Aix-Marseille Université (AMU)

Faculté des Sciences de Saint Charles

Garder les bâtiments au frais l'été sans climatisation ?

Projet n°3 de Modélisation

****

Licence 3 de Mathématiques

Réalisé par :

ATTEKPAMI Brice

LOUKANOU LOUZOLO A. Kévin

NDIAYE Baye Ndiouga

Encadré par :

Madame Julia CHARRIER

Décembre 2023

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Le réchauffement climatique est un phénomène de transformation du climat caractérisé par une augmentation générale des températures moyennes et qui modifie durablement les équilibres météorologiques et les écosystèmes.

Ce phénomène est causé par beaucoup de facteurs dont l'un est l'usage du climatiseur, qui abaisse la température du bâtiment dans lequel il est placé et le maintient à une température confortable mais tout en rejetant de la chaleur à l'extérieure de ce bâtiment.

Cependant, l'usage du climatiseur s'avère nécessaire pour le confort de nos bâtiments en été. Mais vu ses nombreux inconvénients sur la vie de l'homme, plusieurs chercheurs s'intéressent au développement d'autres alternatives.

Ainsi l'objectif de notre projet est l'étude de deux modèles très simplifiés et basiques permettant d'étudier l'évolution de la température à l'intérieur d'un bâtiment selon les variations de la température extérieure au cours d'une journée. Il se pose alors la question de savoir si avec ces modèles on peut maintenir un bâtiment à une température raisonnable (entre 26 °C et 28 °C) en été sans l'usage du climatiseur.

Dans un premier temps, nous allons étudier l'influence de la température extérieure sur la variation de la température intérieure en tenant compte de l'isolation du bâtiment et de l'ouverture des fenêtres. Et ensuite dans un second temps en tenant compte de la profondeur et des propriétés physiques des murs du bâtiment.

Chapitre 2 : Premier modèle

2.1. Un modèle d'EDO

On souhaite par des objets mathématiques très simples proposés donner une description approximative de la réalité. Soit un bâtiment donné, dans ce premier modèle on fait l'hypothèse qu'à chaque instant la température est homogène à l'intérieur du bâtiment. On désigne par θ_{ext} et θ respectivement les températures à l'extérieur et à l'intérieur du bâtiment. On cherche à déterminer la température intérieure en tenant compte des variations de la température extérieure. Dans tout ce exposé le temps sera en heure (h) et le température en degré Celsius (°C).

4.1

La fonction donnant la température à l'intérieure du bâtiment en fonction du temps est solution de l'équation différentielle ordinaire (EDO) :

$\theta'(t) = -k(\theta(t) - \theta_{ext}(t))$ où k est un paramètre d'unité physique h^{-1}. Il sera question ici de montrer que cette équation différentielle ordinaire (EDO) modélise bel et bien une loi de modération pour des valeurs données du paramètre k. Ainsi on distinguera deux cas avec hypothèse $\theta_{ext}(t) = c^{ste}$

4.2

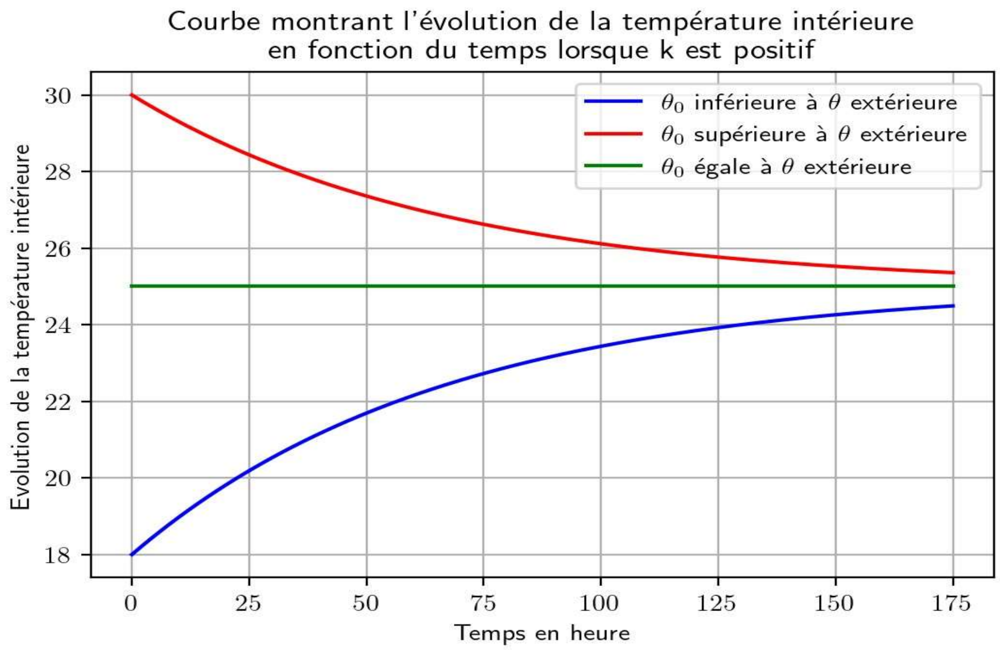
• 1er cas : $k > 0$

Si $\theta(t) - \theta_{ext}(t) > 0$ alors $\theta' < 0$ donc θ est strictement décroissante près de t et tend vers θ_{ext} car θ_{ext} est une solution stationnaire.

Si $\theta(t) - \theta_{ext}(t) < 0$ alors $\theta' > 0$ donc θ est strictement croissante près de t et tend vers θ_{ext} car θ_{ext} est une solution stationnaire.

Si $\theta(t) - \theta_{ext}(t) = 0$ alors $\theta' = 0$ donc θ est constante égale à θ_{ext} car θ_{ext}.

Tout ce premier cas est résumé par le graphique ci-dessous :



On déduit donc que la température intérieure tend toujours vers la température extérieure en temps grand. D'où notre équation différentielle ordinaire modélise une loi de modération lorsque le paramètre k est positif.

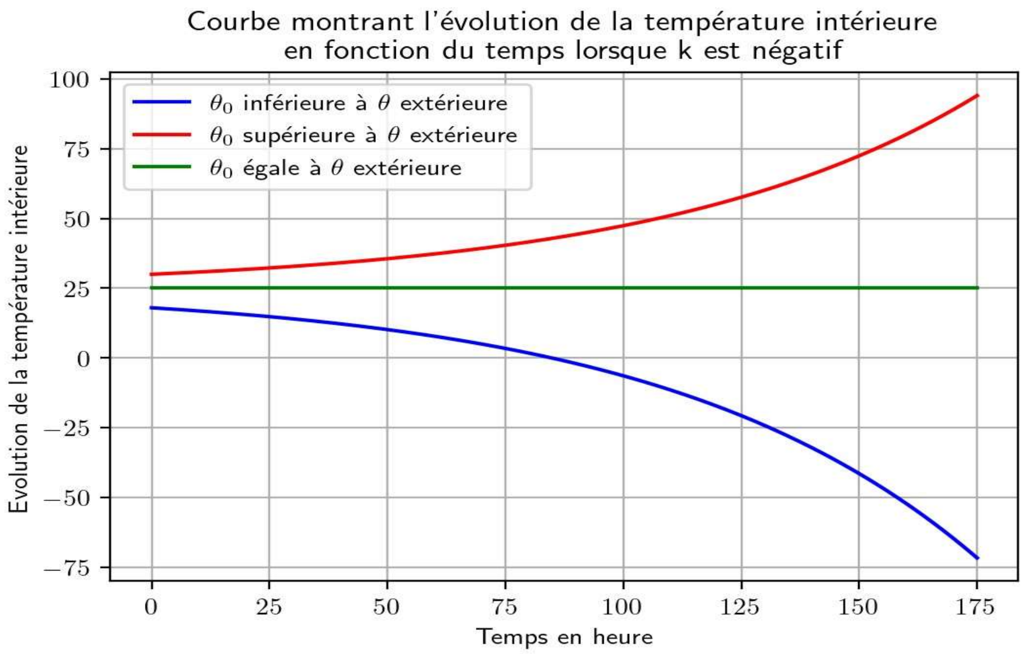
•2e cas : $k < 0$

Si $\theta(t) - \theta_{ext}(t) > 0$ alors $\theta' > 0$ donc θ est strictement croissante près de t et tend vers infini.

