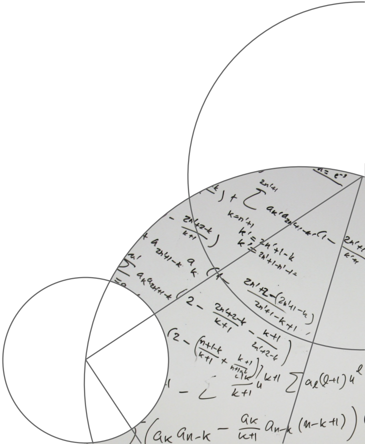
École Doctorale de Sciences Mathématiques de Paris Centre

Discrétisation spectrale d'un modèle de Naghdi pour une coque mince peu régulière

Lamjed Lounissi
Laboratoire Jacques-Louis Lions



20 mai 2015

- Soit ω un domaine lipschitzien de $\mathbb{R}^2$
- La surface moyenne de la coque : $S = \varphi(\overline{\omega})$, où $\varphi \in W^{2,\infty}(\omega, \mathbb{R}^3)$.
- les vecteurs :

$$a_1 = \partial_1 \varphi, \quad a_2 = \partial_2 \varphi$$

sont linéairement indépendants en tout point de $\overline{\omega}$. On définit le vecteur normal unitaire

$$a_3 = \frac{a_1 \wedge a_2}{|a_1 \wedge a_2|}$$

à la surface au point $\varphi(x, y)$.

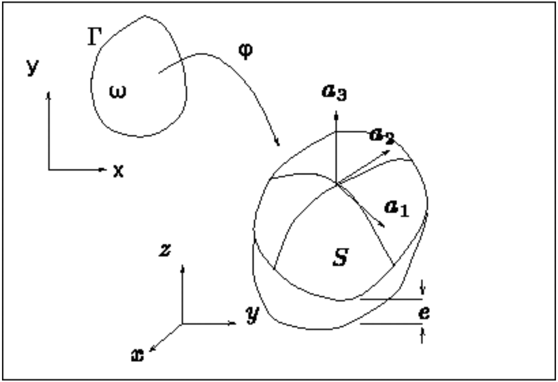
- Les vecteurs a_i définissent une base covariante au point $\varphi(x,y)$ et appartiennent à $W^{1,\infty}(\omega, \mathbb{R}^3)$
- On note $a(x,y) = |a_1(x,y) \wedge a_2(x,y)|$
- On définit la première et la deuxième forme fondamentale de la surface moyenne par leurs composantes covariantes :

$$a_{\alpha\beta} = a_\alpha \cdot a_\beta$$

et

$$b_{\alpha\beta} = a_\alpha \cdot \partial_\beta a_\alpha$$

FIGURE: La surface moyenne de la coque



Notations

- $u = u_i a^i = u_i^c e_i$ un déplacement de la surface moyenne de la coque appartenant à $H^1(\omega)^3$
- $r = r_\alpha a^\alpha$ une rotation autour de la normale a_3 qui est bien sûr tangente à la surface moyenne de la coque.
- Le tenseur d'élasticité de la surface moyenne de la coque :

$$a^{\alpha\beta\rho\sigma} = \frac{E}{2(1+\nu)}(a^{\alpha\rho}a^{\beta\sigma} + a^{\alpha\sigma}a^{\beta\rho}) + \frac{E\nu}{1-\nu^2}a^{\alpha\beta}a^{\rho\sigma}.$$

où $a^{\alpha\beta\rho\sigma} \in L^\infty(\omega)$ et dans le cas d'un matériau homogène et isotrope de module de Young $E > 0$ et de cœfficient de Poisson ν, $0 \leq \nu < \frac{1}{2}$

Notations

- Le tenseur de déformation de la surface moyenne de la coque :

$$\gamma_{\alpha\beta}(u) = \frac{1}{2}(\partial_\alpha u.a_\beta + \partial_\beta u.a_\alpha)$$

- Le tenseur de changement de courbure de la surface moyenne de la coque :

$$\chi_{\alpha\beta}(u,r) = \frac{1}{2}(\partial_\alpha u.\partial_\beta a_3 + \partial_\beta u.\partial_\alpha a_3 + \partial_\alpha r.a_\beta + \partial_\beta .a_\alpha)$$

- Le tenseur de déformation de cisaillement transverse de la surface moyenne :

$$\delta_{\alpha 3}(u,r) = \frac{1}{2}(\partial_\alpha u.a_3 + r.a_\alpha)$$

Formulation variationnelle

Conditions aux bord

le bord $\partial\omega$ est divisé en deux parties, γ_0 sur laquelle la coque est encastrée et $\gamma_1 = \partial\omega \setminus \gamma_0$ sur laquelle la coque est soumise à des forces extérieures.

Espaces

- $H^1_{\gamma_0}(\omega) = \{\mu \in H^1(\omega);\ \mu = 0 \quad \text{sur} \quad \gamma_0\}.$
- $\mathbb{V}(\omega) = \{(v, s) \in H^1_{\gamma_0}(\omega)^3 \times H^1_{\gamma_0}(\omega)^3; s.a_3 = 0 \quad \text{sur} \quad \omega\}$

La norme

$$\|(v, s)\|_{\mathbb{V}(\omega)} = \left(\|v\|^2_{H^1(\omega)^3} + \|s\|^2_{H^1(\omega)^3}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Problème variationnel

