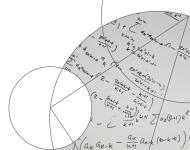


Lamjed Lounissi Laboratoire Jacques-Louis Lions



Lamjed Lounissi

Présentation du modèle Préliminaires géometriques

5 10

Existence et unicité

Problème variationnel mixte

Discrétisation par la métho spectrale

Outils de la discrétisation

Le problème discret

Mise en œuvre de la discrétisation

Système matriciel

Discrétisation par élément

Notations

Le problème discret

Résultat d'existence et d'unicité

Estimation d'erreur

Conclusions et perspective



• Soit ω un domaine lipschitzien de \mathbb{R}^2

• La surface moyenne de la coque : $S = \varphi(\overline{\omega})$, où $\varphi \in W^{2,\infty}(\omega,\mathbb{R}^3)$.

• les vecteurs :

$$a_1 = \partial_1 \varphi, \quad a_2 = \partial_2 \varphi$$

sont linéairement indépendants en tout point de $\overline{\omega}$. On définit le vecteur normal unitaire

$$a_3 = \frac{a_1 \wedge a_2}{|a_1 \wedge a_2|}$$

à la surface au point $\varphi(x,y)$.

Lamjed Lounissi

Présentation du modèle Préliminaires géometriques

Problème continu

B 1 10 11

- Premier probleme variation

Problème variationnel mixto

spectrale

Outils de la discrétisation

Le problème discret

Mise en œuvre de la discrétisation

Système matriciel

Discrétisation par élément

Notations

Le problème discret

Résultat d'existence et d'unicité

Estimation d'erreur

Conclusions et perspective



• Les vecteurs a_i définissent une base covariante au point $\varphi(x,y)$ et appartiennent à $W^{1,\infty}(\omega,\mathbb{R}^3)$

• On note $a(x, y) = |a_1(x, y) \wedge a_2(x, y)|$

• On définit la première et la deuxième forme fondamentale de la surface moyenne par leurs composantes covariantes :

$$a_{\alpha\beta}=a_{\alpha}\cdot a_{\beta}$$

et

$$b_{\alpha\beta}=\mathsf{a}_\alpha\cdot\partial_\beta\mathsf{a}_\alpha$$

Lamjed Lounissi

D. Co., Lordon, L. . . . DI

Préliminaires géometriques

- Tobleme continu

Premier problème variationn

Doubline contained with

Discrétisation par la méthodes spectrale

Outils de la discrétisation

Mise en œuvre de la discrétisation

Système matriciel

Résultats numériques

Discrétisation par élément spectraux

Notations

Le problème discret

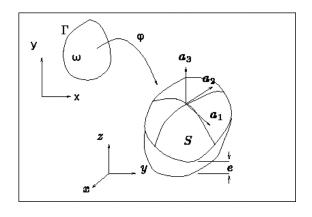
Resultat d'existence et d'unicit

Estimation d'erreur

Conclusions et perspective



FIGURE: La surface moyenne de la coque



Lamjed Lounissi

Présentation du modèle

Préliminaires géometriques

Problème continu

Premier problème variatio

Problème variationnel mixt

spectrale

Outils de la discrétisation

Le problème discret

Mise en œuvre de la discrétisation

Système matricie

Discrétisation par éléments

Notation

Le problème discret

Résultat d'existence et d'unicité

Estimation d'erreur

Conclusions et perspective

U⊃MC

Notations

- $u = u_i a^i = u_i^c e_i$ un déplacement de la surface moyenne de la coque appartenant à $H^1(\omega)^3$
- $r = r_{\alpha} a^{\alpha}$ une rotation autour de la normale a_3 qui est bien sûr tangente à la surface moyenne de la coque.
- Le tenseur d'élasticité de la surface moyenne de la coque :

$$a^{lphaeta
ho\sigma}=rac{E}{2(1+
u)}(a^{lpha
ho}a^{eta\sigma}+a^{lpha\sigma}a^{eta
ho})+rac{E
u}{1-
u^2}a^{lphaeta}a^{
ho\sigma}.$$

où $a^{\alpha\beta\rho\sigma}\in L^\infty(\omega)$ et dans le cas d'un matériau homogène et isotrope de module de Young E>0 et de cœfficient de Poisson ν , $0\leq \nu<\frac{1}{2}$

Lamjed Lounissi

Présentation du modèle

Préliminaires géometriques

Probleme continu

Existence et unicité

Problème variationnel mixte

spectrale

Outils de la discrétisation

Le problème discret

Mise en œuvre de la discrétisation

Résultats numériques

Discrétisation par élémen pectraux

Notatio

Le problème discret

Estimation d'erreur

Conclusions et perspective

U⊃MC

Notations

• Le tenseur de déformation de la surface moyenne de la coque :

$$\gamma_{lphaeta}(u)=rac{1}{2}(\partial_{lpha}u.a_{eta}+\partial_{eta}u.a_{lpha})$$

 Le tenseur de changement de courbure de la surface moyenne de la coque :

$$\chi_{\alpha\beta}(u,r) = \frac{1}{2}(\partial_{\alpha}u.\partial_{\beta}a_3 + \partial_{\beta}u.\partial_{\alpha}a_3 + \partial_{\alpha}r.a_{\beta} + \partial_{\beta}.a_{\alpha})$$

 Le tenseur de déformation de cisaillement transverse de la surface moyenne :

$$\delta_{\alpha 3}(u,r) = \frac{1}{2}(\partial_{\alpha}u.a_3 + r.a_{\alpha})$$

Lamjed Lounissi

Présentation du modèl

Problème continu

Premier problème variationnel

Problème variationnel mixte

spectrale

Outils de la discrétisation

Le problème discret

Mise en œuvre de la discrétisation

Résultats numériques

Discrétisation par éléments spectraux

Notatio

Résultat d'evistence et d'unici

Estimation d'erreur

Conclusions et perspective

U⊃MC

Formulation variationnelle

Conditions aux bord

le bord $\partial \omega$ est divisé en deux parties, γ_0 sur laquelle la coque est encastrée et $\gamma_1 = \partial \omega \setminus \gamma_0$ sur laquelle la coque est soumise à des forces extérieures.

Espaces

- $H^1_{\gamma_0}(\omega) = \{ \mu \in H^1(\omega); \ \mu = 0 \text{ sur } \gamma_0 \}.$
- $\mathbb{V}(\omega) = \{(v,s) \in H^1_{\gamma_0}(\omega)^3 \times H^1_{\gamma_0}(\omega)^3; s.a_3 = 0 \text{ sur } \omega\}$

La norme

$$\|(v,s)\|_{\mathbb{V}(\omega)} = (\|v\|_{H^1(\omega)^3}^2 + \|s\|_{H^1(\omega)^3}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Lamjed Lounissi

Présentation du modèle

Problème continu

Premier problème variationnel

Existence et unicité

Problème variationnel mivt

Discrétisation par la métho

Outile do la discrétication

La problèma discret

Mise en œuvre de la

Système matriciel

Discrétisation par élémen spectraux

NOLATIONS

Le problème discret

Estimation d'erreur

Conclusions et perspectiv

<u>n</u>⊃wc

Problème variationnel

Trouver $(u, r) \in \mathbb{V}(\omega)$ tel que

$$a((u,r);(v,s))=\mathcal{L}((v,s)),$$

Forme bilinéaire

$$a((u,r);(v,s)) =$$

$$\int_{\omega} \left\{ e \mathsf{a}^{\alpha\beta\rho\sigma} \left[\gamma_{\alpha\beta}(u) \gamma_{\rho\sigma}(v) + \frac{\mathsf{e}^2}{12} \chi_{\alpha\beta}(u,r) \chi_{\rho\sigma}(v,s) \right] \right\}$$

$$+2e\frac{E}{1+\nu}a^{\alpha\beta}\delta_{\alpha3}(u,r)\delta_{\beta3}(v,s)\Big\}\sqrt{a}\,dx$$

Lamjed Lounissi

Présentation du modèl

Préliminaires géometriques

Premier problème variationnel

Existence et unicité

Problème variationnel mixt

Discrétisation par la méthode spectrale

Outils de la discrétisation

Le problème discret

Mise en œuvre de la discrétisation

Résultats numériques

Discrétisation par éléments spectraux

Ivotations

Le problème discret

Estimation d'erreur

Conclusions et perspective

<u>u</u>>mc

La forme linéraire $\mathcal{L}(.)$ est donnée par

$$\mathcal{L}((v,s)) = \int_{\omega} f.v\sqrt{a}\,dx + \int_{\gamma_1} (N.v + Ms)\,d\tau \tag{1}$$

