Física Matemática II
Primeira Lista de Exercícios

Louis Bergamo Radial
8992822

26 de março de 2024

Exercício 1

Proposição 1: Métrica trivial

Seja X um conjunto não vazio, então (X, d_t) é um espaço métrico, onde a função $d_\mathrm{t} : X \times X \to \mathbb{R}$ é a métrica trivial, definida por

$$d_\mathrm{t}(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = y, \\ 1, & \text{se } x \neq y, \end{cases}$$

para todo $x, y \in X$.

Demonstração. Pela definição da métrica trivial, temos

$$d_\mathrm{t}(x, y) = 0 \iff x = y$$

para todo $x, y \in X$. De mesma forma, pela simetria de relação de igualdade, temos

$$d_\mathrm{t}(x, y) = d_\mathrm{t}(y, x).$$

Ainda, a imagem da função d_t é contida na semirreta $[0, \infty)$,

$$d_\mathrm{t}(\mathrm{X} \times \mathrm{X}) = \{0, 1\} \subset [0, \infty).$$

Assim, resta mostrar que a métrica trivial satisfaz a desigualdade triangular.

Consideremos $x, y, z \in \mathbb{R}$, então segue que

$$0 \leq d_\mathrm{t}(x, z) + d_\mathrm{t}(z, y) \leq 2,$$

com os únicos valores possíveis para a soma sendo $\{0, 1, 2\}$. No caso em que $x = y$, temos $d_\mathrm{t}(x, y) = 0$, portanto

$$d_\mathrm{t}(x, y) \leq d_\mathrm{t}(x, z) + d_\mathrm{t}(z, y)$$

é satisfeita de forma trivial. No caso em que $x \neq y$, temos $d_\mathrm{t}(x, y) = 1$, portanto pela transitividade da igualdade temos que

$$1 \leq d_\mathrm{t}(x, z) + d_\mathrm{t}(z, y) \leq 2,$$

já que z não pode ser igual a tanto x quanto y, de modo que

$$d_\mathrm{t}(x, y) \leq d_\mathrm{t}(x, z) + d_\mathrm{t}(z, y).$$

Dessa forma, mostramos que a desigualdade triangular é satisfeita em todos os casos, portanto (X, d_t) é um espaço métrico. $\square$

Exercício 2

Proposição 2: Métrica do supremo

Seja $X = C([0,1])$ o conjunto de todas as funções reais contínuas definidas no intervalo $[0,1]$. Então (X, d_∞) é um espaço métrico, com a métrica definida por

$$\begin{aligned} d_\infty : X \times X &\to \mathbb{R} \\ (f,g) &\mapsto \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|. \end{aligned}$$

Demonstração. Notemos que a imagem da função d_∞ está contida na semirreta $[0,\infty)$.

Para $f, g \in X$, temos $f = g$ se e somente se $f(x) = g(x)$ para todo $x \in [0,1]$. Portanto,

$$\begin{aligned} f = g &\iff \forall x \in [0,1] : |f(x) - g(x)| = 0 \\ &\iff \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)| = 0 \\ &\iff d_\infty(f,g) = 0. \end{aligned}$$

Notemos também que a função d_∞ é simétrica em seus argumentos, isto é,

$$d_\infty(g,f) = \sup_{x\in[0,1]} |g(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)| = d_\infty(f,g).$$

Consideremos $f, g, h \in X$, então

$$\begin{aligned} d_\infty(f,g) &= \sup_{x\in[0,1]} \big|f(x) - h(x) + h(x) - h(x)\big| \\ &\leq \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)| \\ &\leq d_\infty(f,h) + d_\infty(h,g). \end{aligned}$$

Dessa forma, mostramos que a função d_∞ é uma métrica em X. □

Exercício 3

Proposição 3: Métrica d_1

Seja $X = C([0,1])$ o conjunto de todas as funções reais contínuas definidas no intervalo $[0,1]$. Então (X, d_1) é um espaço métrico, com a métrica definida por

$$\begin{aligned} d_1 : X \times X &\to \mathbb{R} \\ (f,g) &\mapsto \int_0^1 \mathrm{d}x\, |f(x) - g(x)|. \end{aligned}$$

Demonstração. Notemos que a imagem da função d_1 está contida na semirreta $[0,\infty)$.