Trouver $(u, r) \in \mathbb{V}(\omega)$ tel que

$$a((u,r);(v,s)) = \mathcal{L}((v,s)),$$

Forme bilinéaire

$$a((u,r);(v,s)) = \int_\omega \left\{ e a^{\alpha\beta\rho\sigma} \left[\gamma_{\alpha\beta}(u)\gamma_{\rho\sigma}(v) + \frac{e^2}{12}\chi_{\alpha\beta}(u,r)\chi_{\rho\sigma}(v,s) \right] + 2e\frac{E}{1+\nu} a^{\alpha\beta}\delta_{\alpha 3}(u,r)\delta_{\beta 3}(v,s) \right\} \sqrt{a}\, dx$$

La forme linéraire $\mathcal{L}(.)$ est donnée par

$$\mathcal{L}((v,s)) = \int_\omega f.v\sqrt{a}\,dx + \int_{\gamma_1} (N.v + Ms)\,d\tau \qquad (1)$$

Existence et unicité de la solution

Idée de la démonstration

- Vérifier les hypothèses de Lax-Milgram.
- La continuité est clair.
- Il suffit de montrer la V-ellipticité de la forme bilinéaire :

Lemme

$$\forall (v,s) \in \mathbb{V}(\omega), \qquad a((v,s),(v,s)) \geq c e^3 |(v,s)|^2.$$

où $|(v,s)| = \Big(\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\beta=1}^{2} \|\gamma_{\alpha\beta}(v)\|^2_{L^2(\omega)} + \sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\beta=1}^{2} \|\chi_{\alpha\beta}(v,s)\|^2_{L^2(\omega)} + \sum_{\alpha=1}^{2} \|\delta_{\alpha 3}(v,s)\|^2_{L^2(\omega)}\Big)^{\frac{1}{2}}$

Existence et unicité

Le lemme du mouvement rigide

Soient $u \in H^1(\omega;\mathbb{R}^3)$ et $r \in H^1(\omega;\mathbb{R}^3)$ tel que $r.a_3 = 0$. Soit $\varphi \in W^{2,\infty}(\omega;\mathbb{R}^3)$.

i) On suppose que $\gamma^N_{\alpha\beta}(u) = 0$ alors il existe un unique $\psi \in L^2(\omega;\mathbb{R}^3)$ tel que $\partial_\alpha u = \psi \wedge \partial_\alpha \varphi$

ii) Si $\delta^N_{\alpha 3}(u,r) = 0$ alors $\partial_\alpha u.a_3 = -r.a_\alpha$ appartient à $H^1(\omega)$. De plus $r.a_\alpha = -\varepsilon_{\alpha\beta}\psi.a^\beta$.

iii) Si de plus, $\chi^N_{\alpha\beta}(u,r) = 0$, alors ψ s'identifie à un vecteur constant de $\mathbb{R}^3$ et l'on a

$u(x,y) = c + \psi \wedge \varphi(x,y)$

où c est un vecteur constant de $\mathbb{R}^3$ et

$$r(x,y) = -(\varepsilon_{\alpha\beta}(x,y)\psi.a^\beta(x,y))a^\alpha(x,y)$$

Existence et unicité

Théorème d'existence d'unicité(A.Blouza et H.Le dret)

Pour tout $(f, M, N) \in H^1_{\gamma_0}(\omega)^{3'} \times H^{\frac{1}{2}}_{00}(\gamma_1)^{3'} \times H^{\frac{1}{2}}_{00}(\gamma_1)^{3'}$, le premier problème variationnel admet une solution unique $(u, r) \in \mathbb{V}(\omega)$. De plus, cette solution vérifie

$$\|(u, r)\|_{\mathbb{V}(\omega)} \leq c e^{-3} \|\mathcal{L}\|. \tag{2}$$

$$H^{\frac{1}{2}}_{00}(\gamma_1) = \{u \in H^{\frac{1}{2}}(\gamma_1)/u_0/\partial\omega \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\omega)\}$$

Problème variationnel mixte

Difficultés

- Problème avec la contrainte tangentielle $s.a_3 = 0$ qui est difficile a implémenter.
- L'idée consiste à traiter cette contrainte par l'introduction d'un multiplicateur de Lagrange λ pour imposer à $s.a_3 = 0$ de s'annuler.
- En vu de la discrétisation, il est également important d'ajouter un terme de stabilisation à $a(.,.)$

Formulation variationnelle mixte

Espace et norme

On introduit l'espace des fonctions suivant

$$\mathbb{X}(\omega) = H^1_{\gamma_0}(\omega)^3 \times H^1_{\gamma_0}(\omega)^3$$

muni de la norme

$$\|(v,s)\|_{\mathbb{X}(\omega)} = (\|v\|^2_{H^1(\omega)^3} + \|s\|^2_{H^1(\omega)^3})^{\frac{1}{2}}$$

soit $\mathbb{M}(\omega) = H^1_{\gamma_0}(\omega)$.
On pose $U = (u, r)$ et $V = (v, s)$

Formulation variationnelle mixte

Problème variationnel mixte

$$\begin{cases} \forall V \in \mathbb{X}(\omega), & a(U,V) + \eta\, \tilde{a}(U,V) + b(V,\psi) = \mathcal{L}(V) \\ \forall \chi \in \mathbb{M}(\omega), & b(U,\chi) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

où η est un paramètre positif.

Formes bilinéaires supplémentaires

- $\tilde{a}(U,V) = \int_\omega \partial_\alpha(r.a_3)\partial_\alpha(s.a_3)\,dx$
- $b(V,\chi) = \int \partial_\alpha(s.a_3)\partial_\alpha \chi\,dx$

Existence et unicité

Idée de la démonstration :

Propriété d'ellipticité

$$\forall\, \mathbb{V} \in \mathbb{X}(\omega), \quad a(V,V) + \eta\, \tilde{a}(V,V) \geq c_* min\{e^3, \eta\} \|V\|^2_{\mathbb{X}(\omega)}$$

Condition inf-sup

$$\forall \chi \in \mathbb{M}(\omega), \quad \sup_{V \in \mathbb{X}(\omega)} \frac{b(V,\chi)}{\|V\|_{\mathbb{X}(\omega)}} \geq c_\sharp \|\chi\|_{H^1(\omega)}$$

Pour $V = (0, \chi a_3)$

Existence et unicité de la solution

Remparque :

Le théorème suivant est une conséquence immédiate des deux propriétés précidentes (d'apès V.Girault et P-A.Raviart).

