - g(x)| = 0 \\ &\iff \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)| = 0 \\ &\iff d_\infty(f, g) = 0. \end{aligned}$$

Notemos também que a função  $d_\infty$  é simétrica em seus argumentos, isto é,

$$d_\infty(g, f) = \sup_{x \in [0, 1]} |g(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)| = d_\infty(f, g).$$

Consideremos  $f, g, h \in X$ , então

$$\begin{aligned} d_\infty(f, g) &= \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - h(x) + h(x) - g(x)| \\ &\leq \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)| \\ &\leq d_\infty(f, h) + d_\infty(h, g). \end{aligned}$$

Dessa forma, mostramos que a função  $d_\infty$  é uma métrica em  $X$ . □

## Exercício 3

### Proposição 3: Métrica $d_1$

Seja  $X = C([0, 1])$  o conjunto de todas as funções reais contínuas definidas no intervalo  $[0, 1]$ . Então  $(X, d_1)$  é um espaço métrico, com a métrica definida por

$$d_1 : X \times X \rightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) \mapsto \int_0^1 dx |f(x) - g(x)|.$$

*Demonstração.* Notemos que a imagem da função  $d_1$  está contida na semirreta  $[0, \infty)$ .

Suponhamos que duas funções  $f, g \in X$  satisfazem  $d_1(f, g) = 0$ . Certamente essas funções devem ser diferentes em no máximo um conjunto de medida nula. Como as funções são contínuas, este conjunto deve ser vazio. De fato, seja  $h \in X$  definida por  $h(x) = f(x) - g(x)$  e suponhamos por contradição que existe  $\xi \in [0, 1]$  tal que  $h(\xi) \neq 0$ . Podemos assumir sem perda de generalidade que  $h(\xi) > 0$ , então pelo teorema do valor intermediário, existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $x \in (\xi - \delta, \xi + \delta)$  temos  $h(x) > 0$ . Assim,

$$\int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} dx |h(x)| > 0 \implies \int_0^1 dx |f(x) - g(x)| > 0,$$

e esta contradição mostra que  $f = g$ .

Suponhamos agora que duas funções são iguais  $f = g$ . Claramente temos  $d_1(f, g) = 0$ . Desse modo,

$$f = g \iff d_1(f, g) = 0.$$

Vejamos também que a função  $d_1$  é simétrica em seus argumentos, isto é,

$$d_1(g, f) = \int_0^1 dx |g(x) - f(x)| = \int_0^1 dx |f(x) - g(x)| = d_1(f, g).$$

Consideremos  $f, g, h \in X$ , então

$$\begin{aligned} d_1(f, g) &= \int_0^1 dx |f(x) - h(x) + h(x) - g(x)| \\ &\leq \int_0^1 dx |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)| \\ &\leq d_1(f, h) + d_1(h, g). \end{aligned}$$

Dessa forma, mostramos que a função  $d_1$  é uma métrica em  $X$ . □

## Exercício 4

### Definição 1: Métrica induzida por uma norma

Seja  $\mathcal{E}$  um espaço vetorial dotado de uma norma  $\|\cdot\| : \mathcal{E} \rightarrow [0, \infty)$ . A aplicação

$$\begin{aligned} d : \mathcal{E} \times \mathcal{E} &\rightarrow [0, \infty) \\ (x, y) &\mapsto \|x - y\| \end{aligned}$$

é denominada métrica induzida pela norma  $\|\cdot\|$ .

### Proposição 4: Métrica induzida por uma norma

Seja  $\mathcal{E}$  um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{K}$ . Uma métrica  $d : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow [0, \infty)$  é induzida por uma norma em  $\mathcal{E}$  se e somente se  $d$  satisfaz

- (a) invariância translacional:  $d(u + t, v + t) = d(u, v)$  para todo  $u, v, t \in \mathcal{E}$ ; e
- (b) transformação de escala  $d(\alpha u, \alpha v) = |\alpha|d(u, v)$  para todo  $u, v \in \mathcal{E}$  e  $\alpha \in \mathbb{K}$ .

*Demonstração.* Suponha que  $d$  é uma métrica induzida pela norma  $\|\cdot\|$ . Para todos  $u, v, t \in \mathcal{E}$  e  $\alpha \in \mathbb{K}$ , temos

$$d(u + t, v + t) = \|(u + t) - (v + t)\| = \|u - v\| = d(u, v)$$

e

$$d(\alpha u, \alpha v) = \|\alpha(u - v)\| = |\alpha|\|u - v\| = |\alpha|d(u, v).$$

Isto é, se  $d$  é induzida por uma norma, então  $d$  satisfaz (a) e (b).

