# Математика алмазных упаковок.

Александр Петрович Веселов

21 июля 2021 г.

См. также:

- Решетки и упаковки шаров. Виктор Алексеевич Клепцын, ЛШСМ 2016.

**Плотнейшие упаковки шаров:**

- $n = 2$: гексагональная. Плотность $\Delta = \frac{\pi}{\sqrt{12}} \approx 0{,}91$.
- $n = 3$: "фруктовая" (как ядра кладут друг на друга, где в основании квадрат). Плотность $\Delta = \frac{\pi}{\sqrt{18}} \approx 0{,}74$.
- $D_n := \{x \in \mathbb{Z}^n \mid \sum x_i \equiv 0 \pmod 2\}$ — самые плотные при $n \in [3; 7]$.
- $E_8$, решётка Коркина-Золотарёва — самая плотная в размерности 8 (Марина Вязовская, 2016).

**Алмазные упаковки (по Джону Конвею).**

**Определение 1.** Упаковка $D_n^+ = A_n := D_n \cup (D_n + (1/2; 1/2))$.

*Замечание* 1.

- $A_3$ — алмаз; плотность $\Delta = \frac{\pi\sqrt{3}}{16} \approx 0{,}34$.
- Является решёткой только для чётных $n$.
- $A_4 \simeq \mathbb{Z}^4$ $((\pm 1/2; \pm 1/2; \pm 1/2; \pm 1/2))$.
- $A_8 = E_8$ — плотнейшая.

**Чётные унимодулярные решётки.**

**Определение 2.** $L \subseteq \mathbb{R}^n$ называется

- *чётной*, если все квадраты длин чётные,
- *унимодулярной*, если объём фундаментальной решётки равен 1.

*Замечание* 2.

- Существует только в размерности $n = 8k$.
- $n = 8$: единственная решётка — $E_8 = A_8$.
- $n = 16$: две $E_8 \oplus E_8$, $A_16$.
- $n = 24$: 24 решения Немейера, включая решётку Лича (см. также 1).

**Ряды Эйзенштейна и модулярные формы.**

**Определение 3.** $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{C}$, $\mathcal{L} = \langle 1, \tau \rangle$, $\operatorname{Im}(\tau) > 0$.

$$\varepsilon_{2k}(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{\mathrm{GCD}(m,n)=1} \frac{1}{(m+\tau n)^{2k}}.$$

*Замечание* 3.

- Если $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ — модулярная группа, то
$$\varepsilon_{2k}\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^{2k} \varepsilon_{2k}(\tau).$$
- В частности,
$$\varepsilon_{2k}(\tau + 1) = \varepsilon_{2k}(\tau).$$
- Ряд Фурье:
$$\varepsilon_{2k} = 1 - \frac{4k}{B_{2k}} \sum \sigma_{2k-1}(n) q^n,$$
где
$$\sigma_p(n) := \sum_{d|n} d^p, \qquad q = e^{2\pi i \tau}.$$
- **Факт.** Алгебра модулярных форм $\mathbb{C}[\varepsilon_4, \varepsilon_6]$ порождает $\varepsilon_4$ и $\varepsilon_6$.

**Тэта рядырешёток и спектр торов.**

**Определение 4.** *Тэта ряд решётки* $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}^n$ —
$$\Theta_{\mathcal{L}}(\tau) := \sum_{l \in \mathcal{L}} q^{|l|^2}, \qquad q = e^{2\pi i \tau}.$$

*Замечание* 4.

- $\Theta_{\mathbb{Z}} = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots$.
- Якоби:
$$\Theta_3 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} q^{k^2}, \quad \Theta_2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} q^{(k+1/2)^2}, \quad \Theta_4 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k q^{k^2}.$$
- $$\Theta_{\mathbb{Z}^n} = \Theta_3^n, \quad \Theta_{\mathbb{Z}^n + (1/2;1/2)} = \Theta_2^n, \quad \Theta_{D_n} = \frac{1}{2}(\Theta_3^n + \Theta_4^n), \quad \Theta_{A_n} = \frac{1}{2}(\Theta_2^n + \Theta_3^n + \Theta_4^n).$$
- Якоби: $A_4 \simeq \mathbb{Z}^4$, значит
$$\frac{1}{2}(\Theta_2^4 + \Theta_3^4 + \Theta_4^4) = \Theta_3^4,$$
т.е.
$$\Theta_3^4 = \Theta_2^4 + \Theta_4^4.$$
- $$\Theta_{A_8} = \Theta_{E_8} = \frac{1}{2}(\Theta_2^8 + \Theta_3^8 + \Theta_4^8).$$
- Для частных унимодулярных решёток $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}^n$ $\Theta_{\mathcal{L}}$ есть модулярная форма веса $4k$. Как следствие, $\Theta_{E_8} = \varepsilon_4$.
- $A$ в размерности 16. Две решётки, а форма одна.
- **Следствие** (Милнор, 1964). Соответствующие торы $\mathbb{R}^16/\mathcal{L}$, $E_8 \oplus E_8$, $A_16$ изоспектральны (но не изоморфны). “Нельзя услышать форму барабана!” (М. Кас)