Théorème existence et unicité(C.Bernardi)

Pour tout $(f, M, N) \in H^1_{\gamma_0}(\omega)^{3'} \times H^{\frac{1}{2}}_{00}(\gamma_1)^{3'} \times H^{\frac{1}{2}}_{00}(\gamma_1)^{3'}$, le second problème variationnel admet une solution unique $(U, \psi) \in \mathbb{X}(\omega) \times \mathbb{M}(\omega)$. De plus, cette solution vérifie $\|U\|_{\mathbb{X}(\omega)} + \|\psi\|_{H^1(\omega)} \leq ce^{-3}\|\mathcal{L}\|$.

Convergence

Notation

On note (U^η, ψ^η) la solution du second problème pour une valeur fixe de η et (U, ψ) la solution du même problème pour $\eta = 0$.

Théorème d'estimation

Pour tout $(f, M, N) \in H^1_{\gamma_0}(\omega)^{3'} \times H^{\frac{1}{2}}_{00}(\gamma_1)^{3'} \times H^{\frac{1}{2}}_{00}(\gamma_1)^{3'}$, la propriété de convergence suivante donne
$\|U^\eta - U\|_{\mathbb{X}(\omega)} + \|\psi^\eta - \psi\|_{\mathbb{M}(\omega)} \leq c\eta e^{-3}\|\mathcal{L}\|$.

Outils de la discrétisation

Outils

- Le domaine ω est le carré $]-1,1[^2$.
- Méthode de Galerkin avec intégration numérique.
- L, M et N sont trois entiers tels que $L \le N \le M$.
- On définit les espaces discrets suivants :
  $\mathbb{X}_N = \mathbb{P}_N^{\gamma 0}(\omega)^3 \times \mathbb{P}_N^{\gamma 0}(\omega)^3, \quad \mathbb{M}_N = \mathbb{P}_L^{\gamma 0}(\omega)$
  où $\mathbb{P}\,{}_n^{\gamma 0}(\omega) = \mathbb{P}_n(\omega) \cap H^1_{\gamma 0}(\omega)$

Outils

- Formule de Gauss Lobatto de type Legendre à $M+1$ points :

$$\forall \Phi \in \mathbb{P}_{2M-1}(-1,1), \qquad \int_{-1}^{1} \Phi(\zeta)\, d\zeta = \sum_{j=0}^{M} \Phi(\xi_j)\rho_j.$$

- Produit scalaire discret : $(u,v)_M = \sum_{i,j=0}^{M} u(\xi_i,\xi_j)v(\xi_i,\xi_j)\rho_i\rho_j$

Formes discretes des tenseurs

Les tenseurs

- Tenseur de déformation :
  $\gamma^N_{\alpha\beta}(u_N) = \frac{1}{2}(\partial_\alpha u_N . a_{\beta N} + \partial_\beta u_N . a_{\alpha N})$
- Tenseur de changement de courbure :
  $$\chi^N_{\alpha\beta}(u, r) = \frac{1}{2}(\partial_\alpha u . c_{\beta N} + \partial_\beta u . c_{\alpha N} + \partial_\alpha r . a_{\beta N} + \partial_\beta r . a_{\alpha N})$$
- Tenseur de déformation de cisaillement transverse :
  $$\delta^N_{\alpha 3}(u, r) = \frac{1}{2}(\partial_\alpha u . a_{3N} + r . a_{\alpha N})$$

Remarque

On introduit la $H^1(\omega)$-projection a_{KN} de chaque a_K sur $\mathbb{P}_N(\omega)^3$, qui satisfait

$$\begin{aligned} \forall v_N \in \mathbb{P}_N(\omega)^3, \qquad (\partial_\alpha a_{kN}, \partial_\alpha v_N) &= \int_\omega (\partial_\alpha a_k).(\partial_\alpha v_N)\, dx \\ (a_{KN}, 1)_M &= \int_\omega a_K(x)\, dx \end{aligned} \qquad (4)$$

Formulation discrète

Problème discret

Trouver $(U_N, \psi_N) \in \mathbb{X}_N \times \mathbb{M}_N$ tel que

$$\begin{cases} \forall V_N \in \mathbb{X}_N, \\ \quad a_M(U_N, V_N) + \eta\, \tilde{a}_M(U_N, V_N) + b_M(V_N, \psi_N) = \mathcal{L}_M(V_N) \\ \forall \chi_N \in \mathbb{M}_N, \quad b_M(U_N, \chi_N) = 0 \end{cases} \tag{5}$$

avec $U_N = (u_N, r_N)$ et $V_N = (v_N, s_N)$.

