

机器人学导论

绪论

- TCP(工具中心点)

- 每个关节位置由一个独立的变量定义，所以关节数目 = 自由度数目
- 正运动学方程 | 逆运动学方程
 - 正运动学方程: 计算工具坐标系相对于基坐标系的位置和姿态
 - 逆运动学方程: 给定末端执行器的位置和姿态，计算所有可达到给定位置和姿态的关节角

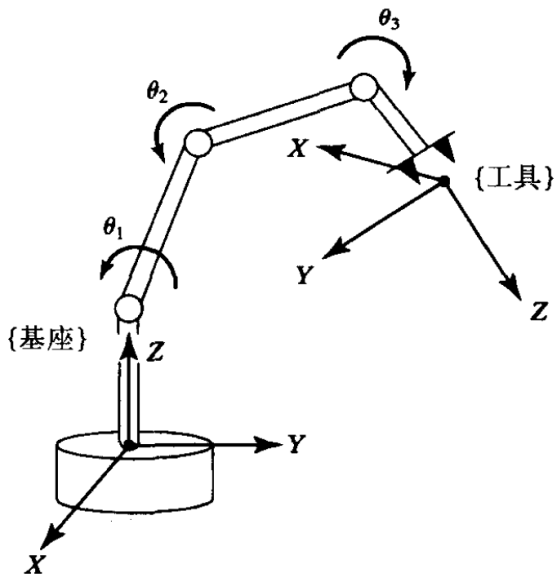


图1-6 正运动学方程描述了各个关节变量在工具坐标系与基坐标系间的函数关系

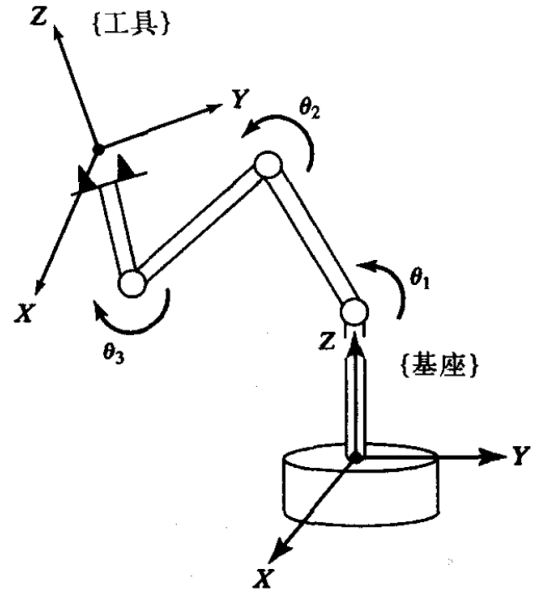


图1-7 给定工具坐标系的位置和姿态，通过逆运动学可以计算各关节变量

雅可比矩阵

- 雅可比矩阵定义了从关节空间速度向笛卡尔空间速度的映射(即关节速率和末端执行器速率的几何关系可以通过雅可比矩阵表示)

雅可比矩阵 (Jacobian Matrix) 是多变量微积分中的重要概念，用于描述向量值函数的一阶偏导数，提供了函数在某点的最佳线性逼近。以下是其详细解释：

定义

对于向量值函数 $\mathbf{F}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ，由 m 个实函数组成：

$$\mathbf{F}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix},$$

其雅可比矩阵 \mathbf{J} 是一个 $m \times n$ 的矩阵，元素为各输出分量对输入变量的偏导数：

$$J_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}.$$

矩阵的每一行对应一个输出函数的梯度（转置）。

示例

考虑函数 $\mathbf{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ，定义为：

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 + z^2 \\ xyz \end{bmatrix},$$

其雅可比矩阵为：

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \\ yz & xz & xy \end{bmatrix}.$$

机构奇异性

- 当机械臂在其工作空间中运动时，会有一些奇异点，会使某些关节出现局部退化现象，导致运动出现问题
- 例如双自由度的关节，其中一个关节运动到另一个关节的切线位置时，就会出现这种现象

空间描述与变换

位置的描述

- 世界坐标系A，表示底座坐标系
 - $\{A\} = [\hat{X}_A, \hat{Y}_A, \hat{Z}_A]$
 - 对于世界坐标系中任一点，都可以用向量 ${}^A P = [p_x \ p_y \ p_z]^T$ 来表示

姿态的描述

- 机械臂上的某一关节坐标系B

◦ $\{B\} = [\hat{X}_B, \hat{Y}_B, \hat{Z}_B]$, $\{A\} \rightarrow \{B\}$ 的变换可以用旋转矩阵 ${}^A_B R$ 来表示

◦ ${}^A_B R = [{}^A\hat{X}_B \quad {}^A\hat{Y}_B \quad {}^A\hat{Z}_B] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$ 这只是一个概念表示, 实际上 r_{ij} 可以用B

坐标系在A坐标系上的投影分量的点积来表示, 所以如下所示

◦ ${}^A_B R = [{}^A\hat{X}_B \quad {}^A\hat{Y}_B \quad {}^A\hat{Z}_B] = \begin{bmatrix} \hat{X}_B \cdot \hat{X}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{X}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{X}_A \\ \hat{X}_B \cdot \hat{Y}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{Y}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{Y}_A \\ \hat{X}_B \cdot \hat{Z}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{Z}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{Z}_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^B\hat{X}_A^T \\ {}^B\hat{Y}_A^T \\ {}^B\hat{Z}_A^T \end{bmatrix} = {}^B_A R^T$

- 即可得到 ${}^A_B R$ 的转置即是 ${}^B_A R$, 而旋转矩阵是一个正交矩阵, 所以 ${}^A_B R = {}^A_B R^{-1} = {}^B_A R$