Lamjed Lounissi

Présentation du modè

Problème continu

Existence et unicité

Problème variationnel mixt

spectrale Discretisation par la method

Outils de la discrétisation

Mise en œuvre de la discrétisation

Système matriciel Résultats numériques

Discrétisation par éléments pectraux

Le problème discret Résultat d'existence et d'unicité

Conclusions at perspectives

Existence et unicité de la solution

Idée de la démonstration

- Vérifier les hypothèses de Lax-Milgram.
- La continuité est clair.
- Il suffit de montrer la V-ellipticité de la forme bilinéaire :

Lemme

$$\forall (v,s) \in \mathbb{V}(\omega), \qquad a((v,s),(v,s)) \geq ce^3 |(v,s)|^2.$$

$$\sum_{\alpha=1}^{2} \|\delta_{\alpha3}(v,s)\|_{L^{2}(\omega)}^{2})^{\frac{1}{2}}$$

UPMC

Lamjed Lounissi

Présentation du modèl

Problème continu

Premier problème variationn

Existence et unicité

Problème variationnel mix

spectrale

Outils de la discrétisation

Mise en œuvre de la

Système matricie

Discretisation par elements spectraux

Notatio

Le problème discret

Résultat d'existence et d'unic

Conclusions et perspective

U⊃MC

Existence et unicité

Le lemme du mouvement rigide

Soient $u \in H^1(\omega; \mathbb{R}^3)$ et $r \in H^1(\omega; \mathbb{R}^3)$ tel que $r.a_3 = 0$. Soit $\varphi \in W^{2,\infty}(\omega; \mathbb{R}^3)$.

i) On suppose que $\gamma_{\alpha\beta}^{N}(u)=0$ alors il existe un unique

$$\psi \in L^2(\omega; \mathbb{R}^3)$$
 tel que $\partial_{\alpha} u = \psi \wedge \partial_{\alpha} \varphi$

ii) Si
$$\delta_{\alpha 3}^{N}(u,r) = 0$$
 alors $\partial_{\alpha} u.a_{3} = -r.a_{\alpha}$ appartient à $H^{1}(\omega)$. De plus $r.a_{\alpha} = -\varepsilon_{\alpha\beta}\psi.a^{\beta}$.

iii) Si de plus, $\chi^N_{\alpha\beta}(u,r)=0$, alors ψ s'identifie à un vecteur constant de \mathbb{R}^3 et l'on a

$$u(x,y) = c + \psi \wedge \varphi(x,y)$$

où c est un vecteur constant de \mathbb{R}^3 et

$$r(x,y) = -(\varepsilon_{\alpha\beta}(x,y)\psi.a^{\beta}(x,y))a^{\alpha}(x,y)$$

Lamjed Lounissi

Présentation du modèle

Problème continu

Premier problème variationn

Existence et unicité

Discrétisation par la métho

Outils de la discrétisation

Le problème discret

discrétisation

Discrétisation par élémer

Notatio

Le problème discret

Estimation d'erreur

Conclusions et perspective

<u>n</u>⊃wc

Existence et unicité

Théorème d'existence d'unicité(A.Blouza et H.Le dret)

Pour tout $(f, M, N) \in H^1_{\gamma_0}(\omega)^{3'} \times H^{\frac{1}{2}}_{00}(\gamma_1)^{3'} \times H^{\frac{1}{2}}_{00}(\gamma_1)^{3'}$, le premier problème variationnel admet une solution unique $(u, r) \in \mathbb{V}(\omega)$. De plus, cette solution vérifie

$$\|(u,r)\|_{\mathbb{V}(\omega)} \le ce^{-3}\|\mathcal{L}\|. \tag{2}$$

$$H_{00}^{\frac{1}{2}}(\gamma_1) = \{ u \in H^{\frac{1}{2}}(\gamma_1) / u_0 / \partial \omega \in H^{\frac{1}{2}}(\partial \omega) \}$$

Lamjed Lounissi

Présentation du modè

Problème continu

Premier problème variations

Problème variationnel mixte

spectrale

Outils de la discrétisation

Mise en œuvre de la

Système matriciel Résultats numériques

Discrétisation par élément spectraux

Notatio

Le probleme discret

Estimation d'erreur

Conclusions et perspective



Problème variationnel mixte

Difficultés

- Problème avec la contrainte tangentielle s.a₃ = 0 qui est difficile a implémenter.
- L'idée consiste à traiter cette contrainte par l'introduction d'un multiplicateur de Lagrange λ pour imposer à $s.a_3=0$ de s'annuler.
- En vu de la discrétisation, il est également important d'ajouter un terme de stabilisation à a(.,.)

Lamjed Lounissi

Présentation du modè

Problème continu

Premier problème variationne

Problème variationnel mixte

Discrétisation par la méthod spectrale

Outils de la discrétisation

Le problème discret

Mise en œuvre de la discrétisation

Système matriciel

Discrétisation par éléments

Notatio

Le problème disc

Résultat d'existence et d'unic

Estimation d'erreur

Conclusions et perspective

<u>u</u>>mc

Formulation variationnelle mixte

Espace et norme

On introduit l'espace des fonctions suivant

$$\mathbb{X}(\omega) = H^1_{\gamma_0}(\omega)^3 \times H^1_{\gamma_0}(\omega)^3$$

muni de la norme

$$\|(v,s)\|_{\mathbb{X}(\omega)}=(\|v\|_{H^1(\omega)^3}^2+\|s\|_{H^1(\omega)^3}^2)^{\frac{1}{2}}$$

soit $\mathbb{M}(\omega)=H^1_{\gamma_0}(\omega)$.

On pose U = (u, r) et V = (v, s)

Lamjed Lounissi

Présentation du modè

Problème continu

Premier problème variation

Problème variationnel mixte

Discrétisation par la méthode spectrale

Outils de la discrétisation

Le problème discret

Mise en œuvre de la discrétisation

Système matriciel Résultats numériques

Discrétisation par éléments spectraux

Notatio

Le problème discret

Résultat d'existence et d'unicit

Estimation d'erreur

conclusions et perspective

UPMC

Formulation variationnelle mixte

Problème variationnel mixte

$$\begin{cases} \forall V \in \mathbb{X}(\omega), & a(U,V) + \eta \ \tilde{a}(U,V) + b(V,\psi) = \mathcal{L}(V) \\ \forall \chi \in \mathbb{M}(\omega), & b(U,\chi) = 0 \end{cases}$$
 (3)

où η est un paramètre positif.

Formes bilinéaires supplémentaires

•
$$\tilde{a}(U,V) = \int_{\Omega} \partial_{\alpha}(r.a_3) \partial_{\alpha}(s.a_3) dx$$

•
$$b(V,\chi) = \int \partial_{\alpha}(s.a_3)\partial_{\alpha}\chi dx$$

Lamjed Lounissi

Présentation du modèl

Problème continu

Premier problème variationne Existence et unicité

Problème variationnel mixte

spectrale

Outils de la discrétisation

Mise en œuvre de la discrétisation

Système matriciel
Résultats numériques

Discrétisation par élémer spectraux

Notation

Le problème discret

Estimation d'erreur

Conclusions et perspective

UPMC

Existence et unicité

Idée de la démonstration :

Propriété d'ellipticité

 $\forall \ \mathbb{V} \in \mathbb{X}(\omega), \quad \mathit{a}(V,V) + \eta \ \widetilde{\mathit{a}}(V,V) \geq \mathit{c}_*\mathit{min}\{e^3,\eta\} \|V\|_{\mathbb{X}(\omega)}^2$

Condition inf-sup

 $\forall \chi \in \mathbb{M}(\omega), \quad \sup_{V \in \mathbb{X}(\omega)} \frac{b(V,\chi)}{\|V\|_{\mathbb{X}(\omega)}} \ge c_{\sharp} \|\chi\|_{H^{1}(\omega)}$

Pour $V = (0, \chi a_3)$

Lamjed Lounissi

Présentation du modè

Problème continu

Premier problème variationne Existence et unicité

Problème variationnel mixte

spectrale

Outils de la discrétisation

Mise en œuvre de la

Système matriciel

Discrétisation par éléments

Notations

Le problème discret

Estimation d'erreur

Conclusions et perspective



Existence et unicité de la solution

Remparque :

Le théorème suivant est une conséquence immédiate des deux propriétés précidentes (d'apès V.Girault et P-A.Raviart).

Théorème existence et unicité(C.Bernardi)

Pour tout $(f,M,N) \in H^1_{\gamma_0}(\omega)^{3'} \times H^{\frac{1}{2}}_{00}(\gamma_1)^{3'} \times H^{\frac{1}{2}}_{00}(\gamma_1)^{3'}$, le second problème variationnel admet une solution unique $(U,\psi) \in \mathbb{X}(\omega) \times \mathbb{M}(\omega)$. De plus, cette solution vérifie $\|U\|_{\mathbb{X}(\omega)} + \|\psi\|_{H^1(\omega)} \leq c e^{-3} \|\mathcal{L}\|$.