Formes bilinéaires et linéaires

Forme bilinéaire 1

$$\begin{aligned} a_M(U_N; V_N) = {} & e(a^{\alpha\beta\rho\sigma}\gamma^N_{\alpha\beta}(u_N), \gamma^N_{\rho\sigma}(v_N)\sqrt{a})_M \\ & + \frac{e^3}{12}(a^{\alpha\beta\rho\sigma}\chi^N_{\alpha\beta}(U_N), \chi^N_{\rho\sigma}(V_N)\sqrt{a})_M \\ & + 2e\frac{E}{1+\nu}(a^{\alpha\beta}\delta^N_{\alpha 3}(U_N), \delta^N_{\beta 3}(V_N)\sqrt{a})_M, \end{aligned} \quad (6)$$

Formes bilinéaires 2

$$\tilde{a}_M(U_N, V_N) = (\partial_\alpha \mathcal{I}_M(r_N.a_{3N}), \partial_\alpha \mathcal{I}_M(s_N.a_{3N}))_M,$$

Formes bilinéaires 3

$$b_M(V_N, \chi_N) = (\partial_\alpha \mathcal{I}_M(s_N.a_{3N}), \partial_\alpha \chi_N)_M.$$

La forme linéaire $\mathcal{L}_M(V_N)$

$$\mathcal{L}_M(V_N) = (f, v_N\sqrt{a})_M + (N, v_N)_M^{\gamma 1} + (M, s_N)_M^{\gamma 1}$$

Existence et unicité de la solution

Propriété de continuité de a_M

$\exists$ une constante c indépendante de N et $M > N$ tel que
$\forall U_N \in \mathbb{X}_N, \forall V_N \in \mathbb{X}_N |a_M(U_N; V_N)| \leq ce \| U_N \|_{\mathbb{X}(\omega)} \| V_N \|_{\mathbb{X}(\omega)}$

Propriété de continuité de $\tilde{a}_M$

$\exists$ une constante c indépendante de N et $M > N$ tel que
$\forall U_N \in \mathbb{X}_N, \forall V_N \in \mathbb{X}_N |\tilde{a}_M(U_N; V_N)| \leq ce \| U_N \|_{\mathbb{X}(\omega)} \| V_N \|_{\mathbb{X}(\omega)}$

Propriété de continuité de b_M

$\exists$ une constante c indépendante de N et $M > N$ tel que
$\forall V_N \in \mathbb{X}_N, \forall \chi_N \in \mathbb{X}_N |b_M(V_N; \chi_N)| \leq ce \| V_N \|_{H^1(\omega)} \| \chi_N \|_{H^1(\omega)}$

Existence et unicité

Continuité de $\mathcal{L}_M$

$$\|\mathcal{L}_M\|_N \leqslant c(\|\mathcal{I}_M f\|_{L^2(\omega)^3} + \|i_M^{\gamma_1} N\|_{L^2(\gamma_1)^3} +)\|i_M^{\gamma_1} M\|_{L^2(\gamma_1)^3}$$

Propriété d'ellipticité

$$\forall\, \mathbb{V}_{\mathbb{N}} \in \mathbb{X}_{\mathbb{N}}(\omega), \quad a_M(V_N, V_N) + \eta\, \tilde{a}_M(V_N, V_N) \geq c_* \min\{e^3, \eta\} \|V_N\|^2_{\mathbb{X}(\omega)}$$

Condition inf-sup

$$\forall \chi \in \mathbb{M}_N(\omega), \quad \sup_{V \in \mathbb{X}_{\mathbb{N}}(\omega)} \frac{b_M(V_N, \chi_N)}{\|V_N\|_{\mathbb{X}_{\mathbb{N}}(\omega)}} \geq c_\sharp \|\chi_N\|_{H^1(\omega)}$$

Théorème existence et unicité(C.Bernardi)

Pour N_0 un entier positif, $\forall f$ continue sur $\overline{\omega}$ et (M, N) continues sur $\overline{\Gamma_1}$, et pour $N \geq N_0$. Le problème discret admet une solution unique $(U_N, \psi_N) \in \chi_N \times \mathbb{M}_N$. De plus, cette solution vérifie

$$\|U_N\|_{\mathbb{X}(\omega)} + \|\psi_N\|_{\mathbb{M}(\omega)} \leq c e^{-3} \|\mathcal{L}_M\|_N.$$

Estimation d'erreur

Théorème d'estimation

$$\|U - U_N\|_{\mathbb{X}(\omega)} \leq c \, \max\{e^{-3}, \eta^{-1}\}$$
$$\left(c(U,\psi)\max\{e,\eta\}N^{1-s} + c(\varphi)N^{1-s_0}(\log N)^{\frac{1}{2}} + c(f,M,N)N^{-s_1}\right) \tag{7}$$

Idée de la preuve

- Inégalité triangulaire.
- Inégalité inverse des polynômes.
- Injections de Sobolev.
- inégalité de Cauchy Schwartz.

Système matriciel

On considère les polynômes de Lagrange ℓ_i^* associés aux points ξ_i^*, $0 \leq i \leq N$. Donc la solution du problème discret s'écrit :

$$u_N(x,y) = \sum_{i,j=0}^{N} u_N(\xi_i^*, \xi_j^*)\ell_i^*(x)\ell_j^*(y)$$

Système matriciel

$$\begin{pmatrix} Q^T(A+\eta\,\tilde{A})Q & Q^T B^T Q_0 \\ Q_0^T BQ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^* \\ \psi^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q^T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Détermination des matrices

La matrice A :

$$AU = eQ_1^T \Gamma^T S_1 \Gamma Q_1 U_1^* \quad + \frac{e^3}{12} Q_2^T \chi^T S_2 \chi Q_2 U^* + \quad \frac{2eE}{1+\upsilon} Q_2^T \delta^T S_3 \delta Q$$

Et par la suite on obtient le système suivant :

$$AU = Q^T(A_1^* + A_2^* + A_3^*)QU^*$$

ce qui est sous la forme :

$$AU = Q^T A^* QU^*$$

où

$$A^* = A_1^* + A_2^* + A_3^*$$

La matrice B :

$$B\Psi^0 = Q^T B^* Q_0 \Psi^0$$

La forme linéaire $\mathcal{L}$:

$$F_1 = Q^T \tilde{B} F + Q^T N + Q^T M$$

Remarque :
Les matrices A^* et B sont de dimension $(6(M+1)^2, 6(M+1)^2)$.

