

Física Matemática II

Terceira Lista de Exercícios e Tarefas

Louis Bergamo Radial
8992822

23 de junho de 2024

Exercício 1

Proposição 1: Função de Green para $u'' = f$

A função de Green para o problema de Sturm

$$\begin{cases} u''(x) = f(x), \\ \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0 \\ \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0 \end{cases}$$

para $x \in [a, b]$ é dada por

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{(\alpha_1 x - a\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 \xi - b\beta_1 - \beta_2)}{(b-a)\alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2}, & a \leq x < \xi \leq b \\ \frac{(\alpha_1 \xi - a\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 x - b\beta_1 - \beta_2)}{(b-a)\alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2}, & a \leq \xi < x \leq b \end{cases}$$

caso $(b-a)\alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2 \neq 0$.

Demonstração. Para determinar a função de Green, temos que resolver os problemas

$$\begin{cases} v_1''(x) = 0 \\ \alpha_1 v_1(a) + \alpha_2 v_1'(a) = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} v_2''(x) = 0 \\ \beta_1 v_2(b) + \beta_2 v_2'(b) = 0 \end{cases}$$

e então teremos

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{v_1(x)v_2(\xi)}{\kappa}, & a \leq x < \xi \leq b \\ \frac{v_1(\xi)v_2(x)}{\kappa}, & a \leq \xi < x \leq b \end{cases}$$

em que $\kappa = v_1(a)v_2'(a) - v_1'(a)v_2(a)$. Das equações diferenciais, temos $v_1(x) = Ax + B$ e $v_2(x) = Cx + D$, portanto

$$\kappa = v_1(a)v_2'(a) - v_1'(a)v_2(a) = BC - AD.$$

Segue das condições de contorno que

$$\alpha_1 B = -(a\alpha_1 + \alpha_2)A \quad \text{e} \quad \beta_1 D = -(b\beta_1 + \beta_2)C.$$

Assim, como **TODO: como mostrar isso sem mentir?**

$$\kappa = \frac{BC - AD}{AC} AC = \left(\frac{B}{A} - \frac{D}{C} \right) AC = \frac{(b-a)\alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2}{\alpha_1\beta_1} AC,$$

teremos a função bem definida apenas para

$$(b - a)\alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2 \neq 0.$$

Neste caso,

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{(\alpha_1 x - a\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 \xi - b\beta_1 - \beta_2)}{(b - a)\alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2}, & a \leq x < \xi \leq b \\ \frac{(\alpha_1 \xi - a\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 x - b\beta_1 - \beta_2)}{(b - a)\alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2}, & a \leq \xi < x \leq b \end{cases}$$

é a função de Green procurada. □

Exercício 4