Física Matemática II
Terceira Lista de Exercícios e Tarefas

Louis Bergamo Radial
8992822

25 de junho de 2024

Exercício 1

Proposição 1: Função de Green para $u'' = f$

A função de Green para o problema de Sturm

$$\begin{cases} u''(x) = f(x), \\ \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0 \\ \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0 \end{cases}$$

para $x \in [a, b]$ é dada por

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{(\alpha_1 x - a\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 \xi - b\beta_1 - \beta_2)}{(b-a)\alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2}, & a \leq x < \xi \leq b \\ \dfrac{(\alpha_1 \xi - a\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 x - b\beta_1 - \beta_2)}{(b-a)\alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2}, & a \leq \xi < x \leq b \end{cases}$$

caso $(b-a)\alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2 \neq 0$.

Demonstração. Para determinar a função de Green, temos que resolver os problemas

$$\begin{cases} v_1''(x) = 0 \\ \alpha_1 v_1(a) + \alpha_2 v_1'(a) = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} v_2''(x) = 0 \\ \beta_1 v_2(b) + \beta_2 v_2'(b) = 0 \end{cases}$$

e então teremos

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{v_1(x)v_2(\xi)}{\kappa}, & a \leq x < \xi \leq b \\ \dfrac{v_1(\xi)v_2(x)}{\kappa}, & a \leq \xi < x \leq b \end{cases}$$

em que $\kappa = v_1(a)v_2'(a) - v_1'(a)v_2(a)$. Das equações diferenciais, temos $v_1(x) = Ax + B$ e $v_2(x) = Cx + D$, portanto

$$\kappa = v_1(a)v_2'(a) - v_1'(a)v_2(a) = BC - AD.$$

Segue das condições de contorno que

$$\alpha_1 B = -(a\alpha_1 + \alpha_2)A \quad \text{e} \quad \beta_1 D = -(b\beta_1 + \beta_2)C.$$

Assim, como TODO: como mostrar isso sem mentir?

$$\kappa = \frac{BC - AD}{AC} AC = \left(\frac{B}{A} - \frac{D}{C}\right) AC = \frac{(b-a)\alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2}{\alpha_1\beta_1} AC,$$

teremos a função bem definida apenas para

$$(b-a)\alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2 \neq 0.$$

Neste caso,

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{(\alpha_1 x - a\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1\xi - b\beta_1 - \beta_2)}{(b-a)\alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2}, & a \leq x < \xi \leq b \\ \dfrac{(\alpha_1 \xi - a\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 x - b\beta_1 - \beta_2)}{(b-a)\alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2}, & a \leq \xi < x \leq b \end{cases}$$

é a função de Green procurada. □

Exercício 2

Corolário 1. *A função de Green do problema de Sturm* $u''(x) = f(x)$ *onde* u *é definida no intervalo* $x \in [0,1]$ *e satisfaz* $u'(0) = 0$ *e* $u(1) = 0$ *é dada por*

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \xi - 1, & 0 \le x < \xi \le 1 \\ x - 1, & 0 \le \xi < x \le 1 \end{cases}$$

Demonstração. Identificando $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1, \beta_1 = 1$, e $\beta_2 = 0$, o resultado segue da Proposição 1. □

Proposição 2: Autovalores e autofunções do problema de Sturm-Liouville $u'' + \lambda u = 0$

Os autovalores e as autofunções normalizadas do problema de Sturm-Liouville

$$u'' + \lambda u = 0,$$

onde u é definida no intervalo $x \in [0,1]$ e satisfaz as condições de contorno $u'(0) = 0$ e $u(1) = 0$ são dados por

$$\lambda_n = \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 \quad \text{e} \quad u_n = \sqrt{2}\cos\left(\frac{2n-1}{2}\pi x\right),$$

para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Demonstração. Notamos que a solução geral da equação diferencial do problema de Sturm-Liouville é

$$u(x) = \begin{cases} A\cosh(\sqrt{-\lambda}x) + B\sinh(\sqrt{-\lambda}x), & \lambda < 0 \\ Ax + B, & \lambda = 0 \\ A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x), & \lambda > 0 \end{cases}.$$