Le deuxième coéfficient du tenseur de changement de courbure est le χ_{12} pour $\alpha = 1$ et $\beta = 2$.
ce dui donne pour $u_N(u_N^1, u_N^2, u_N^3) \in \mathbb{R}^3$, $a_{1N}(a_{1N}^1, a_{1N}^2, a_{1N}^3) \in \mathbb{R}^3$ et $c_{1N}(c_{1N}^1, c_{1N}^2, c_{1N}^3) \in \mathbb{R}^3$

$$\chi_{12}^N(u, r) = \frac{1}{2}(\partial_1 u.c_{2N} + \partial_2 u.c_{1N} + \partial_\alpha r.a_{\beta N} + \partial_\beta r.a_{\alpha N})$$

et aux points de la grille fine on obtient

$$\chi_{12}^N(U_N)(\xi_r,\xi_s) =$$

$$\frac{1}{2}\Big[\sum_{i,j,r,s=0}^{M} u_N^1(\xi_i,\xi_j)\ell_i^{'}(\xi_r)\ell_j(\xi_s)c_{2N}^1(\xi_r,\xi_s) + \sum_{i,j,r,s=0}^{M} u_N^2(\xi_i,\xi_j)\ell_i^{'}(\xi_r)\ell_j(\xi_s)c_{2N}^2(\xi_r,\xi_s) +$$

$$\sum_{i,j,r,s=0}^{M} u_N^3(\xi_i,\xi_j)\ell_i^{'}(\xi_r)\ell_j(\xi_s)c_{2N}^3(\xi_r,\xi_s) + \sum_{i,j,r,s=0}^{M} u_N^1(\xi_i,\xi_j)\ell_i(\xi_r)\ell_j^{'}(\xi_s)c_{1N}^1(\xi_r,\xi_s)$$

$$+\sum_{i,j,r,s=0}^{M} u_N^2(\xi_i,\xi_j)\ell_i(\xi_r)\ell_j^{'}(\xi_s)c_{1N}^2(\xi_r,\xi_s) + \sum_{i,j,r,s=0}^{M} u_N^3(\xi_i,\xi_j)\ell_i(\xi_r)\ell_j^{'}(\xi_s)c_{1N}^3(\xi_r,\xi_s)$$

$$+\sum_{i,j,r,s=0}^{M} r_N^1(\xi_i,\xi_j)\ell_i^{'}(\xi_r)\ell_j(\xi_s)a_{2N}^1(\xi_r,\xi_s) + \sum_{i,j,r,s=0}^{M} r_N^2(\xi_i,\xi_j)\ell_i^{'}(\xi_r)\ell_j(\xi_s)a_{2N}^2(\xi_r,\xi_s)$$

$$+\sum_{i,j,r,s=0}^{M} r_N^3(\xi_i,\xi_j)\ell_i^{'}(\xi_r)\ell_j(\xi_s)a_{2N}^3(\xi_r,\xi_s) + \sum_{i,j,r,s=0}^{M} r_N^1(\xi_i,\xi_j)\ell_i(\xi_r)\ell_j^{'}(\xi_s)a_{1N}^1(\xi_r,\xi_s)$$

$$+\sum_{i,j,r,s=0}^{M} r_N^2(\xi_i,\xi_j)\ell_i(\xi_r)\ell_j^{'}(\xi_s)a_{1N}^2(\xi_r,\xi_s) + \sum_{i,j,r,s=0}^{M} r_N^3(\xi_i,\xi_j)\ell_i(\xi_r)\ell_j^{'}(\xi_s)a_{1N}^3(\xi_r,\xi_s)\Big]$$

Ecriture matricielle de χ_{12} :

χ_{12} s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\chi_{12} U = \chi^1_{12|u} U_1 + \chi^2_{12|u} U_2 + \chi^3_{12|u} U_3 + \chi^1_{12|r} R_1 + \chi^2_{12|r} R_2 + \chi^3_{12|r} R_3$$

La matrice $\chi^k_{12|u}$ est de dimension $((M+1)^2, (M+1)^2)$ et qui a comme terme général
$\ell_i'(\xi_r)\ell_j(\xi_s)c^k_{2N}(\xi_r, \xi_s) + \ell_i(\xi_r)\ell_j'(\xi_s)c^k_{1N}(\xi_r, \xi_s)$ avec $1 \leq k \leq 3$.

La matrice χ_{12} s'écrit alors sous la forme

$$\chi_{12} = \begin{pmatrix} \chi^1_{12|u} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \chi^2_{12|u} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \chi^3_{12|u} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \chi^1_{12|r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \chi^2_{12|r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \chi^3_{12|r} \end{pmatrix}$$

Donc χ_{12} est une matrice carré de dimension $(6(M+1)^2, 6(M+1)^2)$
avec 0 est la matrice nulle de taille $((M+1)^2, (M+1)^2)$

Le système global

on utilisant l'algorithme d'Uzawa :

$$\begin{cases} Q^T(A^* + \eta\, \tilde{A}^*)QU^* + Q^T B^* Q_0 \Psi^0 = F_1 \\ Q_0^T {B^*}^T QU^* = 0 \end{cases}$$

On multiplie la première équation du système par $(Q^T(A^* + \eta\, \tilde{A}^*)Q)^{-1}$ on trouve

$$U^* = (Q^T(A^* + \eta\, \tilde{A}^*)Q)^{-1}[F_1 - Q^T B^* Q_0 \Psi]$$

$$Q_0^T {B^*}^T (A^* + \eta\, \tilde{A}^*)^{-1} B^* Q_0 \Psi^0 = Q_0^T {B^*}^T (A^* + \eta\, \tilde{A}^*)^{-1} \tilde{B} F \quad (9)$$

