Física Matemática II
Primeira Lista de Exercícios

Louis Bergamo Radial
8992822

22 de março de 2024

Exercício 1

Proposição 1: Métrica trivial

Seja X um conjunto não vazio, então (X, d_t) é um espaço métrico, onde a função $d_t : X \times X \to \mathbb{R}$ é a métrica trivial, definida por

$$d_t(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = y, \\ 1, & \text{se } x \neq y, \end{cases}$$

para todo $x, y \in X$.

Demonstração. Pela definição da métrica trivial, temos

$$d_t(x, y) = 0 \iff x = y$$

para todo $x, y \in X$. De mesma forma, pela simetria de relação de igualdade, temos

$$d_t(x, y) = d_t(y, x).$$

Ainda, a imagem da função d_t é contida na semirreta $[0, \infty)$,

$$d_t(X \times X) = \{0, 1\} \subset [0, \infty).$$

Assim, resta mostrar que a métrica trivial satisfaz a desigualdade triangular.

Consideremos $x, y, z \in \mathbb{R}$, então segue que

$$0 \leq d_t(x, z) + d_t(z, y) \leq 2,$$

com os únicos valores possíveis para a soma sendo $\{0, 1, 2\}$. No caso em que $x = y$, temos $d_t(x, y) = 0$, portanto

$$d_t(x, y) \leq d_t(x, z) + d_t(z, y)$$

é satisfeita de forma trivial. No caso em que $x \neq y$, temos $d_t(x, y) = 1$, portanto pela transitividade da igualdade temos que

$$1 \leq d_t(x, z) + d_t(z, y) \leq 2,$$

já que z não pode ser igual a tanto x quanto y, de modo que

$$d_t(x, y) \leq d_t(x, z) + d_t(z, y).$$

Dessa forma, mostramos que a desigualdade triangular é satisfeita em todos os casos, portanto (X, d_t) é um espaço métrico. □

Exercício 2

Proposição 2: Métrica do supremo

Seja $X = C([0,1])$ o conjunto de todas as funções reais contínuas definidas no intervalo $[0,1]$. Então (X, d_∞) é um espaço métrico, com a métrica definida por

$$\begin{aligned} d_\infty : X \times X &\to \mathbb{R} \\ (f,g) &\mapsto \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|. \end{aligned}$$

Demonstração. Notemos que a imagem da função d_∞ está contida na semirreta $[0,\infty)$.

Para $f, g \in X$, temos $f = g$ se e somente se $f(x) = g(x)$ para todo $x \in [0,1]$. Portanto,

$$\begin{aligned} f = g &\iff \forall x \in [0,1] : |f(x) - g(x)| = 0 \\ &\iff \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)| = 0 \\ &\iff d_\infty(f,g) = 0. \end{aligned}$$

Notemos também que a função d_∞ é simétrica em seus argumentos, isto é,

$$d_\infty(g,f) = \sup_{x\in[0,1]} |g(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)| = d_\infty(f,g).$$

Consideremos $f, g, h \in X$, então

$$\begin{aligned} d_\infty(f,g) &= \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - h(x) + h(x) - h(x)| \\ &\leq \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)| \\ &\leq d_\infty(f,h) + d_\infty(h,g). \end{aligned}$$

Dessa forma, mostramos que a função d_∞ é uma métrica. □

Exercício 3

Proposição 3: Métrica d_1

Seja $X = C([0,1])$ o conjunto de todas as funções reais contínuas definidas no intervalo $[0,1]$. Então (X, d_1) é um espaço métrico, com a métrica definida por

$$\begin{aligned} d_1 : X \times X &\to \mathbb{R} \\ (f,g) &\mapsto \int_0^1 \mathrm{d}x\, |f(x) - g(x)|. \end{aligned}$$

Demonstração. Notemos que a imagem da função d_1 está contida na semirreta $[0,\infty)$.

Suponhamos que duas funções $f, g \in X$ satisfazem $d_1(f,g) = 0$. Certamente essas funções devem ser diferentes em no máximo um conjunto de medida nula. Como as funções são contínuas, este conjunto deve ser vazio. Desse modo, $f = g$ em $[0,1]$. Suponhamos agora que duas funções são iguais $f = g$. Claramente temos $d_1(f,g) = 0$. Desse modo,

$$f = g \iff d_1(f,g) = 0.$$

Vejamos também que a função d_1 é simétrica em seus argumentos, isto é,

$$d_1(g, f) = \int_0^1 \mathrm{d}x \, |g(x) - f(x)| = \int_0^1 \mathrm{d}x \, |f(x) - g(x)| = d_1(f, g).$$

Consideremos $f, g, h \in X$, então

$$\begin{aligned} d_1(f, g) &= \int_0^1 \mathrm{d}x \, |f(x) - h(x) + h(x) - g(x)| \\ &\leq \int_0^1 \mathrm{d}x \, |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)| \\ &\leq d_1(f, h) + d_1(h, g). \end{aligned}$$

Dessa forma, mostramos que a função d_1 é uma métrica em X. □

Exercício 4

Exercício 5

Exercício 6

Exercício 7

Exercício 8

Exercício 9

Exercício 10