坐标系的描述

- 姿态只是得到了坐标系的变换, 那么还需要确定坐标系原点位置, 用 ${}^A_B P_{BORG}$ 表示B坐标系原点相对于A坐标系的向量那么得到 $\{B\} = \{{}^A_B R, {}^A_B P_{BORG}\}$
- 如图所示, 也可得 $\{C\} = \{{}^B_C R, {}^B_C P_{CORG}\} \dots$

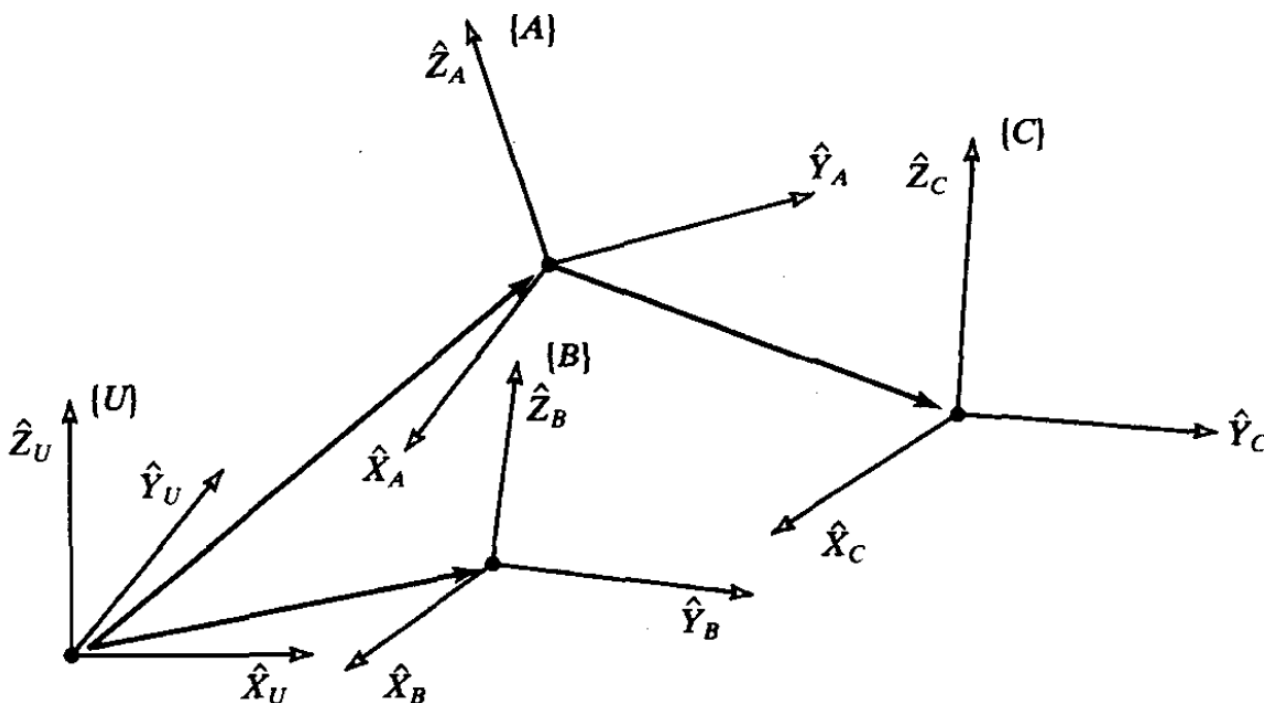


图2-3 几个坐标系举例

坐标系到坐标系的映射

平移变换

- 当{A}和{B}的姿态相同时, 即坐标系并不需要进行旋转变换, 只是平移, 那么 ${}^A P = {}^B P + {}^A P_{BORG}$, 点P相对于{A}的向量, 就相当于点P相对于{B}的向量+{B}原点相对于A坐标系的向量

旋转变换

- 由姿态描述中的变换可得知，如果只有单纯的旋转，则 ${}^A\mathbf{P} = {}^A_B R {}^B\mathbf{P}$
- 而当有旋转+平移时，则 ${}^A\mathbf{P} = {}^A_B R {}^B\mathbf{P} + {}^A P_{BORG} = {}^A_B T {}^B\mathbf{P}$ ，其中T为一个简化的4X4矩阵算子，如下所示

$$\circ \begin{bmatrix} {}^A\mathbf{P} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^A_B \mathbf{R} & {}^A\mathbf{P}_{BORG} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^B\mathbf{P} \\ 1 \end{bmatrix}$$

变换算子

- 例子1(当{B}是{A}绕着 \hat{Z}_A 旋转 θ° 得到的)，那么根据姿态描述中的 ${}^A_B R$ 可得知：

$$\circ {}^A_B T = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 例子2(当{B}是{A}绕着 \hat{Z}_A 旋转 θ° ,沿着 \hat{X}_A 平移10个单位得到的)，那么可得知

$$\circ {}^A_B T = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 10 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 例子3(当{B}是{A}绕着 \hat{Z}_A 旋转 θ° ,沿着 \hat{X}_A 平移 q_x 个单位, \hat{Y}_A 平移 q_y 个单位, \hat{Z}_A 平移 q_z 个单位得到的)，那么可得知

$$\circ {}^A_B T = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & q_x \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & q_y \\ 0 & 0 & 1 & q_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

X-Y-Z固定角

先将{A}绕着 \hat{X}_A 旋转 γ° ,再绕 \hat{Y}_A 旋转 β° ,最后绕 \hat{Z}_A 旋转 α°

$$\bullet {}^A_B R_{XYZ}(\gamma, \beta, \alpha) = R_Z(\alpha) R_Y(\beta) R_X(\gamma) = \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\gamma & -s\gamma \\ 0 & s\gamma & c\gamma \end{bmatrix}$$

(ca = cos(a)，以此类推)

- 注意旋转变化中旋转矩阵不具备交换律，顺序不一样就不一样
- 对上述公式求解得

$${}^A_B R_{XYZ}(\gamma, \beta, \alpha) = \begin{bmatrix} c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma \\ s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