Lamjed Lounissi

Présentation du modèl

Problème continu

Premier problème variationne Existence et unicité

Problème variationnel mixte

Discretisation par la n spectrale

Outils de la discrétisation

Le problème discret

Mise en œuvre de la discrétisation

Système matriciel
Résultats numériques

Discrétisation par élémen spectraux

Notatio

Le problème discret

Estimation d'erreur

Conclusions et perspective



Convergence

Notation

On note (U^{η}, ψ^{η}) la solution du second problème pour une valeur fixe de η et (U, ψ) la solution du même problème pour $\eta = 0$.

Théorème d'estimation

Pour tout $(f,M,N) \in H^1_{\gamma_0}(\omega)^{3'} \times H^{\frac{1}{2}}_{00}(\gamma_1)^{3'} \times H^{\frac{1}{2}}_{00}(\gamma_1)^{3'}$, la propriété de convergence suivante donne $\|U^{\eta}-U\|_{\mathbb{X}(\omega)}+\|\psi^{\eta}-\psi\|_{\mathbb{M}(\omega)}\leq c\eta e^{-3}\|\mathcal{L}\|.$

Lamjed Lounissi

Présentation du modèl

Problème continu

Premier problème variationne

Problème variationnel mixte

spectrale

Outils de la discrétisation

Le problème discret

Mise en œuvre de la discrétisation

Système matriciel Résultats numériques

Discrétisation par élément spectraux

Notation

e problème discret

Résultat d'existence et d'unici

Conclusions et perspective

U⊃MC

Outils de la discrétisation

Outils

- Le domaine ω est le carré] -1,1[2.
- Méthode de Galerkin avec intégration numérique.
- L, M et N sont trois entiers tels que $L \le N \le M$.
- On définit les espaces discrets suivants :

$$\mathbb{X}_{N} = \mathbb{P}_{N}^{\gamma_{0}}(\omega)^{3} \times \mathbb{P}_{N}^{\gamma_{0}}(\omega)^{3}, \quad \mathbb{M}_{N} = \mathbb{P}_{L}^{\gamma_{0}}(\omega)$$
où $\mathbb{P}_{N}^{\gamma_{0}}(\omega) = \mathbb{P}_{n}(\omega) \cap H_{N}^{1}(\omega)$

Lamjed Lounissi

Présentation du modèle

Problème continu

Premier problème variations

Problème variationnel mivt

Discrétisation par la méthod

Outils de la discrétisation

Le problème discre-

Mise en œuvre de la discrétisation

Système matriciel

Discrétisation par élémen

Notatio

Le problème dis

Résultat d'existence et d'unicit

Estimation d'erreur

Conclusions et perspectiv

<u>u</u>≥mc

Outils

• Formule de Gauss Lobatto de type Legendre à M+1 points :

$$\forall \Phi \in \mathbb{P}_{2M-1}(-1,1), \qquad \int_{-1}^1 \Phi(\zeta) \, d\zeta = \sum_{j=0}^M \Phi(\xi_j)
ho_j.$$

• Produit scalaire discret : $(u, v)_M = \sum_{i,i=0}^{M} u(\xi_i, \xi_j) v(\xi_i, \xi_j) \rho_i \rho_j$

Lamjed Lounissi

Présentation du modè

Problème continu

Premier problème variationn

Existence et unicite

Discrétisation par la méthod

Outils de la discrétisation

Le problème discret

Mise en œuvre de la discrétisation

Système matriciel

Discrétisation par élément spectraux

Notatio

Le problème discret

Résultat d'existence et d'unici

Conclusions et perspective

UPMC

Formes discretes des tenseurs

Les tenseurs

• Tenseur de déformation :

$$\gamma_{\alpha\beta}^{\mathsf{N}}(u_{\mathsf{N}}) = \frac{1}{2}(\partial_{\alpha}u_{\mathsf{N}}.a_{\beta\mathsf{N}} + \partial_{\beta}u_{\mathsf{N}}.a_{\alpha\mathsf{N}})$$

• Tenseur de changement de courbure :

$$\chi_{\alpha\beta}^{N}(u,r) = \frac{1}{2}(\partial_{\alpha}u.c_{\beta N} + \partial_{\beta}u.c_{\alpha N} + \partial_{\alpha}r.a_{\beta N} + \partial_{\beta}r.a_{\alpha N})$$

• Tenseur de déformation de cisaillement transverse :

$$\delta_{\alpha 3}^{N}(u,r) = \frac{1}{2}(\partial_{\alpha}u.a_{3N} + r.a_{\alpha N})$$

Lamjed Lounissi

Présentation du modèle

Problème continu

Premier problème variationn

Problème variationnel mivte

Discrétisation par la méthod

Outils de la discrétisation

Le problème discret

Mise en œuvre de la discrétisation

Résultats numériques

spectraux

Le problème disc

Résultat d'existence et d'u

Estimation d'erreur

Conclusions et perspective

<u>u</u>⊃mc

Remarque

On introduit la $H^1(\omega)$ -projection a_{KN} de chaque a_K sur $\mathbb{P}_N(\omega)^3$, qui satisfait

$$\forall v_N \in \mathbb{P}_N(\omega)^3, \qquad (\partial_\alpha a_{kN}, \partial_\alpha v_N) = \int_\omega (\partial_\alpha a_k) \cdot (\partial_\alpha v_N) \, dx$$

$$(a_{KN}, 1)_M = \int_{\mathbb{R}^n} a_K(x) \, dx$$
(4)

Lamjed Lounissi

Présentation du modè

Problème continu

Premier problème variations

Darbling contains

Discrétisation par la mé

Outils de la discrétisation

Le problème discret

discrétisation

Discrétisation par élément

Notati

Le problème discret

Estimation d'erreur

Conclusions et perspectiv

<u>u</u>⊃mc

Formulation discrète

Problème discret

Trouver $(U_N, \psi_N) \in \mathbb{X}_N \times \mathbb{M}_N$ tel que

$$\begin{cases} \forall V_N \in \mathbb{X}_N, \\ a_M(U_N, V_N) + \eta \ \tilde{a}_M(U_N, V_N) + b_M(V_N, \psi_N) = \mathcal{L}_M(V_N) \\ \forall \chi_N \in \mathbb{M}_N, \quad b_M(U_N, \chi_N) = 0 \end{cases}$$

avec $U_N = (u_N, r_N)$ et $V_N = (v_N, s_N)$.

Lamjed Lounissi

Présentation du mod

D III

Premier problème variations

Existence et unicité

Discrétisation par la méthod

Outils de la discrétisation

Le problème discret

Mise en œuvre de la discrétisation

Discrétisation par élément

Nota

e problème discret

Estimation d'erreur

Conclusions et perspectives

<u>n</u>⊃mc

Formes bilinéaires et linéaires

Forme bilinéaire 1

$$a_{M}(U_{N}; V_{N}) = e(a^{\alpha\beta\rho\sigma}\gamma_{\alpha\beta}^{N}(u_{N}), \gamma_{\rho\sigma}^{N}(v_{N})\sqrt{a})_{M} + \frac{e^{3}}{12}(a^{\alpha\beta\rho\sigma}\chi_{\alpha\beta}^{N}(U_{N}), \chi_{\rho\sigma}^{N}(V_{N})\sqrt{a})_{M}$$

$$\frac{1}{2}(a^{lphaeta
ho\sigma}\chi^{N}_{lphaeta}(U_{N}),\chi^{N}_{
ho\sigma}(V_{N})\sqrt{a})_{M} \ +2erac{E}{(a^{lphaeta}\delta^{N}_{-2}(U_{N}),\delta^{N}_{-2}(V_{N})\sqrt{a})_{M}}$$

$$+2e\frac{E}{1+\nu}(a^{\alpha\beta}\delta_{\alpha3}^{N}(U_{N}),\delta_{\beta3}^{N}(V_{N})\sqrt{a})_{M}, \quad (6)$$

Lamjed Lounissi

Présentation du modèle

Problème continu

Premier problème variation

Existence et unicité

Discrétisation par la m

Outils de la discrétisation

Le problème discret

Mise en œuvre de la discrétisation

Résultats numériques

Motati

Le problème disci

Résultat d'existence et d'unic

Conclusions et perspective

UPMC

Formes bilinéaires 2

 $\tilde{\mathbf{a}}_{M}(U_{N},V_{N})=(\partial_{\alpha}\mathcal{I}_{M}(r_{N}.a_{3N}),\partial_{\alpha}\mathcal{I}_{M}(s_{N}.a_{3N}))_{M},$

Formes bilinéaires 3

 $b_M(V_N,\chi_N)=(\partial_{\alpha}\mathcal{I}_M(s_N.a_{3N}),\partial_{\alpha}\chi_N)_M.$

La forme linéaire $\mathcal{L}_M(V_N)$

 $\mathcal{L}_{M}(V_{N}) = (f, v_{N}\sqrt{a})_{M} + (N, v_{N})_{M}^{\gamma 1} + (M, s_{N})_{M}^{\gamma 1}$

