Física Matemática II
Primeira Lista de Exercícios

Louis Bergamo Radial
8992822

30 de março de 2024

Exercício 1

Proposição 1: Métrica trivial

Seja X um conjunto não vazio, então (X, d_t) é um espaço métrico, onde a função $d_t : X \times X \to \mathbb{R}$ é a métrica trivial, definida por

$$d_t(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = y, \\ 1, & \text{se } x \neq y, \end{cases}$$

para todo $x, y \in X$.

Demonstração. Pela definição da métrica trivial, temos

$$d_t(x, y) = 0 \iff x = y$$

para todo $x, y \in X$. De mesma forma, pela simetria de relação de igualdade, temos

$$d_t(x, y) = d_t(y, x).$$

Ainda, a imagem da função d_t é contida na semirreta $[0, \infty)$,

$$d_t(X \times X) = \{0, 1\} \subset [0, \infty).$$

Assim, resta mostrar que a métrica trivial satisfaz a desigualdade triangular.

Consideremos $x, y, z \in \mathbb{R}$, então segue que

$$0 \leq d_t(x, z) + d_t(z, y) \leq 2,$$

com os únicos valores possíveis para a soma sendo $\{0, 1, 2\}$. No caso em que $x = y$, temos $d_t(x, y) = 0$, portanto

$$d_t(x, y) \leq d_t(x, z) + d_t(z, y)$$

é satisfeita de forma trivial. No caso em que $x \neq y$, temos $d_t(x, y) = 1$, portanto pela transitividade da igualdade temos que

$$1 \leq d_t(x, z) + d_t(z, y) \leq 2,$$

já que z não pode ser igual a tanto x quanto y, de modo que

$$d_t(x, y) \leq d_t(x, z) + d_t(z, y).$$

Dessa forma, mostramos que a desigualdade triangular é satisfeita em todos os casos, portanto (X, d_t) é um espaço métrico. $\square$

Exercício 2

Proposição 2: Métrica do supremo

Seja $X = C([0,1])$ o conjunto de todas as funções reais contínuas definidas no intervalo $[0,1]$. Então (X, d_∞) é um espaço métrico, com a métrica definida por

$$\begin{aligned} d_\infty : X \times X &\to \mathbb{R} \\ (f,g) &\mapsto \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|. \end{aligned}$$

Demonstração. Notemos que a imagem da função d_∞ está contida na semirreta $[0, \infty)$.

Para $f, g \in X$, temos $f = g$ se e somente se $f(x) = g(x)$ para todo $x \in [0,1]$. Portanto,

$$\begin{aligned} f = g &\iff \forall x \in [0,1] : |f(x) - g(x)| = 0 \\ &\iff \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)| = 0 \\ &\iff d_\infty(f,g) = 0. \end{aligned}$$

Notemos também que a função d_∞ é simétrica em seus argumentos, isto é,

$$d_\infty(g,f) = \sup_{x \in [0,1]} |g(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)| = d_\infty(f,g).$$

Consideremos $f, g, h \in X$, então

$$\begin{aligned} d_\infty(f,g) &= \sup_{x \in [0,1]} \big| f(x) - h(x) + h(x) - h(x) \big| \\ &\leq \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)| \\ &\leq d_\infty(f,h) + d_\infty(h,g). \end{aligned}$$

Dessa forma, mostramos que a função d_∞ é uma métrica em X. $\square$

Exercício 3

Proposição 3: Métrica d_1

Seja $X = C([0,1])$ o conjunto de todas as funções reais contínuas definidas no intervalo $[0,1]$. Então (X, d_1) é um espaço métrico, com a métrica definida por

$$\begin{aligned} d_1 : X \times X &\to \mathbb{R} \\ (f,g) &\mapsto \int_0^1 \mathrm{d}x\, |f(x) - g(x)|. \end{aligned}$$

Demonstração. Notemos que a imagem da função d_1 está contida na semirreta $[0,\infty)$.

Suponhamos que duas funções $f, g \in X$ satisfazem $d_1(f,g) = 0$. Certamente essas funções devem ser diferentes em no máximo um conjunto de medida nula. Como as funções são contínuas, este conjunto deve ser vazio. De fato, seja $h \in X$ definida por $h(x) = f(x) - g(x)$ e suponhamos por contradição que existe $\xi \in [0,1]$ tal que $h(\xi) \neq 0$. Podemos assumir sem perda de generalidade que $h(\xi) > 0$, então pelo teorema do valor intermediário, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in (\xi-\delta, \xi+\delta)$ temos $h(x) > 0$. Assim,

$$\int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} \mathrm{d}x\, |h(x)| > 0 \implies \int_0^1 \mathrm{d}x\, |f(x) - g(x)| > 0,$$

e esta contradição mostra que $f = g$.