Si $\theta(t) - \theta_{ext}(t) < 0$ alors $\theta' < 0$ donc θ est strictement décroissante près de t et tend vers infini

Si $\theta(t) - \theta_{ext}(t) = 0$ alors $\theta' = 0$ donc θ est constante égale à θ_{ext}.

Tout ce second cas est résumé par le graphique ci-dessous :



On déduit donc que la température intérieure s'éloigne de la température extérieure en temps grand. D'où notre équation différentielle ordinaire ne modélise pas une loi de modération lorsque le paramètre k est négatif.

On sait désormais que notre EDO modélise une loi de modération lorsque k est positif alors nous allons à présent établir le lien entre l'isolation du bâtiment et les différentes valeurs que peut prendre le paramètre k. Pour un bâtiment très bien isolé, k prend une valeur très faible ce qui implique que la température intérieure tend plus lentement vers la température extérieure mais pour un bâtiment très mal isolé, k prend une valeur grande ce qui implique que la température intérieure tendra plus rapidement vers la température extérieure.

2.2. Cas d'une température extérieure constante

Ici notre étude portera sur le cas où la température extérieure est une fonction constante.

Commençons par la proposition suivante :

Proposition 1 :

La solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle ordinaire

$\theta'(t) = -k(\theta(t) - \theta_{ext})$ avec la condition initiale $\theta(0) = \theta_0$ est $\theta(t) = (\theta_0 - \theta_{ext})e^{-k} + \theta_{ext}$

Preuve :

Soit l'équation différentielle ordinaire : $\theta'(t) = -k(\theta(t) - \theta_{ext})$ (1)

L'équation homogène associée à (1) est $\theta'(t) = -k\theta(t)$

On a : $e^{kt}\theta'(t) = -k\theta(t)e^{kt}$

$e^{kt}\theta'(t) + k\theta(t)e^{kt} = 0$

$(\theta(t)e^{kt})' = 0$

$\theta(t)e^{kt} = c$ avec $c \in \mathbb{R}$

D'où $\theta(t) = ce^{-kt}$ avec $c \in \mathbb{R}$

Une solution particulière de l'équation (1) est la fonction $t \longmapsto \theta_{ext}$

L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation (1) est

$\{t \longmapsto \theta(t) = ce^{-kt} + \theta_{ext}\ avec\ c \in \mathbb{R}\}$

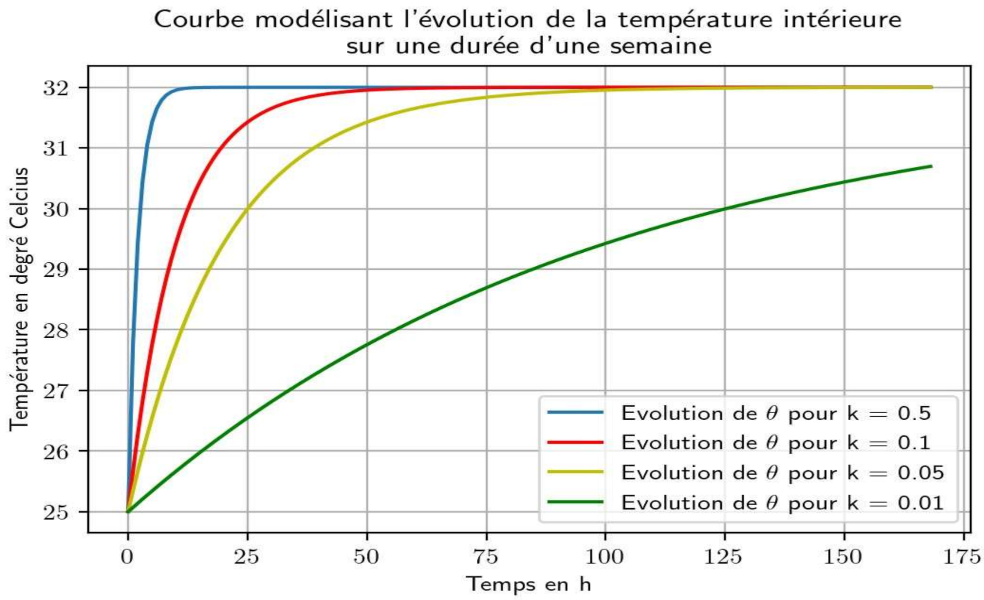
On sait que $\theta(0) = \theta_0$

Alors $\theta(0) = \theta_0 \Rightarrow c + \theta_{ext} = \theta_0$

$\Rightarrow c = \theta_0 - \theta_{ext}$

D'où la solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation (1) est $\theta(t) = (\theta_0 - \theta_{ext})e^{-kt} + \theta_{ext}$

Le graphique ci-dessous montre l'évolution de la température intérieure pour différentes valeurs du paramètre k sur une durée d'une semaine pour une température extérieure égale à 32°C et une température intérieure initiale égale à 25°C.



Il est donné de constater que la température intérieure croît plus vite en tendant vers la température extérieure lorsque k est grand. En conclusion la température intérieure vaut la température extérieure en temps infini. Ainsi donc la loi de modération est encore vérifiée.

Mais il faut souligner que choisir de prendre pour θ_{ext} une fonction constante ne semble pas réaliste parce qu'à l'échelle d'une journée la température extérieure varie en fonction des heures.

2.3. Cas d'une température extérieure périodique

Comme le choix de prendre pour la température extérieure une fonction constante ne semble par réaliste, nous allons cependant prendre la température extérieure pour une fonction périodique de la forme $t \longmapsto a\cos(\omega t) + b$, avec a, b, ω où :

- w est la pulsation.

En effet, soit T la période de θ_{ext}, on a $\theta_{ext}(t+T) = \theta_{ext}(t)$

$\theta_{ext}(T) = \theta_{ext}(0)$ en $t = 0$ alors $a\cos(\omega T) + b = a + b$ c'est-à-dire $\cos(\omega t) = 1$

On peut prendre $\omega T = 2\pi$ alors $\omega = \frac{2\pi}{T}$

De plus, $T = 24h$ alors $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24}$ et donc $\omega = \frac{\pi}{12}$

- a est l'amplitude de variation de la température

En effet, soit A l'amplitude de variation de la température,

$$A = \frac{max\theta_{ext} - min\theta_{ext}}{2}$$

$$A = \frac{a + b - (b - a)}{2}$$

$$A = a$$

- b est la température moyenne

En effet, $\theta_{moy} = \frac{1}{T}\int_0^T \theta_{ext}(t)dt$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T (a\cos(\omega t) + b)dt$$

$$= \frac{1}{T}\left[\frac{a}{\omega}\sin(\omega t) + bt\right]_0^T$$

$$= \frac{1}{T}\left(\frac{a}{\omega}\sin(\omega T)\right) + bT)$$

$$= \frac{1}{T}\left(\frac{a}{\omega}\sin(2\pi)\right) + bT)$$

$\theta_{moy} = b$

<u>Proposition</u> 2 :

La solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle ordinaire

$\theta'(t) = -k(\theta(t) - \theta_{ext})$ avec $\theta_{ext}(t) = a\cos(\omega t) + b$ pour la condition initiale $\theta(0) = \theta_0$ est :

$$\theta(t) = (\theta_0 - \frac{ak^2}{k^2+\omega^2} - b)e^{-k} + \frac{ak^2}{k^2+\omega^2}\cos(\omega t) + \frac{ak\omega}{k^2+\omega^2}\sin(\omega t) + b$$

<u>Preuve</u> :

L'ensemble des solutions de l'équation homogène est $\{t \longmapsto ce^{-kt}$ avec $c \in \mathbb{R}\}$

Cherchons une solution particulière $\theta_p(t)$ sous la forme

$t \longmapsto \alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t) + b$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ alors

$\theta_p'(t) = -\alpha\omega\sin(\omega t) + \beta\omega\cos(\omega t)$ car θ_p est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions trigonométriques.