Suponha agora que  $d$  satisfaz (a) e (b). Mostremos que a aplicação

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \mathcal{E} &\rightarrow [0, \infty) \\ v &\mapsto d(v, 0) \end{aligned}$$

é uma norma em  $\mathcal{E}$ . Notemos que

$$\begin{aligned} v = 0 &\iff d(v, 0) = 0 \\ &\iff \|v\| = 0, \end{aligned}$$

e

$$\|\lambda u\| = d(\lambda u, 0) = |\lambda|d(u, 0) = |\lambda|\|u\|$$

para todo  $\lambda \in \mathbb{K}$  e  $u \in \mathcal{E}$ . Pela propriedade (b) segue que

$$\|x + y\| = d(x + y, 0) = d(x, -y),$$

portanto pela propriedade (a) e pela desigualdade triangular para  $d$ , temos

$$\|x + y\| \leq d(x, 0) + d(0, y)$$

ou então  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  para todo  $x, y \in \mathcal{E}$ . Desse modo,  $\|\cdot\|$  é uma norma em  $\mathcal{E}$ . Ainda, temos

$$d(u, v) = d(u - v, 0) = \|u - v\|,$$

portanto  $d$  é a métrica induzida pela norma  $\|\cdot\|$ . Isto é, se  $d$  satisfaz (a) e (b), então  $d$  é uma métrica induzida por uma norma.  $\square$

## Exercício 5

### Proposição 5: Sequência convergente nos números racionais

Seja  $r > 1$  um número racional. A sequência  $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$  definida por

$$s_n = \sum_{k=0}^n r^{-k}$$

é de Cauchy e converge a  $\frac{r}{r-1} \in \mathbb{Q}$  em relação à métrica usual.

*Demonstração.* Para  $n \in \mathbb{N}$ , consideremos a fatoração

$$x^{n+1} - y^{n+1} = (x - y) \sum_{k=0}^n x^{n-k} y^k,$$

para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}$ . Em particular, temos

$$1 - \left(\frac{1}{r}\right)^{n+1} = \left(1 - \frac{1}{r}\right) \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{r}\right)^k,$$

isto é,

$$s_n = \frac{r - r^{-n}}{r - 1}.$$

Assim, consideremos  $n, m \in \mathbb{N}$  com  $n > m$ . Temos

$$|s_n - s_m| = \frac{r^{-m} - r^{-n}}{r - 1} = (1 - r^{m-n}) \frac{r^{-m}}{r - 1}.$$

Como  $r > 1$  e  $n > m$  temos

$$\begin{aligned} 0 < r^{-1} < 1 &\implies 0 < r^{m-n} < 1 \\ &\implies -1 < -r^{m-n} < 0 \\ &\implies 0 < 1 - r^{m-n} < 1, \end{aligned}$$

portanto podemos estimar que

$$|s_n - s_m| < \frac{r^{-m}}{r - 1}.$$

Tomando  $m$  suficientemente grande, podemos tornar  $|s_n - s_m|$  suficientemente pequeno, isto é, a sequência é de Cauchy em relação à métrica usual.

Notemos que para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\left| \frac{r}{r-1} - s_n \right| = \frac{r^{-n}}{r-1},$$

então pelo mesmo argumento, temos que a sequência converge a  $\frac{r}{r-1} \in \mathbb{Q}$  em relação à métrica usual.  $\square$

## Exercício 6

**Proposição 6:**  $\mathbb{Q}$  não é completo em relação à métrica usual

A sequência  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$  definida por

$$x_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

é de Cauchy mas não converge a nenhum número racional em relação à métrica usual.

*Demonstração.* Consideremos  $n, m \in \mathbb{N}$  com  $n > m$ , então

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &= \left| \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} - \sum_{j=0}^m \frac{1}{j!} \right| \\ &= \sum_{k=0}^{n-m-1} \frac{1}{(k+m+1)!} \\ &= \frac{1}{(m+1)!} \sum_{k=0}^{n-m-1} \frac{(m+1)!}{(k+m+1)!} \\ &= \frac{1}{(m+1)!} \left( 1 + \frac{1}{m+2} + \frac{1}{(m+2)(m+3)} + \cdots + \frac{(m+1)!}{n!} \right) \\ &\leq \frac{1}{(m+1)!} \left( 1 + \frac{1}{m+2} + \frac{1}{(m+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(m+2)^{n-m-1}} \right) \\ &< \frac{1}{(m+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} (m+2)^{-k}. \end{aligned}$$

Pela [Proposição 5](#), temos

$$|x_n - x_m| < \frac{1}{(m+1)!} \frac{m+2}{m+1} < \frac{2}{(m+1)!},$$

para  $m > 0$ . Assim, podemos tornar  $|x_n - x_m|$  arbitrariamente pequeno ao escolher  $m$  suficientemente grande, isto é, a sequência é de Cauchy em relação à métrica usual.

Suponhamos por contradição que a sequência converge a algum número racional  $e = \frac{p}{q}$ , com  $p$  e  $q$  coprimos. Assim, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $N > 0$  tal que

$$n > N \implies |e - x_n| < \varepsilon.$$

Pela desigualdade triangular, temos

$$\begin{aligned} |e - x_m| &\leq |e - x_n| + |x_n - x_m| \\ &< \varepsilon + \frac{2}{(m+1)!} \end{aligned}$$

para  $m > 0$  e  $n > N$ . Como  $\varepsilon$  é arbitrário, temos

$$|e - x_m| \leq \frac{2}{(m+1)!},$$

para  $m > 0$ . Como a sequência é estritamente crescente, temos  $e > x_m$ , logo

$$x_m < e \leq x_m + \frac{2}{(m+1)!}.$$

Em particular, tomemos  $m = 2$ , então

$$\frac{5}{2} < e \leq \frac{17}{6},$$

portanto  $2 < e < 3$ , isto é,  $q \geq 2$ , caso contrário  $e$  seria um inteiro entre inteiros consecutivos.