- 上述是正解，当得知旋转矩阵时，如何逆解得到 $\alpha \beta \gamma$

- 方程中有9个方程和3个变量，其中6个方程是相关的，因此实际上只有三个方程和三个变量

$$\beta = \text{Atan2}\left(-r_{31}, \sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2}\right),$$

- 可解得 $\alpha = \text{Atan2}\left(\frac{r_{21}}{c\beta}, \frac{r_{11}}{c\beta}\right)$, (其中 $\text{Atan2}(y, x)$ 是一个双参变量的反正切函数)

$$\gamma = \text{Atan2}\left(\frac{r_{32}}{c\beta}, \frac{r_{33}}{c\beta}\right).$$

- 特殊解:

- 当 $\beta = 90^\circ$ 时, $\alpha = 0$, $\gamma = \text{Atan2}(r_{12}, r_{22})$

- 当 $\beta = -90^\circ$ 时, $\alpha = 0$, $\gamma = -\text{Atan2}(r_{12}, r_{22})$

Z-Y-X欧拉角

先将{A}绕着 \hat{Z}_A 旋转 γ° , 再绕 \hat{Y}_A 旋转 β° , 最后绕 \hat{X}_A 旋转 α°

- 由Z-Y-X欧拉角可得知 X-Y-Z和Z-Y-X等价，所以三次绕固定轴旋转的最终姿态和以相反顺序三次绕运动坐标轴旋转的最终姿态相同。

Z-Y-Z欧拉角

先将{A}绕着 \hat{Z}_A 旋转 γ° , 再绕 \hat{Y}_A 旋转 β° , 最后绕 \hat{Z}_A 旋转 α°

$${}^A_B R_{Z'Y'Z'}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} c\alpha s\beta c\gamma - s\alpha s\gamma & -(c\alpha c\beta s\gamma + s\alpha c\gamma) & c\alpha s\beta \\ s\alpha c\beta c\gamma + c\alpha s\gamma & -s\alpha c\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta \\ -s\beta c\gamma & s\beta s\gamma & c\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

- 逆解:

$$\beta = A \tan 2\left(\sqrt{r_{31}^2 + r_{32}^2}, r_{33}\right),$$

- $\alpha = A \tan 2\left(\frac{r_{23}}{s\beta}, \frac{r_{13}}{s\beta}\right),$

$$\gamma = A \tan 2\left(\frac{r_{32}}{s\beta}, -\frac{r_{31}}{s\beta}\right).$$

- 特殊解

- $\beta = 0$ 时, $\alpha = 0, \gamma = \text{Atan2}(-r_{12}, r_{11})$
- $\beta = 180$ 时, $\alpha = 0, \gamma = \text{Atan2}(-r_{12}, -r_{11})$

非主轴旋转

首先将坐标系{B}和一个已知参考坐标系{A}重合, 将{B}绕向量 ${}^A\hat{K}$ 按右手定则旋转 θ 角。

- 则等效旋转阵为

$$R_K(\theta) = \begin{bmatrix} k_x^2 v\theta + c\theta & k_x k_y v\theta - k_z s\theta & k_x k_z v\theta + k_y s\theta \\ k_y k_x v\theta + k_z s\theta & k_y^2 v\theta + c\theta & k_y k_z v\theta - k_x s\theta \\ k_z k_x v\theta - k_y s\theta & k_z k_y v\theta + k_x s\theta & k_z^2 v\theta + c\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

(θ 的正负由右手定则决定, 大拇指指向 ${}^A\hat{K}$ 的正方向)

- 求解旋转角 θ
 - 由于旋转阵为正交阵, 所以矩阵的迹为 $\text{tr}(R) = r_{11} + r_{22} + r_{33}$
 - 根据Rodrigues公式可得 $R_{\mathbf{k}}(\theta) = \mathbf{I} \cos \theta + (1 - \cos \theta) \mathbf{k} \mathbf{k}^T + [\mathbf{k}]_{\times} \sin \theta$, 其中 $[\mathbf{k}]_{\times} = \begin{pmatrix} 0 & -k_z & k_y \\ k_z & 0 & -k_x \\ -k_y & k_x & 0 \end{pmatrix}$, 是由 ${}^A\hat{K}$ 生成的反对称矩阵
 - 所以根据Rodrigues公式可得 $\text{tr}(R) = 1 + 2 \cos \theta \implies \cos \theta = \frac{\text{tr}(R) - 1}{2}$

- 求解旋转轴 ${}^A\hat{K}$

- 由旋转角可得 $\hat{\mathbf{K}} = \frac{1}{2 \sin \theta} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix}$
- 如果 θ 为 0° 或者 180° 时, 无解