θ_p est solution de l'équation $\Leftrightarrow \theta_p'(t) = -k\big(\theta_p(t) - a\cos(\omega t) - b\big)$

$$\Leftrightarrow$$

$$-\alpha\omega\sin(\omega t)+\beta\omega\cos(\omega t)=-k(\alpha\cos(\omega t)+\beta\sin(\omega t)+b-a\cos(\omega t)-b)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$-\alpha\omega\sin(\omega t)+\omega w\cos(\omega t)=-\,\alpha k\cos(\omega t)-\beta k\sin(\omega t)+ak\cos(\omega t)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(\beta\omega+\alpha k-ak)\cos(\omega t)+(-\alpha\omega+\beta k)\sin(\omega t)=0$$

$$\Leftrightarrow$$

$\begin{cases}\alpha k+\beta\omega-ak=0\\ \quad -\alpha\omega+\beta k=0\end{cases}$ car les fonctions $t\longmapsto\cos(\omega t)$ et $t\longmapsto\sin(\omega t)$ sont linéairement indépendantes

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha k+\beta\omega=ak & (2)\\ -\alpha\omega+\beta k=0 & (3)\end{cases}$$

$(3)\Longrightarrow\alpha=\frac{k}{\omega}*\beta$ dans (2) donne $k\left(\frac{k}{\omega}*\beta\right)+\omega\beta=ak$

Alors $\frac{k^2+\omega^2}{\omega}*\beta=ak$ donc $\beta=\frac{ak\omega}{k^2+\omega^2}$

$\beta=\frac{ak\omega}{k^2+\omega^2}$ dans l'expression de α donne $\alpha=\frac{k}{\omega}*\frac{ak\omega}{k^2+\omega^2}$ alors $\alpha=\frac{ak^2}{k^2+\omega^2}$

On conclut donc que $\theta_p(t)=\frac{ak^2}{k^2+\omega^2}\cos(\omega t)+\frac{ak\omega}{k^2+\omega^2}\sin(\omega t)+b$

Les solutions de l'équation sont

$t\longmapsto\ ce^{-kt}+\frac{ak^2}{k^2+\omega^2}\cos(\omega t)+\frac{ak\omega}{k^2+\omega^2}\sin(\omega t)+b$ avec $c\in\mathbb{R}$

$\theta(0)=\theta_0\Rightarrow c+\frac{ak^2}{k^2+\omega^2}+b=\theta_0$ donc $c=\theta_0-\frac{ak^2}{k^2+\omega^2}-b$

D'où la solution de l'équation est :

$$\theta(t)=(\theta_0-\frac{ak^2}{k^2+\omega^2}-b)e^{-kt}+\frac{ak^2}{k^2+\omega^2}\cos(\omega t)+\frac{ak\omega}{k^2+\omega^2}\sin(\omega t)+b$$

Nous allons nous intéresser ici à l'heure de la journée de la journée à laquelle correspond $t=0$

On a : $\theta_{ext}(t)=a\cos(\omega t)+b$

Pour $t=0$, $\theta_{ext}(0)=a+b$ alors $\theta_{ext}(0)$ correspond à la valeur maximale de θ_{ext} donc l'heure cherchée est l'heure à laquelle il fait plus chaud. Cette heure correspond à 14 heures

Afin de modéliser la température d'une maison en Provence pour un mois de juillet normal,

Prenons $\begin{cases} max\theta_{ext} = 30 \\ min\theta_{ext} = 22 \end{cases}$

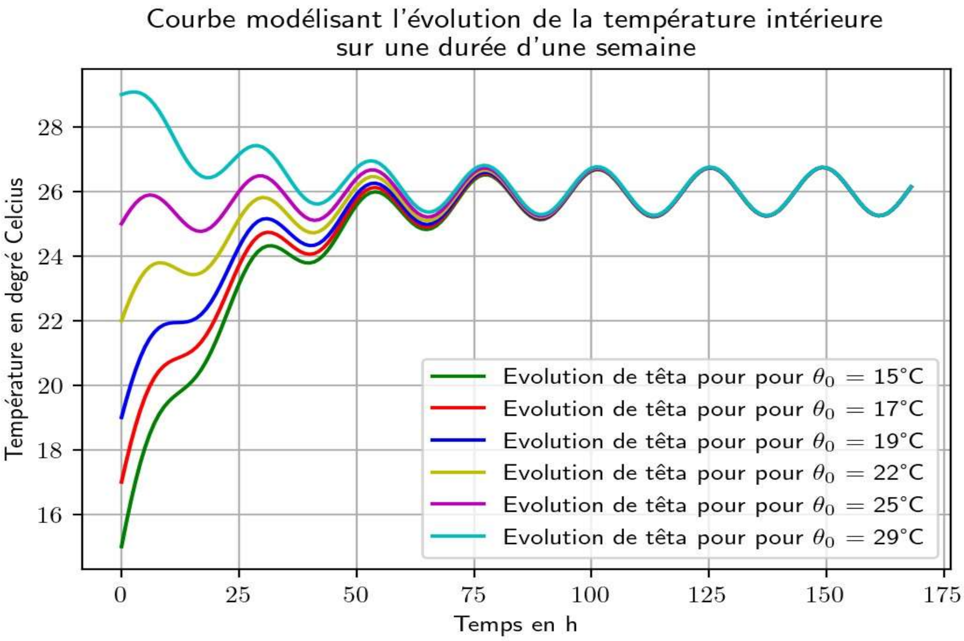
$\begin{cases} a + b = 30 \\ b - a = 22 \end{cases}$

Ainsi $a = 4$ et $b = 26$

De plus $\omega = \frac{\pi}{12}$

Le graphique ci-dessous donne l'évolution de la température intérieure θ sur une durée d'une semaine pour plusieurs valeurs de $\theta(0)$.

Notons qu'on a pris $\theta_{ext}(t) = 4\cos(\frac{\pi}{12}t) + 26$ et $k = 0.05$



On constate que la fonction θ n'admet pas de limite en $+\infty$ et de plus il y a une quasi-périodicité des températures en temps grand quelle que soit la valeur de la température intérieure au temps initial.

2.4. Le régime permanent

L'objectif ici est d'extraire le régime permanent de la solution de l'équation différentielle ordinaire avec la température extérieure une fonction périodique.

Proposition 3 :

Soit E l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles. Le sous-ensemble P de E constitué des fonctions $\frac{2\pi}{\omega}$ périodiques et le sous-ensemble L de E constitué des fonctions qui tendent vers 0 en $+\infty$ sont en somme directe.

Preuve :

Il s'agit de montrer que $P \cap L = \{0\}$

($\Rightarrow$) Par définition $\{0\} \subset P$ et $\{0\} \subset L$ alors $\{0\} \subset P \cap L$

($\Leftarrow$) Soit $f \in P \cap L$, alors $\begin{cases} f \in P \\ f \in L \end{cases}$

$$f \in P \Leftrightarrow \forall\, x \in \mathbb{R}, f\left(x + \frac{2\pi}{\omega}\right) = f(x)$$

$$f \in L \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists A > 0\,;\, \forall\, x > A,\ |f(x)| < \varepsilon$$

Soit $f \in P$ alors $\forall x \in \mathbb{R}, f\left(x + \frac{2\pi}{\omega}\right) = f(x)$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $f\left(x + n\frac{2\pi}{\omega}\right) = f(x)$ car $f \in P$

Soit $x \in \mathbb{R}$,

La suite $\left(x + n\frac{2\pi}{\omega}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$, alors :

Soit $\varepsilon > 0$, $\exists A > 0$ tels que

$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, x + n\frac{2\pi}{\omega} > A$ alors $\left|f(x + n\frac{2\pi}{\omega})\right| < \varepsilon$ car $f \in L$

De même $|f(x)| < \varepsilon$, d'où

$\forall \varepsilon > 0\ |f(x)| < \varepsilon, \forall x \in \mathbb{R}$ alors $f(x) = 0$ c'est-à-dire $f \equiv 0$

Ainsi $P \cap L \subset \{0\}$

En somme $P \cap L = \{0\}$.