Suponhamos que duas funções $f, g \in X$ satisfazem $d_1(f,g) = 0$. Certamente essas funções devem ser diferentes em no máximo um conjunto de medida nula. Como as funções são contínuas, este conjunto deve ser vazio. Desse modo, $f = g$ em $[0,1]$. Suponhamos agora que duas funções são iguais $f = g$. Claramente temos $d_1(f,g) = 0$. Desse modo,

$$f = g \iff d_1(f,g) = 0.$$

Vejamos também que a função d_1 é simétrica em seus argumentos, isto é,

$$d_1(g, f) = \int_0^1 \mathrm{d}x\, |g(x) - f(x)| = \int_0^1 \mathrm{d}x\, |f(x) - g(x)| = d_1(f, g).$$

Consideremos $f, g, h \in X$, então

$$\begin{aligned} d_1(f, g) &= \int_0^1 \mathrm{d}x\, |f(x) - h(x) + h(x) - g(x)| \\ &\leq \int_0^1 \mathrm{d}x\, |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)| \\ &\leq d_1(f, h) + d_1(h, g). \end{aligned}$$

Dessa forma, mostramos que a função d_1 é uma métrica em X. □

Exercício 4

Definição 1: Métrica induzida por uma norma

Seja $\mathcal{E}$ um espaço vetorial dotado de uma norma $\|\cdot\| : \mathcal{E} \to [0, \infty)$. A aplicação

$$\begin{aligned} d : \mathcal{E} \times \mathcal{E} &\to [0, \infty) \\ (x, y) &\mapsto \|x - y\| \end{aligned}$$

é denominada métrica induzida pela norma $\|\cdot\|$.

Proposição 4: Métrica induzida por uma norma

Seja $\mathcal{E}$ um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$. Uma métrica $d : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to [0, \infty)$ é induzida por uma norma em $\mathcal{E}$ se e somente se d satisfaz

(a) invariância translacional: $d(u + t, v + t) = d(u, v)$ para todo $u, v, t \in \mathcal{E}$; e

(b) transformação de escala $d(\alpha u, \alpha v) = |\alpha| d(u, v)$ para todo $u, v \in \mathcal{E}$ e $\alpha \in \mathbb{K}$.

Demonstração. Suponha que d é uma métrica induzida pela norma $\|\cdot\|$. Para todos $u, v, t \in \mathcal{E}$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, temos

$$d(u + t, v + t) = \|(u + t) - (v + t)\| = \|u - v\| = d(u, v)$$

e

$$d(\alpha u, \alpha v) = \|\alpha(u - v)\| = |\alpha| \|u - v\| = |\alpha| d(u, v).$$

Isto é, se d é induzida por uma norma, então d satisfaz (a) e (b).

Suponha agora que d satisfaz (a) e (b). Mostremos que a aplicação

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \mathcal{E} &\to [0, \infty) \\ v &\mapsto d(v, 0) \end{aligned}$$

é uma norma em $\mathcal{E}$. Notemos que

$$\begin{aligned} v = 0 &\iff d(v, 0) = 0 \\ &\iff \|v\| = 0, \end{aligned}$$

e

$$\|\lambda u\| = d(\lambda u, 0) = |\lambda| d(u, 0) = |\lambda| \|u\|$$

para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ e $u \in \mathcal{E}$. Pela propriedade (b) segue que

$$\|x + y\| = d(x + y, 0) = d(x, -y),$$

portanto pela propriedade (a) e pela desigualdade triangular para d, temos

$$\|x + y\| \leq d(x, 0) + d(0, y)$$

ou então $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo $x, y \in \mathcal{E}$. Desse modo, $\|\cdot\|$ é uma norma em $\mathcal{E}$. Ainda, temos

$$d(u, v) = d(u - v, 0) = \|u - v\|,$$

portanto d é a métrica induzida pela norma $\|\cdot\|$. Isto é, se d satisfaz (a) e (b), então d é uma métrica induzida por uma norma. □

Exercício 5

Proposição 5: Sequência convergente nos números racionais

Seja $r > 1$ um número racional. A sequência $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ definida por

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} r^{-k}$$

é de Cauchy e converge a $\frac{r}{r-1} \in \mathbb{Q}$ em relação à métrica usual.

