Física Matemática II
Segunda Lista de Exercícios e Tarefas

Louis Bergamo Radial
8992822

23 de junho de 2024

Exercício 1

Exercício 4

Proposição 1: Soluções da equação de Hermite

As soluções gerais da equação de Hermite

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}z^2} - 2z\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z} + \lambda y(z) = 0,$$

com $\lambda \in \mathbb{C}$ constante, são dadas por

$$y(z) = c_0\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{(2k)!}\prod_{\ell=0}^{k-1}(4\ell-\lambda)\right] + c_1\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}\prod_{\ell=0}^{k-1}(4\ell+2-\lambda)\right],$$

para todo $z \in \mathbb{C}$, com $c_0, c_1 \in \mathbb{C}$.

Demonstração. Como os coeficientes que acompanham $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}$ e $y(z)$ são funções inteiras, segue que a solução da equação é inteira, logo podemos procurar uma solução do tipo $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$. Substituindo na equação diferencial,

$$0 = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)c_k z^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty}(\lambda - 2k)c_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty}\left[(k+2)(k+1)c_{k+2} + (\lambda-2k)c_k\right]z^k,$$

obtemos a relação de recorrência

$$c_{k+2} = \frac{2k-\lambda}{(k+2)(k+1)}c_k = \frac{2k-\lambda}{(k+2)!}k!c_k$$

para $k \in \mathbb{N}$.

Mostremos por indução que

$$c_{2k} = \frac{c_0}{(2k)!}\prod_{\ell=0}^{k-1}(4\ell-\lambda) \quad \text{e} \quad c_{2k+1} = \frac{c_1}{(2k+1)!}\prod_{\ell=0}^{k-1}(4\ell+2-\lambda)$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Para $k = 0$, as igualdades são verificadas trivialmente. Suponhamos que as igualdades sejam satisfeitas para algum $k = n \in \mathbb{N}$, então da relação de recorrência, temos

$$\begin{aligned} c_{2n+2} &= \frac{4n-\lambda}{(2n+2)!}(2n)!c_{2n} & c_{2n+3} &= \frac{4n+2-\lambda}{(2n+3)!}(2n+1)!c_{2n+1} \\ &= \frac{4n-\lambda}{(2n+2)!}c_0\prod_{\ell=0}^{n-1}(4\ell-\lambda) & &= \frac{4n+2-\lambda}{(2n+3)!}c_1\prod_{\ell=0}^{n-1}(4\ell+2-\lambda) \\ &= \frac{c_0}{(2n+2)!}\prod_{\ell=0}^{n}(4\ell-\lambda) & &= \frac{c_1}{(2n+3)!}\prod_{\ell=0}^{n}(4\ell+2-\lambda), \end{aligned}$$

isto é, as expressões são válidas para $n+1$. Pelo princípio da indução finita, as igualdades seguem para todo $k \in \mathbb{N}$.

Dessa forma, a solução geral da equação de Hermite é dada por

$$y(z) = c_0\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{(2k)!}\prod_{\ell=0}^{k-1}(4\ell-\lambda)\right] + c_1\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}\prod_{\ell=0}^{k-1}(4\ell+2-\lambda)\right],$$

definida para todo $z \in \mathbb{C}$. No caso particular em que $\lambda = 2m$ para algum $m \in \mathbb{N}$, segue que $c_{m+2} = 0$. Por conseguinte, todos os termos c_{m+2k+2} se anulam para $k \in \mathbb{N}$. Isto é, neste caso há uma solução polinomial de grau m para esta equação. $\square$