Suponhamos agora que duas funções são iguais $f = g$. Claramente temos $d_1(f,g) = 0$. Desse modo,

$$f = g \iff d_1(f,g) = 0.$$

Vejamos também que a função d_1 é simétrica em seus argumentos, isto é,

$$d_1(g,f) = \int_0^1 \mathrm{d}x\, |g(x) - f(x)| = \int_0^1 \mathrm{d}x\, |f(x) - g(x)| = d_1(f,g).$$

Consideremos $f, g, h \in X$, então

$$\begin{aligned} d_1(f,g) &= \int_0^1 \mathrm{d}x\, |f(x) - h(x) + h(x) - g(x)| \\ &\leq \int_0^1 \mathrm{d}x\, |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)| \\ &\leq d_1(f,h) + d_1(h,g). \end{aligned}$$

Dessa forma, mostramos que a função d_1 é uma métrica em X. $\square$

Exercício 4

Definição 1: Métrica induzida por uma norma

Seja $\mathcal{E}$ um espaço vetorial dotado de uma norma $\|\cdot\| : \mathcal{E} \to [0,\infty)$. A aplicação

$$\begin{aligned} d : \mathcal{E} \times \mathcal{E} &\to [0,\infty) \\ (x,y) &\mapsto \|x-y\| \end{aligned}$$

é denominada métrica induzida pela norma $\|\cdot\|$.

Proposição 4: Métrica induzida por uma norma

Seja $\mathcal{E}$ um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$. Uma métrica $d : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to [0,\infty)$ é induzida por uma norma em $\mathcal{E}$ se e somente se d satisfaz

(a) invariância translacional: $d(u+t, v+t) = d(u,v)$ para todo $u, v, t \in \mathcal{E}$; e

(b) transformação de escala $d(\alpha u, \alpha v) = |\alpha| d(u,v)$ para todo $u, v \in \mathcal{E}$ e $\alpha \in \mathbb{K}$.

Demonstração. Suponha que d é uma métrica induzida pela norma $\|\cdot\|$. Para todos $u, v, t \in \mathcal{E}$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, temos

$$d(u+t, v+t) = \|(u+t) - (v+t)\| = \|u-v\| = d(u,v)$$

e

$$d(\alpha u, \alpha v) = \|\alpha(u-v)\| = |\alpha|\|u-v\| = |\alpha| d(u,v).$$

Isto é, se d é induzida por uma norma, então d satisfaz (a) e (b).

Suponha agora que d satisfaz (a) e (b). Mostremos que a aplicação

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \mathcal{E} &\to [0,\infty) \\ v &\mapsto d(v,0) \end{aligned}$$

é uma norma em $\mathcal{E}$. Notemos que

$$\begin{aligned} v = 0 &\iff d(v,0) = 0 \\ &\iff \|v\| = 0, \end{aligned}$$

e

$$\|\lambda u\| = d(\lambda u, 0) = |\lambda| d(u,0) = |\lambda|\|u\|$$

para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ e $u \in \mathcal{E}$. Pela propriedade (b) segue que

$$\|x+y\| = d(x+y, 0) = d(x, -y),$$

portanto pela propriedade (a) e pela desigualdade triangular para d, temos

$$\|x+y\| \leq d(x,0) + d(0,y)$$

ou então $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo $x, y \in \mathcal{E}$. Desse modo, $\|\cdot\|$ é uma norma em $\mathcal{E}$. Ainda, temos

$$d(u,v) = d(u-v, 0) = \|u-v\|,$$

portanto d é a métrica induzida pela norma $\|\cdot\|$. Isto é, se d satisfaz (a) e (b), então d é uma métrica induzida por uma norma. □

Exercício 5

Proposição 5: Sequência convergente nos números racionais

Seja $r > 1$ um número racional. A sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ definida por

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} r^{-k}$$

é de Cauchy e converge a $\frac{r}{r-1} \in \mathbb{Q}$ em relação à métrica usual.

Demonstração. Para $n \in \mathbb{N}$, consideremos a fatoração

$$x^{n+1} - y^{n+1} = (x-y)\sum_{k=0}^{n} x^{n-k}y^k,$$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Em particular, temos

$$1 - \left(\frac{1}{r}\right)^{n+1} = \left(1 - \frac{1}{r}\right)\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{r}\right)^k,$$

isto é,

$$s_n = \frac{r - r^{-n}}{r-1}.$$

Assim, consideremos $n, m \in \mathbb{N}$ com $n > m$. Temos

$$|s_n - s_m| = \frac{r^{-m} - r^{-n}}{r-1} = (1 - r^{m-n})\frac{r^{-m}}{r-1}.$$

Como $r > 1$ e $n > m$ temos

$$\begin{aligned} 0 < r^{-1} < 1 &\implies 0 < r^{m-n} < 1 \\ &\implies -1 < -r^{m-n} < 0 \\ &\implies 0 < 1 - r^{m-n} < 1, \end{aligned}$$

portanto podemos estimar que

$$|s_n - s_m| < \frac{r^{-m}}{r-1}.$$

Tomando m suficientemente grande, podemos tornar $|s_n - s_m|$ suficientemente pequeno, isto é, a sequência é de Cauchy em relação à métrica usual.