Demonstração. Para $n \in \mathbb{N}$, consideremos a fatoração

$$x^{n+1} - y^{n+1} = (x - y) \sum_{k=0}^{n} x^{n-k} y^k,$$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Em particular, temos

$$1 - \left(\frac{1}{r}\right)^{n+1} = \left(1 - \frac{1}{r}\right) \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{r}\right)^k,$$

isto é,

$$s_n = \frac{r - r^{-n}}{r - 1}.$$

Assim, consideremos $n, m \in \mathbb{N}$ com $n > m$. Temos

$$\begin{aligned} |s_n - s_m| &= \frac{r^{-m} - r^{-n}}{r - 1} \\ &= (1 - r^{m-n}) \frac{r^{-m}}{r - 1}. \end{aligned}$$

Como $r > 1$ e $n > m$ temos

$$\begin{aligned} 0 < r^{-1} < 1 &\implies 0 < r^{m-n} < 1 \\ &\implies -1 < -r^{m-n} < 0 \\ &\implies 0 < 1 - r^{m-n} < 1, \end{aligned}$$

portanto podemos estimar que

$$|s_n - s_m| < \frac{r^{-m}}{r-1}.$$

Tomando m suficientemente grande, podemos tornar $|s_n - s_m|$ suficientemente pequeno, isto é, a sequência é de Cauchy em relação à métrica usual.

Notemos que para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|\frac{r}{r-1} - s_n\right| = \frac{r^{-n}}{r-1},$$

então pelo mesmo argumento, temos que a sequência converge a $\frac{r}{r-1} \in \mathbb{Q}$ em relação à métrica usual. □

Exercício 6

Proposição 6: $\mathbb{Q}$ não é completo em relação à métrica usual

A sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ definida por

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

é de Cauchy mas não converge a nenhum número racional em relação à métrica usual.

Demonstração. Consideremos $n, m \in \mathbb{N}$ com $n > m$, então

$$\begin{aligned}
|x_n - x_m| &= \left|\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!}\right| \\
&= \sum_{k=0}^{n-m-1} \frac{1}{(k+m+1)!} \\
&= \frac{1}{(m+1)!} \sum_{k=0}^{n-m-1} \frac{(m+1)!}{(k+m+1)!} \\
&= \frac{1}{(m+1)!}\left(1 + \frac{1}{m+2} + \frac{1}{(m+2)(m+3)} + \cdots + \frac{(m+1)!}{n!}\right) \\
&\le \frac{1}{(m+1)!}\left(1 + \frac{1}{m+2} + \frac{1}{(m+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(m+2)^{n-m-1}}\right) \\
&< \frac{1}{(m+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} (m+2)^{-k}.
\end{aligned}$$

Pela Proposição 5, temos

$$|x_n - x_m| < \frac{1}{(m+1)!}\frac{m+2}{m+1}.$$

Assim, podemos tornar $|x_n - x_m|$ arbitrariamente pequeno ao escolher m suficientemente grande, isto é, a sequência é de Cauchy em relação à métrica usual.

Sabemos que esta sequência converge a $e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, pela definição de exponencial. Desse modo, a sequência não é convergente nos racionais com a métrica usual. □

Exercício 7

Exercício 8

Proposição 7: Oi

Seja (M, d) um espaço métrico, então

$$\begin{aligned} d_0 : M \times M &\to [0, \infty) \\ (x, y) &\mapsto \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \end{aligned}$$

é uma métrica em M.

Demonstração. Por d ser uma métrica, temos

$$\begin{aligned} d_0(x, y) = 0 &\iff d(x, y) = 0 \\ &\iff x = y, \end{aligned}$$

e

$$d_0(y, x) = \frac{d(y, x)}{1 + d(y, x)} = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} = d_0(x, y),$$

portanto resta mostrar que d_0 satisfaz a desigualdade triangular.