操作臂运动学

为什么机械臂至少要有六个关节是最好的, 因为描述一个物体在空间的位置和姿态时需要六个参数- >3个位置和3个方位

连杆

- 连杆长度: 关节轴 $i-1$ 和关节轴 i 之间的公垂线长度 a_{i-1}

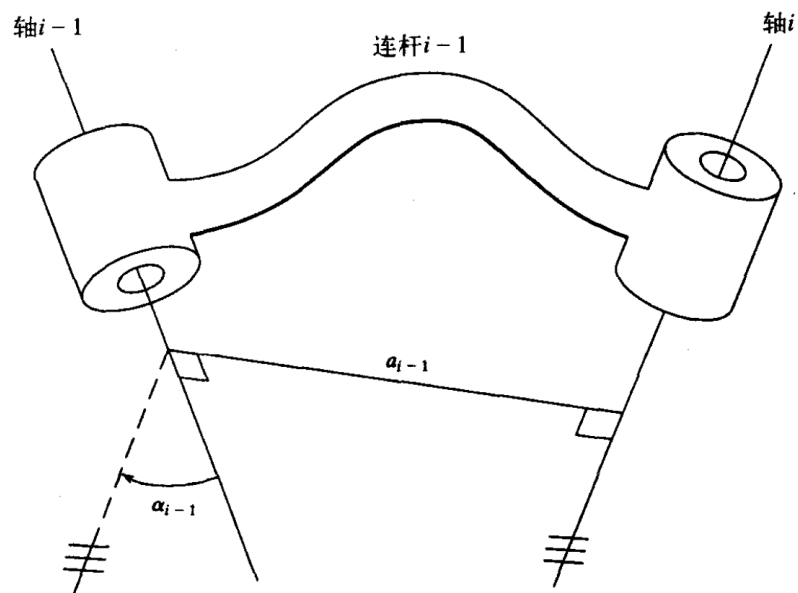


图3-2 一个连杆的运动参数是由连杆两端关节轴的相对关系决定的，可以用两个参数描述这种关系：连杆的长度 a 和连杆转角 α

- 连杆转角

- 找到一个切面垂直于 a_{i-1} ，并且平行于关节轴 $i-1$ 和关节轴 i
- 将关节轴 i 按照右手法则绕着公垂线 a_{i-1} 旋转，到达关节轴 $i-1$ 的角度为关节轴 $i-1$ 和关节轴 i 的夹角 α_{i-1}
- 注：一般以关节轴 $i-1$ 指向关节轴 i 为正方向

- 连杆连接的描述

- 连杆偏距：关节轴 $i-1$ 和关节轴 i 之间的公垂线 a_{i-1} 与关节轴 i 和关节轴 $i+1$ 之间的公垂线 a_i 之间沿公共轴线方向的距离 d_i 为连杆偏距
- 关节角：相邻连杆绕公共轴线旋转的夹角为关节角 θ_i (当关节轴 i 为转动关节时， θ_i 是一个变量)

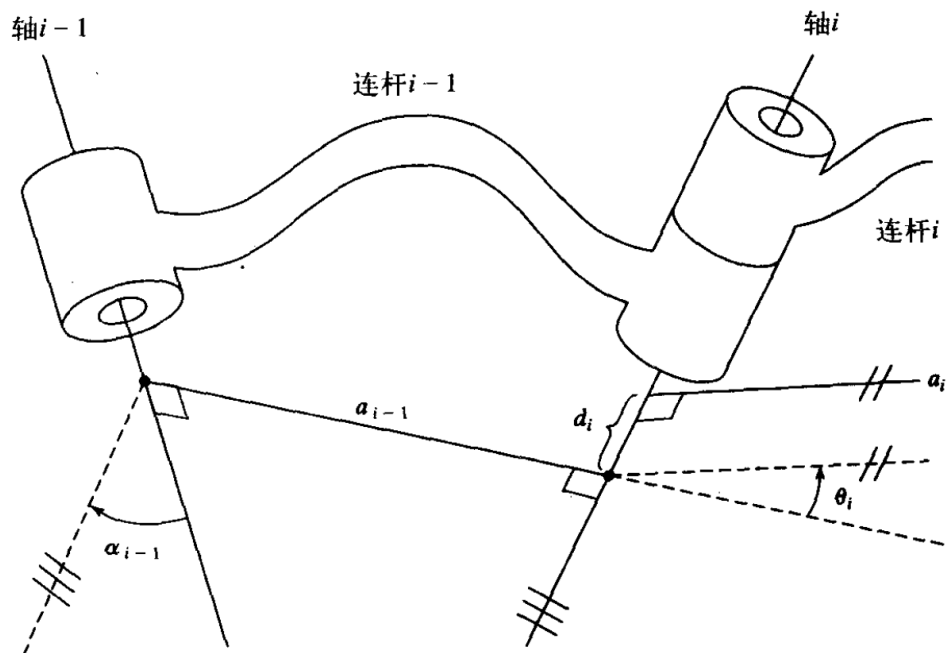


图3-4 用来描述相邻连杆之间连接关系的两个参数：连杆的偏距 d 和关节角 θ

- 首位关节连杆转角以及关节角一般设置为0
- Denavit-Hartenberg参数
 - 连杆长度 a_{i-1}
 - 连杆转角 α_{i-1}
 - 连杆偏距 d_i
 - 关节角 θ_i (唯一变量)
 - 所以六轴机械臂用18个参数就可以描述，即六组 $(a_{i-1}, \alpha_{i-1}, d_i)$

连杆附加坐标系

连杆坐标系建立

- 对于连杆 $i-1$ ，坐标系 $\{i-1\}$ 的 \hat{Z}_{i-1} 轴与关节轴 $i-1$ 重合，坐标系 $\{i-1\}$ 的原点位于公垂线 a_{i-1} 与关节轴 $i-1$ 的交点处， \hat{X}_{i-1} 沿公垂线 a_{i-1} 指向关节 i ，然后按照右手法则确定 \hat{Y}_{i-1} 的位置
- 右手法则: 伸出右手，食指沿 x 轴，中指沿 y 轴，则大拇指方向即为 z 轴