Lamjed Lounissi

Présentation du modè

Problème continu

Premier problème variations

Problème variationnel mixte

spectrale

Outils de la discrétisation

Le problème discret

Mise en œuvre de la discrétisation

Résultats numériques

pectraux

Le problème dis

Résultat d'existence et d'unicité

Conclusions et perspectives

U⊃MC

Existence et unicité de la solution

Propriété de continuité de a_M

 \exists une constante c indépendante de N et M > N tel que $\forall U_N \in \mathbb{X}_N, \forall V_N \in \mathbb{X}_N | a_M(U_N; V_N) | \leq ce ||U_N||_{\mathbb{X}(\omega)} ||V_N||_{\mathbb{X}(\omega)}$

Propriété de continuité de \tilde{a}_M

 \exists une constante c indépendante de N et M > N tel que $\forall U_N \in \mathbb{X}_N, \forall V_N \in \mathbb{X}_N | \tilde{a}_M(U_N; V_N) | \leq ce \|U_N\|_{\mathbb{X}(\omega)} \|V_N\|_{\mathbb{X}(\omega)}$

Propriété de continuité de b_M

 \exists une constante c indépendante de N et M>N tel que $\forall V_N \in \mathbb{X}_N, \forall \chi_N \in \mathbb{X}_N |b_M(V_N; \chi_N)| \leq ce \|V_N\|_{H^1(\omega)} \|\chi_N\|_{H^1(\omega)}$

Lamjed Lounissi

Présentation du modèl

Problème continu

Premier problème variations

Existence et unicité

Discrétication par la m

Le problème discret

Mise en œuvre de la discrétisation

Résultats numériques

Discrétisation par éléments spectraux

Notatio

e problème discret

Estimation d'erreur

Conclusions et perspective

<u>u</u>>mc

Existence et unicité

Continuité de \mathcal{L}_M

 $\|\mathcal{L}_{M}\|_{N} \leqslant c(\|\mathcal{I}_{M}f\|_{L^{2}(\omega)^{3}} + \|i_{M}^{\gamma_{1}}N\|_{L^{2}(\gamma_{1})^{3}} +)\|i_{M}^{\gamma_{1}}M\|_{L^{2}(\gamma_{1})^{3}}$

Propriété d'ellipticité

 $\forall \ \mathbb{V}_{\mathbb{N}} \in \mathbb{X}_{\mathbb{N}}(\omega), \quad a_{M}(V_{N}, V_{N}) + \eta \ \tilde{a}_{M}(V_{N}, V_{N}) \geq c_{*} \min\{e^{3}, \eta\} \|V_{N}\|_{\mathbb{X}(\omega)}^{2}$

Condition inf-sup

 $\forall \chi \in \overline{\mathbb{M}_{N}(\omega)}, \quad \sup_{V \in \mathbb{X}_{\mathbb{N}}(\omega)} \frac{b_{M}(V_{N}, \chi_{N})}{\|V_{N}\|_{\mathbb{X}_{\mathbb{N}}(\omega)}} \geq c_{\sharp} \|\chi_{N}\|_{H^{1}(\omega)}$

Lamjed Lounissi

Présentation du modè

F · · · · · · · · · ·

Problème variationnel mixt

spectrale

Outils de la discrétisati

Le problème discret

Mise en œuvre de la discrétisation

Système matriciel

Résultats numériques

Discrétisation par élément spectraux

Notation

Le problème disc

Résultat d'existence et d'unicit

Estimation d'erreur

Conclusions et perspective



Théorème existence et unicité(C.Bernardi)

Pour N_0 un entier positif, $\forall f$ continue sur $\overline{\omega}$ et (M, N) continues sur $\overline{\Gamma_1}$, et pour $N \geq N_0$. Le problème discret admet une solution unique $(U_N, \psi_N) \in \chi_N \times \mathbb{M}_N$. De plus, cette solution vérifie

$$||U_N||_{\mathbb{X}(\omega)} + ||\psi_N||_{\mathbb{M}(\omega)} \le ce^{-3}||\mathcal{L}_M||_N.$$

Lamjed Lounissi

Présentation du modè

Préliminaires géometr

Probleme continu

Evictore et unicité

Problème variationnel mix

Discrétisation par la méthod spectrale

Outils de la discrétisation Le problème discret

Mise en œuvre de la

discrétisation
Système matriciel

Discrétisation par éléments

Notati

Le problème discret

Estimation d'erreur

conclusions of perspective

UPMC

Estimation d'erreur

Théorème d'estimation

$$||U - U_N||_{\mathbb{X}(\omega)} \le c \max\{e^{-3}, \eta^{-1}\}$$

$$(c(U,\psi) \max\{e,\eta\} N^{1-s} + c(\varphi) N^{1-s_0} (\log N)^{\frac{1}{2}} + c(f,M,N) N^{-s_1})$$

Idée de la preuve

- Inégalité triangulaire.
- Inégalité inverse des polynômes.
- Injections de Sobolev.
- inégalité de Cauchy Schwartz.

Lamjed Lounissi

Présentation du modèl

Problème continu

Premier problème variations

Problèmo variationnal misto

Discrétisation par la méthor spectrale

Outils de la discrétisation

Le problème discret

Mise en œuvre de la discrétisation

Système matriciel

Discrétisation par éléme

spectraux

Le proble

. Résultat d'existence et c

Estimation d'erreur

Conclusions et perspectiv



Système matriciel

On considère les polynômes de Lagrange ℓ_i^* associés aux points ξ_i^* , 0 < i < N. Donc la solution du problème discret s'écrit :

$$u_N(x,y) = \sum_{i,j=0}^{N} u_N(\xi_i^*, \xi_j^*) \ell_i^*(x) \ell_j^*(y)$$

Système matriciel

$$\begin{pmatrix} Q^{T}(A + \eta \tilde{A})Q & Q^{T}B^{T}Q_{0} \\ Q_{0}^{T}BQ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^{*} \\ \psi^{*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q^{T} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix}$$
(8)

Lamjed Lounissi

Présentation du modè

Problème continu

Promier problème variation

Existence et unicité

i robienie variationnei mixte

spectrale

Le problème discret

Mise en œuvre de la discrétisation

Système matriciel
Résultats numériques

Discrétisation par éléments spectraux

Notations

Résultat d'existence et d'unicité

Conclusions et perspective

u⊃mc

Détermination des matrices

La matrice A:

Et par la suite on obtient le système suivant :

$$AU = Q^{T}(A_{1}^{*} + A_{2}^{*} + A_{3}^{*})QU^{*}$$

 $AU = eQ_1^T \Gamma^T S_1 \Gamma Q_1 U_1^* + \frac{e^3}{12} Q_2^T \chi^T S_2 \chi Q_2 U^* + \frac{2eE}{1+e^2} Q_2^T \delta^T S_3 \delta Q$

ce qui est sous la forme :

$$AU = Q^T A^* Q U^*$$

οù

$$A^* = A_1^* + A_2^* + A_3^*$$

Lamjed Lounissi

Présentation du modè

Problème continu

Premier problème variationn

Problème variationnel mivte

Discrétisation par la m

Outils de la discrétisation

Mise en œuvre de la discrétisation

Système matriciel

spectraux

Notations

Le probleme discret

Estimation d'erreur

Conclusions et perspecti



La matrice B:

$$B\Psi^0 = Q^T B^* Q_0 \Psi^0$$

La forme linéaire \mathcal{L} :

$$F_1 = Q^T \tilde{B} F + Q^T N + Q^T M$$

Remarque:

Les matrices A^* et B sont de dimension $(6(M+1)^2, 6(M+1)^2)$.

Lamjed Lounissi

Présentation du modè

Problème continu

Premier problème variations

Existence et unicite

Problème variationnel mixte

spectrale

Outils de la discrétisation

Le problème discret

Mise en œuvre de la discrétisation

Système matriciel
Résultats numériques

Discrétisation par élément

Notatio

Le problème discret

Estimation d'erreur

Conclusions et perspective

U⊃MC

le χ_{12} pour $\alpha=1$ et $\beta=2$. ce dui donne pour $u_N(u_N^1,u_N^2,u_N^3)\in\mathbb{R}^3$, $a_{1N}(a_{1N}^1,a_{1N}^2,a_{1N}^3)\in\mathbb{R}^3$ et $c_{1N}(c_{1N}^1,c_{1N}^2,c_{1N}^3)\in\mathbb{R}^3$