Notemos que pelas condições de contorno, a solução para $\lambda = 0$ é a solução trivial, portanto podemos descartar este caso. Para $\lambda < 0$, segue de $u'(0) = 0$ que $B = 0$, então como o cosseno hiperbólico tem imagem positiva, a única solução de $u(1) = 0$ é $A = 0$, isto é, este caso também leva apenas a soluções triviais. Nos resta apenas o caso $\lambda > 0$, temos de $u'(0) = 0$ que $B = 0$, logo da outra condição de contorno obtemos

$$u(1) = 0 \implies \sqrt{\lambda} = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi, \quad \text{com} \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Deste modo, os autovalores do problema de Sturm-Liouville considerado são

$$\lambda_n = \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2,$$

para $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Para determinar as autofunções normalizadas, notamos que o produto interno para este problema de Sturm-Liouville coincide com o produto interno usual para o espaço de funções integráveis em $[0,1]$. Impondo que $\langle u_n, u_n \rangle = 1$, obtemos

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \, |A|^2 \cos^2\left(\frac{2n-1}{2}\pi x\right) = 1 \implies |A|^2 \int_0^1 \mathrm{d}x \, \frac{1 + \cos((2n-1)\pi x)}{2} = 1 \implies |A| = \sqrt{2},$$

portanto as autofunções normalizadas do problema de Sturm-Liouville são

$$u_n(x) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{2n-1}{2}\pi x\right),$$

para $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. □

Corolário 2. *A função de Green para o problema de Sturm associado é dada por*

$$G(x,\xi) = -\frac{8}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{2m+1}{2}\pi x\right)\cos\left(\frac{2m+1}{2}\pi\xi\right)}{(2m+1)^2},$$

para todo $(x,\xi) \in [0,1]\times[0,1]$.

Demonstração. Pela fórmula de Mercer, temos

$$G(x,\xi) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n(x)u_n(\xi)}{\lambda_n},$$

onde u_n é a autofunção normalizada associada ao autovalor λ_n do problema de Sturm-Liouville. Pela Proposição 2, segue que

$$\begin{aligned} G(x,\xi) &= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[\sqrt{2}\cos\left(\frac{2n-1}{2}\pi x\right)\right]\left[\sqrt{2}\cos\left(\frac{2n-1}{2}\pi\xi\right)\right]}{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2\pi^2} \\ &= -\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{2n-1}{2}\pi x\right)\cos\left(\frac{2n-1}{2}\pi\xi\right)}{(2n-1)^2}. \end{aligned}$$

Fazendo a troca de variável de soma $m = n-1$, obtemos a expressão desejada. □

Corolário 3. *Vale a identidade*

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2}.$$

Demonstração. Pelo Corolário 1 e pela continuidade da função de Green, segue que $G(0,0) = -1$. Desse modo, pelo Corolário 2, temos

$$-\frac{8}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2} = -1 \implies \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{\pi^2}{8},$$

como desejado. □

Proposição 3: Solução para o problema de Sturm $u''(x) = (3-x)e^x$

A solução do problema de Sturm

$$u''(x) = (3-x)e^x$$

com condições de contorno $u'(0) = 0$ e $u(1) = 0$ é

$$u(x) = (5-x)e^x - 4(x-1+e)$$

para $x \in [0,1]$.

Demonstração. Utilizando a função de Green obtida no Corolário 1, a solução deste problema de Sturm é dada por

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_0^1 \mathrm{d}\xi\, G(x,\xi)(3-\xi)e^{\xi} \\ &= (x-1)\int_0^x \mathrm{d}\xi\,(3-\xi)e^{\xi} + \int_x^1 \mathrm{d}\xi\,(\xi-1)(3-\xi)e^{\xi}. \end{aligned}$$

Integrando por partes, obtemos

$$\int_0^x \mathrm{d}\xi\, (3-\xi)e^{\xi} = (4-x)e^x - 4 \quad \text{e} \quad \int_x^1 \mathrm{d}\xi\, (\xi-1)(3-\xi)e^{\xi} = (x-3)^2 e^x - 4e,$$

logo a solução do problema de Sturm é

$$\begin{aligned} u(x) &= (x-1)(4-x)e^x - 4(x-1) + (x-3)^2 e^x - 4e \\ &= (5-x)e^x - 4(x-1+e). \end{aligned}$$

Verificamos que é de fato solução da equação diferencial calculando as duas primeiras derivadas desta função, obtendo

$$u'(x) = (4-x)e^x - 4 \quad \text{e} \quad u''(x) = (3-x)e^x.$$

Assim, como $u'(0) = 0$ e $u(1) = 0$, esta é de fato a solução do problema de Sturm. □