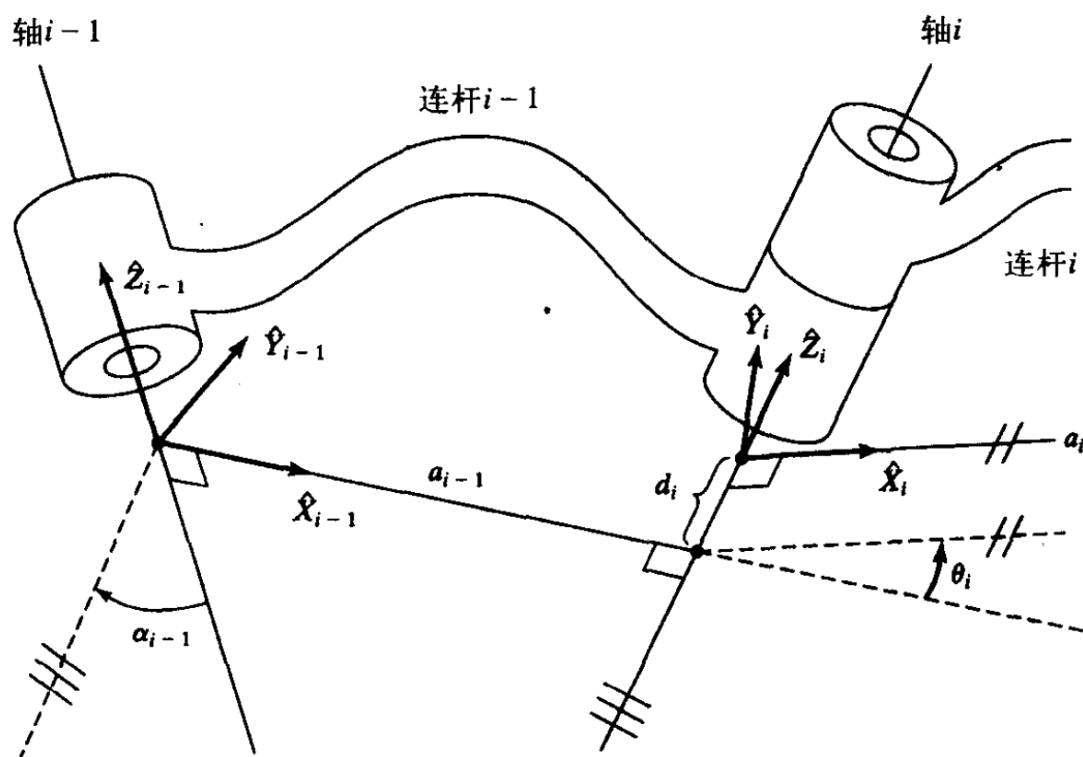


图3-5 固连于连杆 i 上的连杆坐标系 $\{i\}$

连杆参数和连杆坐标系之间的关系

- a_{i-1} = 沿 \hat{X}_{i-1} 轴，从 \hat{Z}_{i-1} 到 \hat{Z}_i 的距离
- α_{i-1} = 绕 \hat{X}_{i-1} 轴，从 \hat{Z}_{i-1} 旋转到 \hat{Z}_i 的角度
- d_i = 沿 \hat{Z}_i 轴，从 \hat{X}_{i-1} 到 \hat{X}_i 的距离
- θ_i = 沿 \hat{Z}_i 轴，从 \hat{X}_{i-1} 旋转到 \hat{X}_i 的角度

操作臂运动学

建立坐标系 $\{i-1\}$ 到坐标系 $\{i\}$ 之间的变换, 对应的是四个连杆参数构成的函数

- 我们定义三个中间坐标系，来过渡坐标系 $\{i-1\}$ 到坐标系 $\{i\}$ 之间的变换
 - $\{R\}$: 表示坐标系 $\{i-1\}$ 经过旋转 α_i 之后得到的坐标系
 - $\{Q\}$: 表示 $\{R\}$ 经过平移 a_i 得到的坐标系
 - $\{P\}$: 表示 $\{Q\}$ 经过旋转 θ_i 得到的坐标系
 - $\{i\}$: $\{P\}$ 经过平移 d_i 得到