On remarque que le système peut s'écrire sous la forme

$$\mathcal{A}\Psi^0 = \mathcal{F} \quad (10)$$

Résultats numériques

Paraboloïde hyperboliqueencastré sous pression uniforme

- La carte est définie par

$$\phi(x, y) = (x, y, \frac{c}{2b^2}(x^2 - y^2))^T,$$

  où $b = 50$ cm et $c = 10$ cm
- La coque est encastrée sur $\partial\omega$ et soumis à une pression uniforme $q = 0,01 kp/cm^2$. Les données mécaniques sont $E = 2.85104 kp/cm^2, \quad \mu = 0,4$;
- L'épaisseur de la coque est $e = 0,8$ cm.
- La valeur de référence pour ce test est $-0,024$ cm.

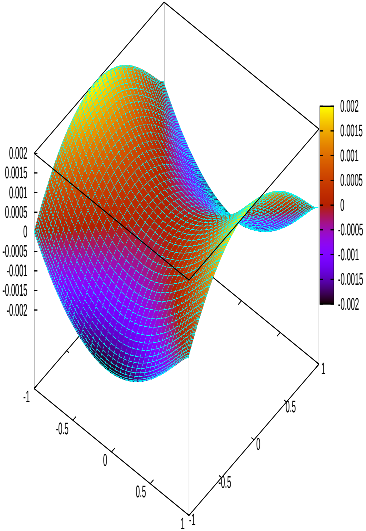


FIGURE: une paraboloide

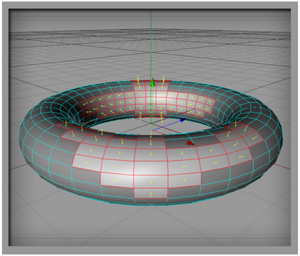


FIGURE: un tore

Ce tore est paramétré comme suit :

$$\phi(x,y) = ((a - b\cos x)\cos y, (a - b\cos x)\sin y, b\sin x)$$

Notations

Outils

- La décomposition de domaine comfore est sans recouvrement en un nombre fini de sous-domaine ouverts ω_k d'interieur non vide, au sens suivant :

$$\overline{\omega} = \bigcup_{k=1}^{K} \overline{\omega_k} \quad et \quad \omega_k \cap \omega_k = \emptyset, \quad 1 \leq k < k^{'} \leq K$$

.

- Le produit scalaire discret :

$$(u, v)_N = \sum_{k=1}^{K} (\sum_{i,j} u \circ \mathbf{F}_k(\xi_i, \xi_j) v \circ \mathbf{F}_k(\xi_i, \xi_j) \frac{mes(\omega_k)}{4})$$

Formulation discrète

Problème discret

Trouver $(U_N, \psi_N) \in \mathcal{X}_N \times \mathcal{M}_N$ tel que

$$\begin{cases} \forall V_N \in \mathcal{X}_N, \\ \quad \mathcal{A}_M(U_N, V_N) + \eta\, \tilde{\mathcal{A}}_M(U_N, V_N) + \mathcal{B}_M(V_N, \psi_N) = \mathcal{L}_M(V_N) \\ \forall \chi_N \in \mathcal{M}_N, \quad b_M(U_N, \chi_N) = 0 \end{cases} \tag{11}$$

avec $U_N = (u_N, r_N)$ et $V_N = (v_N, s_N)$.

- $$\mathcal{A}_M(U_N, V_N) = \sum_{k=1}^{K} a_M^k(U_{N|\omega_k}, V_{N|\omega_k})$$
- $$\tilde{\mathcal{A}}_M(U_N, V_N) = \sum_{k=1}^{K} \tilde{a}_M^k(U_{N|\omega_k}, V_{N|\omega_k})$$
- $$\mathcal{B}_M(V_N, \psi_N) = \sum_{k=1}^{K} b_M^k(V_{N|\omega_k}, \psi_{N|\omega_k})$$
- $$\mathscr{L}_M(V_N) = \sum_{k=1}^{K} \mathcal{L}_M^k(V_{N|\omega_k})$$

Formes bilinéaires

$$\mathcal{A}((u,r);(v,s)) = \int_\omega \Big\{ e a^{\alpha\beta\rho\sigma} \Big[\gamma_{\alpha\beta}(u)\gamma_{\rho\sigma}(v) + \frac{e^2}{12}\chi_{\alpha\beta}(u,r)\chi_{\rho\sigma}($$

$$+ 2e\frac{E}{1+\nu} a^{\alpha\beta}\delta_{\alpha 3}(u,r)\delta_{\beta 3}(v,s)\Big\}\sqrt{a}\,dx$$

$$= \sum_{k=1}^{K}\int_{\omega_k} \Big\{ e a^{\alpha\beta\rho\sigma} \Big[\gamma_{\alpha\beta}(u|\omega_k)\gamma_{\rho\sigma}(v|\omega_k) + \frac{e^2}{12}\chi_{\alpha\beta}(u|\omega_k, r|\omega_k)\chi_{\rho\sigma}($$

$$+ 2e\frac{E}{1+\nu} a^{\alpha\beta}\delta_{\alpha 3}(u|\omega_k, r|\omega_k)\delta_{\beta 3}(v|\omega_k, s|\omega_k)\Big\}\sqrt{a}\,dx$$

$$\tilde{\mathcal{A}}(U,V) = \int_\omega \partial_\alpha(r.a_3)\partial_\alpha(s.a_3)\,dx = \sum_{k=1}^{K} \int_{\omega_k} \partial_\alpha(r|\omega_k.a_3)\partial_\alpha(s|\omega_k.a_3$$

et

$$\mathcal{B}(V,\chi) = \int_\omega \partial_\alpha(s.a_3)\partial_\alpha\chi\,dx = \sum_{k=1}^{K} \int_{\omega_k} \partial_\alpha(|s\omega_k.a_3)\partial_\alpha\chi\,dx$$

Résultat d'existence et d'unicité

Théorème existence et unicité

Pour N_0 un entier positif, $\forall f$ continue sur $\overline{\omega}$ et (M, N) continues sur $\overline{\Gamma_1}$, et pour $N \geq N_0$. Le problème discret admet une solution unique $(U_N, \psi_N) \in \chi_N \times \mathcal{M}_N$.