D'où $P + L = P \oplus L$

Montrons maintenant que la solution de l'équation (1) appartient à $P \oplus L$

La solution de l'équation (1) vérifiant $\theta(0) = \theta_0$ est

$$\theta(t) = (\theta_0 - \frac{ak^2}{k^2+\omega^2} - b)e^{-kt} + \frac{ak^2}{k^2+\omega^2}\cos(\omega t) + \frac{ak\omega}{k^2+\omega^2}\sin(\omega t) + b$$

Posons $g(t) = (\theta_0 - \frac{ak^2}{k^2+\omega^2} - b)e^{-kt}$ et $h(t) = \frac{ak^2}{k^2+\omega^2}\cos(\omega t) + \frac{ak\omega}{k^2+\omega^2}\sin(\omega t) + b$ alors

$\theta(t) = g(t) + h(t)$

13.1

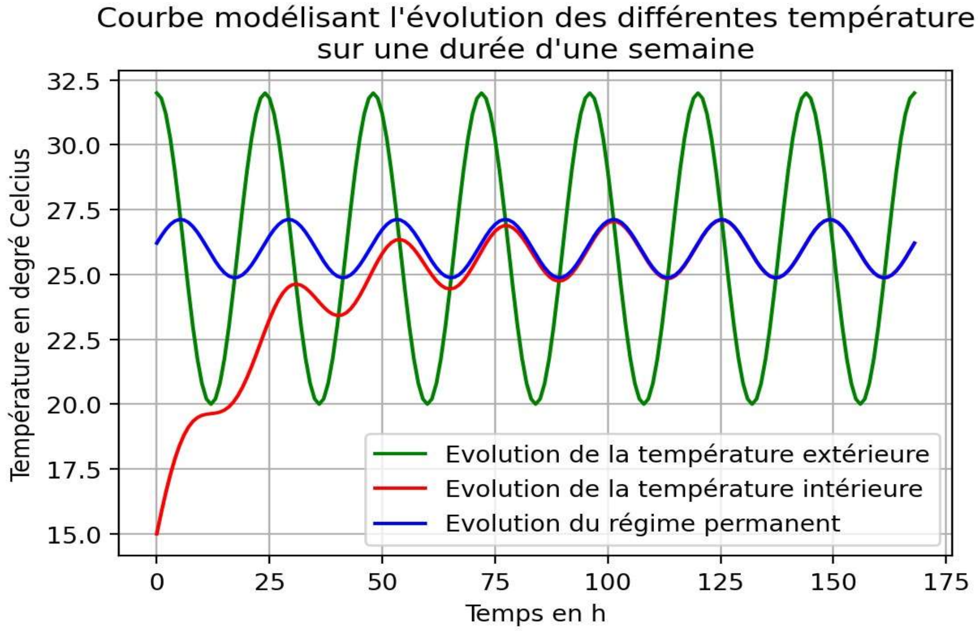
La fonction h est périodique alors $h \in P$. De plus la fonction g admet 0 comme limite à l'infini alors $g \in L$ ainsi $\theta \in P \oplus L$.

13.2

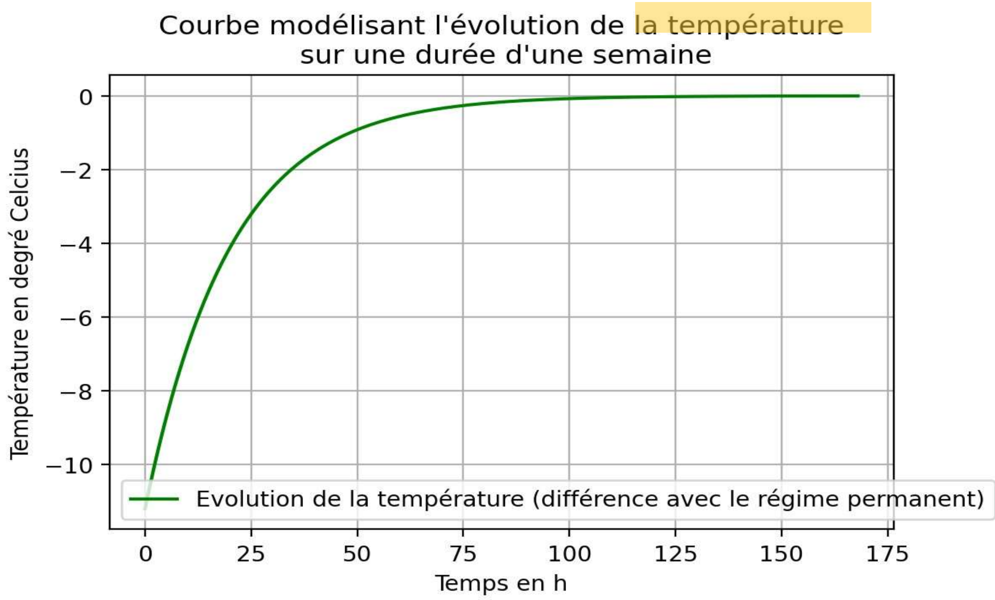
Le régime permanent de la solution est alors $\theta_{per}(t) = \frac{ak^2}{k^2+\omega^2}\cos(\omega t) + \frac{ak\omega}{k^2+\omega^2}\sin(\omega t) + b$ et donc

$\theta_{res}(t) = (\theta_0 - \frac{ak^2}{k^2+\omega^2} - b)e^{-k}$

Le graphique suivant donne l'allure de la température extérieure, la température intérieure et du régime permanent sue une durée d'une semaine



De même l'évolution de la différence de température avec le régime permanent est donnée par le graphique ci-dessous



Nous allons à présent nous intéresser uniquement au régime permanent en négligeant θ_{res}.

Proposition 4 :

Soit $\theta_{per}(t) = b + \frac{ak^2}{k^2+\omega^2}\cos(\omega t) + \frac{ak\omega}{k^2+\omega^2}\sin(\omega t)$ alors il existe $c \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ tels que $\theta_{per}(t) = b + c\cos(\omega t - \varphi)$

Preuve :

On a : $\theta_{per}(t) = b + c\cos(\omega t - \varphi)$ alors

$\theta_{per}(t) = b + c(\cos\varphi\cos(\omega t) + \sin\varphi\sin(\omega t))$ ainsi

$\theta_{per}(t) = b + c\cos\varphi\cos(\omega t) + c\sin\varphi\sin(\omega t)$

De plus, $\theta_{per}(t) = b + \frac{ak^2}{k^2+\omega^2}\cos(\omega t) + \frac{ak\omega}{k^2+\omega^2}\sin(\omega t)$ alors par identification, on a : $\begin{cases} c\sin\varphi = \frac{ak\omega}{k^2+\omega^2} \\ c\cos\varphi = \frac{ak^2}{k^2+\omega^2} \end{cases}$ $(*)$

$$(c\sin\varphi)^2 + (c\cos\varphi)^2 = c^2 \Leftrightarrow c^2 = \left(\frac{ak^2}{\sqrt{k^2+\omega^2}}\right)^2 + \left(\frac{akw}{\sqrt{k^2+\omega^2}}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow c^2 = \frac{a^2k^2}{k^2+\omega^2}$$

$$\Leftrightarrow c = \pm\frac{ak}{\sqrt{k^2+\omega^2}}$$

D'après (∗) on a : $\frac{c\sin\varphi}{c\,\mathrm{co}} = \frac{\frac{ak\omega}{k^2+\omega^2}}{\frac{ak^2}{k^2+\omega^2}}$ alors $\tan\varphi = \frac{\omega}{k}$ ainsi $\varphi = \arctan(\frac{\omega}{k})$

Comme $\omega > 0$ et $k > 0$ alors $\frac{\omega}{k} > 0$ ce qui implique que $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

On a obtenu que $c = \pm\frac{ak}{\sqrt{k^2+\omega^2}}$ alors :

<u>1^er^ cas</u> : si $c = -\frac{ak}{\sqrt{k^2+\omega^2}}$

Alors $\begin{cases} \sin\varphi = -\frac{k}{\sqrt{k^2+\omega^2}} < 0 \\ \cos\varphi = -\frac{\omega}{\sqrt{k^2+\omega^2}} < 0 \end{cases}$ ce qui est impossible car $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