TODO Mostremos que a aplicação

$$\begin{aligned} f : [0, \infty) &\to [0, \infty) \\ \xi &\mapsto \frac{\xi}{1 + \xi} \end{aligned}$$

é crescente.

Desse modo, como f é crescente, a relação de ordem é mantida, isto é

$$\begin{aligned} d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) &\implies d_0(x, y) \leq f(d(x, z) + d(z, y)) \\ &\implies d_0(x, y) \leq \frac{d(x, z) + d(z, y)}{1 + d(x, z) + d(z, y)}, \end{aligned}$$

para todo $x, y, z \in M$. Notemos que

$$\begin{aligned} 0 \leq d(x, z) \leq d(x, z) + d(z, y) &\implies 1 \leq 1 + d(x, z) \leq 1 + d(x, z) + d(z, y) \\ &\implies \frac{1}{1 + d(x, z) + d(z, y)} \leq \frac{1}{1 + d(x, z)} \leq 1 \\ &\implies \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z) + d(y, z)} \leq d_0(x, z) \leq d(x, z), \end{aligned}$$

e analogamente

$$0 \leq d(y, z) \leq d(x, z) + d(z, y) \implies \frac{d(z, y)}{1 + d(x, z) + d(y, z)} \leq d_0(z, y) \leq d(z, y),$$

para todo $x, y, z \in M$. Portanto

$$\frac{d(x, z) + d(z, y)}{1 + d(x, z) + d(z, y)} \leq d_0(x, z) + d_0(z, y),$$

donde segue

$$d_0(x, y) \leq d_0(x, z) + d_0(z, y),$$

isto é, d_0 satisfaz a desigualdade triangular. □

Exercício 9

Exercício 10

Lema 1: Ponto fixo único de uma função iterada

Seja X um conjunto não vazio onde está definida a função $f : X \to X$. Se a iteração $g = f \circ f$ tem um único ponto fixo, então f tem um único ponto fixo.

Demonstração. Seja $y \in X$ o único ponto fixo de g. Pela associatividade da composição de funções, temos

$$f(y) = (f \circ g)(y) = (f \circ f)(f(y)) = g(f(y)),$$

isto é, $f(y)$ é um ponto fixo de g, portanto $y = f(y)$. Assim, y é ponto fixo de f.

Suponhamos, por contradição, que $x \in X \setminus \{y\}$ é um ponto fixo de f. Temos

$$g(x) = f(f(x)) = f(x) = x,$$

portanto x é um outro ponto fixo de g. Esta contradição mostra que y é o único ponto fixo de f em X. □

Lema 2: Subsequência convergente de uma sequência de Cauchy

Seja (X, d) um espaço métrico e seja $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em (X, d). Se existe uma sequência crescente $\left\{n_j\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ de números naturais tal que a subsequência $\left\{x_{n_j}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ é convergente em (X, d), então x_n converge em (X, d).

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N > 0$ tal que para todo $m, n > N$ vale

$$d(x_n, x_m) < \frac{1}{2}\varepsilon,$$

já que a sequência é de Cauchy em relação à métrica d.

Seja $x \in X$ o ponto ao qual a subsequência converge. Então dado $\varepsilon > 0$, existe $J > 0$ tal que para todo $n_j > J$ vale

$$d(x_{n_j}, x) < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Seja $M = \max\{N, J\}$, então para todos $m, n_j > M$ segue que

$$\begin{aligned} d(x_m, x) &\leq d(x_m, x_{n_j}) + d(x_{n_j}, x) \\ &\leq \varepsilon, \end{aligned}$$

isto é, a sequência de Cauchy converge para $x \in X$ em relação à métrica d. □

Lema 3: União finita de subespaços métricos completos é um espaço métrico completo

Seja (M, d) um espaço métrico e sejam $M_1, M_2 \subset M$ subconjuntos não vazios. Se $(M_1, d|_{M_1})$ e $(M_2, d|_{M_2})$ são espaços métricos completos, então $(X, d|_X)$ é um espaço métrico completo, com $X = M_1 \cup M_2$.