Le deuxième coéfficient du tenseur de changement de courbure est

$$\chi_{12}^{N}(u,r) = \frac{1}{2}(\partial_{1}u.c_{2N} + \partial_{2}u.c_{1N} + \partial_{\alpha}r.a_{\beta N} + \partial_{\beta}r.a_{\alpha N})$$

et aux points de la grille fine on obtient

Lamjed Lounissi

Système matriciel

 $\chi_{12}^{N}(U_{N})(\xi_{r}, \xi_{s}) =$ $\sum u_N^1(\xi_i, \xi_j) \ell_i'(\xi_r) \ell_j(\xi_s) c_{2N}^1(\xi_r, \xi_s) + \sum u_N^2(\xi_i, \xi_j) \ell_i'(\xi_r) \ell_j(\xi_s) c_{2N}^2(\xi_r, \xi_s) +$ $\sum \ u_N^3(\xi_i,\xi_j) \ell_i'(\xi_r) \ell_j(\xi_s) c_{2N}^3(\xi_r,\xi_s) + \sum \ u_N^1(\xi_i,\xi_j) \ell_i(\xi_r) \ell_j'(\xi_s) c_{1N}^1(\xi_r,\xi_s)$ $+ \sum u_{N}^{2}(\xi_{i}, \xi_{j})\ell_{i}(\xi_{r})\ell_{i}^{'}(\xi_{s})c_{1N}^{2}(\xi_{r}, \xi_{s}) + \sum u_{N}^{3}(\xi_{i}, \xi_{j})\ell_{i}(\xi_{r})\ell_{i}^{'}(\xi_{s})c_{1N}^{3}(\xi_{r}, \xi_{s})$ $+ \sum_{i} r_{N}^{1}(\xi_{i}, \xi_{j}) \ell_{i}^{'}(\xi_{r}) \ell_{j}(\xi_{s}) a_{2N}^{1}(\xi_{r}, \xi_{s}) + \sum_{i} r_{N}^{2}(\xi_{i}, \xi_{j}) \ell_{i}^{'}(\xi_{r}) \ell_{j}(\xi_{s}) a_{2N}^{2}(\xi_{r}, \xi_{s})$

$$+ \sum_{i,j,r,s=0} r_N^3(\xi_i, \xi_j) \ell_i'(\xi_r) \ell_j(\xi_s) a_{2N}^3(\xi_r, \xi_s) + \sum_{i,j,r,s=0} r_N^1(\xi_i, \xi_j) \ell_i(\xi_r) \ell_j'(\xi_s) a_{1N}^1(\xi_r, \xi_s) + \sum_{i,j,r,s=0} \frac{r_N^3(\xi_i, \xi_j) \ell_i(\xi_r) \ell_j'(\xi_s) a_{1N}^3(\xi_r, \xi_s)}{M} + \sum_{i,j,r,s=0} \frac{r_N^3(\xi_i, \xi_j) \ell_i(\xi_s) \ell_j'(\xi_s) a_{2N}^3(\xi_r, \xi_s)}{M} + \sum_{i,j,r,s=0} \frac{r_N^3(\xi_i, \xi_s) \ell_i(\xi_s) \ell_j'(\xi_s) a_{2N}^3(\xi_r, \xi_s)}{M} + \sum_{i,j,r,s=0} \frac{r_N^3(\xi_i, \xi_s) \ell_i(\xi_s) \ell_j'(\xi_s) a_{2N}^3(\xi_s, \xi_s) \ell_i(\xi_s) a_{2N}^3(\xi_s, \xi_s)}{M} + \sum_{i,j,r,s=0} \frac{r_N^3(\xi_i, \xi_s) \ell_i(\xi_s) \ell_j'(\xi_s) a_{2N}^3(\xi_s, \xi_s) \ell_i(\xi_s) a_{2N}^3(\xi_s, \xi_s) \ell_i(\xi_s) a_{2N}^3(\xi_s, \xi_s) d_{2N}^3(\xi_s, \xi_s)$$

$$+ \sum_{i,i,r,s=0} r_N^2(\xi_i,\xi_j) \ell_i(\xi_r) \ell_j'(\xi_s) a_{1N}^2(\xi_r,\xi_s) + \sum_{i,i,r,s=0} r_N^3(\xi_i,\xi_j) \ell_i(\xi_r) \ell_j'(\xi_s) a_{1N}^3(\xi_r,\xi_s)]$$

34/59

Lamjed Lounissi

Présentation du modè

Problème continu

Premier problème variation

Problème variationnel mixte

spectrale
Outils de la discrétisation

Mise en œuvre de la

Système matriciel
Résultats numériques

Discrétisation par éléments spectraux

Notation

ésultat d'existence et d'un

Estimation d'erreur

UPMC

Ecriture matricielle de χ_{12} : χ_{12} s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\chi_{12}U = \chi_{12|u}^1 U_1 + \chi_{12|u}^2 U_2 + \chi_{12|u}^3 U_3 + \chi_{12|r}^1 R_1 + \chi_{12|r}^2 R_2 + \chi_{12|r}^3 R_3$$

La matrice $\chi^k_{12|u}$ est de dimension $((M+1)^2,(M+1)^2)$ et qui a comme terme général

$$\ell_i'(\xi_r)\ell_j(\xi_s)c_{2N}^k(\xi_r,\xi_s) + \ell_i(\xi_r)\ell_j'(\xi_s)c_{1N}^k(\xi_r,\xi_s) \text{ avec } 1 \leq k \leq 3.$$

Lamjed Lounissi

Présentation du modèl

Problème continu

Premier problème variation

Existence et unicité

Problème variationnel mixte

spectrale

Outils de la discrétisation

Mice on course do la

discrétisation

Système matriciel

Résultats numériques

spectraux

Notation

Le problème discret

Kesultat d'existence et d'unici

Conclusions at parametic

<u>u</u>⊃mc

La matrice χ_{12} s'écrit alors sous la forme

$$\chi_{12} = \begin{pmatrix} \chi_{12|u}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \chi_{12|u}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{12|u}^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \chi_{12|r}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \chi_{12|r}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \chi_{12|r}^3 \end{pmatrix}$$

Donc χ_{12} est une matrice carré de dimension $(6(M+1)^2,6(M+1)^2)$ avec 0 est la matrice nulle de taille $((M+1)^2,(M+1)^2)$

Lamjed Lounissi

Présentation du modèle

Problème continu

Premier problème variationn

Existence of differen

Problème variationnel mixte

spectrale

Outils de la discretisation

Mise en œuvre de la discrétisation

Système matriciel

Résultats numériques

Discrétisation par élément spectraux

Notation

Le problème discret

resultat u existence et u unic

onclusions at parenactive



Le système global

on utilisant l'algorithme d'Uzawa :

$$\begin{cases} Q^{T}(A^{*} + \eta \tilde{A}^{*})QU^{*} + Q^{T}B^{*}Q_{0}\Psi^{0} = F_{1} \\ Q_{0}^{T}B^{*T}QU^{*} = 0 \end{cases}$$

On multiplie la première équation du système par $(Q^T(A^* + \eta \ \tilde{A}^*)Q)^{-1}$ on trouve

$$U^* = (Q^T (A^* + \eta \tilde{A}^*) Q)^{-1} [F_1 - Q^T B^* Q_0 \Psi]$$

modèle de Naghdi pour une coque mince peu régulière Lamjed Lounissi

Discrétisation spectrale d'un

...,--- ------

ation du modèle

Problème continu

Premier problème variation

Problème variationnel mix

Discrétisation par la méthode spectrale

Outils de la discrétisation

Mise en œuvre de la

Système matriciel

Discrétisation par éléments

spectraux Notations

Le problème discret Résultat d'existence et d'

Estimation d'erreur

Conclusions et perspecti

<u>n</u>⊃wc

 $Q_0^T B^{*T} (A^* + \eta \tilde{A}^*)^{-1} B^* Q_0 \Psi^0 = Q_0^T B^{*T} (A^* + \eta \tilde{A}^*)^{-1} \tilde{B} F$ (9) On remarque que le système peut s'écrire sous la forme

$$\mathcal{A}\Psi^0 = \mathcal{F} \tag{10}$$

Lamjed Lounissi

Présentation du modèl

Problème continu

Premier problème variationne

Problème variationnel mixte

Discrétisation par la méthod spectrale

Outils de la discrétisation

Mise en œuvre de la

Système matricie

Résultats numériques

Ni-a-ai---

Le problème discret

Résultat d'existence et d'unici Estimation d'erreur

Conclusions et perspective

UZMC

Résultats numériques

Paraboloïde hyperboliqueencastré sous pression uniforme

• La carte est définie par

$$\phi(x,y) = (x,y,\frac{c}{2b^2}(x^2-y^2))^T,$$

où b = 50 cm et c = 10 cm

- La coque est encastrée sur $\partial \omega$ et soumis à une pression uniforme $q=0,01kp/cm^2$. Les données mécaniques sont $E=2.85104kp/cm^2$, $\mu=0,4$;
- L'épaisseur de la coque est e = 0,8 cm.
- La valeur de référence pour ce test est -0,024 cm.