Podemos tomar  $m = q$ , de modo que

$$\begin{aligned} x_q < \frac{p}{q} \leq x_q + \frac{2}{(q+1)!} &\implies q!x_q < p(q-1)! \leq q!x_q + \frac{2}{(q+1)} \\ &\implies \sum_{k=0}^q \frac{q!}{k!} < p(q-1)! < \sum_{k=0}^q \frac{q!}{k!} + 1, \end{aligned}$$

já que

$$q \geq 2 \implies \frac{2}{q+1} < 1.$$

Notemos que  $\frac{q!}{k!} \in \mathbb{N}$  para todo  $k \in \{0, 1, \dots, q\}$ , isto é,  $p(q-1)!$  é um número natural entre inteiros consecutivos. Essa contradição mostra que  $e \notin \mathbb{Q}$ . Desse modo, a sequência não é convergente nos racionais com a métrica usual.  $\square$

## Exercício 7

### Proposição 7: Sequência de Cauchy em $(C([0, 1]), d_1)$

A sequência de funções  $f : \mathbb{N} \rightarrow C([0, 1])$  com  $f_0(x) = f_1(x) = f_2(x) = 1$  e

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}] \\ n \left( x - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \right), & \text{se } x \in (\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2}) \\ 1, & \text{se } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

para  $n > 2$  é de Cauchy no espaço métrico  $(C([0, 1]), d_1)$ , onde a métrica  $d_1$  está definida na [Proposição 3](#).

*Demonstração.* Claramente  $f_0, f_1, f_2 \in C([0, 1])$ . Para  $n > 2$ , segue que  $f_n$  é contínua nos intervalos  $[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n})$ ,  $(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2})$  e  $(\frac{1}{2}, 1]$ , uma vez que nestes intervalos a função é definida por funções contínuas, portanto resta ver se a aplicação é contínua nos pontos  $\frac{1}{2} - \frac{1}{n}$  e em  $\frac{1}{2}$ . Temos

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2} - \frac{1}{n})^-} f_n(x) = 0 = f_n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right),$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2} - \frac{1}{n})^+} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2} - \frac{1}{n})^+} n \left( x - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \right) = 0 = f_n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right),$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f_n(x) = 1 = f_n\left(\frac{1}{2}\right),$$

e

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} n \left( x - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \right) = 1 = f_n\left(\frac{1}{2}\right)$$

portanto  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f_n(x) = f_n\left(\frac{1}{2}\right)$  e  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f_n(x) = f_n\left(\frac{1}{2}\right)$ , isto é,  $f_n$  é contínua em  $[0, 1]$ . Logo,  $f_n \in C([0, 1])$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Para  $n > m > 2$  temos

$$|f_n(x) - f_m(x)| = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{m}] \\ m \left( x - \frac{1}{2} + \frac{1}{m} \right) & \text{se } x \in (\frac{1}{2} - \frac{1}{m}, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}] \\ (m - n) \left( x - \frac{1}{2} \right) & \text{se } x \in (\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2}) \\ 0, & \text{se } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}.$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} d_1(f_n, f_m) &= \int_0^1 dx |f_n(x) - f_m(x)| \\ &= \int_{\frac{1}{2} - \frac{1}{m}}^{\frac{1}{2} - \frac{1}{n}} dx m \left( x - \frac{1}{2} + \frac{1}{m} \right) + \int_{\frac{1}{2} - \frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} dx (m - n) \left( x - \frac{1}{2} \right) \\ &= \int_{-\frac{1}{m}}^{-\frac{1}{n}} du m \left( u + \frac{1}{m} \right) + \int_{-\frac{1}{n}}^0 du (m - n)u \\ &= \frac{m}{2} \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) - \frac{1}{n} + \frac{1}{m} - \frac{m - n}{2n^2} \\ &= \frac{1}{2m} - \frac{1}{2n}, \end{aligned}$$



donde segue

$$d_1(f_n, f_m) = \frac{1}{2} \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right|$$

para todos  $n, m > 2$ .

Dado  $\varepsilon > 0$ , para  $n, m > \frac{1}{\varepsilon}$  temos

$$\begin{aligned} d_1(f_n, f_m) &= \frac{1}{2} \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \left( \left| \frac{1}{m} \right| + \left| \frac{1}{n} \right| \right) \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

portanto a sequência é de Cauchy em  $(C([0, 1]), d_1)$ . □

Para que esta sequência de funções seja convergente, deve existir uma função  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f((\frac{1}{2}, 1]) = \{1\}$  e  $f([0, \frac{1}{2}) = \{0\}$ , caso contrário  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_1(f_n, f) \neq 0$ . Mostraremos na [Proposição 8](#) que este tipo de função satisfaz a condição de convergência e que não é contínua, concluindo que o espaço métrico  $(C([0, 1]), d_1)$  não é completo.