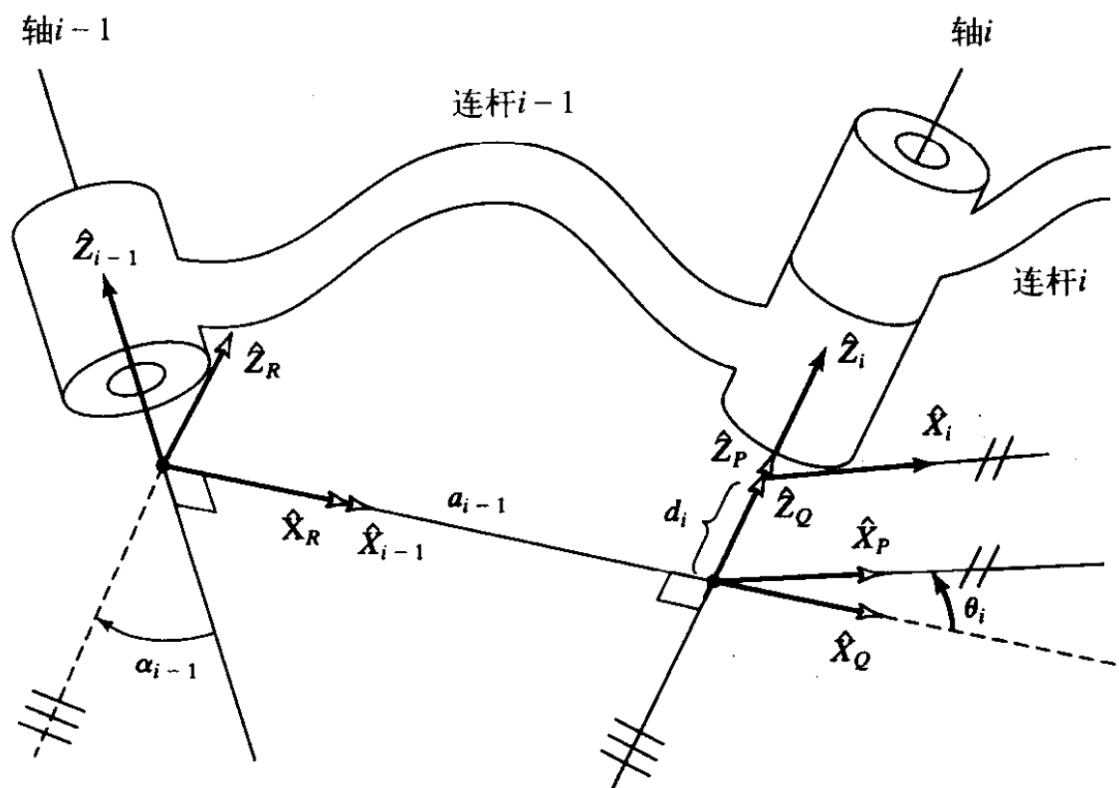


图3-15 中间坐标系{P}，{Q}和{R}的位置

- 那么一个 $\{i\}$ 中的点 iP 想要转化成 $\{i-1\}$ 中的点 ${}^{i-1}P$ ，可以做下列变换

- $${}^{i-1}\mathbf{P} = {}_R^{i-1}\mathbf{T} {}_Q^R\mathbf{T} {}_P^Q\mathbf{T} {}_i^P\mathbf{T} {}^i\mathbf{P} = {}_i^{i-1}\mathbf{T} {}^i\mathbf{P}$$

- 转化为第二章中所述旋转平移变换 ${}^{i-1}T_i = R_X(\alpha_{i-1}) D_X(a_{i-1}) R_Z(\theta_i) D_Z(d_i)$

- 其中解得 ${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} d_i \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (这是本书导出的结果)

- (旧)标准 Denavit-Hartenberg 变换公式得到的是如下，其将坐标系定义在了连杆的远端，上述的是改进DH方法,避免标准DH方法在并联机构或某些复杂结构中的参数矛盾，使参数更直观。

$$T_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cos \alpha_{i-1} & \sin \theta_i \sin \alpha_{i-1} & a_{i-1} \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cos \alpha_{i-1} & -\cos \theta_i \sin \alpha_{i-1} & a_{i-1} \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_{i-1} & \cos \alpha_{i-1} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

操作臂逆运动学

- 对于六轴机器臂而言，存在6个变量(6个关节角 θ_i)，以及多达16个解

解法

有封闭解的充分条件

- 当有多个 α_i 为 0° 或者 90° 时，存在封闭解(即可通过代数求解得到)
- 所以六轴机械臂一般都有几个正交关节轴，例如零差云控就有2组3个两两正交的关节轴

求解流程

1. 已知一般目标坐标系 ${}^S_G T$ ，计算一个修正的目标坐标系 ${}^{S'}_G T$ ，使得 ${}^{S'}_G T$ 位于操作臂的子空间内，并且和 ${}^S_G T$ 尽可能的靠近
2. 将 ${}^{S'}_G T$ 作为期望目标，计算逆运动学，求关节角。当目标点不在操作臂的工作空间内时，无解

代数解法和几何解法

代数解法

假设我们有下图所示平面三连杆操作臂以及其连杆参数

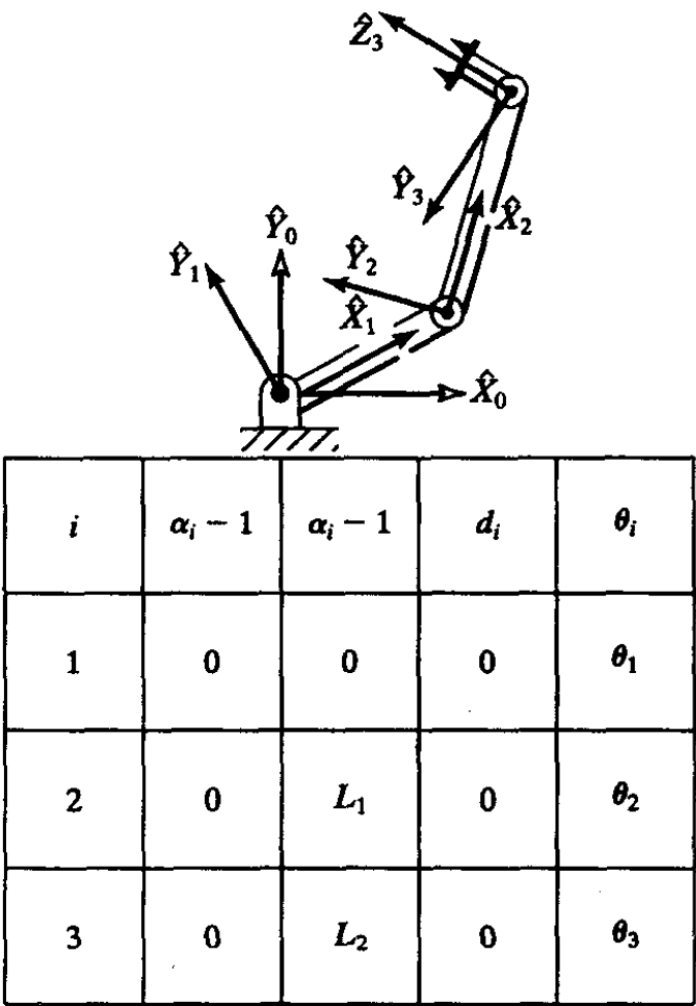


图4-7 平面三连杆操作臂和它的连杆参数

- 运动学方程 ${}^B_W T = {}^0_3 T = {}^0_1 T {}^1_2 T {}^2_3 T$

$$\circ \quad {}^0_1T = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\circ \quad {}^1_2T = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & L_1 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\circ \quad {}^2_3T = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & L_2 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

◦ 得到结果

$$\begin{aligned} {}^0T_3 &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & -\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & 0 & L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + L_1 \cos(\theta_1) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & 0 & L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + L_1 \sin(\theta_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & l_1 s_1 + l_2 s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

逆运动学问题

上面是基于TCP得到了相对于基坐标系的变换

$$\bullet \quad {}^B_wT = \begin{bmatrix} c_\phi & -s_\phi & 0 & x \\ s_\phi & c_\phi & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 因为这个例子是平面操作臂，那么知道TCP点相对于基坐标系的x,y映射，如何逆求解得到 $\theta_1 \theta_2 \theta_3$
- 过程可见书84-86页