Notemos que para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|\frac{r}{r-1} - s_n\right| = \frac{r^{-n}}{r-1},$$

então pelo mesmo argumento, temos que a sequência converge a $\frac{r}{r-1} \in \mathbb{Q}$ em relação à métrica usual. □

Exercício 6

Proposição 6: $\mathbb{Q}$ não é completo em relação à métrica usual

A sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ definida por

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

é de Cauchy mas não converge a nenhum número racional em relação à métrica usual.

Demonstração. Consideremos $n, m \in \mathbb{N}$ com $n > m$, então

$$\begin{aligned}
|x_n - x_m| &= \left| \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!} \right| \\
&= \sum_{k=0}^{n-m-1} \frac{1}{(k+m+1)!} \\
&= \frac{1}{(m+1)!} \sum_{k=0}^{n-m-1} \frac{(m+1)!}{(k+m+1)!} \\
&= \frac{1}{(m+1)!} \left(1 + \frac{1}{m+2} + \frac{1}{(m+2)(m+3)} + \cdots + \frac{(m+1)!}{n!} \right) \\
&\leq \frac{1}{(m+1)!} \left(1 + \frac{1}{m+2} + \frac{1}{(m+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(m+2)^{n-m-1}} \right) \\
&< \frac{1}{(m+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} (m+2)^{-k}.
\end{aligned}$$

Pela Proposição 5, temos

$$|x_n - x_m| < \frac{1}{(m+1)!} \frac{m+2}{m+1} < \frac{2}{(m+1)!},$$

para $m > 0$. Assim, podemos tornar $|x_n - x_m|$ arbitrariamente pequeno ao escolher m suficientemente grande, isto é, a sequência é de Cauchy em relação à métrica usual.

Suponhamos por contradição que a sequência converge a algum número racional $e = \frac{p}{q}$, com p e q coprimos. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $N > 0$ tal que

$$n > N \implies |e - x_n| < \varepsilon.$$

Pela desigualdade triangular, temos

$$\begin{aligned}
|e - x_m| &\leq |e - x_n| + |x_n - x_m| \\
&< \varepsilon + \frac{2}{(m+1)!}
\end{aligned}$$

para $m > 0$ e $n > N$. Como ε é arbitrário, temos

$$|e - x_m| \leq \frac{2}{(m+1)!},$$

para $m > 0$. Como a sequência é estritamente crescente, temos $e > x_m$, logo

$$x_m < e \leq x_m + \frac{2}{(m+1)!}.$$

Em particular, tomemos $m = 2$, então

$$\frac{5}{2} < e \leq \frac{17}{6},$$

portanto $2 < e < 3$, isto é, $q \geq 2$, caso contrário e seria um inteiro entre inteiros consecutivos.

Podemos tomar $m = q$, de modo que

$$\begin{aligned} x_q < \frac{p}{q} \leq x_q + \frac{2}{(q+1)!} &\implies q!x_q < p(q-1)! \leq q!x_q + \frac{2}{(q+1)} \\ &\implies \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} < p(q-1)! < \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} + 1, \end{aligned}$$

já que

$$q \geq 2 \implies \frac{2}{q+1} < 1.$$

Notemos que $\frac{q!}{k!} \in \mathbb{N}$ para todo $k \in \{0, 1, \ldots, q\}$, isto é, $p(q-1)!$ é um número natural entre inteiros consecutivos. Essa contradição mostra que $e \notin \mathbb{Q}$. Desse modo, a sequência não é convergente nos racionais com a métrica usual. $\square$

Exercício 7

Proposição 7: Sequência de Cauchy em $(C([0,1]), d_1)$

A sequência de funções $f : \mathbb{N} \to C([0,1])$ com $f_0(x) = f_1(x) = f_2(x) = 1$ e

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in \left[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right] \\ n\left(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right), & \text{se } x \in \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2}\right) \\ 1, & \text{se } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

para $n > 2$ é de Cauchy no espaço métrico $(C([0,1]), d_1)$, onde a métrica d_1 está definida na Proposição 3.

Demonstração. Claramente $f_0, f_1, f_2 \in C([0,1])$. Para $n > 2$, temos

$$\lim_{x \to \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)^+} f_n(x) = \lim_{x \to \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)^+} n\left(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) = 0 = f_n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)$$

e

$$\lim_{x \to \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)^-} f_n(x) = 0 = f_n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right),$$

portanto $f_n \in C([0,1])$.