#### Proposição 8: O espaço métrico $(C([0, 1]), d_1)$ não é completo

A sequência de funções da [Proposição 7](#) converge para a função  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2}) \\ 1, & \text{se } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases},$$

que não é uma função contínua.

*Demonstração.* Para  $n > 2$  temos

$$|f_n(x) - \varphi(x)| = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}] \\ n(x - \frac{1}{2}) + 1 & \text{se } x \in (\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2}) \\ 0, & \text{se } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}.$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} d_1(f_n, \varphi) &= \int_0^1 dx |f_n(x) - \varphi(x)| \\ &= \int_{\frac{1}{2} - \frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} dx \left[ n \left( x - \frac{1}{2} \right) + 1 \right] \\ &= \frac{1}{2n}. \end{aligned}$$

Dado  $\varepsilon > 0$ , temos

$$n > \frac{1}{2\varepsilon} \implies d_1(f_n, \varphi) = \frac{1}{2n} < \varepsilon,$$

portanto a sequência é convergente a  $\varphi$  em relação à métrica  $d_1$ .

Notemos que

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \varphi(x) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \varphi(x) = 0,$$

isto é, a função  $\varphi$  não pode ser contínua. Assim, o espaço métrico  $(C([0, 1]), d_1)$  não é completo. □

## Exercício 8

### Proposição 9: Uma métrica define outra

Seja  $(M, d)$  um espaço métrico, então

$$\begin{aligned} d_0 : M \times M &\rightarrow [0, \infty) \\ (x, y) &\mapsto \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \end{aligned}$$

é uma métrica em  $M$ .

*Demonstração.* Por  $d$  ser uma métrica, temos

$$\begin{aligned} d_0(x, y) = 0 &\iff d(x, y) = 0 \\ &\iff x = y, \end{aligned}$$

e

$$d_0(y, x) = \frac{d(y, x)}{1 + d(y, x)} = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} = d_0(x, y),$$

portanto resta mostrar que  $d_0$  satisfaz a desigualdade triangular.

Consideremos a aplicação

$$\begin{aligned} f : [0, \infty) &\rightarrow [0, \infty) \\ \xi &\mapsto \frac{\xi}{1 + \xi}. \end{aligned}$$

Temos

$$f'(\xi) = \frac{1}{(1 + \xi)^2}$$

para todo  $\xi \in [0, \infty)$ . Isto é,  $f'(\xi) > 0$  em todo o seu domínio, portanto é uma função crescente.

Desse modo, como  $f$  mantém a relação de ordem e  $d_0 = f \circ d$ , segue que

$$\begin{aligned} d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) &\implies (f \circ d)(x, y) \leq f(d(x, z) + d(z, y)) \\ &\implies d_0(x, y) \leq \frac{d(x, z) + d(z, y)}{1 + d(x, z) + d(z, y)}, \end{aligned}$$

para todo  $x, y, z \in M$ . Notemos que

$$\begin{aligned} 0 \leq d(x, z) \leq d(x, z) + d(z, y) &\implies 1 \leq 1 + d(x, z) \leq 1 + d(x, z) + d(z, y) \\ &\implies \frac{1}{1 + d(x, z) + d(z, y)} \leq \frac{1}{1 + d(x, z)} \leq 1 \\ &\implies \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z) + d(z, y)} \leq d_0(x, z) \leq d(x, z), \end{aligned}$$

e analogamente

$$0 \leq d(y, z) \leq d(x, z) + d(z, y) \implies \frac{d(z, y)}{1 + d(x, z) + d(y, z)} \leq d_0(z, y) \leq d(z, y).$$

Portanto

$$\frac{d(x, z) + d(z, y)}{1 + d(x, z) + d(z, y)} \leq d_0(x, z) + d_0(z, y),$$

donde segue

$$d_0(x, y) \leq d_0(x, z) + d_0(z, y),$$

isto é,  $d_0$  satisfaz a desigualdade triangular. Logo,  $d_0$  é uma métrica em  $M$ . □

## Exercício 9

**Proposição 10:** O intervalo aberto  $(a, b)$  não é um espaço métrico completo em relação à métrica usual

Consideremos o intervalo aberto não vazio  $\mathring{A} = (a, b) \subset \mathbb{R}$  e a métrica usual

$$\begin{aligned} d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow [0, \infty) \\ (x, y) &\mapsto |x - y|. \end{aligned}$$

O espaço métrico  $(\mathring{A}, d)$  não é completo.

*Demonstração.* Consideremos a sequência  $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathring{A}$  definida por  $s_0 = s_1 = \frac{a+b}{2}$  e

$$s_n = a + \frac{b-a}{n}$$

para  $n \geq 2$ .

Dado  $\varepsilon > 0$ , podemos tomar  $M = \frac{2(b-a)}{\varepsilon}$  tal que para todos  $n, m > M$  vale

$$\begin{aligned} d(s_m, s_n) &= (b-a) \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right| \\ &\leq \frac{b-a}{m} + \frac{b-a}{n} \\ &< \frac{2(b-a)}{M} = \varepsilon, \end{aligned}$$

isto é,  $s_n$  é uma sequência de Cauchy em relação à métrica usual.