Exercício 3

Proposição 4: Função de Green para o problema de Sturm $(e^x u'(x))' = f(x)$

Seja L o operador de Liouville dado por

$$(Lu)(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^x \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right).$$

A função de Green para o problema de Sturm $Lu = f$ com condições de contorno $u(0) = u(1) = 0$ no intervalo $[0,1]$ é

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{(e^{-x}-1)(e^{-\xi}-e^{-1})}{1-e^{-1}}, & 0 \le x \le \xi \le 1 \\ \dfrac{(e^{-\xi}-1)(e^{-x}-e^{-1})}{1-e^{-1}}, & 0 \le \xi \le x \le 1 \end{cases}$$

para $(x,\xi) \in [0,1] \times [0,1]$.

Demonstração. Notemos que o núcleo do operador é dado por

$$\begin{aligned} Lu = 0 &\implies u''(x) + u'(x) = 0 && (1) \\ &\implies u(x) = \alpha e^{-x} + \beta, && (2) \end{aligned}$$

com α, β constantes. Desse modo, a solução para os problemas

$$\begin{cases} Lv_1 = 0 \\ v_1(0) = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} Lv_2 = 0 \\ v_2(1) = 0 \end{cases}$$

são dadas por

$$v_1(x) = A(e^{-x}-1) \quad \text{e} \quad v_2(x) = B(e^{-x}-e^{-1}),$$

para constantes A, B não nulas. Assim, o determinante Wronskiano desse par de funções é

$$\begin{aligned} W(x) &= v_1(x)v_2'(x) - v_1'(x)v_2(x) \\ &= ABe^{-x}(e^{-x}-e^{-1}) - ABe^{-x}(e^{-x}-1) \\ &= ABe^{-x}(1-e^{-1}). \end{aligned}$$

Por fim, a função de Green é dada por

$$\begin{aligned} G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{v_1(x)v_2(\xi)}{e^x W(x)}, & 0 \le x \le \xi \le 1 \\ \dfrac{v_1(\xi)v_2(x)}{e^x W(x)}, & 0 \le \xi \le x \le 1 \end{cases} &\implies G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{A(e^{-x}-1)B(e^{-\xi}-e^{-1})}{AB(1-e^{-1})}, & 0 \le x \le \xi \le 1 \\ \dfrac{A(e^{-\xi}-1)B(e^{-x}-e^{-1})}{AB(1-e^{-1})}, & 0 \le \xi \le x \le 1 \end{cases} \\ &\implies G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{(e^{-x}-1)(e^{-\xi}-e^{-1})}{1-e^{-1}}, & 0 \le x \le \xi \le 1 \\ \dfrac{(e^{-\xi}-1)(e^{-x}-e^{-1})}{1-e^{-1}}, & 0 \le \xi \le x \le 1 \end{cases} \end{aligned}$$

como desejado. □

Proposição 5: Autofunções do problema de Sturm-Liouville $(e^x u'(x))' + \lambda e^x u(x) = 0$

Seja L o mesmo operador de Liouville definido na Proposição 4. Os autovalores e as autofunções normalizadas do problema de Sturm-Liouville $(Lu)(x) + \lambda e^x u(x) = 0$ com condições de contorno $u(0) = u(1) = 0$ no intervalo $[0, 1]$ são

$$\lambda_n = n^2\pi^2 + \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad u_n(x) = \sqrt{2}\exp\left(-\frac{1}{2}x\right)\sin(n\pi x)$$

para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Demonstração. Notemos que

$$(Lu)(x) + \lambda e^x u(x) = e^x \left(\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \lambda u(x)\right),$$

logo as soluções do problema de Sturm-Liouville são soluções da equação diferencial ordinária

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \lambda u(x) = 0,$$

com condições de contorno $u(0) = u(1) = 0$, já que $e^x \neq 0$.