Continuité

- Il existe une constante c indépendante de N et $M \geq N$ tels que la propriété de continuité suivante donne

$$\forall U_N \in \mathcal{X}_N, \forall V_N \in \mathcal{X}_N, \quad |\mathcal{A}_M(U_N; V_N)| \leq ce\|U_N\|_{\mathcal{X}(\omega)}\|V_N\|_{\mathcal{X}(\omega}$$

-

$$\forall U_N \in \mathcal{X}_N, \forall V_N \in \mathcal{X}_N, \quad |\tilde{\mathcal{A}}_M(U_N; V_N)| \leq c\|U_N\|_{\mathcal{X}(\omega)}\|V_N\|_{\mathcal{X}(\omega)}$$

-

$$\forall V_N \in \mathcal{X}_N, \forall \chi_N \in \mathcal{M}_N, \quad |\mathcal{B}_M(V_N; \chi_N)| \leq c\|V_N\|_{\mathcal{X}(\omega)}\|\chi_N\|_{H^1(\omega}$$

Ellipticité

Proposition

Il existe un entier positif N_* et une constante positive $\tilde{c}_*$ tels que, pour tout $N \geqslant N_*$ et tels que pour $1 \leq k \leq K$, $mes(w_k \cap \gamma_0) > 0$, la propriété d'ellipticité suivante donne

$$\forall\, \mathbb{V}_{\mathbb{N}} \in \mathcal{X}_{\mathcal{N}}(\omega), \quad \mathcal{A}_M(V_N, V_N) + \eta\, \tilde{\mathcal{A}}_M(V_N, V_N) \geq \tilde{c}_* \min\{e^3, \eta\} \| V_N$$

Idée de la preuve : on utilise l'inégalité de Poincaré-Friedrichs.

Proposition

$$\|U - U_N\|_{\mathcal{X}(\omega)} \leq c \max\{e^{-3}, \eta^{-1}\}$$

$$\Big(\inf_{W_N \in \mathbb{V}_N} (\max\{e,\eta\} \|U - W_N\|_{\mathcal{X}(\omega)} + \sup_{V_N \in \mathcal{X}_N} \frac{E_M^{\mathcal{A}}(W_N; V_N) + \eta \tilde{E}_M^{\mathcal{A}}(W_N;}{\|V_N\|_{\mathcal{X}(\omega)}}$$

$$+ \inf_{\chi_N \in \mathcal{M}_N} (\|\psi - \chi_N\|_{H^1(\omega)} + \sup_{V_N \in \mathcal{X}_N} \frac{E_M^{\mathcal{B}}(V_N; \chi_N)}{\|V_N\|_{\mathcal{X}(\omega)}})$$

$$+ \sup_{V_N \in \mathcal{X}_N} \frac{E_M^{\mathscr{L}}(V_N; \chi_N)}{\|V_N\|_{\mathcal{X}(\omega)}} \Big)$$

où les quatres quantités $E_M^{\mathcal{A}}$, $\tilde{E}_M^{\mathcal{A}}$, $E_M^{\mathcal{B}}$ et $E_M^{\mathscr{L}}$ sont définis par

$$E_M^{\mathcal{A}}(W_N;V_N) = (\mathcal{A}-\mathcal{A}_M)(W_N;V_N), \quad \tilde{E}_M^{\mathcal{A}}(W_N;V_N) = (\tilde{\mathcal{A}}-\tilde{\mathcal{A}}_M)W$$

$$E_M^{\mathcal{B}}(V_N;\chi_N) = (\mathcal{B}-\mathcal{B}_M)(V_N;\chi_N), \quad E_M^{\mathscr{L}}(V_N) = (\mathscr{L}-\mathscr{L}_M)(V_N).$$

Lemme

Pour tout entier $N \geq N_{\sharp\sharp}$, il existe une constante c indépendante de N tel que, pour tout U dans $\mathcal{V}(\omega)$,

$$\inf_{W_N \in \mathcal{V}_N} \|U - W_N\|_{\mathcal{X}(\omega)} \leq$$

$$c \inf_{Z_N \in \mathcal{X}_N} \Big(\sum_{k=1}^{K} \|U - Z_N\|_{\mathcal{X}(\omega_k)} + \sup_{w_N \in \mathcal{M}_N} \frac{E_M^b(Z_N; w_N)}{\|w_N\|_{H^1(\omega)}} \Big).$$

Lemme

Il existe une constante c qui dépend uniquement de la norme de a_α dans $H^{s_0}(\omega_k)^3$ et de a_3 dans $H^{s_0+1}(\omega_k)^3$ tel que

$$\forall W_N \in \mathcal{X}_N, \qquad \sup_{V_N \in \mathcal{X}_\mathcal{N}} \frac{E_M^{\mathcal{A}}(W_N; V_N)}{\|V_N\|_{\mathcal{X}(\omega)}} \leq ceN^{1-s_0}(logN)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{K} \|W_N\|_{\mathcal{X}(\omega} \tag{12}$$