<u>2^e^ cas</u> : si $c = \frac{ak}{\sqrt{k^2+\omega^2}}$

Alors $\begin{cases} \sin\varphi = \frac{k}{\sqrt{k^2+\omega^2}} > 0 \\ \cos\varphi = \frac{\omega}{\sqrt{k^2+\omega^2}} > 0 \end{cases}$

En somme on conclut que $c = \frac{ak}{\sqrt{k^2+\omega^2}}$

D'où $\theta_{per}(t) = b + c\cos(\omega t - \varphi)$ avec $c = \frac{ak}{\sqrt{k^2+\omega^2}} \in \mathbb{R}$ et $\varphi = \arctan(\frac{\omega}{k}) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Les moyennes sur une période de θ_{ext} et de θ_{per} sont données par :

- θ_{ext}

$$moy_{ext} = \frac{1}{T}\int_0^T \theta_{ext}(t)dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T (a\cos(\omega t) + b))dt$$

$$= \frac{1}{T}\left[\frac{a}{\omega}\sin(\omega t) + bt\right]_0^T$$

$$= \frac{1}{T}\left(\frac{a}{\omega}\sin(\omega T)\right) + bT)$$

$$= \frac{1}{T}\left(\frac{a}{\omega}\sin(2\pi)\right) + bT)$$

$$moy_{ext} = b$$

• θ_{per}

$$moy_{per} = \frac{1}{T}\int_0^T \theta_{per}(t)dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T (\frac{ak^2}{k^2+\omega^2}\cos(\omega t) + \frac{ak\omega}{k^2+\omega^2}\sin(\omega t) + b)dt$$

$$= \frac{1}{T}\left[\frac{ak^2}{k^2+\omega^2} * \frac{1}{\omega}\sin(\omega t) - \frac{ak\omega}{k^2+\omega^2} * \frac{1}{\omega}\cos(\omega t) + bt\right]_0^T$$

$$= \frac{1}{T}\left(\frac{ak^2}{k^2+\omega^2} * \frac{1}{\omega}\sin(\omega T) - \frac{ak}{k^2+\omega^2}(\cos(\omega T) - 1) + bT\right)$$

$$= \frac{1}{T}\left(\frac{ak^2}{k^2+\omega^2} * \frac{1}{\omega}\sin(2\pi) - \frac{ak}{k^2+\omega^2}(\cos(2\pi) - 1) + bT\right)$$

$$moy_{per} = b$$

16.1

On va à présent calculer le rapport des amplitudes de θ_{ext} et θ_{per} afin de vérifier l'influence de l'influence de la qualité de l'isolation sur l'amplitude du régime permanent.

Soit r ce rapport, on a :

$$r = \frac{ampl(\theta_{ext})}{amp(\theta_{per})}$$

$$r = \frac{a}{c}$$

$$r = \frac{a}{\frac{ak}{\sqrt{k^2+\omega^2}}}$$

$$r = \frac{\sqrt{k^2+\omega^2}}{k}$$

$$r = \sqrt{\frac{k^2+\omega^2}{k^2}}$$

$$r = \sqrt{1 + (\frac{\omega}{k})^2}$$

Après calcul du rapport des amplitudes de θ_{ext} et θ_{per}, on déduit que :

$$ampl(\theta_{per}) = \frac{ampl(\theta_{ext})}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{k}\right)^2}}$$

Alors il en sort que :

• Si le bâtiment est mal isolé alors k est grand et par conséquent l'amplitude de θ_{per} tend vers celle de θ_{ext}

• Si le bâtiment est bien isolé alors k est petit et par conséquent l'amplitude de θ_{per} tend vers 0

De tout ce qui précède, on peut conclure que l'isolation ne permet de rafraîchir les bâtiments en été.

2.5. Interprétation du déphasage

Il s'agit dans ce sous paragraphe de voir à partir du déphasage comment varie le délai de décalage en fonction des différentes valeurs prises par k.

A cet effet, calculons le délai de décalage

Soient le délai de décalage et le déphasage on a :

$\omega * \Delta t - \Delta\varphi = 0$ alors $\Delta t = \frac{\Delta\varphi}{\omega}$ or $\Delta\varphi = 0 - (-\varphi) = \varphi$ donc

$$\Delta t = \frac{\varphi}{\omega}$$

De plus $\varphi = \arctan(\frac{\omega}{k})$ alors $\Delta t = \frac{1}{\omega}\arctan(\frac{\omega}{k})$

Interprétation

Notons d'abord que la fonction $x \longmapsto \arctan x$ est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$ ainsi :

• si k est grand alors $\frac{\omega}{k}$ tend vers 0 et par conséquent le délai de décalage aussi tend vers 0

• si k est petit alors $\frac{\omega}{k}$ est grand et par conséquent le délai de décalage aussi est grand et tend vers $\frac{\pi}{2\omega}$

17.1 17.2 17.3 17.4

2.6. L'ouverture des fenêtres

On va introduire ici une nouvelle notion qui est l'ouverture des fenêtres du bâtiment. Il s'agira de déterminer l'heure de la journée à laquelle il faut ouvrir ou fermer les fenêtres.

Il est important de noter que l'ouverture des fenêtres et l'installation d'un système de ventilation peuvent aider à ce que la température intérieure devient rapidement proche de la température extérieure.

Pour calculer la température intérieure après qu'on ait fermé les fenêtres, on aura besoin de connaître la solution de l'équation différentielle avec une condition initiale non pas à $t = 0$ mais une condition initiale à $t = t_0$ où t_0 est l'instant auquel on a fermé les fenêtres. Pour cela calculons cette solution

On a :

La solution générale de l'équation différentielle (1) est

$$\psi(t) = ce^{-kt} + \frac{ak^2}{k^2+\omega^2}\cos(\omega t) + \frac{ak\omega}{k^2+\omega^2}\sin(\omega t) + b$$

On a comme condition initiale $\theta(t_0) = \theta_0$

$\theta_0 = ce^{-kt_0} + \frac{ak^2}{k^2+\omega^2}\cos(\omega t_0) + \frac{ak\omega}{k^2+\omega^2}\sin(\omega t_0) + b$ alors

$$c = e^{kt_0}(\theta_0 - \frac{ak^2}{k^2+\omega^2}\cos(\omega t_0) - \frac{ak\omega}{k^2+\omega^2}\sin(\omega t_0) - b)$$

D'où

$$\psi(t) = (\theta_0 - \frac{ak^2}{k^2+\omega^2}\cos(\omega t_0) - \frac{ak\omega}{k^2+\omega^2}\sin(\omega t_0) - b)e^{-k(t-t_0)} + \frac{ak^2}{k^2+\omega^2}\cos(\omega t) + \frac{ak\omega}{k^2+\omega^2}\sin(\omega t) + b$$