Para $\lambda = 0$, já vimos na Proposição 4 que a solução geral é

$$u(x) = \alpha e^{-x} + \beta.$$

Das condições de contorno temos

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha e^{-1} + \beta = 0 \end{cases} \implies \alpha = \beta = 0,$$

isto é, o caso $\lambda = 0$ admite apenas a solução trivial. Para $\lambda < \frac{1}{4}$ e $\lambda \neq 0$, temos a solução geral

$$u(x) = \alpha \exp\left(\frac{-1 + \sqrt{1 - 4\lambda}}{2}x\right) + \beta \exp\left(\frac{-1 - \sqrt{1 - 4\lambda}}{2}x\right),$$

portanto das condições de contorno temos

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha \exp\left(\frac{-1+\sqrt{1-4\lambda}}{2}\right) + \beta \exp\left(\frac{-1-\sqrt{1-4\lambda}}{2}\right) = 0 \end{cases} \implies \alpha = \beta = 0,$$

isto é, este caso também admite apenas a solução trivial. Para $\lambda = \frac{1}{4}$, temos a solução geral

$$u(x) = (\alpha x + \beta)e^{-\frac{1}{2}x}$$

e segue trivialmente que apenas a solução trivial satisfaz as condições de contorno. Por fim,para $\lambda > \frac{1}{4}$, temos a solução geral

$$u(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\left[\alpha \cos\left(x\sqrt{\lambda - \frac{1}{4}}\right) + \beta \sin\left(x\sqrt{\lambda - \frac{1}{4}}\right)\right],$$

portanto da condição de contorno $u(0) = 0$, segue que $\alpha = 0$, e da condição de contorno $u(1) = 0$, segue que as soluções não triviais devem satisfazer

$$\sin\left(\sqrt{\lambda - \frac{1}{4}}\right) = 0 \implies \sqrt{\lambda - \frac{1}{4}} = n\pi,$$

com $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Isto é, os autovalores para este problema de Sturm-Liouville são

$$\lambda_n = n^2\pi^2 + \frac{1}{4},$$

para $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Notemos que o produto interno para este problema de Sturm-Liouville é dado por

$$\langle f, g\rangle_r = \int_0^1 e^t \mathrm{d}t \, \overline{f(t)} g(t)$$

para quaisquer funções integráveis f, g em $[0, 1]$. Para determinar as autofunções, devemos impor que as soluções encontradas têm norma unitária em relação a este produto interno, isto é,

$$\begin{aligned}
\langle u_n, u_n\rangle_r = 1 \implies & \int_0^1 e^t \mathrm{d}t \, |\beta_n|^2 e^{-t} \sin^2(n\pi t) = 1 \\
\implies & \frac{1}{2}|\beta_n|^2 \left[\int_0^1 \mathrm{d}t \; - \int_0^1 \mathrm{d}t \; \cos(2n\pi t)\right] = 1 \\
\implies & |\beta_n|^2 = 2.
\end{aligned}$$

Deste modo,

$$u_n(x) = \sqrt{2} \exp\left(-\frac{1}{2}x\right) \sin(n\pi x)$$

são as autofunções para este problema de Sturm-Liouville, para $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. ◻

Corolário 4. *A função de Green dada pela Proposição 4 pode ser dada pela série*

$$G(x, \xi) = -8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp\left(-\frac{x+\xi}{2}\right) \sin(n\pi x) \sin(n\pi\xi)}{1 + 4n^2\pi^2}.$$

Lema 1: Aplicação do problema de Sturm-Liouville

Sejam $\lambda_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $u_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ os autovalores e as autofunções normalizadas do problema de Sturm-Liouville regular $Lu + \lambda ru = 0$, com condições de contorno lineares e homogêneas no intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e seja $\gamma \in \mathbb{R}$ um número real que não seja um autovalor do problema de Sturm-Liouville, então a solução da equação diferencial

$$Lu + \gamma ru = f$$

sujeita às mesmas condições de contorno que o problema de Sturm-Liouville é dada por

$$u(x) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\langle u_\ell, f\rangle}{\gamma - \lambda_\ell} u_\ell(x).$$

Demonstração. Seja $G : [a, b] \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ a função de Green para o problema de Sturm associado. Então, temos

$$Lu = f - \gamma ru \implies u(x) = \underbrace{\int_a^b \mathrm{d}\xi \, G(x, \xi) f(\xi)}_{g(x)} - \gamma \int_a^b \mathrm{d}\xi \, r(\xi) G(x, \xi) u(\xi).$$

