

Спектральные преобразования в теории солитонов.

Игорь Моисеевич Кричевер

20 июля 2021 г.

Мы будем разговаривать о теории систем солитонов.

Пример 1.

1.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{3}{2}u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{4} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

описывает волны на воде.

2. Ряды Тоды (Toda lattice):

$$\frac{1}{4} \ddot{x}_n = e^{2(x_n - x_{n+1})} - e^{2(x_{n-1} - x_n)}.$$

3. Система СМ:

$$\ddot{x}_n = \sum_{m=1}^N \frac{4}{(x_n - x_m)^2}$$

4. Система ??:

$$\sum_{i+j} \frac{2}{u_i^{(m)} - u_j^{(m)}} - \sum_{i+j} \frac{1}{u_i^{(m)} - u_j^{(m+1)}} - \sum_{i+j} \frac{1}{u_i^{(m)} - u_j^{(m-1)}}$$

Рассмотрим матрицу

$$M_{i,i} = a_i + t_1 + 2\mu_i t_2 + 3\mu_i^2 t_3 + \dots + n\mu_i^{n-1} \quad M_{i,j} = \frac{1}{\mu_i \cdot \mu_j}$$

Тогда

$$u = -2\partial x^2 \ln(\det(M)) \quad u = -2\partial x^2 \ln(\Theta(Ux + Vy + Wt + z(B))).$$

Что общее у всех этих примеров? Интегральные системы \Leftrightarrow условия совместимости переопределённой системы линейных уравнений.

Пример 2. Рассмотрим преобразование $L : C(\mathbb{R})^n \rightarrow C(\mathbb{R})^n, (\psi_k(t))_{k=1}^n \mapsto (L\psi_k(t))_{k=1}^n$, что

$$L(\psi)_n = c_n \psi_{n+1} + v_n \psi_n + c_{n-1} \psi_{n-1}.$$

Попытаемся найти собственные вектора L . Пусть $L\psi = E\psi$. Также попросим

$$\partial_t \psi_n = c_{n+1} \psi_{n+1} - c_{n-1} \psi_{n-1}$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \dot{c}_n \psi_{n+1} + c_n (c_n \psi_{n+2} - c_n \psi_n) + \dot{v}_n \psi_n + v_n (c_n \psi_{n+1} - c_{n-1} \psi_{n-1}) + \dot{c}_{n-1} \psi_{n-1} + c_{n-1} (c_n \psi_n - c_{n-2} \psi_{n-2}) \\ &= c_n (c_{n+1} \psi_{n+2} + v_{n+1} \psi_{n+1} + c_n \psi_n) - c_{n-1} (c_{n-1} \psi_n + v_{n-1} \psi_{n-1} + c_{n-2} \psi_{n-2}) \end{aligned}$$

Следовательно

$$\dot{c}_n = c_n(v_{n+1} - v_n) \quad \dot{v}_n = 2(c_n^2 - c_{n-1}^2).$$

Если, например, $c_n = e^{x_n - x_{n-1}}$, а $v_n = \dot{x}_n$;

$$\ddot{x}_n = Qe^{2(x_n - x_{n+1})} - e^{2(x_n - 1 - x_n)}.$$

Условие совместимости системы

$$\begin{cases} L\psi = E\psi \\ \partial\psi = A\psi \end{cases}$$

— $\dot{L} = [A, L]$ (уравнение Лакса).

Фазовое пространство — пространство $l(z)$ — пространство в зависимости от ??

Пусть $c_{n+N} = c_n$, $v_{n+N} = v_n$, $\psi_{n+N} = z\psi_n$ для всех n . Тогда

$$L = \begin{pmatrix} v_n & c_n & & zc_0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots \\ z^{-1}c_0 & & & \ddots \end{pmatrix}$$