Para $n > m > 2$ temos

$$f_n(x) - f_m(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in \left[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{m}\right] \\ -m\left(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{m}\right) & \text{se } x \in \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m}, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right] \\ (n-m)\left(x - \frac{1}{2}\right) & \text{se } x \in \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2}\right] \\ 0, & \text{se } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases},$$

então

$$|f_n(x) - f_m(x)| = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in \left[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{m}\right] \\ m\left(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{m}\right) & \text{se } x \in \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m}, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right] \\ (m-n)\left(x - \frac{1}{2}\right) & \text{se } x \in \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2}\right) \\ 0, & \text{se } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}.$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} d_1(f_n, f_m) &= \int_0^1 \mathrm{d}x\, |f_n(x) - f_m(x)| \\ &= \int_{\frac{1}{2} - \frac{1}{m}}^{\frac{1}{2} - \frac{1}{n}} \mathrm{d}x\, m\left(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{m}\right) + \int_{\frac{1}{2} - \frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x\, (m-n)\left(x - \frac{1}{2}\right) \\ &= \int_{-\frac{1}{m}}^{-\frac{1}{n}} \mathrm{d}u\, m\left(u + \frac{1}{m}\right) + \int_{-\frac{1}{n}}^{0} \mathrm{d}u\, (m-n)u \\ &= \frac{m}{2}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right) - \frac{1}{n} + \frac{1}{m} - \frac{m-n}{2n^2} \\ &= \frac{1}{2m} - \frac{1}{2n}, \end{aligned}$$

donde segue

$$d_1(f_n, f_m) = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|$$

para todos $n, m > 2$.

Dado $\varepsilon > 0$, para $n, m > \frac{1}{\varepsilon}$ temos

$$\begin{aligned} d_1(f_n, f_m) &= \frac{1}{2}\left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| \\ &\le \left|\frac{1}{2m}\right| + \left|\frac{1}{2n}\right| \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

portanto a sequência é de Cauchy em $(C([0,1]), d_1)$. □

Proposição 8: O espaço métrico $(C([0,1]), d_1)$ não é completo

A sequência de funções da Proposição 7 converge para a função $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2}) \\ 1, & \text{se } x \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

que não é uma função contínua.

Demonstração. Para $n > 2$ temos

$$|f_n(x) - \varphi(x)| = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in \left[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right] \\ n\left(x - \frac{1}{2}\right) + 1 & \text{se } x \in \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2}\right] \\ 0, & \text{se } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}.$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} d_1(f_n, \varphi) &= \int_0^1 \mathrm{d}x\, |f_n(x) - \varphi(x)| \\ &= \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x \left[n\left(x - \frac{1}{2}\right) + 1\right] \\ &= \frac{1}{2n}. \end{aligned}$$

Dado $\varepsilon > 0$, temos

$$n > \frac{1}{2\varepsilon} \implies d_1(f_n, \varphi) = \frac{1}{2n} < \varepsilon,$$

portanto a sequência é convergente a φ em relação à métrica d_1.

Notemos que

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} \varphi(x) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \varphi(x) = 0,$$

isto é, a função φ não pode ser contínua. Assim, o espaço métrico $(C([0,1]), d_1)$ não é completo. □

Exercício 8

Proposição 9: Uma métrica define outra

Seja (M, d) um espaço métrico, então

$$\begin{aligned} d_0 : M \times M &\longrightarrow [0, \infty) \\ (x, y) &\longmapsto \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)} \end{aligned}$$

é uma métrica em M.

Demonstração. Por d ser uma métrica, temos

$$\begin{aligned} d_0(x,y) = 0 &\iff d(x,y) = 0 \\ &\iff x = y, \end{aligned}$$

e

$$d_0(y,x) = \frac{d(y,x)}{1 + d(y,x)} = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)} = d_0(x,y),$$

portanto resta mostrar que d_0 satisfaz a desigualdade triangular.

Consideremos a aplicação

$$\begin{aligned} f : [0, \infty) &\longrightarrow [0, \infty) \\ \xi &\longmapsto \frac{\xi}{1 + \xi}. \end{aligned}$$

Temos

$$f'(\xi) = \frac{1}{(1 + \xi)^2}$$

para todo $\xi \in [0, \infty)$. Isto é, $f'(\xi) > 0$ em todo o seu domínio, portanto é uma função crescente.

Desse modo, como f mantém a relação de ordem, isto é,

$$\begin{aligned} d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) &\implies d_0(x,y) \leq f(d(x,z) + d(z,y)) \\ &\implies d_0(x,y) \leq \frac{d(x,z) + d(z,y)}{1 + d(x,z) + d(z,y)}, \end{aligned}$$

para todo $x, y, z \in M$. Notemos que

$$\begin{aligned} 0 \leq d(x,z) \leq d(x,z) + d(z,y) &\implies 1 \leq 1 + d(x,z) \leq 1 + d(x,z) + d(z,y) \\ &\implies \frac{1}{1 + d(x,z) + d(z,y)} \leq \frac{1}{1 + d(x,z)} \leq 1 \\ &\implies \frac{d(x,z)}{1 + d(x,z) + d(y,z)} \leq d_0(x,z) \leq d(x,z), \end{aligned}$$

e analogamente

$$0 \leq d(y,z) \leq d(x,z) + d(z,y) \implies \frac{d(z,y)}{1 + d(x,z) + d(y,z)} \leq d_0(z,y) \leq d(z,y).$$