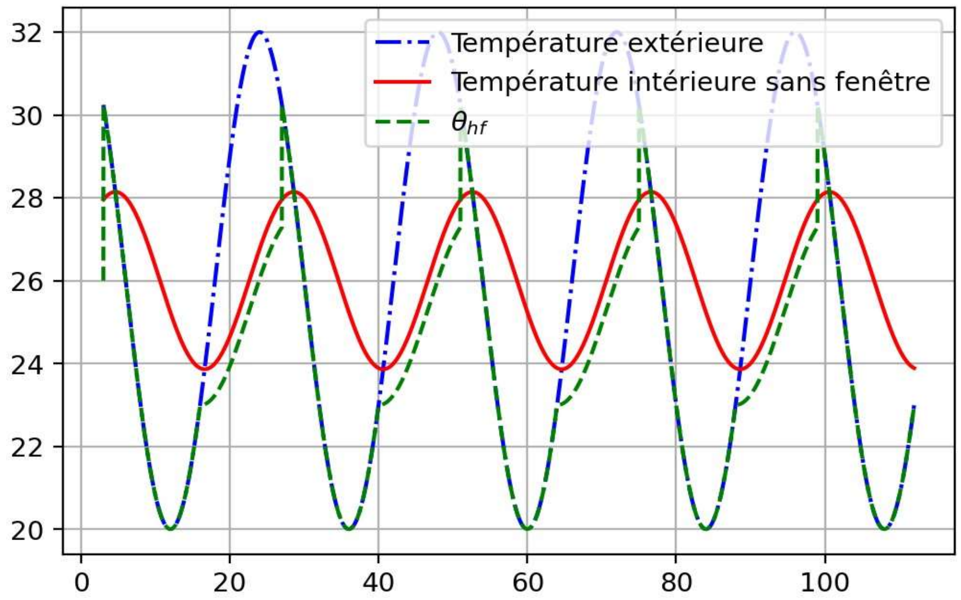
18.1

2.7. Stratégie : heures fixes

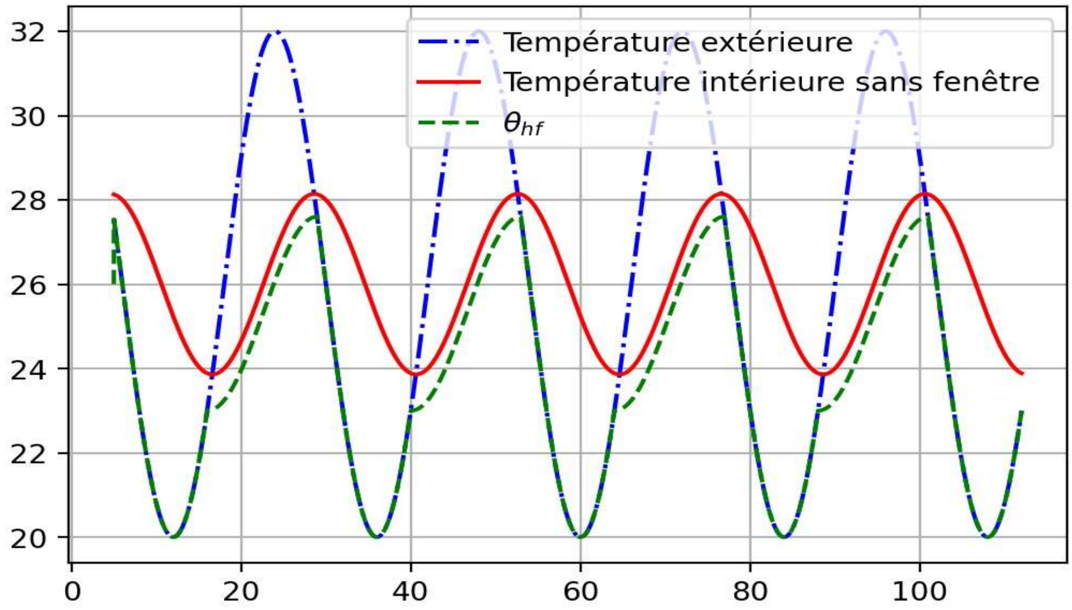
Le but ici c'est de profiter au maximum de la fraicheur pendant la soirée, donc on va ouvrir la fenêtre à une heure donnée et la refermer à une autre heure.

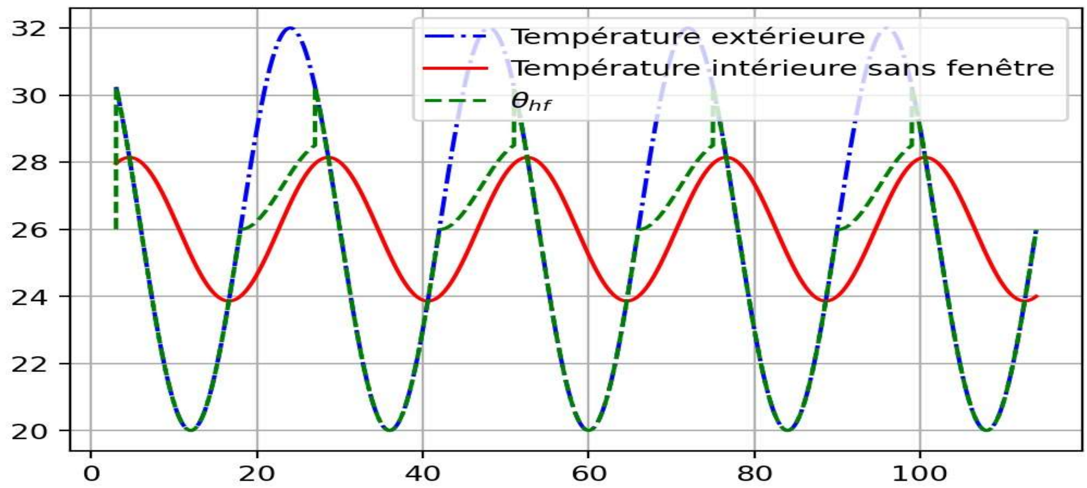
On a déjà mentionné plus haut que l'heure de la journée correspondant à t_0 (c'est-à-dire l'heure de la journée où il fait plus chaud en été) est 14 heures alors on va ouvrir la fermeture à 17 heures et la fermer à 06 heures du matin.

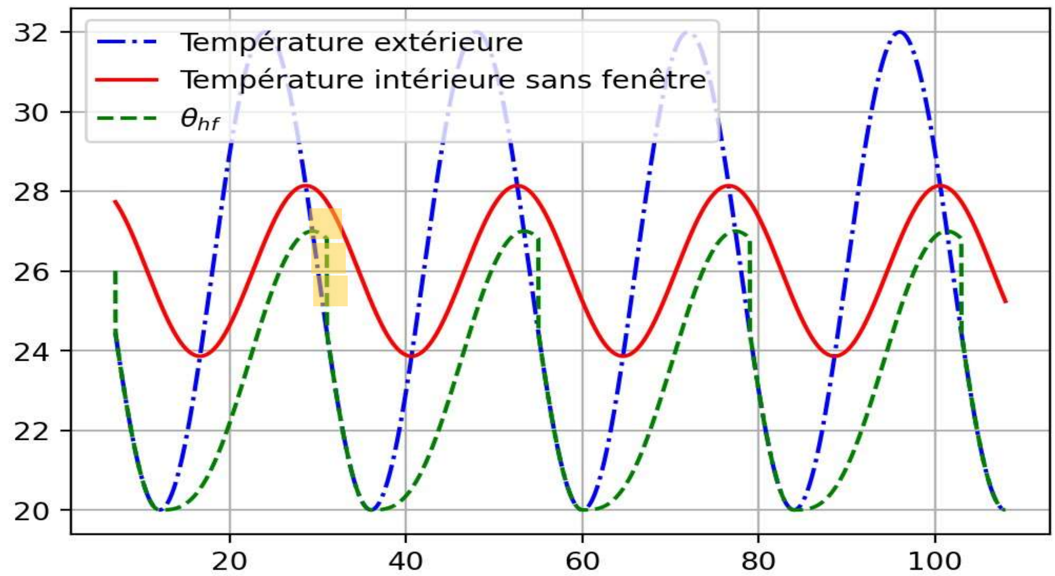
Les variations de la température intérieure pendant l'ouverture et la fermeture de la fenêtre sont sur une durée de 4 jours est donnée par le graphique suivant :



En faisant varier les heures d'ouverture et de fermeture de la fenêtre, on obtient les graphiques suivants :







Les meilleures approximations sont obtenues pour $T_0 = 4$ et $T_f = 16$ ce qui correspond à 18 heures comme heure d'ouverture et 6 heures comme heure de fermeture.

La valeur de φ qui semble optimale est $\frac{\pi}{2}$

20.1

Chapitre 3 : Deuxième modèle

On va introduire ici un model qui prend en compte ce qui se passe dans le mur du bâtiment et étudier le déphasage en tenant compte des propriétés physiques du mur. Pour simplifier l'étude nous allons négliger le régime transitoire et nous concentrer sur le régime permanent en nous focalisant uniquement sur les échanges thermiques entre l'intérieure et l'extérieure qui se font par les murs.

On va supposer notre milieu homogène et étudier les variations de la température en fonction de la profondeur x. De plus on admettra l'approximation qu'à la surface d'un mur d'épaisseur l la température est donnée par la fonction du model précédent à $x = l$.

3.1. Le modèle

Dans notre modèle, la température au temps t et à la profondeur x vérifie l'équation aux dérivée partielles suivante : $\frac{\partial T}{\partial t} = D.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ avec condition initiale

$\forall\, t \in \mathbb{R}, T(0,t) = \theta_{ext}(t)$ où $D = \frac{\lambda}{\rho.c}$ est une quantité positive dont l'unité est $°C.m^{-2}$.