Dado  $\varepsilon > 0$  podemos tomar  $N = \frac{b-a}{\varepsilon}$  tal que para todo  $n > N$  temos

$$d(a, s_n) = \frac{b-a}{n} < \frac{b-a}{N} = \varepsilon,$$

isto é,  $s_n$  converge a  $a \notin \mathring{A}$  em relação à métrica usual.

Encontramos uma sequência de Cauchy em  $(\mathring{A}, d)$  que não converge neste espaço métrico, portanto  $(\mathring{A}, d)$  não é completo.  $\square$

**Corolário 1.** O intervalo  $(0, 1)$  não é completo em relação à métrica usual.

**Lema 1:** Toda sequência de números reais tem uma subsequência monotônica

Seja  $s : \mathbb{N} \rightarrow X \subset \mathbb{R}$  uma sequência de números reais. Então existe uma sequência crescente de números naturais  $n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tal que a subsequência  $s \circ n$  é monotônica, isto é, ou é monotônica decrescente  $s_{n_i} \leq s_{n_j}$  para todo  $i > j$ , ou é monotônica crescente  $s_{n_i} \geq s_{n_j}$  para todo  $i > j$ .

*Demonstração.* Consideremos o conjunto

$$S = \{k \in \mathbb{N} : m > k \implies s_k \geq s_m\}$$

dos índices dos elementos da sequência que são maiores que os elementos subsequentes.

Se  $S$  é infinito, então existe uma sequência crescente de números naturais  $n : \mathbb{N} \rightarrow S \subset \mathbb{N}$  definida por uma enumeração dos elementos de  $S$  tal que a subsequência  $s \circ n$  é monotônica decrescente. De fato, sejam  $n_i, n_j \in S$  com  $i < j \implies n_i < n_j$ , então

$$n_i \in S \implies s_{n_i} \geq s_{n_j},$$

isto é,  $s \circ n$  é monotônica decrescente.

Se  $S$  não é infinito, então o seu complemento  $T = \mathbb{N} \setminus S$  é infinito. Notemos que

$$T = \{k \in \mathbb{N} : \exists m > k \text{ tal que } s_k < s_m\}.$$

Dado  $k \in T$ , temos que o conjunto

$$M_k = \{m > k : s_m > s_k\},$$

é não vazio, pela definição de  $T$ . Assim, podemos definir a sequência  $n : \mathbb{N} \rightarrow T \subset \mathbb{N}$  com

$$T \ni n_0 = \begin{cases} 0 & \text{se } S = \emptyset \\ 1 + \max S & \text{se } S \neq \emptyset \end{cases}$$

e

$$n_{i+1} = \min M_{n_i}.$$

Desse modo, temos

$$i < j \implies s_{n_i} < s_{n_{i+1}} < \dots < s_{n_{j-1}} < s_{n_j},$$

isto é,  $s \circ n$  é uma subsequência monotônica crescente. □

### Lema 2: Subsequência convergente de uma sequência de Cauchy

Seja  $(X, d)$  um espaço métrico e seja  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência de Cauchy em  $(X, d)$ . Se existe uma sequência crescente  $\{n_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  de números naturais tal que a subsequência  $\{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$  é convergente em  $(X, d)$ , então  $x_n$  converge em  $(X, d)$ .

*Demonstração.* Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $N > 0$  tal que para todo  $m, n > N$  vale

$$d(x_n, x_m) < \frac{1}{2} \varepsilon,$$

já que a sequência é de Cauchy em relação à métrica  $d$ .

Seja  $x \in X$  o ponto ao qual a subsequência converge. Então dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $J > 0$  tal que para todo  $n_j > J$  vale

$$d(x_{n_j}, x) < \frac{1}{2} \varepsilon.$$

Seja  $M = \max\{N, J\}$ , então para todos  $m, n_j > M$  segue que

$$\begin{aligned} d(x_m, x) &\leq d(x_m, x_{n_j}) + d(x_{n_j}, x) \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

isto é, a sequência de Cauchy converge para  $x \in X$  em relação à métrica  $d$ . □

### Proposição 11: O intervalo fechado $[a, b]$ é um espaço métrico completo em relação à métrica usual

Consideremos o intervalo fechado  $\bar{A} = [a, b] \subset \mathbb{R}$  e a métrica usual  $d$ . O espaço métrico  $(\bar{A}, d)$  é completo.

*Demonstração.* Seja  $s : \mathbb{N} \rightarrow [a, b] \subset \mathbb{R}$  uma sequência de Cauchy em relação à métrica usual. Pelo [Lema 1](#), existe uma sequência crescente de números naturais  $n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tais que a subsequência  $x = s \circ n$  é monotônica. Notemos que esta subsequência também é de Cauchy: dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $N_\varepsilon > 0$  tal que

$$\ell, k > N_\varepsilon \implies d(s_\ell, s_k) < \varepsilon$$

então tomando  $M = \min\{m \in \mathbb{N} : n_m > N_\varepsilon\}$ , segue que

$$\begin{aligned} i, j > M &\implies d(s_{n_i}, s_{n_j}) < \varepsilon \\ &\implies d(x_i, x_j) < \varepsilon, \end{aligned}$$

logo  $x$  é de Cauchy.