Lamjed Lounissi

Présentation du modèle

D. III

Premier probleme variationn

Problème variationnel mist

Discrétisation par la méthode spectrale

Outils de la discrétisation

1 1D P

Mise en œuvre de la discrétisation

Système matric

Résultats numériques

Discrétisation par élément

Notation

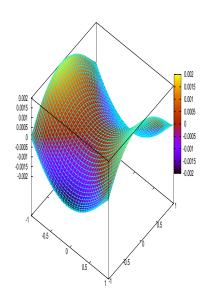
1 10 0

Résultat d'avistance et d'unicit

Estimation d'erreur

Conclusions at perspectives





Lamjed Lounissi

Présentation du modèle

Problème continu

Premier problème variationn

Existence et unicité

Problème variationnel mixte

spectrale

Outils de la discrétisation

Le problème discret

Mise en œuvre de la discrétisation

Système matriciel

Résultats numériques

Discrétisation par éléments

Ivotations

Le problème disc

Résultat d'existence et d'unicit

Estimation d'erre

Conclusions et perspective



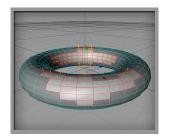


FIGURE: un tore

Ce tore est paramétré comme suit :

$$\phi(x,y) = ((a-b\cos x)\cos y, (a-b\cos x)\sin y, b\sin x)$$

Lamjed Lounissi

Présentation du modè

Problème continu

Premier problème variationn

Problème variationnel mixto

Discrétisation par la méthod spectrale

Outils de la discrétisation

Le problème discret

discrétisation

Système matriciel

Discrétisation par élémen

Notations

Le problème discret

Resultat d'existence et d'unici Estimation d'erreur

Conclusions et perspective



Notations

Outils

• La décomposition de domaine comfore est sans recouvrement en un nombre fini de sous-domaine ouverts ω_k d'interieur non vide, au sens suivant :

$$\overline{\omega} = igcup_{k=1}^{\mathcal{K}} \overline{\omega_k} \quad ext{et} \quad \omega_k \cap \omega_k = \emptyset, \quad 1 \leq k < k^{'} \leq \mathcal{K}$$

Le produit scalaire discret :

$$(u,v)_N = \sum_{k=1}^K (\sum_{i,j} u \circ \mathbf{F}_k(\xi_i,\xi_j) v \circ \mathbf{F}_k(\xi_i,\xi_j) \frac{mes(\omega_k)}{4})$$

Lamjed Lounissi

Présentation du modè

Problème continu

Premier problème variationn

Problème variationnel mixte

Discrétisation par la mé spectrale

Outils de la discrétisation Le problème discret

Mise en œuvre de la discrétisation

Discrétisation par élément

Notati

Le problème discret

Résultat d'existence et d'unici Estimation d'erreur

Conclusions et perspectiv

U⊃MC

Formulation discrète

Problème discret

Trouver $(U_N, \psi_N) \in \mathcal{X}_N \times \mathcal{M}_N$ tel que

$$\begin{cases}
\forall V_N \in \mathcal{X}_N, \\
\mathcal{A}_M(U_N, V_N) + \eta \, \tilde{\mathcal{A}}_M(U_N, V_N) + \mathcal{B}_M(V_N, \psi_N) = \mathcal{L}_M(V_N) \\
\forall \chi_N \in \mathcal{M}_N, \quad b_M(U_N, \chi_N) = 0
\end{cases}$$
(11)

avec $U_N = (u_N, r_N)$ et $V_N = (v_N, s_N)$.

Lamjed Lounissi

Présentation du modèle

Problème continu

Premier problème variation

Existence et unicité

Problème variationnel mixt

spectrale

Outils de la discrétisation

Mise en œuvre de la

Système matriciel

Discrétisation par élément pectraux

Notatio

Le problème discret

Résultat d'existence et d'unicit

Estimation d'erreur

Conclusions et perspectiv



•
$$\mathcal{A}_M(U_N, V_N) = \sum_{k=1}^K a_M^k(U_{N|\omega_k}, V_{N|\omega_k})$$

$$\bullet \ \ \tilde{\mathcal{A}}_{M}(U_{N},V_{N}) = \sum_{k=1}^{N} \tilde{\mathfrak{a}}_{M}^{k}(U_{N|\omega_{k}},V_{N|\omega_{k}})$$

•
$$\mathcal{B}_{M}(V_{N}, \psi_{N}) = \sum_{k=1}^{K} b_{M}^{k}(V_{N|\omega_{k}}, \psi_{N|\omega_{k}})$$

•
$$\mathscr{L}_M(V_N) = \sum_{k=1}^K \mathcal{L}_M^k(V_{N|\omega_k})$$

Lamjed Lounissi

Le problème discret

UPMC

Formes bilinéaires

$$\mathcal{A}((u,r);(v,s)) = \int_{\omega} \left\{ ea^{\alpha\beta\rho\sigma} \left[\gamma_{\alpha\beta}(u) \gamma_{\rho\sigma}(v) + \frac{e^{2}}{12} \chi_{\alpha\beta}(u,r) \chi_{\rho\sigma}(v) + 2e^{\frac{E}{2}} a^{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta}(u,r) \delta_{\beta\beta}(v,s) \right\} \sqrt{a} \, dx \right\}$$

$$\int_{\omega} \left\{ \left[a\beta \left(y, \eta \right) \right] \right\} \sqrt{a} \, dx$$

$$+ 2e \frac{E}{a^{\alpha\beta}} \delta_{\alpha\beta} \left(y, \eta \right) \delta_{\alpha\beta} \left(y, \eta \right) \left\{ \sqrt{a} \, dx \right\}$$

$$+2e\frac{E}{1+\nu}a^{\alpha\beta}\delta_{\alpha3}(u,r)\delta_{\beta3}(v,s)\Big\}\sqrt{a}\,dx$$

$$egin{aligned} &= \sum_{k=1}^{K} \int_{\omega_k} \left\{ e a^{lphaeta
ho\sigma} \left[\gamma_{lphaeta}(u|\omega_k) \gamma_{
ho\sigma}(v|\omega_k) + rac{e^2}{12} \chi_{lphaeta}(u|\omega_k, r|\omega_k) \chi_{
ho\sigma}(v|\omega_k) + 2e rac{E}{1+
u} a^{lphaeta} \delta_{lpha3}(u|\omega_k, r|\omega_k) \delta_{eta3}(v|\omega_k, s|\omega_k)
ight\} \sqrt{a} \, dx \end{aligned}$$

Lamjed Lounissi

Le problème discret

UPMC

et

 $\tilde{\mathcal{A}}(U,V) = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{\alpha}(r.a_3) \partial_{\alpha}(s.a_3) dx = \sum_{k=1}^n \int_{\omega_k} \partial_{\alpha}(r|\omega_k.a_3) \partial_{\alpha}(s|\omega_k.a_3)$

$$=\int \partial_{\alpha}$$

$$\int_{\omega}\partial_{lpha}(s.a_3)\partial_{lpha}$$

$$\partial_{lpha}\partial_{lpha}\chi\,\mathsf{d}x$$

$$\partial_{\alpha}\chi\,\mathrm{d}x=\sum_{k}$$

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\omega_k}$$

$$\int_{\omega_k} \partial_{\omega_k} \partial_{\omega$$

$$\mathcal{B}(V,\chi) = \int_{\omega} \partial_{\alpha}(s.a_3) \partial_{\alpha}\chi \, dx = \sum_{k=1}^{K} \int_{\omega_k} \partial_{\alpha}(|s\omega_k.a_3) \partial_{\alpha}\chi \, dx$$

Lamjed Lounissi

Présentation du modèle

Problème continu

Premier problème variations

Problème variationnel mivte

spectrale

Outils de la discrétisation

Mise en œuvre de la

Système matriciel

Discrétisation par élément spectraux

Notations

Résultat d'existence et d'unicité

Estimation d'erreur

Conclusions et perspective



Résultat d'existence et d'unicité

Théorème existence et unicité

Pour N_0 un entier positif, $\forall f$ continue sur $\overline{\omega}$ et (M,N) continues sur $\overline{\Gamma_1}$, et pour $N \geq N_0$. Le problème discret admet une solution unique $(U_N,\psi_N) \in \chi_N \times \mathcal{M}_N$.