En effet, $\frac{\partial T}{\partial t}$ est en $°C.h^{-1}$ et $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ est en $°C.m^{-2}$ alors D est en $m^2.h^{-1}$

De plus, $\lambda > 0$, $\rho > 0$ et $c > 0$ alors $D > 0$

3.2. Solution en régime permanent

On va introduire ici la notion de régime permanent dans le cas d'une fonction dépendant uniquement du temps. Donc on ne s'intéressera qu'à la solution correspondant au régime permanent. Les solutions en régime permanent sont de la forme $t \longmapsto b + c\cos(\omega t - \varphi)$ et comme les solutions que nous cherchons dépendent aussi de x en phase et en amplitude alors on va les chercher sous la forme : $(x,t) \longmapsto \delta + \gamma e^{-\alpha x}\cos(\omega t - \beta x)$ où δ est la température moyenne et γ est l'amplitude de variation de la température extérieure, α et β sont des réels dépendant de ω et de D.

Proposition :

Si les fonctions $T: (x,t) \longmapsto \delta + \gamma e^{-\alpha x}\cos(\omega t - \beta x)$ sont solutions de l'équation aux dérivées partielles : $\frac{\partial T}{\partial t} = D.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ avec condition initiale

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, T(0,t) = \theta_{ext}(t) \text{ où } \theta_{ext}(t) = b + a\cos(\omega t)$$

alors $\alpha = \beta = \pm\sqrt{\frac{\omega}{2D}}$, $\gamma = a$ et $\delta = b$

<u>Preuve</u> :

On a :

$T(x,t) = \delta + \gamma e^{-\alpha x}\cos(\omega t - \beta x) \Longrightarrow$

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x,t) = -\gamma\omega e^{-\alpha x}\sin(\omega t - \beta x)$$

De plus, $T(x,t) = \delta + \gamma e^{-\alpha x}\cos(\omega t - \beta x) \Longrightarrow$

$\frac{\partial T}{\partial x}(x,t) = -\alpha\gamma e^{-\alpha x}\cos(\omega t - \beta x) + \beta\gamma e^{-\alpha x}\sin(\omega t - \beta x)$ alors

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t) = \alpha^2\gamma e^{-\alpha x}\cos(\omega t - \beta x) - \alpha\beta\gamma e^{-\alpha x}\sin(\omega t - \beta x)$$

$$-\alpha\beta\gamma e^{-\alpha x}\sin(\omega t - \beta x) - \beta^2\gamma e^{-\alpha x}\cos(\omega t - \beta x)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t) = (\alpha^2 - \beta^2)\gamma e^{-\alpha x}\cos(\omega t - \beta x) - 2\alpha\beta\gamma e^{-\alpha x}\sin(\omega t - \beta x)$$

Par suite,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Leftrightarrow -\gamma\omega e^{-\alpha x}\sin(\omega t - \beta x) = D\,(\alpha^2 - \beta^2)\gamma e^{-\alpha x}\cos(\omega t - \beta x)$$

$$-2D\alpha\beta\gamma e^{-\alpha x}\sin(\omega t - \beta x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} D(\alpha^2 - \beta^2)\gamma = 0 \\ -\gamma\omega = -2D\alpha\beta\gamma \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 = \beta^2 \\ \omega = 2D\alpha\beta \end{cases} \text{ alors}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 = \beta^2 \\ \alpha\beta = \frac{\omega}{2D} \end{cases} \text{ on en déduit que } \alpha\beta > 0 \text{ alors}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta \\ \alpha^2 = \frac{\omega}{2D} \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega}{2D}} \text{ ou } \alpha = \beta = -\sqrt{\frac{\omega}{2D}}$$

De plus, par $\forall\, t \in \mathbb{R}, T(0,t) = \theta_{ext}(t)$ où $\theta_{ext}(t) = b + a\cos(\omega t)$ on a $\gamma = a$ et $\delta = b$.

Proposition 4 : Si la fonction $T:(x,t) \longmapsto \delta + \gamma e^{-\alpha x}\cos(\omega t - \beta x)$ est solution de l'équation aux dérivées partielles : $\frac{\partial T}{\partial t} = D.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ avec condition initiale $\forall\, t \in \mathbb{R}, T(0,t) = \theta_{ext}(t)$ où $\theta_{ext}(t) = b + a\cos(\omega t)$ et $\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega}{2D}}$ alors elle est bornée.

Preuve :

Par la proposition précédente on a : $T(x,t) = \delta + \gamma e^{-\alpha x}\cos(\omega t - \beta x)$ avec $\gamma = a$, $\delta = b$ et $\alpha = \beta = \pm\sqrt{\frac{\omega}{2D}}$

Alors $T(x,t) = b + ae^{-\alpha x}\cos(\omega t - \beta x)$ avec $\alpha = \beta = \pm\sqrt{\frac{\omega}{2D}}$

L'ensemble d'étude de T est E où $E = \{(x,t); x \in \mathbb{R}_+^* et\ t \in \mathbb{R}_+\}$

On a : $E = D_1 \cup D_2$ avec $D_1 = \{(x,t); x \in \mathbb{R}_+^* et\ t = c^{ste}\}$ et $D_2 = \{(x,t); x = c^{ste} et\ t \in \mathbb{R}_+\}$

- Sur $D_1 = \{(x,t); x \in \mathbb{R}_+^* et\ t = c^{ste}\}$

Pour tout $(x,t) \in D_1$

On a : $|T(x,t)| \leq |b| + |ae^{-\alpha x}|$ alors $|T(x,t)| \leq b +\ ae^{-\alpha x}$

Si $\alpha > 0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} |T(x,t)| \leq \lim\limits_{x\to+\infty} b +\ ae^{-\alpha x} = b$ ainsi T est bornée sur D_1

Si $\alpha < 0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} |T(x,t)| \leq \lim\limits_{x\to+\infty} b +\ ae^{-\alpha x} = +\infty$ ainsi T n'est pas bornée.

- Sur $D_2 = \{(x,t); x = c^{ste} et\ t \in \mathbb{R}_+\}$

Pour tout $(x,t) \in D_2$

On a : $-1 \leq \cos(\omega t - \beta x) \leq 1\ \forall \alpha, \beta$ alors

$-1 \leq \cos(\omega t - \beta x) \leq 1 \Leftrightarrow$

$$b -\ ae^{-\alpha x} \leq b + ae^{-\alpha x}\cos(\omega t - \beta x) \leq b + ae^{-\alpha x}$$

$$\Leftrightarrow b -\ ae^{-\alpha x} \leq T(x,t) \leq b + ae^{-\alpha x}$$

x est une constante alors $b -\ ae^{-\alpha x}$ et $b + ae^{-\alpha x}$ sont aussi des constantes. l

Puisque $E = D_1 \cup D_2$ alors T est bornée sur E si et seulement si $\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega}{2D}}$

On conclut donc par cette proposition que le régime permanent est :

$$T(x,t)_{perm} = b + ae^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}}x} \cos(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2D}}\ x)$$

3.3. Applications

Pour x fixé, la fonction $t \longmapsto T(x,t)$ est une fonction périodique décalée dans le temps et atténuée par rapport à θ_{ext}.

On s'intéresse ici à deux matériaux : les panneaux de fibres de bois (fb) et le polystyrène expansé (pse). On désire savoir si la température intérieure dépend des matériaux.

