

Непрерывные дроби.

Сергей Константинович Ландо

24 июля 2021 г.

Рассмотрим цепную дробь вида

$$\frac{1}{1 - ct + \frac{ct^2}{1 - (c-2)t + \frac{(4c-3)t^2}{1 - (c-6)t + \frac{(9c-18)t^2}{\dots}}}}$$
$$= 1 + ct + c(c-1)t^2 + c(c-1)(c-2)t^3 + c(c^3 - 6c^2 + 13c - 7) + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} L_n(c)t^k,$$

где каждый этаж n выглядит как

$$\frac{\dots}{1 - (c - n(n-1))t + \frac{(n^2c - n^2(n^2-1))t^2}{\dots}}$$

а $\deg(L_n) = n$.

Определение 1. *Хордовая диаграмма.* Рассмотрим окружность, в которой проведены хорды. При этом вершины хорд можно двигать как угодно с сохранением их порядка на окружности. Определим рекуррентно *инвариант ЧмUTOва-Варченко*:

1. Если диаграмма пуста, то сопоставим ей 1.
2. Если диаграмма состоит только из единственной хорды, то сопоставим ей c .
3. Если диаграмма содержит ребро, пересекающееся ровно с одним другим, то сопоставим ей $(c-1) \cdot M$, где M — значение этой диаграммы, но без рассмотренного ребра.
4. Если диаграмма состоит из двух непересекающихся наборов хорд, то значением равно произведению значений диаграмм для каждого из набора хорд.
- 5.

Добавить картинку.

Нарисовать.

Теорема 1. *Это определение корректно.*

Утверждение 2 (гипотеза, открыта). $L_n(c)$ есть инвариант ЧмUTOва-Варченко для диаграммы из n попарно пересекающихся хорд (главных диагоналей $2n$ -угольника) для значения c .

Замечание 1. Данное утверждение проверено для n до 16. Также доказано, что коэффициент при s совпадает.

Определение 2.

$$C(t) := \sum_{k=0}^{\infty} C_n t^n$$

— производящая функция чисел Каталана.

Несложно видеть, что

$$\begin{aligned} tC^2(t) &= C(t) - 1 \\ C(t)(1 - tC(t)) &= 1 \\ C(t) &= \frac{1}{1 - tC(t)} = \frac{1}{1 - \frac{t}{1 - tC(t)}} = \frac{1}{1 - \frac{t}{1 - \frac{t}{1 - \frac{t}{\dots}}}} \end{aligned}$$

Определение 3. *Хроматический многочлен графа G* — многочлен χ_G , где $\chi_G(c)$ — количество правильных раскрасок графа в s цветов.

Пример 1. $\chi_{K_n}(c) = A_c^n$.

Упражнение 1.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{K_n}(c) t^n &= 1 + ct + c(c-1)t^2 + c(c-1)(c-2)t^3 + \dots \\ &= \frac{1}{1 - ct + \frac{ct^2}{1 - (c-2)t + \frac{2(c-1)t^2}{1 - (c-4)t + \frac{3(c-2)t^2}{\dots}}}} \end{aligned}$$

Теорема 3 (ЧмUTOV, Ландо). *Инвариант ЧмUTOва—Варченко на хордовой диаграмме зависит только от графа пересечения хорд диаграммы.*

Упражнение 2. Найти функции цепных дробей.

1.

$$\frac{1}{1 - \frac{1^2 t^2}{1 - \frac{2^2 t^2}{1 - \frac{3^2 t^2}{\dots}}}} = ?$$

2.

$$\frac{1}{1 - \frac{1 \cdot 2 t^2}{1 - \frac{2 \cdot 3 t^2}{1 - \frac{3 \cdot 4 t^2}{\dots}}}} = ?$$

Определение 4. *Функция Ламберта* —

$$\Psi(t) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} t^n.$$

Лемма 4.

$$\Psi(t) = te^{\Psi(t)}.$$