Модели и интерпретации.

Лев Дмитриевич Беклемишев

27 июля 2021 г.

Интерпретация $\sim$ перевод с одного языка на другой. Язык логики предикатов (1 порядка).

Пример 1.

1. Геометрия Лобачевского в Евклидовой: Бельтрами, Клейн, Пуанкаре.
2. $\mathbb{C}$ в $\mathbb{R}$. (Эйлер?)
3. Евклидова геометрия в $\mathbb{R}$. (Декарт?)
4. Координатизация: числовая система в элементарной геометрии. (Фон Штаудт, Гильберт, М. Хау???)
5. $\mathbb{R}$ в V. (Дедекинд)
6. Любая непротиворечивая теория в счётном языке в $(\mathbb{N}; +, \cdot)$. (Гёдель, Гильберт/Бернайс)
7. ZFC в $\mathrm{PA} + \mathrm{Con}_{\mathrm{ZFC}}$ (PA — арифметика Пеано).
8. $\mathrm{ZF} + \mathrm{AC} + \mathrm{CH}$ в ZF (AC — аксиома выбора, CH — континуум гипотеза). (Гёдель)
9. $\mathrm{ZF} + \mathrm{AC} + \neg\mathrm{CH}$ в ZF. (Коэн; Скотт, Соловьёв)

Определение 1. $U \rhd V$ — “U интерпретируется в V”.

Лемма 1.

1. *Если $U \rhd V$, то из непротиворечивости U следует непротиворечивость V.*
2. *Предыдущее устанавливается (синтаксическими) следствиями и формулами в* PA*:*

$$\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Con}_U \to \mathrm{Con}_V .$$

3. *Если U разрешима (алгоритмически), то разрешима и T.*

   Например. Q — слабая арифметическая теория — алгоритмически неразрешима. При этом

$$\mathrm{Th}(\textit{групп}) \rhd Q,$$

   а следовательно, теория групп алгоритмически неразрешима.

Определение 2. Модель теории множеств: $(\{\text{множества}\}; \in)$. Аксиомы:

1. $x = y \leftrightarrow \forall z\ (z \in x \leftrightarrow z \in y)$,
2. $\forall x, y\ \exists z\ \forall u\ (u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y)$,

3. аксиомы объединения и степени,
4. аксиомы выделения,
5. аксиома выбора,
6. аксиома бесконечности.

Определение 3. *Язык формальной арифметики* — $(0; s, +, \cdot; =)$ с аксиомами:

1. $\forall x\ \neg s(x) = 0$
2. $\forall x, y\ x = y \leftrightarrow s(x) = s(y)$
3. $\forall x\ x \neq 0 \to \exists y\ s(y) = x$
4. $x + 0 = x$
5. $x + s(y) = s(x + y)$
6. $x \cdot 0 = 0$
7. $x \cdot s(y) = x \cdot y + y$
8. (схема аксиом индукции) $\forall \Phi(x)\ (\Phi(0) \wedge \forall x\ (\Phi(x) \to \Phi(s(x)))) \to \forall x\ \Phi(x)$.