Pela fórmula de Mercer, a função de Green é dada pela série uniformemente convergente

$$G(x,\xi) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x)u_n(\xi)}{\lambda_n},$$

portanto podemos escrever

$$\begin{aligned} u(x) &= g(x) + \gamma \int_a^b r(\xi)\mathrm{d}\xi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x)u_n(\xi)}{\lambda_n} u(\xi) \\ &= g(x) + \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x)}{\lambda_n} \int_a^b r(\xi)\mathrm{d}\xi\, u_n(\xi)u(\xi) \\ &= g(x) + \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle u_n, u\rangle_r}{\lambda_n} u_n(x). \end{aligned}$$

Tomando o produto interno com u_m, obtemos

$$\langle u_m, u\rangle_r = \langle u_m, g\rangle_r + \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle u_n, u\rangle_r}{\lambda_n} \langle u_m, u_n\rangle_r,$$

portanto, como $\langle u_m, u_n\rangle_r = \delta_{mn}$, segue que

$$\langle u_m, u\rangle_r = \frac{\lambda_m \langle u_m, g\rangle_r}{\lambda_m - \gamma}.$$

Substituindo na expressão para u, temos

$$u(x) = g(x) + \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle u_n, g\rangle_r}{\lambda_n - \gamma} u_n(x).$$

Utilizando a fórmula de Mercer mais uma vez, obtemos

$$\begin{aligned} g(x) &= -\int_a^b \mathrm{d}\xi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k(x)u_k(\xi)}{\lambda_k} f(\xi) \\ &= -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k(x)}{\lambda_k} \int_a^b \mathrm{d}\xi\, u_k(\xi) f(\xi) \\ &= -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle u_k, f\rangle}{\lambda_k} u_k(x). \end{aligned}$$

Tomando o produto interno com u_n, temos

$$\langle u_n, g\rangle_r = -\frac{\langle u_n, f\rangle}{\lambda_n}.$$

Substituindo na expressão para u, obtemos

$$\begin{aligned} u(x) &= -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle u_k, f\rangle}{\lambda_k} u_k(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma \langle u_n, f\rangle}{\lambda_n(\gamma - \lambda_n)} u_n(x) \\ &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \left(\frac{\gamma}{\gamma - \lambda_\ell} - 1 \right) \frac{\langle u_\ell, f\rangle}{\lambda_\ell} u_\ell(x) \\ &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\langle u_\ell, f\rangle}{\gamma - \lambda_\ell} u_\ell(x), \end{aligned}$$

como queríamos mostrar. □

Corolário 5. *A solução da equação diferencial*

$$(e^x u'(x))' + 5e^x u(x) = f(x)$$

para $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$, *com condições de contorno* $u(0) = u(1) = 0$ *no intervalo* $[0,1]$ *é*

$$u(x) = \frac{16}{\pi} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}x\right) \sin\left[(2\ell-1)\pi x\right]}{[19-(4\ell-2)^2\pi^2](2\ell-1)}.$$

Demonstração. Uma vez que 5 não é autovalor do problema de Sturm-Liouville associado, precisamos apenas determinar os produtos internos $\langle u_\ell, f\rangle$, segundo o Lema 1.

Temos

$$\langle u_\ell, f\rangle = \int_0^1 \mathrm{d}\xi\, \sqrt{2}\sin(\ell\pi x) = \frac{\sqrt{2}\left[1-(-1)^\ell\right]}{\ell\pi}$$

para todo $\ell \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Portanto, $\langle u_{2\ell}, f\rangle = 0$ e

$$\langle u_{2\ell-1}, f\rangle = \frac{2\sqrt{2}}{(2\ell-1)\pi}.$$

Assim, a solução da equação diferencial é

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{4}{\pi} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}x\right) \sin\left[(2\ell-1)\pi x\right]}{[5-\frac{1}{4}-(2\ell-1)^2\pi^2](2\ell-1)} \\ &= \frac{16}{\pi} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}x\right) \sin\left[(2\ell-1)\pi x\right]}{[19-(4\ell-2)^2\pi^2](2\ell-1)}, \end{aligned}$$

como desejado. □

Exercício 4

Proposição 6: Autofunções do problema de Sturm-Liouville com $u'' + u' + \lambda u = 0$

Os autovalores e as autofunções normalizadas do problema de Sturm-Liouville $u''+u'+\lambda u = 0$ com condições de contorno $u(0) = 0$ e $u'(1) = 0$ são

$$\lambda_n = \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 + \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad u_n(x) = \sqrt{2} \exp\left(-\frac{1}{2}x\right) \cos\left(\frac{2n-1}{2}\pi x\right)$$

para $n \in \mathbb{N} \setminus 0$. Assim,

$$G(x,\xi) = -8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp\left(-\frac{x+\xi}{2}\right) \cos\left(\frac{2n-1}{2}\pi x\right) \cos\left(\frac{2n-1}{2}\pi \xi\right)}{(2n-1)^2 \pi^2 + 1},$$

para $(x,\xi) \in [0,1] \times [0,1]$, é a função de Green do problema de Sturm associado.