Lemme

Il existe une constante c qui dépend uniquement de la norme de a_3 dans $H^{s_0}(\omega_k)^3$ tel que

$$\forall W_N \in \mathcal{X}_N, \qquad \sup_{V_N \in \mathcal{X_N}} \frac{\tilde{E}^a_M(W_N; V_N)}{\|V_N\|_{\mathcal{X}(\omega)}} \leq cN^{-s_0}(logN)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{K} \|W_N\|_{\mathcal{X}(\omega_k)}. \tag{13}$$

Lemme

Il existe une constante c qui dépend uniquement de la norme de a_3 dans $H^{s_0}(\omega)^3$ tel que

$$\forall \chi_N \in \mathcal{M}_N, \quad \sup_{V_N \in \mathcal{X}_\mathcal{N}} \frac{E_M^b(V_N; \chi_N)}{\|V_N\|_{\mathcal{X}(\omega)}} \leq cN^{-s_0}(logN)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{K} \|\chi_N\|_{H^1(\omega_k)}, \tag{14}$$

et

$$\forall Z_N \in \mathcal{M}_N, \quad \sup_{V_N \in \mathcal{X}_\mathcal{N}} \frac{E_M^b(Z_N; w_N)}{\|w_N\|_{H^1(\omega)}} \leq cN^{-s_0}(logN)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{K} \|\chi_N\|_{\mathcal{X}(\omega_k)}, \tag{15}$$

Lemme

Supposons que les données (f, N, M) apartiennent à $H^{s_1}(\omega)^3 \times H^{s_1}(\gamma_1)^3 \times H^{s_1}(\gamma_1)^3$ pour un nombre réel $s > 1$. Il existe une constante $\tilde{c}$ qui dépend uniquement de la norme de a_3 dans $H^{s_0}(\omega)^3$ tel que

$$\sup_{V_N \in \mathcal{X_N}} \frac{E_M^L(V_N)}{\|V_N\|_{\mathcal{X}(\omega)}} \leq c(\tilde{c} N^{1-s_0} (logN)^{\frac{1}{2}} + c(f, N, M) N^{-s_1}), \quad (16)$$

où la quantité $c(f, N, M)$ est définie par

$$c(f, N, M) = \sum_{k=1}^{K} \|f\|_{H^{s_1}(\omega_k)^3} + \|N\|_{H^{s_1}(\gamma_1)^3} + \|N\|_{H^{s_1}(\gamma_1)^3} \quad (17)$$

Théorème d'estimation

Supposons que :
(i) la solution (U, ψ) du problème discret appartient à $H^S(\omega)^{3\times 3} \times H^S(\omega)$ et telle que chaque $(U|\omega_k, \psi|\omega_k)$, $1 \leq k \leq K$, appartiènne à $H^{S_k}(\omega_k)^{3\times 3} \times H^{S_k}(\omega_k)$ pour un nombre réel $S_k \geq 1$,
(ii) les données $(f|\omega_k, N|\omega_k, M|\omega_k)$ appartiennent à $H^{s_{1k}}(\omega_k)^3 \times H^{s_{1k}}(\gamma_1)^3 \times H^{s_{1k}}(\gamma_1)^3$ pour un nombre réel $s_{1k} > 1$.
Alors, pour tout entier $N \geq N_0$, l'estimation d'erreur suivante entre la solution (U, ψ) et la solution (U_N, ψ_N) du problème discret

$$\|U - U_N\|_{\mathcal{X}(\omega)} \leq c \ \max\{e^{-3}, \eta^{-1}\}$$

$$\left(c(U,\psi)\max\{e,\eta\}N^{1-s} + c(\varphi)N^{1-s_0}(\log N)^{\frac{1}{2}} + c(f,M,N)N^{-s_1}\right)$$

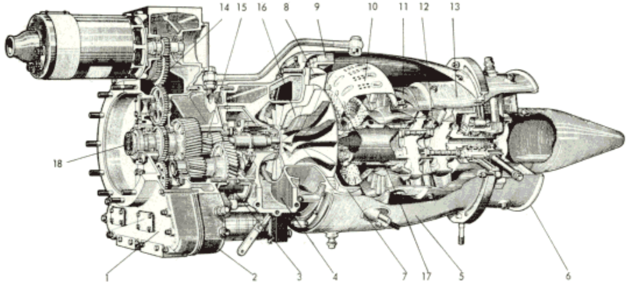
où la quantité $c(U, \psi)$ est défine par

$$c(U,\psi) = \sum_{k=1}^{K} \|U\|_{H^S(\omega_k)^{3\times 3}} + \sum_{k=1}^{K} \|\psi\|_{H^S(\omega_k)},$$

Remarque

L'erreur entre la solution du problème initial et de U_N un élément de solution (U_N, ψ_N) du problème discret, est de l'ordre

$$\eta e^{-3} + \max\{e^{-3}, \eta^{-1}\} \max\{eN^{1-S}, \eta N^{1-S}, N^{1-s_0}(log)^{\frac{1}{2}}, N^{-s_1}\}.$$



LEGENDE

Parties fixes extérieures

1 - Couvercle du carter d'accessoires
2 - Carter d'accessoires
3 - Carter réducteur
4 - Carter compresseur
5 - Carter turbine
6 - Diffuseur de sortie

Parties fixes intérieures

7 - Couvercle des diffuseurs
8 - Diffuseur radial
9 - Diffuseur axial
10 - Chambre de combustion
11 - Distributeur 1er étage
12 - Distributeur 2ème étage
13 - Anneau de turbine

Parties mobiles

14 - Chaînes des accessoires
15 - Réducteur de vitesse
16 - Compresseur centrifuge
17 - Ensemble tournant
18 - Prise de mouvement

FIGURE: Une turbune