Portanto

$$\frac{d(x,z) + d(z,y)}{1 + d(x,z) + d(z,y)} \leq d_0(x,z) + d_0(z,y),$$

donde segue

$$d_0(x,y) \leq d_0(x,z) + d_0(z,y),$$

isto é, d_0 satisfaz a desigualdade triangular. Logo, d_0 é uma métrica em M. $\square$

Exercício 9

Proposição 10: O intervalo aberto (a,b) não é um espaço métrico completo em relação à métrica usual

Consideremos o intervalo aberto não vazio $\mathring{A} = (a,b) \subset \mathbb{R}$ e a métrica usual

$$\begin{aligned} d : \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\to [0,\infty) \\ (x,y) &\mapsto |x-y|. \end{aligned}$$

O espaço métrico $(\mathring{A}, d)$ não é completo.

Demonstração. Consideremos a sequência $s : \mathbb{N} \to \mathring{A}$ definida por $s_0 = s_1 = \frac{a+b}{2}$ e

$$s_n = a + \frac{b-a}{n}$$

para $n \geq 2$.

Dado $\varepsilon > 0$, podemos tomar $M = \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ tal que para todos $n, m > M$ vale

$$\begin{aligned} d(s_m, s_n) &= (b-a)\left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| \\ &\leq \frac{b-a}{m} + \frac{b-a}{n} \\ &< \frac{2(b-a)}{M} = \varepsilon, \end{aligned}$$

isto é, s_n é uma sequência de Cauchy em relação à métrica usual.

Dado $\varepsilon > 0$ podemos tomar $N = \frac{\varepsilon}{b-a}$ tal que para todo $n > N$ temos

$$d(a, s_n) = \frac{b-a}{n} < \varepsilon,$$

isto é, s_n converge a $a \notin \mathring{A}$ em relação à métrica usual.

Encontramos uma sequência de Cauchy em $(\mathring{A}, d)$ que não converge neste espaço métrico, portanto $(\mathring{A}, d)$ não é completo. □

Lema 1: Toda sequência de números reais tem uma subsequência monotônica

Seja $s : \mathbb{N} \to X \subset \mathbb{R}$ uma sequência de números reais. Então existe uma sequência crescente de números naturais $n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que a subsequência $s \circ n$ é monotônica, isto é, ou é monotônica decrescente $s_{n_i} \leq s_{n_j}$ para todo $i > j$, ou é monotônica crescente $s_{n_i} \geq s_{n_j}$ para todo $i > j$.

Demonstração. Consideremos o conjunto

$$S = \{k \in \mathbb{N} : s_k \geq s_m, \forall m > k\}$$

dos índices dos elementos da sequência que são maiores que os elementos subsequentes.

Se S é infinito, então existe uma sequência crescente de números naturais $n : \mathbb{N} \to S \subset \mathbb{N}$ definida pela enumeração dos elementos de S tal que a subsequência $s \circ n$ é monotônica decrescente. De fato, sejam $n_i, n_j \in S$ com $i < j \implies n_i < n_j$, então

$$n_i \in S \implies s_{n_i} \geq s_{n_j},$$

isto é, $s \circ n$ é monotônica decrescente.

Se S não é infinito, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq n_0 \implies m \notin S$, então $s_m < s_\ell$ para algum $\ell > m$. No caso em que S é vazio, podemos tomar $n_0 = 0$ e no caso em que S é finito, podemos tomar $n_0 = 1 + \max S$. Assim, existe $n_1 > n_0$ tal que $s_{n_0} < s_{n_1}$, portanto podemos definir uma sequência crescente de números naturais n tal que $s \circ n$ é monotônica crescente. □

Lema 2: Subsequência convergente de uma sequência de Cauchy

Seja (X, d) um espaço métrico e seja $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em (X, d). Se existe uma sequência crescente $\{n_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ de números naturais tal que a subsequência $\{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ é convergente em (X, d), então x_n converge em (X, d).

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N > 0$ tal que para todo $m, n > N$ vale

$$d(x_n, x_m) < \frac{1}{2}\varepsilon,$$

já que a sequência é de Cauchy em relação à métrica d.

Seja $x \in X$ o ponto ao qual a subsequência converge. Então dado $\varepsilon > 0$, existe $J > 0$ tal que para todo $n_j > J$ vale

$$d(x_{n_j}, x) < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Seja $M = \max\{N, J\}$, então para todos $m, n_j > M$ segue que

$$\begin{aligned} d(x_m, x) &\leq d(x_m, x_{n_j}) + d(x_{n_j}, x) \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

isto é, a sequência de Cauchy converge para $x \in X$ em relação à métrica d. □

Proposição 11: O intervalo fechado $[a, b]$ é um espaço métrico completo em relação à métrica usual

Consideremos o intervalo fechado $\bar{A} = [a, b] \subset \mathbb{R}$ e a métrica usual d. O espaço métrico $(\bar{A}, d)$ é completo.