Demonstração. Seja $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em X. Então existe $k \in \{1,2\}$ tal que existem infinitos $x_n \in M_k$. Assim, existe uma sequência crescente $\{n_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de números naturais tal que $\{x_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset M_k$ é uma subsequência em $(M_k, d|_{M_k})$. Como a sequência é de Cauchy em $(X, d|_X)$, então esta subsequência é de Cauchy em $(M_k, d|_{M_k})$, logo convergente neste espaço métrico completo. Pelo Lema 2, segue que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge em $(X, d|_X)$, o que conclui a demonstração. □

Proposição 8: Constante Omega

A única solução de
$$x = e^{-x}$$
para $x \in [0,\infty)$ é a constante $\Omega = W(1) \simeq 0.56714$.

Demonstração. Pela definição da função W de Lambert, temos
$$\Omega e^{\Omega} = 1 \implies \Omega = e^{-\Omega},$$
portanto resta mostrar que esta equação não possui outra solução em $[0,\infty)$. Alternativamente, mostramos que Ω é um ponto fixo da aplicação suave
$$\begin{aligned} f : [0,\infty) &\longrightarrow [0,\infty) \\ t &\longmapsto e^{-t} \end{aligned}$$
e desejamos mostrar que Ω é o único ponto fixo de f em $[0,\infty)$.

Consideremos a aplicação suave
$$\begin{aligned} g : [0,\infty) &\longrightarrow [0,\infty) \\ t &\longmapsto (f\circ f)(t) = \exp\left(-e^{-t}\right). \end{aligned}$$
Temos $\ln g(t) = -f(t)$ para todo $t \in [0,\infty)$, portanto
$$g'(t) = f(t)g(t),$$
é a derivada de g, já que $f'(t) = -f(t)$. Assim, a segunda derivada é dada por
$$\begin{aligned} g''(t) &= f'(t)g(t) + f(t)g'(t) \\ &= -f(t)g(t) + f(t)f(t)g(t) \\ &= \big(f(t)-1\big) f(t)g(t). \end{aligned}$$
Notemos que
$$\begin{aligned} t \in [0,\infty) &\implies 0 < f(t) \le 1 \\ &\implies -1 < f(t) - 1 \le 0 \end{aligned}$$
onde a igualdade ocorre apenas para $t = 0$, portanto $g''(t) \le 0$ para todo $t \ge 0$, isto é, $g'(t)$ decresce monotonicamente em $[0,\infty)$. Desse modo, temos
$$t \in [0,\infty) \implies 0 < g'(t) \le \frac{1}{e}.$$

Consideremos $|g(x) - g(y)|$ para $x, y \in [0,\infty)$. Pelo teorema do valor médio, existe $\xi \in [0,\infty)$ entre x e y tal que
$$g(x) - g(y) = g'(\xi)(x-y)$$

então
$$|g(x) - g(y)| = g'(\xi)|x - y| \leq \frac{1}{e}|x - y|.$$

Assim, mostramos que g é uma contração em $[0, \infty)$ em relação à métrica usual. Como $[0, \infty) = [0, 1] \cup [1, \infty)$, temos pelo TODO Lema 3 e ?? que este intervalo, dotado da métrica usual, é um espaço métrico completo. Assim, segue que g tem um único ponto fixo neste espaço, pelo teorema do ponto fixo de Banach. Pelo Lema 1, segue que f tem um único ponto fixo, que é Ω. □

Utilizando o código a seguir, obtemos após quarenta iterações um erro absoluto compatível com a precisão máxima oferecida pela biblioteca `numpy`. O valor obtido pelo programa foi $\Omega \simeq 0.567143290409783873$. Após quarenta iterações e utilizando o ponto inicial $x_0 = 0$, o erro estimado é $\Omega - x_{40} \leq \frac{e^{-41}}{1-e^{-1}}$.

```python
#!/usr/bin/python3
import numpy as np

def g(x: np.longdouble) -> np.longdouble:
    return np.exp(-np.exp(-x))

omega = np.longdouble(0.56714329040978387299999)

if __name__ == "__main__":
    x = np.longdouble(0)
    for i in range(40):
        x = g(x)
        print(f"Iteração {i+1}: {x:.18f}")
    print(f"Erro absoluto: {omega - x}")
    print(f"Precisão de {np.finfo(np.longdouble).precision} dígitos")
```