Lamjed Lounissi

Présentation du modè

Préliminaires géometrique

Problème continu

Existence et unicité

Discrétisation par la méthod

Outils de la discrétisation

Outils de la discrétisation Le problème discret

Mise en œuvre de la discrétisation

Discrétisation par éléments

spectraux

Le problème discret

Résultat d'existence et d'unicité

Estimation d'erreur

Conclusions et perspectiv



Continuité

 Il existe une constante c indépendante de N et M ≥ N tels que la propriété de continuité suivante donne

$$\forall U_N \in \mathcal{X}_N, \forall V_N \in \mathcal{X}_N, \quad |\mathcal{A}_M(U_N; V_N)| \leq ce ||U_N||_{\mathcal{X}(\omega)} ||V_N||_{\mathcal{X}(\omega)}$$

$$\forall U_N \in \mathcal{X}_N, \forall V_N \in \mathcal{X}_N, \quad |\tilde{\mathcal{A}}_M(U_N; V_N)| \leq c \|U_N\|_{\mathcal{X}(\omega)} \|V_N\|_{\mathcal{X}(\omega)}$$

 $\forall V_N \in \mathcal{X}_N, \forall \chi_N \in \mathcal{M}_N, \quad |\mathcal{B}_M(V_N; \chi_N)| \le c \|V_N\|_{\mathcal{X}(\omega)} \|\chi_N\|_{H^1(\omega)}$

48/59

Lamjed Lounissi

Présentation du modè

Problème continu

Premier problème variations

Problème variationnel mixte

spectrale

Outils de la discrétisation Le problème discret

discrétisation
Système matriciel

Discrétisation par élément spectraux

Notations

Résultat d'existence et d'unicité

Estimation d'erreur

Conclusions et perspective



Ellipticité

Proposition

Il existe un entier positif N_* et une constante positive \tilde{c}_* tels que, pour tout $N\geqslant N_*$ et tels que pour $1\leq k\leq K$, $mes(w_k\cap\gamma_0)>0$, la propriété d'ellipticité suivante donne

$$orall \; \mathbb{V}_{\mathbb{N}} \in \mathcal{X}_{\mathcal{N}}(\omega), \quad \mathcal{A}_{M}(V_{N},V_{N}) + \eta \; ilde{\mathcal{A}}_{M}(V_{N},V_{N}) \geq ilde{c}_{*} \min\{e^{3},\eta\} \| V_{N} \| V_{N}$$

Idée de la preuve : on utilise l'inégalité de Poincaré-Friedrichs.

 $E_{M}^{A}(W_{N}; V_{N}) + \eta \tilde{E}_{M}^{A}(W_{N};$

 $||V_N||_{\mathcal{X}(\omega)}$

Discrétisation spectrale d'un modèle de Naghdi pour une coque mince peu régulière

Lamjed Lounissi

Présentation du modèl

D. I.D.

Probleme continu

Existence et unicité

Discrétisation par la méthod

Outils de la discrétisation

Mise en œuvre de la

discrétisation
Système matriciel

Résultats numériques

spectraux

Le problème disc

Résultat d'existence et d'unicit

Estimation d'erreur

Conclusions et perspective



Proposition

$$||U - U_N||_{\mathcal{X}(\omega)} \le c \max\{e^{-3}, \eta^{-1}\}$$

$$\left(\inf_{W_N \in \mathbb{V}_N} (\max\{e, \eta\} \| U - W_N \|_{\mathcal{X}(\omega)} + \sup_{V \in \mathcal{X}} (\max\{e, \eta\} \| U - W_N \|_{\mathcal{X}(\omega)} + \sup_{V \in \mathcal{X}} (\max\{e, \eta\} \| U - W_N \|_{\mathcal{X}(\omega)}) + \sup_{V \in \mathcal{X}} (\max\{e, \eta\} \| U - W_N \|_{\mathcal{X}(\omega)} + \sup_{V \in \mathcal{X}(\omega)} (\max\{e, \eta\} \| U - W_N \|_{\mathcal{X}(\omega)}) + \sup_{V \in \mathcal{X}(\omega)} (\min\{e, \eta\} \| U - W_N \|_{\mathcal{X}(\omega)}) + \sup_{V \in \mathcal{X}(\omega)} (\min\{e, \eta\} \| U - W_N \|_{\mathcal{X}(\omega)}) + \sup_{V \in \mathcal{X}(\omega)} (\min\{e, \eta\} \| U - W_N \|_{\mathcal{X}(\omega)}) + \sup_{V \in \mathcal{X}(\omega)} (\min\{e, \eta\} \| U - W_N \|_{\mathcal{X}(\omega)}) + \sup_{V \in \mathcal{X}(\omega)} (\min\{e, \eta\} \| U - W_N \|_{\mathcal{X}(\omega)}) + \sup_{V \in \mathcal{X}(\omega)} (\min\{e, \eta\} \| U - W_N \|_{\mathcal{X}(\omega)}) + \sup_{V \in \mathcal{X}(\omega)} (\min\{e, \eta\} \| U - W_N \|_{\mathcal{X}(\omega)}) + \sup_{V \in \mathcal{X}(\omega)} (\min\{e, \eta\} \| U - W_N \|_{\mathcal{X}(\omega)}) + \sup_{V \in \mathcal{X}(\omega)} (\min\{e, \eta\} \| U - W_N \|_{\mathcal{X}(\omega)}) + \sup_{V \in \mathcal{X}(\omega)} (\min\{e, \eta\} \| U - W_N \|_{\mathcal{X}(\omega)}) + \sup_{V \in \mathcal{X}(\omega)} (\min\{e, \eta\} \| U - W_N \|_{\mathcal{X}(\omega)}) + \sup_{V \in \mathcal{X}(\omega)} (\min\{e, \eta\} \| U - W_N \|_{\mathcal{X}(\omega)}) + \sup_{V \in \mathcal{X}(\omega)} (\min\{e, \eta\} \| U - W_N \|_{\mathcal{X}(\omega)}) + \sup_{V \in \mathcal{X}(\omega)} (\min\{e, \eta\} \| U - W_N \|_{\mathcal{X}(\omega)}) + \sup_{V \in \mathcal{X}(\omega)} (\min\{e, \eta\} \| U - W_N \|_{\mathcal{X}(\omega)}) + \sup_{V \in \mathcal{X}(\omega)} (\min\{e, \eta\} \| U - W_N \|_{\mathcal{X}(\omega)}) + \sup_{V \in \mathcal{X}(\omega)} (\min\{e, \eta\} \| U - W_N \|_{\mathcal{X}(\omega)}) + \sup_{V \in \mathcal{X}(\omega)} (\min\{e, \eta\} \| U - W_N \|_{\mathcal{X}(\omega)}) + \sup_{V \in \mathcal{X}(\omega)} (\min\{e, \eta\} \| U - W_N \|_{\mathcal{X}(\omega)}) + \sup_{V \in \mathcal{X}(\omega)} (\min\{e, \eta\} \| U - W_N \|_{\mathcal{X}(\omega)}) + \sup_{V \in \mathcal{X}(\omega)} (\min\{e, \eta\} \| U - W_N \|_{\mathcal{X}(\omega)}) + \sup_{V \in \mathcal{X}(\omega)} (\min\{e, \eta\} \| U - W_N \|_{\mathcal{X}(\omega)}) + \lim_{V \in \mathcal{X}(\omega)} (\min\{e, \eta\} \| U - W_N \|_{\mathcal{X}(\omega)}) + \lim_{V \in \mathcal{X}(\omega)} (\min\{e, \eta\} \| U - W_N \|_{\mathcal{X}(\omega)}) + \lim_{V \in \mathcal{X}(\omega)} (\min\{e, \eta\} \| U - W_N \|_{\mathcal{X}(\omega)}) + \lim_{V \in \mathcal{X}(\omega)} (\min\{e, \eta\} \| U - W_N \|_{\mathcal{X}(\omega)}) + \lim_{V \in \mathcal{X}(\omega)} (\min\{e, \eta\} \| U - W_N \|_{\mathcal{X}(\omega)}) + \lim_{V \in \mathcal{X}(\omega)} (\min\{e, \eta\} \| U - W_N \|_{\mathcal{X}(\omega)}) + \lim_{V \in \mathcal{X}(\omega)} (\min\{e, \eta\} \| U - W_N \|_{\mathcal{X}(\omega)}) + \lim_{V \in \mathcal{X}(\omega)} (\min\{e, \eta\} \|_{\mathcal{X}($$

$$+\inf_{\chi_{N}\in\mathcal{M}_{N}}(\|\psi-\chi_{N}\|_{H^{1}(\omega)}+\sup_{V_{N}\in\mathcal{X}_{N}}\frac{E_{M}^{\mathcal{B}}(V_{N};\chi_{N})}{\|V_{N}\|_{\mathcal{X}(\omega)}})$$

$$+ \sup_{V_N \in \mathcal{X}_N} \frac{|V_N||\chi(u)|}{\|V\|}$$

Lamjed Lounissi

Discrétisation spectrale d'un

modèle de Naghdi pour une coque mince peu régulière

Estimation d'erreur

UPMC

où les quatres quantités E_M^A , \tilde{E}_M^A , E_M^B et $E_M^{\mathscr{L}}$ sont définis par

 $E_M^A(W_N; V_N) = (A - A_M)(W_N; V_N), \quad \tilde{E}_M^A(W_N; V_N) = (\tilde{A} - \tilde{A}_M)V$ $E_M^{\mathcal{B}}(V_N;\chi_N) = (\mathcal{B} - \mathcal{B}_M)(V_N;\chi_N), \quad E_M^{\mathcal{L}}(V_N) = (\mathcal{L} - \mathcal{L}_M)(V_N).$