Soit l la profondeur pour laquelle le déphasage est maximal, on a : $\beta l = \varphi_{max}$

A déphasage maximal on a : $\varphi_{max} = \frac{\pi}{2}$

$\varphi_{max} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \beta x = \frac{\pi}{2}$ car $\varphi = \beta l$

$$\Leftrightarrow l = \frac{\pi}{2\beta}$$

$$\Leftrightarrow l = \frac{\pi}{2\sqrt{\frac{\omega}{2D}}}$$

$$\Leftrightarrow l = \pi\sqrt{\frac{D}{2\omega}}$$

D'où $l = \pi\sqrt{\frac{D}{2\omega}}$

Les épaisseurs liées aux matériaux sont respectivement :

- Fibre de bois

$l_{fb} = \pi\sqrt{\frac{D}{2\omega}}$

Or $D = \frac{\lambda_{fb}}{\rho_{fb}*c_{fb}} = \frac{0.036}{80*2000} = 225.10^{-9}$ et $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24*3600}$ donc

$l_{fb} = 0.124\ m = 12.4\ cm$

- Polystyrène expansé

$l_{pse} = \pi\sqrt{\frac{D}{2\omega}}$

Or $D = \frac{\lambda_{pse}}{\rho_{pse} * c_{pse}} = \frac{0.036}{20*1400}$ et $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24*3600}$ donc

$l_{pse} = 0.295\ m = 29.5\ cm$

Lorsque le déphasage est maximal, la température est donnée par

$\theta(t) = b + ae^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}}l}\cos(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2D}}\ l)$ où l l'épaisseur est fixé.

$\theta(t) = b + ae^{-\frac{\pi}{2}}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$

On conclut donc que la fonction θ ne dépend par du matériau choisi.

L'atténuation est le rapport entre les amplitudes de θ et θ_{ext}, ainsi on a

$$r_{ampl} = \frac{amplitude(\theta)}{amplitude(\theta_{ext})}$$

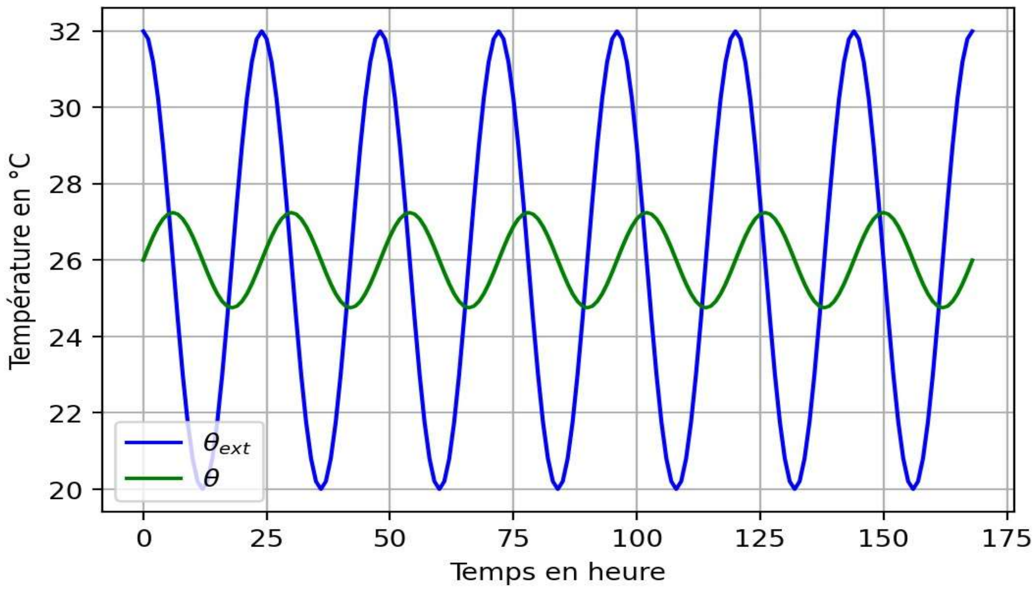
$$= \frac{ae^{-\frac{\pi}{2}}}{a}$$

$$r_{ampl} = e^{-\frac{\pi}{2}}$$

$$r_{ampl} = 0.21$$

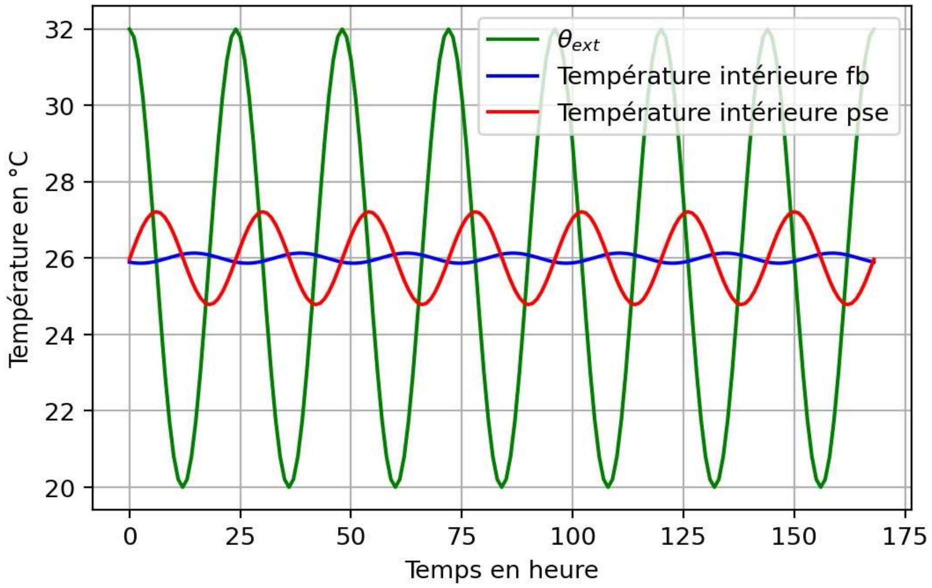
Alors l'atténuation de θ par rapport à θ_{ext} vaut 21%.

Le graphique suivant donne l'évolution des températures intérieure θ et extérieure θ_{ext} en fonction du temps sur une durée d'une semaine.



On déduit donc que le déphasage est maximal, la température à l'intérieure du bâtiment est indépendante du matériau choisi et varie entre 24°C et 28°C.

Lorsque certaines conditions nous imposent une épaisseur maximale pour le mur de 30 cm, alors l vaut 30 cm. Dans cette condition les évolutions des températures intérieures correspondant aux deux matériaux et de la température extérieure sont données par le graphique ci-dessous :



On déduit donc qu'il faut choisir les panneaux de fibre de bois pour construire le mur.

Chapitre 4 : Annexes

4.1. Codes pythons

Ci-joint les fichiers contenant l'ensemble des programmes pythons

4.2. Figures

Ci-joint le dossier contenant les plots des codes pythons

Index des commentaires

3.1 en dessous de 26 ou 28 ?

3.2 court/imprécis

4.1 c'est un modèle

4.2 on peut interpréter dans le cas où la température extérieure n'est pas constante, mais ok

5.1 ça se justifie avec la formule obtenue après

6.1 ok, mais pas justifié (ni à partir du modèle si à partir de simulations)

6.2 on appelle ça un problème de Cauchy, ça évite les ambiguïtés

7.1 c'est du cours, pas besoin de démontrer

8.1 ok, mais à commenter en termes d'isolation

11.1 un peu élevé

12.1 préciser que ce sont des sev

12.2 pas complètement rigoureux ; fixer x et epsilon, puis A, puis N

13.1 de période...

13.2 pas défini

14.1 que déduisez-vous de ces simulations ? influence de theta_0 ? de k ?

14.2 problème de raisonnement

15.1 avec un c<0 on peut avoir phi négatif, c'est juste un choix, pb de raisonnement

16.1 et donc vous en déduisez quoi sur l'effet de l'isolation ?

17.1 bien, mais justifier rapidement

17.2 en quel sens ? ne pas confondre effet sur la moyenne et effet sur les maxima

17.3 et alors, c'est bien ?

17.4 expliquer pourquoi au vu du déphasage on ouvre les fenêtres

18.1 définir la notion de flot

19.1 ça aurait été bien de faire varier k aussi...

20.1 on peut pas avoir pi/2, lien avec k ???

21.1 c'est raisonnable ?

21.2 dans la partie 1

22.1 justifier

Index des commentaires

23.1 vous n'avez pas exactement montré ce qui était demandé : l'existence et l'unicité d'une solution bornée de la forme donnée

23.2 ça n'a pas de sens et c'est inutile

23.3 problème de raisonnement, pour montrer qu'une fonction est bornée il n'est pas suffisant (et ici pas nécessaire d'étudier ses limites), pour savoir si une fonction de 2 variables est bornées, vous ne pouvez pas figer une variable en général (ici on peut s'y ramener mais il faut le faire correctement)

23.4 oui mais fallait le mettre dans l'énoncé