Suponhamos que a subsequência é monotônica decrescente. Como uma sequência de Cauchy em  $(\mathbb{R}, d)$ , segue que existe  $\xi \in \mathbb{R}$  tal que  $x$  converge a  $\xi$  em relação a este espaço métrico completo. Assim, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $N_\varepsilon > 0$  tal que

$$i > N_\varepsilon \implies d(x_i, \xi) < \varepsilon.$$

Suponhamos por contradição que  $\xi \notin [a, b]$ , então  $\xi < a$ . Tomemos  $\varepsilon = \frac{a-\xi}{2}$ , então existe  $N > 0$  tal que

$$\begin{aligned} i > N &\implies -\frac{a-\xi}{2} < x_i - \xi < \frac{a-\xi}{2} \\ &\implies \frac{3\xi - a}{2} < x_i < \frac{a + \xi}{2}. \end{aligned}$$

Notemos entretanto que  $a + \xi < 2a$ , portanto devemos ter  $x_i < a$ . Esta contradição mostra que  $\xi \in [a, b]$ , portanto  $x$  converge para algum valor de  $[a, b]$ . Pelo [Lema 2](#), a sequência de Cauchy  $s$  converge em  $([a, b], d)$ .

Um argumento análogo pode ser feito para o caso em que a subsequência é monotônica crescente. Neste caso,  $\xi > b$ , então podemos tomar  $\varepsilon = \frac{\xi-b}{2}$ , então existe  $N > 0$  tal que

$$\begin{aligned} i > N &\implies -\frac{\xi-b}{2} < x_i - \xi < \frac{\xi-b}{2} \\ &\implies \frac{b + \xi}{2} < x_i < \frac{3\xi - b}{2}. \end{aligned}$$

Então deveríamos ter  $x_i > b$ , o que não pode acontecer. Assim, concluímos que a sequência de Cauchy  $s$  deve convergir em  $([a, b], d)$ .  $\square$

**Corolário 2.** O intervalo  $[0, 1]$  é um espaço métrico completo em relação à métrica usual.

### Lema 3: Desigualdade triangular inversa

Seja  $(X, d)$  um espaço métrico, então

$$d(x, y) \geq |d(x, z) - d(z, y)|$$

para todo  $x, y, z \in X$ .

*Demonstração.* Pela desigualdade triangular temos

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \implies d(x, z) - d(y, z) \leq d(x, y).$$

Suponhamos que  $d(x, z) - d(y, z) \geq 0$ , então

$$d(x, y) \geq |d(x, z) - d(y, z)|.$$

Suponhamos agora que  $d(x, z) - d(y, z) < 0$ , então pela desigualdade triangular temos

$$\begin{aligned} d(y, z) &\leq d(y, x) - d(x, z) \implies d(y, z) - d(x, z) \leq d(x, y) \\ &\implies |d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y). \end{aligned}$$

Assim, mostramos que

$$d(x, y) \geq |d(x, z) - d(y, z)|$$

para todo  $x, y, z \in X$ .  $\square$

**Lema 4: Sequência de Cauchy de números reais é limitada**

Seja  $s : \mathbb{N} \rightarrow X \subset \mathbb{R}$  uma sequência de Cauchy em relação à métrica usual. Então existe  $M > 0$  tal que

$$n \in \mathbb{N} \implies |s_n| \leq M,$$

isto é, a sequência é limitada.

*Demonstração.* Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $N_\varepsilon > 0$  tal que

$$n, m > N_\varepsilon \implies |s_n - s_m| < \varepsilon.$$

Em particular, tomamos  $\varepsilon = 1$  e  $n_0$  o primeiro natural tal que

$$n > n_0 \implies |s_n - s_{n_0}| < 1$$

Pelo [Lema 3](#), temos que

$$|s_n - s_m| \geq ||s_n| - |s_m|| \implies -|s_n - s_m| \leq |s_n| - |s_m| \leq |s_n - s_m|$$

portanto

$$\begin{aligned} n > n_0 &\implies |s_n| - |s_{n_0}| < 1 \\ &\implies |s_n| < 1 + |s_{n_0}|. \end{aligned}$$

Assim, definimos

$$M = \max\{|s_0|, |s_1|, \dots, |s_{n_0-1}|, |s_{n_0}|, |s_{n_0}| + 1\}$$

de forma que

$$|s_n| \leq M$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ . □

**Proposição 12: O intervalo  $[a, \infty)$  é um espaço métrico completo em relação à métrica usual**

O espaço métrico  $([a, \infty), d)$ , em que  $d$  é a métrica usual, é completo.