51/59

Lamjed Lounissi

Présentation du modèle

Problème continu

Premier problème variationn

Problème variationnel mixte

spectrale spectrale

Outils de la discrétisation

Mise en œuvre de la discrétisation

Système matriciel

Discrétisation par élémen spectraux

Notatio

Le problème discret

Résultat d'existence et d'u Estimation d'erreur

Conclusions et perspective

<u>u</u>⊃mc

Lemme

Pour tout entier $N \geq N_{\sharp\sharp}$, il existe une constante c indépendante de N tel que, pour tout U dans $\mathcal{V}(\omega)$,

$$\inf_{W_N \in \mathcal{V}_N} \|U - W_N\|_{\mathcal{X}(\omega)} \le$$

$$c\inf_{Z_N\in\mathcal{X}_N}\left(\sum_{k=1}^K\|U-Z_N\|_{\mathcal{X}(\omega_k)}+\sup_{w_N\in\mathcal{M}_N}\frac{E_M^b(Z_N;w_N)}{\|w_N\|_{H^1(\omega)}}\right).$$

Lamjed Lounissi

Estimation d'erreur

UPMC

Lemme

Il existe une constante c qui dépend uniquement de la norme de a_{α} dans $H^{s_0}(\omega_k)^3$ et de a_3 dans $H^{s_0+1}(\omega_k)^3$ tel que

$$\forall W_N \in \mathcal{X}_N,$$

$$\sup_{V_N \in \mathcal{X}_M} \frac{E_M^{\mathcal{A}}(W_N)}{\|V_N\|_2}$$

$$\sup_{V_N \in \mathcal{X}_N} \frac{E_M^{\mathcal{A}}(W_N; V_N)}{\|V_N\|_{\mathcal{X}(\omega)}} \le ceN^{1-s_0} (logN)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^K \|W_N\|_{\mathcal{X}(\omega)}$$

$$\tag{12}$$

53/59

Lamjed Lounissi

Estimation d'erreur

UPMC

Lemme

Il existe une constante c qui dépend uniquement de la norme de a₃ dans $H^{s_0}(\omega_k)^3$ tel que

$$\forall W_N \in \mathcal{X}_N, \quad \sup_{V \in \mathcal{X}} \quad \stackrel{\tilde{E}}{\leftarrow}$$

$$\sup_{V_{N} \in \mathcal{X}_{N}} \frac{\tilde{E}_{M}^{a}(W_{N}; V_{N})}{\|V_{N}\|_{\mathcal{X}(\omega)}} \leq cN^{-s_{0}} (\log N)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{K} \|W_{N}\|_{\mathcal{X}(\omega_{k})}.$$
(13)

modèle de Naghdi pour une coque mince peu régulière

Lamjed Lounissi

Discrétisation spectrale d'un

Résultats numériques

Estimation d'erreur

UPMC 55/59

Lemme

Il existe une constante c qui dépend uniquement de la norme de a₃ dans $H^{s_0}(\omega)^3$ tel que

$$\forall \chi_{N} \in \mathcal{M}_{N}, \quad \sup_{V_{N} \in \mathcal{X}_{N}} \frac{E_{M}^{b}(V_{N}; \chi_{N})}{\|V_{N}\|_{\mathcal{X}(\omega)}} \leq cN^{-s_{0}} (logN)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{K} \|\chi_{N}\|_{H^{1}(\omega_{k})},$$

$$\tag{14}$$

et

 $\forall Z_N \in \mathcal{M}_N, \quad \sup_{V_N \in \mathcal{X}_N} \frac{E_M^b(Z_N; w_N)}{\|w_N\|_{H^1(\omega)}} \leq cN^{-s_0} (logN)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^N \|\chi_N\|_{\mathcal{X}(\omega_k)},$

Lamjed Lounissi

Présentation du modè

Problème continu

Premier problème variationn

Problème variationnel mixte

spectrale

Outils de la discrétisation Le problème discret

Mise en œuvre de la discrétisation
Système matriciel

Discrétisation par élémen spectraux

Notations

Résultat d'existence et d'unici

Estimation d'erreur

Conclusions et perspectiv

UPMC

Lemme

Supposons que les données (f, N, M) apartiennent à $H^{s_1}(\omega)^3 \times H^{s_1}(\gamma_1)^3 \times H^{s_1}(\gamma_1)^3$ pour un nombre réel s>1. Il existe une constante \tilde{c} qui dépend uniquement de la norme de a_3 dans $H^{s_0}(\omega)^3$ tel que

$$\sup_{V_N \in \mathcal{X}_{N'}} \frac{E_M^L(V_N)}{\|V_N\|_{\mathcal{X}(\omega)}} \le c(\tilde{c}N^{1-s_0}(\log N)^{\frac{1}{2}} + c(f, N, M)N^{-s_1}), \quad (16)$$

où la quantité c(f, N, M) est définie par

$$c(f, N, M) = \sum_{k=1}^{K} \|f\|_{H^{s_1}(\omega_k)^3} + \|N\|_{H^{s_1}(\gamma_1)^3} + \|N\|_{H^{s_1}(\gamma_1)^3}$$
 (17)

Lamjed Lounissi

Présentation du modèl

Problème continu

Premier problème variation

Problème variationnel mixt

spectrale

Outils de la discrétisation

Le problème discret

discrétisation

Résultats numériques

Notation

Le problème discret

Estimation d'erreur

UPMC

Théorème d'estimation

Supposons que :

(i) la solution (U,ψ) du problème discret appartient à

 $H^{S}(\omega)^{3\times3}\times H^{S}(\omega)$ et telle que chaque $(U|\omega_{k},\psi|\omega_{k}),\ 1\leq k\leq K$, appartiènne à $H^{S_{k}}(\omega_{k})^{3\times3}\times H^{S_{k}}(\omega_{k})$ pour un nombre réel $S_{k}\geq1$,

(ii) les données $(f|\omega_k, N|\omega_k, M|\omega_k)$ appartiennent à $H^{s_{1k}}(\omega_k)^3 \times H^{s_{1k}}(\gamma_1)^3 \times H^{s_{1k}}(\gamma_1)^3$ pour un nombre réel $s_{1k} > 1$.

Alors, pour tout entier $N \ge N_0$, l'estimation d'erreur suivante entre la solution (U, ψ) et la solution (U_N, ψ_N) du problème discret

$$||U - U_N||_{\mathcal{X}(\omega)} \le c \max\{e^{-3}, \eta^{-1}\}$$

$$(c(U, \psi) \max\{e, \eta\} N^{1-s} + c(\varphi) N^{1-s_0} (\log N)^{\frac{1}{2}} + c(f, M, N) N^{-s_1})$$

où la quantité $c(U, \psi)$ est défine par

$$c(U,\psi) = \sum_{k=1}^{K} \|U\|_{H^{s}(\omega_{k})^{3\times 3}} + \sum_{k=1}^{K} \|\psi\|_{H^{s}(\omega_{k})},$$

Lamjed Lounissi

Présentation du modèle

Problème continu

Premier problème variations

Problème variationnel mix

Discrétisation par la méthod spectrale

Outils de la discrétisatio

Le problème discret

discrétisation

Résultats numériques

spectraux

Le problème discret

Résultat d'existence et d'unicité

Estimation d'erreur

Conclusions et perspective



Remarque

L'erreur entre la solution du problème initial et de U_N un élément de solution (U_N, ψ_N) du problème discret, est de l'ordre

$$\eta e^{-3} + \max\{e^{-3}, \eta^{-1}\} \max\{eN^{1-S}, \eta N^{1-S}, N^{1-s_0}(\log)^{\frac{1}{2}}, N^{-s_1}\}.$$

Lamjed Lounissi

Présentation du modèl

Problème continu

Premier problème variation

Existence et unicite

Problème variationnel mixt

spectrale

Outils de la discrétisati

Le problème discret

Mise en œuvre de la discrétisation

Système matriciel

Résultats numériques

piscretisation par elemen spectraux

Notation

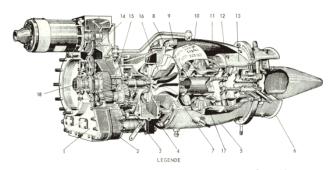
Le problème discr

Résultat d'existence et d'unicit

Estimation d'erre

Conclusions et perspectives





Parties fixes extérieures

- 1 Couvercle du carter d'accessoires
- 2 Carter d'accessoires 3 - Carter réducteur
- 4 Carter compresseur
- 5 Carter turbine
- 6 Diffuseur de sortie

Parties fixes intérieures 7 - Couvercle des diffuseurs

- 8 Diffuseur radial 9 - Diffuseur axial
- 10 Chambre de combustion
- 11 Distributeur 1er étage 12 - Distributeur 2ème étage
- 13 Anneau de turbine

Parties mobiles

- 14 Chaînes des accessoires 15 - Réducteur de vitesse
- 16 Compresseur centrifuge
- 17 Ensemble tournant
- 18 Prise de mouvement

FIGURE: Une turbune