Demonstração. Seja $s : \mathbb{N} \to [a, b] \subset \mathbb{R}$ uma sequência de Cauchy em relação à métrica usual. Pelo Lema 1, existe uma sequência crescente de números naturais $n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tais que a subsequência $x = s \circ n$ é monotônica. Notemos que esta subsequência também é de Cauchy: dado $\varepsilon > 0$, existe $N_\varepsilon > 0$ tal que

$$\ell, k > N_\varepsilon \implies d(s_\ell, s_k) < \varepsilon$$

então tomando $M = \min\{m \in \mathbb{N} : n_m > N_\varepsilon)\}$, segue que

$$\begin{aligned} i, j > M &\implies d(s_{n_i}, s_{n_j}) < \varepsilon \\ &\implies d(x_i, x_j) < \varepsilon, \end{aligned}$$

logo x é de Cauchy.

Podemos assumir sem perda de generalidade que a subsequência é monotônica decrescente. Como uma sequência de Cauchy em $(\mathbb{R}, d)$, segue que existe $\xi \in \mathbb{R}$ tal que x converge a ξ em relação a este espaço métrico completo. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $N_\varepsilon > 0$ tal que

$$i > N_\varepsilon \implies d(x_i, \xi) < \varepsilon.$$

Suponhamos por contradição que $\xi \notin [a,b]$, então $\xi < a$. Tomemos $\varepsilon = \frac{a-\xi}{2}$, então existe $N > 0$ tal que

$$\begin{aligned} i > N &\implies -\frac{a-\xi}{2} < x_i - \xi < \frac{a-\xi}{2} \\ &\implies \frac{3\xi - a}{2} < x_i < \frac{a+\xi}{2}. \end{aligned}$$

Notemos entretanto que $a + \xi < 2a$, portanto devemos ter $x_i < a$. Esta contradição mostra que $\xi \in [a,b]$, portanto x converge para algum valor de $[a,b]$. Pelo Lema 2, a sequência de Cauchy s converge em $([a,b],d)$. □

Lema 3: Desigualdade triangular inversa

Seja (X,d) um espaço métrico, então

$$d(x,y) \geq |d(x,z) - d(z,y)|$$

para todo $x,y,z \in X$.

Demonstração. Pela desigualdade triangular temos

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \implies d(x,z) - d(y,z) \leq d(x,y).$$

Suponhamos que $d(x,z) - d(y,z) \geq 0$, então

$$d(x,y) \geq |d(x,z) - d(y,z)|.$$

Suponhamos agora que $d(x,z) - d(y,z) < 0$, então pela desigualdade triangular temos

$$\begin{aligned} d(y,z) \leq d(y,x) - d(x,z) &\implies d(y,z) - d(x,z) \leq d(x,y) \\ &\implies |d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y). \end{aligned}$$

Assim, mostramos que

$$d(x,y) \geq |d(x,z) - d(y,z)|$$

para todo $x,y,z \in X$. □

Lema 4: Sequência de Cauchy de números reais é limitada

Seja $s : \mathbb{N} \to X \subset \mathbb{R}$ uma sequência de Cauchy em relação à métrica usual. Então existe $M > 0$ tal que

$$n \in \mathbb{N} \implies |s_n| \leq M,$$

isto é, a sequência é limitada.

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N_\varepsilon > 0$ tal que

$$n,m > N_\varepsilon \implies |s_n - s_m| < \varepsilon.$$

Em particular, tomamos $\varepsilon = 1$ e n_0 o primeiro natural tal que

$$n > n_0 \implies |s_n - s_{n_0}| < 1$$

Pelo Lema 3, temos que

$$|s_n - s_m| \geq ||s_n| - |s_m|| \implies -|s_n - s_m| \leq |s_n| - |s_m| \leq |s_n - s_m|$$

portanto

$$
\begin{aligned}
n > n_0 &\implies |s_n| - |s_{n_0}| < 1 \\
&\implies |s_n| < 1 + |s_{n_0}|.
\end{aligned}
$$

Assim, definimos

$$M = \max\{|s_0|, |s_1|, \ldots, |s_{n_0}|, |s_{n_0}| + 1\}$$

de forma que

$$|s_n| \leq M$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Proposição 12: O intervalo $[1, \infty)$ é um espaço métrico completo em relação à métrica usual

O espaço métrico $([1, \infty), d)$, em que d é a métrica usual, é completo.