*Demonstração.* Seja  $s : \mathbb{N} \rightarrow [a, \infty)$  uma sequência de Cauchy em relação à métrica usual. Pelo [Lema 4](#), existe  $M > 0$  tal que  $|s_n| \leq M$ . Desse modo, a imagem da sequência deve estar contida no intervalo fechado  $[a, M]$ . Isto é,  $s$  é uma sequência de Cauchy no espaço métrico  $[a, M]$ , que é completo em relação à métrica usual pela [Proposição 11](#), logo existe  $\sigma \in [a, M]$  ao qual  $s$  converge. Como  $[a, M] \subset [a, \infty)$ , então  $\sigma \in [a, \infty)$ . Assim,  $([a, \infty), d)$  é um espaço métrico completo em relação à métrica usual. □

**Corolário 3.** O intervalo  $(-\infty, a]$  é completo em relação à métrica usual.

**Corolário 4.** O intervalo  $[1, \infty)$  é completo em relação à métrica usual.

**Proposição 13: Métrica no intervalo  $[1, \infty)$** 

O espaço métrico  $([1, \infty), d_I)$  não é completo, onde a métrica  $d_I$  é a aplicação

$$\begin{aligned} d_I : [1, \infty) \times [1, \infty) &\rightarrow [0, \infty) \\ (x, y) &\mapsto \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|. \end{aligned}$$

*Demonstração.* Primeiro mostramos que  $d_I$  é de fato uma métrica em  $[1, \infty)$ . Para  $x, y \in [1, \infty)$ , temos

$$\begin{aligned} x = y &\iff \frac{1}{x} = \frac{1}{y} \\ &\iff \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 0 \\ &\iff d_I(x, y) = 0 \end{aligned}$$

e

$$d_I(y, x) = \left| \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = d_I(x, y).$$

Para todo  $x, y, z \in [1, \infty)$ ,

$$\begin{aligned} d_I(x, y) &= \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{z} + \frac{1}{z} - \frac{1}{y} \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{z} \right| + \left| \frac{1}{z} - \frac{1}{y} \right|, \end{aligned}$$

isto é,

$$d_I(x, y) \leq d_I(x, z) + d_I(z, y).$$

Assim,  $([1, \infty), d_I)$  é um espaço métrico.

Consideremos a sequência  $s : \mathbb{N} \rightarrow [1, \infty)$  definida por  $s_0 = 1$  e  $s_n = n$  para  $n \geq 1$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , tomemos  $N = \frac{2}{\varepsilon}$ , então para todos  $n, m > N$  vale

$$\begin{aligned} d_I(s_n, s_m) &= \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| \\ &\leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \\ &< \frac{2}{N} = \varepsilon, \end{aligned}$$

isto é,  $s$  é uma sequência de Cauchy em  $([1, \infty), d_I)$ .

Entretanto,  $s$  não converge neste espaço métrico. De fato, suponhamos por contradição que existe  $\sigma \in [1, \infty)$  ao qual a sequência converge. Neste caso, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $M > 0$  tal que para todo  $n > M$  vale  $d_I(s_n, \sigma) < \varepsilon$ . Consideremos  $\varepsilon = \frac{1}{2\sigma} \in (0, 1]$ , então

$$\begin{aligned} d_I(s_n, \sigma) < \varepsilon &\implies \left| \frac{1}{s_n} - \frac{1}{\sigma} \right| < \frac{1}{2\sigma} \\ &\implies -\frac{1}{2\sigma} < \frac{1}{s_n} - \frac{1}{\sigma} < \frac{1}{2\sigma} \\ &\implies \frac{1}{2\sigma} < \frac{1}{s_n} < \frac{3}{2\sigma} \\ &\implies \frac{2\sigma}{3} < s_n < 2\sigma. \end{aligned}$$

para todo  $n > M$ . Isto é,  $2\sigma$  deve ser maior do que qualquer número natural maior do que  $M$ , o que contradiz a propriedade arquimediana dos números reais. De fato, se  $k \in \mathbb{N}$  é tal que  $k > M$  e  $s_k < 2\sigma$ , então existe  $\ell \in \mathbb{N}$  tal que  $\ell s_k > 2\sigma$ , ou seja,  $\ell k > M$  e  $s_{\ell k} > 2\sigma$ . Dessa forma, não pode existir  $\sigma \in [1, \infty)$  ao qual a sequência de Cauchy  $s$  converge em relação à métrica  $d_I$ , portanto este espaço métrico não é completo.  $\square$

## Exercício 10

### Lema 5: União finita de subespaços métricos completos é um espaço métrico completo

Seja  $(M, d)$  um espaço métrico e sejam  $M_1, M_2 \subset M$  subconjuntos não vazios de  $M$ . Se  $(M_1, d|_{M_1 \times M_1})$  e  $(M_2, d|_{M_2 \times M_2})$  são espaços métricos completos, então  $(X, d|_{X \times X})$  é um espaço métrico completo, com  $X = M_1 \cup M_2$ .

*Demonstração.* Seja  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência de Cauchy em  $X$ . Então existe  $k \in \{1, 2\}$  tal que existem infinitos  $x_n \in M_k$ . Assim, existe uma sequência crescente  $\{n_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  de números naturais tal que  $\{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}} \subset M_k$  é uma subsequência em  $(M_k, d|_{M_k \times M_k})$ . Como a sequência é de Cauchy em  $(X, d|_{X \times X})$ , segue que dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $N > 0$  tal que para todo  $n, m > N$  vale

$$d|_{X \times X}(x_n, x_m) < \varepsilon,$$

em particular para  $n_i, n_j > N$  temos

$$d|_{X \times X}(x_{n_i}, x_{n_j}) = d|_{M_k \times M_k}(x_{n_i}, x_{n_j}) < \varepsilon,$$

então esta subsequência é de Cauchy em  $(M_k, d|_{M_k \times M_k})$ , logo convergente neste espaço métrico completo. Pelo [Lema 2](#), segue que  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge em  $(X, d|_{X \times X})$ , o que conclui a demonstração.  $\square$

**Corolário 5.** O intervalo  $[0, \infty)$  é um espaço métrico completo em relação à métrica usual.

### Lema 6: Ponto fixo único de uma função iterada

Seja  $X$  um conjunto não vazio onde está definida a função  $f : X \rightarrow X$ . Se a iteração  $g = f \circ f$  tem um único ponto fixo, então  $f$  tem um único ponto fixo.