计算问题

- 关于Atan2的查表法子程序经常被用于获得更高的速度

速度与静力

符号表示

位置向量的微分表示

- ${}^B\mathbf{V}_Q = \frac{d}{dt} ({}^B\mathbf{Q}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{{}^B\mathbf{Q}(t + \Delta t) - {}^B\mathbf{Q}(t)}{\Delta t}$
 - \mathbf{Q} 相对于坐标系{B}的微分表示, 对于不同坐标系的微分结果是不同的
 - 例如对于{A}坐标系的微分表示为 ${}^A({}^B\mathbf{V}_Q) = {}^A_B R ({}^B\mathbf{V}_Q) = \frac{{}^A d_B}{dt} ({}^B\mathbf{Q})$
- 因为一般我们定义的是某个坐标系的原点对于世界坐标系的速度(也就是关节坐标系或者工具坐标系的原点对于基坐标系的速度)

角速度向量

- 角速度向量符号: Ω
- 坐标系{B}相对于坐标系{A}的旋转: ${}^A\Omega_B$
- 坐标系{B}相对于坐标系{A}的旋转在坐标系{C}中的描述: ${}^C({}^A\Omega_B)$
- 坐标系{C}相对于已知参考坐标系{U}的角速度: ω_C
- 坐标系{C}相对于已知参考坐标系{U}在坐标系{A}中的描述: ${}^A\omega_C$

刚体的角速度和线速度

线速度

- 如下图所示, \mathbf{Q} 相对于{A}的线速度就是:
 - ${}^A\mathbf{V}_Q = {}^A\mathbf{V}_{\text{BORG}} + {}^A_B \mathbf{R} {}^B\mathbf{V}_Q$

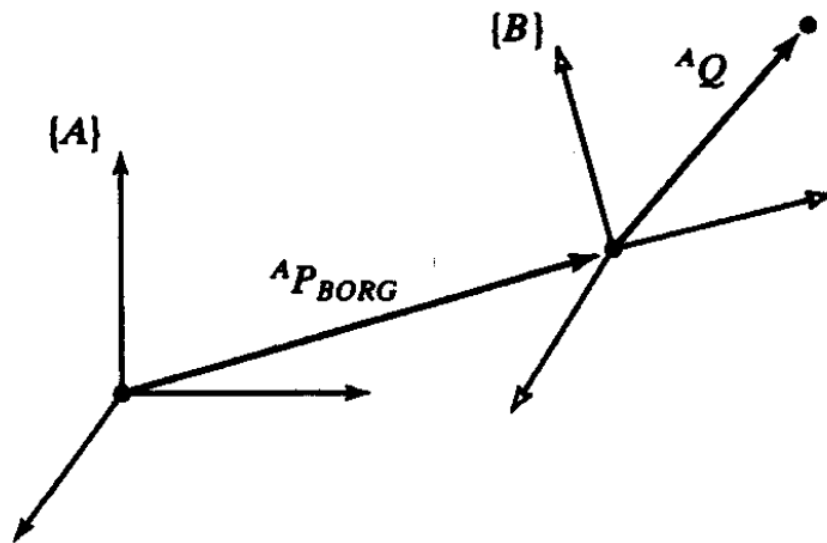


图5-3 坐标系{B}以速度 ${}^A V_{BORG}$ 相对于坐标系{A}平移

角速度

- 设{A}和{B}坐标系原点重合，并且相互之间没有任何线速度
- ${}^B Q$ 是一个在{B}中的固定向量，{B}相对于{A}的旋转速度向量用 ${}^A \Omega_B$ 表示
 - 那么 ${}^B V_Q = 0$
 - ${}^A V_Q = {}^A_B R \dot{{}^B V_Q} + {}^A \Omega_B \times ({}^A_B R {}^B Q)$

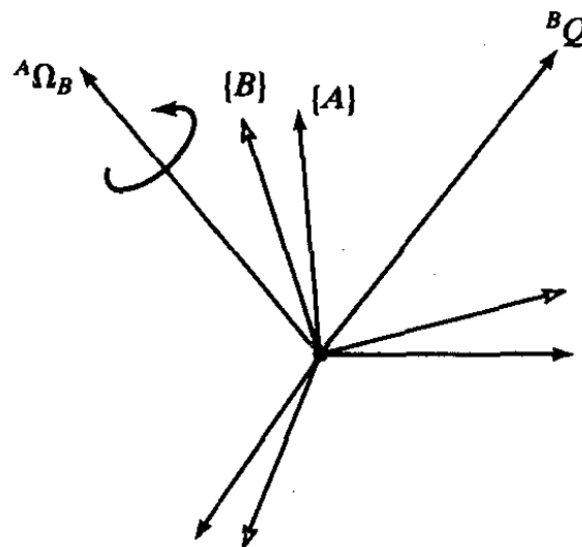


图5-4 固定在坐标系{B}中的矢量 ${}^B Q$ 以角速度 ${}^A \Omega_B$ 相对于坐标系{A}旋转

角速度和线速度同时存在

- 可有上述两个式子得到 ${}^A V_Q = {}^A V_{BORG} + {}^A_B R ({}^B V_Q) + {}^A \Omega_B \times ({}^A_B R ({}^B Q))$