Demonstração. Seja $s : \mathbb{N} \to [1, \infty)$ uma sequência de Cauchy em relação à métrica usual. Pelo Lema 4, existe $M > 0$ tal que $|s_n| \leq M$. Desse modo, a imagem da sequência deve estar contida no intervalo fechado $[1, M]$. Isto é, s é uma sequência de Cauchy no espaço métrico $[1, M]$, que é completo em relação à métrica usual pela Proposição 11, logo existe $\sigma \in [1, M]$ ao qual s converge. Como $[1, M] \subset [1, \infty)$, então $\sigma \in [1, \infty)$. Assim, $([1, \infty), d)$ é um espaço métrico completo em relação à métrica usual. □

Proposição 13: Métrica no intervalo $[1, \infty)$

O espaço métrico $([1, \infty), d_I)$ não é completo, onde a métrica d_I é a aplicação

$$
\begin{aligned}
d_I : [1, \infty) \times [1, \infty) &\to [0, \infty) \\
(x, y) &\mapsto \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|.
\end{aligned}
$$

Demonstração. Primeiro mostramos que d_I é de fato uma métrica em $[1, \infty)$. Para $x, y \in [1, \infty)$, temos

$$
\begin{aligned}
x = y &\iff \frac{1}{x} = \frac{1}{y} \\
&\iff \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 0 \\
&\iff d_I(x, y) = 0
\end{aligned}
$$

e

$$d_I(y, x) = \left| \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = d_I(x, y).$$

Para todo $x, y, z \in [1, \infty)$,

$$
\begin{aligned}
d_I(x, y) &= \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{z} + \frac{1}{z} - \frac{1}{y} \right| \\
&\leq \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{z} \right| + \left| \frac{1}{z} - \frac{1}{y} \right|,
\end{aligned}
$$

isto é,

$$d_I(x, y) \leq d_I(x, z) + d_I(z, y).$$

Assim, $([1, \infty), d_I)$ é um espaço métrico.

Consideremos a sequência $s : \mathbb{N} \to [1, \infty)$ definida por $s_0 = 1$ e $s_n = n$ para $n \geq 1$. Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $N = \frac{2}{\varepsilon}$, então para todos $n, m > N$ vale

$$\begin{aligned} d_I(s_n, s_m) &= \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m+1} \right| \\ &\leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \\ &< \frac{2}{N} = \varepsilon, \end{aligned}$$

isto é, s é uma sequência de Cauchy em $([1, \infty), d_I)$.

Entretanto, s não converge neste espaço métrico. De fato, suponhamos por contradição que existe $\sigma \in [1, \infty)$ ao qual a sequência converge. Neste caso, dado $\varepsilon > 0$, existe $M > 0$ tal que para todo $n > M$ vale $d_I(s_n, \sigma) < \varepsilon$. Consideremos $\varepsilon = \frac{1}{2\sigma} \in (0, 1]$, então

$$\begin{aligned} d_I(s_n, \sigma) < \varepsilon &\implies \left| \frac{1}{s_n} - \frac{1}{\sigma} \right| < \frac{1}{2\sigma} \\ &\implies -\frac{1}{2\sigma} < \frac{1}{s_n} - \frac{1}{\sigma} < \frac{1}{2\sigma} \\ &\implies \frac{1}{2\sigma} < \frac{1}{s_n} < \frac{3}{2\sigma} \\ &\implies \frac{2\sigma}{3} < s_n < 2\sigma. \end{aligned}$$

para todo $n > M$. Isto é, 2σ deve ser maior do que qualquer número natural maior do que M, o que contradiz a propriedade arquimediana dos números reais. De fato, se $k \in \mathbb{N}$ é tal que $k > M$ e $s_k < 2\sigma$, então existe $\ell \in \mathbb{N}$ tal que $\ell s_k > 2\sigma$, ou seja, $\ell k > M$ e $s_{\ell k} > 2\sigma$. Dessa forma, não pode existir $\sigma \in [1, \infty)$ ao qual a sequência de Cauchy s converge em relação à métrica d_I, portanto este espaço métrico não é completo. □

Exercício 10

Lema 5: Ponto fixo único de uma função iterada

Seja X um conjunto não vazio onde está definida a função $f : X \to X$. Se a iteração $g = f \circ f$ tem um único ponto fixo, então f tem um único ponto fixo.

Demonstração. Seja $y \in X$ o único ponto fixo de g. Pela associatividade da composição de funções, temos

$$f(y) = (f \circ g)(y) = (f \circ f)(f(y)) = g(f(y)),$$

isto é, $f(y)$ é um ponto fixo de g, portanto $y = f(y)$. Assim, y é ponto fixo de f.

Suponhamos, por contradição, que $x \in X \setminus \{y\}$ é um ponto fixo de f. Temos

$$g(x) = f(f(x)) = f(x) = x,$$

portanto x é um outro ponto fixo de g. Esta contradição mostra que y é o único ponto fixo de f em X. $\square$

Lema 6: União finita de subespaços métricos completos é um espaço métrico completo

Seja (M, d) um espaço métrico e sejam $M_1, M_2 \subset M$ subconjuntos não vazios de M. Se $(M_1, d|_{M_1 \times M_1})$ e $(M_2, d|_{M_2 \times M_2})$ são espaços métricos completos, então $(X, d|_{X \times X})$ é um espaço métrico completo, com $X = M_1 \cup M_2$.