*Demonstração.* Seja  $y \in X$  o único ponto fixo de  $g$ . Pela associatividade da composição de funções, temos

$$f(y) = (f \circ g)(y) = (f \circ f)(f(y)) = g(f(y)),$$

isto é,  $f(y)$  é um ponto fixo de  $g$ , portanto  $y = f(y)$ . Assim,  $y$  é ponto fixo de  $f$ .

Suponhamos, por contradição, que  $x \in X \setminus \{y\}$  é um ponto fixo de  $f$ . Temos

$$g(x) = f(f(x)) = f(x) = x,$$

portanto  $x$  é um outro ponto fixo de  $g$ . Esta contradição mostra que  $y$  é o único ponto fixo de  $f$  em  $X$ .  $\square$

### Proposição 14: Constante Omega

A única solução de

$$x = e^{-x}$$

para  $x \in [0, \infty)$  é a constante  $\Omega = W(1) \simeq 0.56714$ .

*Demonstração.* Pela definição da função  $W$  de Lambert, temos

$$\Omega e^{\Omega} = 1 \implies \Omega = e^{-\Omega},$$

portanto resta mostrar que esta equação não possui outra solução em  $[0, \infty)$ . Alternativamente, mostramos que  $\Omega$  é um ponto fixo da aplicação suave

$$\begin{aligned} f : [0, \infty) &\rightarrow [0, \infty) \\ t &\mapsto e^{-t} \end{aligned}$$



e desejamos mostrar que  $\Omega$  é o único ponto fixo de  $f$  em  $[0, \infty)$ .

Consideremos a aplicação suave

$$\begin{aligned} g : [0, \infty) &\rightarrow [0, \infty) \\ t &\mapsto (f \circ f)(t) = \exp(-e^{-t}). \end{aligned}$$

Temos  $\ln g(t) = -f(t)$  para todo  $t \in [0, \infty)$ , portanto

$$g'(t) = f(t)g(t),$$

é a derivada de  $g$ , já que  $f'(t) = -f(t)$ . Assim, a segunda derivada é dada por

$$\begin{aligned} g''(t) &= f'(t)g(t) + f(t)g'(t) \\ &= -f(t)g(t) + f(t)f(t)g(t) \\ &= (f(t) - 1)f(t)g(t). \end{aligned}$$

Notemos que

$$t \in [0, \infty) \implies -1 < f(t) - 1 \leq 0$$

onde a igualdade ocorre apenas para  $t = 0$ , portanto  $g''(t) \leq 0$  para todo  $t \geq 0$ , isto é,  $g'(t)$  decresce monotonicamente em  $[0, \infty)$ . Desse modo, temos

$$t \in [0, \infty) \implies 0 < g'(t) \leq \frac{1}{e}.$$

Consideremos  $|g(x) - g(y)|$  para  $x, y \in [0, \infty)$ . Pelo teorema do valor médio, existe  $\xi \in [0, \infty)$  entre  $x$  e  $y$  tal que

$$g(x) - g(y) = g'(\xi)(x - y)$$

então

$$|g(x) - g(y)| = g'(\xi)|x - y| \leq \frac{1}{e}|x - y|.$$

Assim, mostramos que  $g$  é uma contração em  $[0, \infty)$  em relação à métrica usual. Como  $[0, \infty)$ , dotado da métrica usual, é um espaço métrico completo, segue que  $g$  tem um único ponto fixo neste espaço, pelo teorema do ponto fixo de Banach. Pelo [Lema 6](#), segue que  $f$  tem um único ponto fixo, que é  $\Omega$ .  $\square$

Utilizando o código a seguir, obtemos após quarenta iterações um erro absoluto compatível com a precisão máxima oferecida pela biblioteca numpy. O valor obtido pelo programa foi  $\Omega \simeq 0.567143290409783873$ . Após quarenta iterações e utilizando o ponto inicial  $x_0 = 0$ , o erro estimado é  $\Omega - x_{40} \leq \frac{e^{-41}}{1-e^{-1}}$ .

```
1 import numpy as np
2 def g(x: np.longdouble) -> np.longdouble:
3     return np.exp(-np.exp(-x))
4
5 if __name__ == "__main__":
6     omega = np.longdouble(0.5671432904097838729999)
7     x = np.longdouble(0)
8     for i in range(40):
9         x = g(x)
10        print(f"Iteração {i+1}: {x:.18f}")
11    print(f"Erro absoluto: {omega - x}")
12    print(f"Precisão de {np.finfo(np.longdouble).precision} dígitos")
```