连杆间的速度传递

操作臂是一个链式结构，每一个连杆的运动都与它的相邻杆有关。所以连杆 $i+1$ 的速度就是连杆 i 的速度加上那些 $i+1$ 上新的速度的分量

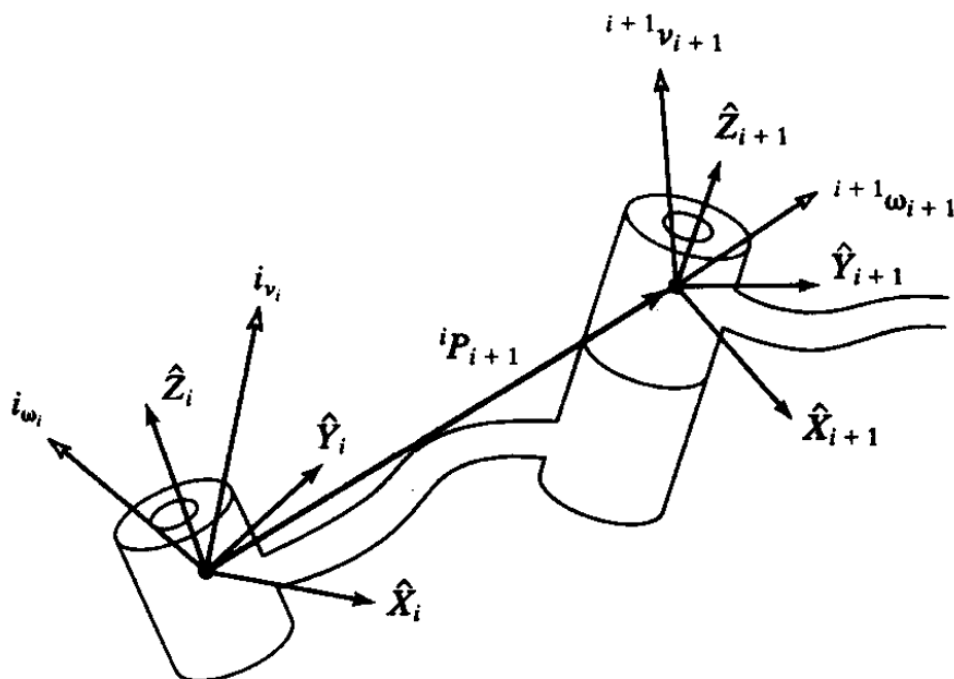


图5-7 相邻连杆的速度矢量

- 角速度: ${}^i\omega_{i+1} = {}^i\omega_i + {}^i_{i+1}\mathbf{R} \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}\hat{\mathbf{z}}_{i+1}$
 - ${}^i\omega_{i+1}$: 关节 $i+1$ 的角速度在坐标系 i 中的表示
 - ${}^i_{i+1}\mathbf{R}$ 为从 $i+1$ 坐标系转换到 i 坐标系的旋转矩阵
 - $\dot{\theta}_{i+1}$ 为第 $i+1$ 关节的关节角速度
 - ${}^{i+1}\hat{\mathbf{z}}_{i+1}$ 表示在 $i+1$ 坐标系中沿 Z 轴的单位向量
- 线速度:
 - 关节 $i+1$ 的线速度是由，关节 i 的线速度+关节 i 的角速度引起的关节 $i+1$ 的移动变化分量
 - 得到 ${}^i\mathbf{v}_{i+1} = {}^i\mathbf{v}_i + {}^i\omega_i \times {}^i\mathbf{P}_{i+1}$
- 角速度和线速度相对于 $i+1$ 坐标系的表示，对上式左右各左乘 ${}^{i+1}_i\mathbf{R}$
 - 角速度 ${}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}_i\mathbf{R} ({}^i\omega_i) + \dot{\theta}_{i+1} ({}^{i+1}\hat{\mathbf{z}}_{i+1})$
 - 线速度 ${}^{i+1}\mathbf{v}_{i+1} = {}^{i+1}_i\mathbf{R} ({}^i\mathbf{v}_i + {}^i\omega_i \times {}^i\mathbf{P}_{i+1})$

例子

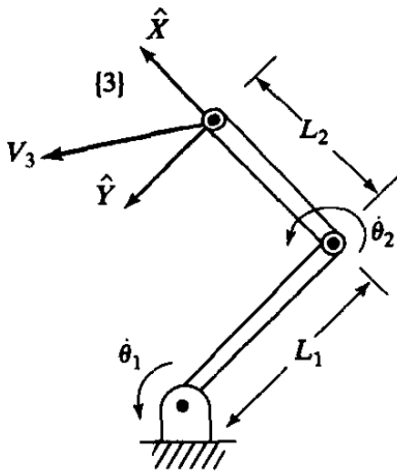


图5-8 两连杆操作臂

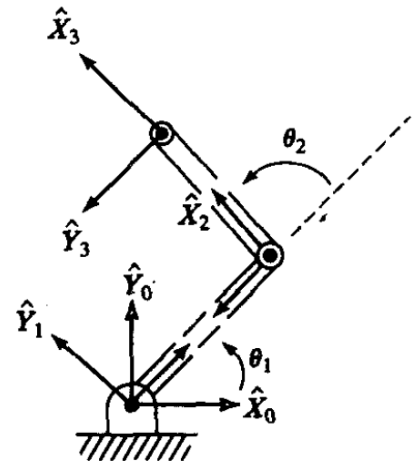


图5-9 两连杆操作臂的坐标系布局

- 首先我们得到坐标系0123之间的变换矩阵

$${}^0_1T = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1_2T = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & l_1 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2_3T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 依次我们可以得到各连杆的角速度和线速度

$${}^1\omega_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

$${}^1\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^2\omega_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$${}^2\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 \\ -s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 \dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 s_2 \dot{\theta}_1 \\ l_1 c_2 \dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^3\omega_3 = {}^2\omega_2$$

$${}^3\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} l_1 s_2 \dot{\theta}_1 \\ l_1 c_2 \dot{\theta}_1 + l_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

- 为了得到TCP原点对于基坐标系的速度

- ${}^0_3\mathbf{R} = {}^0_1\mathbf{R} {}^1_2\mathbf{R} {}^2_3\mathbf{R} = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 \\ s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- ${}^0\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 \dot{\theta}_1 - l_2 s_{12} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ l_1 c_1 \dot{\theta}_1 + l_2 c_{12} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix}$