Demonstração. Como já feito na Proposição 5, temos as soluções gerais da equação diferencial, que dependem se λ é nulo ou se $\lambda - \frac{1}{4}$ é positivo, nulo, ou negativo. Para $\lambda = 0$, temos $u(x) = \alpha e^{-x} + \beta$, portanto de $u'(1) = 0$, segue que $\alpha = 0$, levando à solução trivial. Para $\lambda = \frac{1}{4}$, temos $u(x) = (\alpha x + \beta)e^{-\frac{1}{2}x}$, logo de $u(0) = 0$, segue que $\beta = 0$, portanto

$$u'(x) = \alpha \left(1 - \frac{1}{2}x\right) e^{-\frac{1}{2}x},$$

e temos de $u'(1) = 0$ que $\alpha = 0$. Para $\lambda < \frac{1}{4}$ e $\lambda \neq 0$, temos a solução geral

$$u(x) = \alpha \exp(\lambda_+ x) + \beta \exp(\lambda_- x),$$

onde $\lambda_+ = \frac{-1+\sqrt{1-4\lambda}}{2}$ e $\lambda_- = \frac{-1-\sqrt{1-4\lambda}}{2}$ são valores reais e distintos. Das condições de contorno, temos

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \lambda_+ \alpha e^{\lambda_+} + \lambda_- \beta e^{\lambda_-} = 0 \end{cases} \implies \alpha(\lambda_+ e^{\lambda_+} - \lambda_- e^{\lambda_-}) = 0,$$

e TODO: mostrando que $\lambda_+ e^{\lambda_+} - \lambda_- e^{\lambda_-}$ não se anula, segue que há apenas a solução trivial. Para $\lambda > \frac{1}{4}$, temos a solução geral

$$u(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \left[\alpha \cos\left(x\sqrt{\lambda - \frac{1}{4}}\right) + \beta \sin\left(x\sqrt{\lambda - \frac{1}{4}}\right)\right],$$

portanto da condição de contorno $u(0) = 0$, segue que $\alpha = 0$, e da condição de contorno $u'(1) = 0$, segue que as soluções não triviais devem satisfazer

$$2\sqrt{\lambda - \frac{1}{4}} \cos\left(\sqrt{\lambda - \frac{1}{4}}\right) - \sin\left(\sqrt{\lambda - \frac{1}{4}}\right) = 0 \implies 2\sqrt{\lambda - \frac{1}{4}} = \tan\left(\sqrt{\lambda - \frac{1}{4}}\right).$$

Notemos que a equação transcendental obtida possui infinitas soluções para $\lambda > \frac{1}{4}$, uma vez que a imagem da tangente contém todos os números reais positivos e a imagem da raiz quadrada também. Seja φ_n a n-ésima solução positiva da equação transcendental $2\varphi = \tan\varphi$, então os autovalores do problema de Sturm-Liouville são dados por

$$\lambda_n = \varphi_n^2 + \frac{1}{4},$$

para $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Notemos que o produto interno para este problema de Sturm-Liouville é dado por

$$\langle f, g \rangle_r = \int_0^1 e^t \mathrm{d}t \, \overline{f(t)} g(t)$$

para quaisquer funções integráveis f, g em $[0, 1]$. Para determinar as autofunções, devemos impor que as soluções encontradas têm norma unitária em relação a este produto interno, isto é,

$$\begin{aligned} \langle u_n, u_n \rangle_r = 1 &\implies \int_0^1 e^t \mathrm{d}t \, |\beta_n|^2 e^{-t} \cos^2\left(\varphi_n t\right) = 1 \\ &\implies \frac{1}{2} |\beta_n|^2 \left[\int_0^1 \mathrm{d}t \, - \int_0^1 \mathrm{d}t \, \cos\left(2\varphi_n t\right) \right] = 1 \end{aligned}$$

□

Exercício 5