# Спектральные преобразования в теории солитонов.

Игорь Моисеевич Кричевер

20 июля 2021 г.

Мы будем разговаривать о теории систем солитонов.

*Пример* 1.

1. $$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{3}{2}u\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{4}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

   описывает волны на воде.

2. Tola:
   $$\frac{1}{4}\ddot{x}_n = e^{2(x_n - x_{n+1})} - e^{2(x_{n-1} - x_n)}.$$

3. Система CM:
   $$\ddot{x}_n = \sum_{m=1}^{N} \frac{4}{(x_n - x_m)^2}$$

4. Система ??:
   $$\sum_{i+j} \frac{2}{u_i^{(m)} - u_j^{(m)}} - \sum_{i+j} \frac{1}{u_i^{(m)} - u_j^{(m+1)}} - \sum_{i+j} \frac{1}{u_i^{(m)} - u_j^{(m-1)}}$$

   Рассмотрим матрицу
   $$M_{i,i} = a_i + t_1 + 2\mu_i t_2 + 3\mu_i^2 t_3 + \cdots + n\mu_i^{n-1} \qquad M_{i,j} = \frac{1}{\mu_i \cdot \mu_j}$$

   Тогда
   $$u = -2\partial x^2 \ln(\det(M)) \qquad u = -2\partial x^2 \ln(\Theta(Ux + Vy + Wt + z(B))).$$

Что общее у всех этих примеров? Интегральные системы $\Leftrightarrow$ условия совместимости переопределённой системы линейных уравнений.

*Пример* 2. Рассмотрим преобразование $L : C(\mathbb{R})^n \to C(\mathbb{R})^n, (\psi_k(t))_{k=1}^n \mapsto (L\psi_k(t))_{k=1}^n$, что
$$L(\psi)_n = c_n\psi_{n+1} + v_n\psi_n + c_{n-1}\psi_{n-1}.$$

Попытаемся найти собственные вектора $L$. Пусть $L\psi = E\psi$. Также попросим
$$\partial_t\psi_n = c_{n+1}\psi_{n+1} - c_{n-1}\psi_{n+1}$$

Тогда
$$\dot{c}_n\psi_{n+1} + c_n(c_n\psi_{n+2} - c_n\psi_n) + \dot{v}_n\psi_n + v_n(c_n\psi_{n+1} - c_{n-1}\psi_{n-1}) + \dot{c}_{n-1}\psi_{n-1} + c_{n-1}(c_n\psi_n - c_{n-2}\psi_{n-2})$$
$$= c_n(c_{n+1}\psi_{n+2} + v_{n+1}\psi_{n+1} + c_n\psi_n) - c_{n-1}(c_{n-1}\psi_n + v_{n-1}\psi_{n-1} + c_{n-2}\psi_{n-2})$$

Следовательно
$$\dot{c}_n = c_n(v_{n+1} - v_n) \qquad \dot{v_n} = 2(c_n^2 - c_{n-1}^2).$$
Если, например, $c_n = e^{x_n - x_{n-1}}$, а $v_n = \dot{x}_n$;
$$\ddot{x}_n = Qe^{2(x_n - x_{n+1})} - e^{2(x_n - 1 - x_n)}.$$

Условие совместимости системы
$$\begin{cases} L\psi = E\psi \\ \partial\psi = A\psi \end{cases}$$
— $\dot{L} = [A, L]$ (уравнение Лакса).

Фазовое пространство — пространство $l(z)$ — пространство в зависимости от ??

Пусть $c_n = c_{n+N}$, $v_n = v_{n+N}$. Тогда
$$L = \begin{pmatrix} v_n & c_n & & zc_0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots \\ z^{-1}c_0 & & & \ddots \end{pmatrix}$$