Demonstração. Seja $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em X. Então existe $k \in \{1, 2\}$ tal que existem infinitos $x_n \in M_k$. Assim, existe uma sequência crescente $\{n_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ de números naturais tal que $\{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}} \subset M_k$ é uma subsequência em $(M_k, d|_{M_k \times M_k})$. Como a sequência é de Cauchy em $(X, d|_{X \times X})$, segue que dado $\varepsilon > 0$, existe $N > 0$ tal que para todo $n, m > N$ vale

$$d|_{X \times X}(x_n, x_m) < \varepsilon,$$

em particular para $n_i, n_j > N$ temos

$$d|_{X \times X}(x_{n_i}, x_{n_j}) = d|_{M_k \times M_k}(x_{n_i}, x_{n_j}) < \varepsilon,$$

então esta subsequência é de Cauchy em $(M_k, d|_{M_k \times M_k})$, logo convergente neste espaço métrico completo. Pelo Lema 2, segue que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge em $(X, d|_{X \times X})$, o que conclui a demonstração. $\square$

Proposição 14: Constante Omega

A única solução de

$$x = e^{-x}$$

para $x \in [0, \infty)$ é a constante $\Omega = W(1) \simeq 0.56714$.

Demonstração. Pela definição da função W de Lambert, temos

$$\Omega e^{\Omega} = 1 \implies \Omega = e^{-\Omega},$$

portanto resta mostrar que esta equação não possui outra solução em $[0, \infty)$. Alternativamente, mostramos que Ω é um ponto fixo da aplicação suave

$$\begin{aligned} f : [0, \infty) &\to [0, \infty) \\ t &\mapsto e^{-t} \end{aligned}$$

e desejamos mostrar que Ω é o único ponto fixo de f em $[0,\infty)$.

Consideremos a aplicação suave

$$\begin{aligned} g : [0,\infty) &\longrightarrow [0,\infty) \\ t &\longmapsto (f\circ f)(t) = \exp\left(-e^{-t}\right). \end{aligned}$$

Temos $\ln g(t) = -f(t)$ para todo $t \in [0,\infty)$, portanto

$$g'(t) = f(t)g(t),$$

é a derivada de g, já que $f'(t) = -f(t)$. Assim, a segunda derivada é dada por

$$\begin{aligned} g''(t) &= f'(t)g(t) + f(t)g'(t) \\ &= -f(t)g(t) + f(t)f(t)g(t) \\ &= \big(f(t) - 1\big)\, f(t)g(t). \end{aligned}$$

Notemos que

$$t \in [0,\infty) \implies -1 < f(t) - 1 \leq 0$$

onde a igualdade ocorre apenas para $t = 0$, portanto $g''(t) \leq 0$ para todo $t \geq 0$, isto é, $g'(t)$ decresce monotonicamente em $[0,\infty)$. Desse modo, temos

$$t \in [0,\infty) \implies 0 < g'(t) \leq \frac{1}{e}.$$

Consideremos $|g(x) - g(y)|$ para $x, y \in [0,\infty)$. Pelo teorema do valor médio, existe $\xi \in [0,\infty)$ entre x e y tal que

$$g(x) - g(y) = g'(\xi)(x - y)$$

então

$$|g(x) - g(y)| = g'(\xi)|x - y| \leq \frac{1}{e}|x - y|.$$

Assim, mostramos que g é uma contração em $[0,\infty)$ em relação à métrica usual. Como $[0,\infty) = [0,1] \cup [1,\infty)$, temos pelo Lema 6 e pelas Proposições 11 e 12 que este intervalo, dotado da métrica usual, é um espaço métrico completo. Assim, segue que g tem um único ponto fixo neste espaço, pelo teorema do ponto fixo de Banach. Pelo Lema 5, segue que f tem um único ponto fixo, que é Ω. $\square$

Utilizando o código a seguir, obtemos após quarenta iterações um erro absoluto compatível com a precisão máxima oferecida pela biblioteca `numpy`. O valor obtido pelo programa foi $\Omega \simeq 0.567143290409783873$. Após quarenta iterações e utilizando o ponto inicial $x_0 = 0$, o erro estimado é $\Omega - x_{40} \leq \frac{e^{-41}}{1-e^{-1}}$.

```python
import numpy as np
def g(x: np.longdouble) -> np.longdouble:
    return np.exp(-np.exp(-x))

if __name__ == "__main__":
    omega = np.longdouble(0.56714329040978387299999)
    x = np.longdouble(0)
    for i in range(40):
        x = g(x)
        print(f"Iteração {i+1}: {x:.18f}")
    print(f"Erro absoluto: {omega - x}")
    print(f"Precisão de {np.finfo(np.longdouble).precision} dígitos")
```