

Дискретные интегрируемые системы и геометрия.

Антон Викторович Джамай

25 июля 2021 г.

Литература:

- “Discrete Integrable Systems: QRT Maps and Elliptic Surfaces” J. J. Duistermaat. (Amazon)

Что такое динамическая система? Это система, которая меняется с течением “времени”. В непрерывном случае у нас есть конфигурационное пространство X , после чего мы рассматриваем некоторое отображение $[0; 1] \rightarrow X$ (или $[0; \mathbb{R}] \rightarrow X$), удовлетворяющее определённому дифференциальному уравнению — функция движения системы. В дискретном случае мы будем рассматривать $\{1; \dots; n\} \rightarrow X$ (или $\mathbb{N} \rightarrow X$), которое будет удовлетворять рекуррентному соотношению.

В непрерывном случае мы можем рассматривать

- интегрируемость,
- нелинейность,
- обратимость.

Хотим того же для дискретного случая.

Пример 1. Числа Фибоначчи:

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_3 = 2, \dots$$

С одной стороны

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

С другой стороны

$$\begin{pmatrix} F_{n+2} \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix},$$

что указывает на линейность системы.

Определение 1. *Отображение QRT (G.R.W. Quispel, L.A.G. Roberts, C. Thompson).* Пусть есть кривая $\Gamma : p(x, y) = 0$, $\deg_x(p) = \deg_y(p) = 2$ (биквадратный многочлен, $(2, 2)$).

Чтобы иметь алгебраическую замкнутость, будем сидеть в \mathbb{C}^2 , а чтобы не терять корней, будем сидеть в $(\mathbb{CP}^1)^2$.

Для всякой точки $(x_0, y_0) \in \Gamma \subseteq (\mathbb{CP}^1)^2$ можно рассмотреть прямую $l : x = x_0$. Эта прямая пересечёт Γ в двух точках: (x_0, y_0) и (x_0, y'_0) . Таким образом мы получаем инволюцию

$$r_x : \Gamma \rightarrow \Gamma, (x_0, y_0) \mapsto (x_0, y'_0);$$

аналогично определяется r_y . Обе r_x и r_y являются инволюциями. Таким образом рассматриваемое отображение QRT будет

$$\eta := r_y \circ r_x, \quad \eta : (\mathbb{CP}^1)^2 \rightarrow (\mathbb{CP}^1)^2, (x_0, y_0) \mapsto (\overline{x_0}, \overline{y_0}).$$

Определение 2. Пусть

$$p(x, y) = \sum_{d_1, d_2 \in \{0; 1; 2\}} a_{d_1, d_2} x^{d_1} y^{d_2}.$$

Тогда $p(x, y) = 0$ записывается как

$$\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & a_{0,2} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,0} & a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ y^2 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \vec{x}^T A \vec{y} = 0.$$

Замечание 1. Пусть $r_y(x_0, y_0) = (x_0, y_1)$. Тогда по теореме Виета

$$y_0 + y_1 = \frac{-a_1(x_0)}{a_2(x_0)},$$

где временно $p(x, y) = a_2(x)y^2 + a_1(x)y + a_0$.

Определение 3. Теперь пусть у нас есть кривые Γ_A и Γ_B с матрицами A и B . Для всякой точки (x_0, y_0) , не лежащей на пересечении $\Gamma_A \cap \Gamma_B$ (пересечение в общем случае имеет 8 точек), имеет $\vec{x}_0^T A \vec{y}_0$ и $\vec{x}_0^T B \vec{y}_0$, где одно не равно 0. Следовательно можно найти их однородную комбинацию равную 0:

$$\vec{x}_0^T (\lambda_0 A + \lambda_1 B) \vec{y}_0 = 0, \quad [\lambda_0 : \lambda_1] = [-\vec{x}_0^T B \vec{y}_0 : \vec{x}_0^T A \vec{y}_0].$$

Следовательно можно рассмотреть преобразование почти всего $(\mathbb{CP}^1)^2$

$$\eta(x_0, y_0) = \eta_{\lambda_0 A + \lambda_1 B}(x_0, y_0) = \dots$$

Замечание 2. Поскольку при η мы применяем преобразование $\eta_{\lambda_0 A + \lambda_1 B}$, то точка остаётся на кривой, а значит мы остаёмся на той же кривой, а значит значение $[\lambda_0 : \lambda_1]$ не меняется и называется *интегралом*.

Lyness map.

Найдём формулу η . Обозначим

$$\vec{x}_0^T A =: \begin{pmatrix} a_0(x_0) \\ a_1(x_0) \\ a_2(x_0) \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_0^T B =: \begin{pmatrix} b_0(x_0) \\ b_1(x_0) \\ b_2(x_0) \end{pmatrix}.$$

Напомним, что

$$\lambda_0 = -\vec{x}_0^T B \vec{y}_0 = -(b_0(x_0) + b_1(x_0)y_0 + b_2(x_0)y_0^2), \quad \lambda_1 = \vec{x}_0^T A \vec{y}_0 = (a_0(x_0) + a_1(x_0)y_0 + a_2(x_0)y_0^2).$$

Значит, если $r_y(x_0, y_0) = (x_0, y_1)$, то y_0 и y_1 суть корни

$$\lambda_0 \vec{x}_0^T A \vec{y} + \lambda_1 \vec{x}_0^T B \vec{y} = 0.$$

Переписывая выражение, получаем

$$\begin{aligned} & -(b_0(x_0) + b_1(x_0)y_0 + b_2(x_0)y_0^2)(a_0(x_0) + a_1(x_0)y + a_2(x_0)y^2) \\ & \quad + (a_0(x_0) + a_1(x_0)y_0 + a_2(x_0)y_0^2)(b_0(x_0) + b_1(x_0)y + b_2(x_0)y^2) = 0 \\ & \quad ((b_0 a_1 - a_0 b_1)y_0 + (a_2 b_0 - a_0 b_2)y_0^2) \\ & \quad + ((a_0 b_1 - a_1 b_0) + (a_2 b_1 - a_1 b_2)y_0^2)y \\ & \quad + ((b_2 a_0 - a_0 b_2) + (a_1 b_2 - a_2 b_1)y_0)y^2 = 0 \\ & (f_1 y_0^2 - f_2 y_0) + (f_2 - f_0 y_0^2)y + (f_0 y_0 - f_1)y^2 = 0. \\ & (f \times \vec{y}_0) \vec{y} = 0. \end{aligned}$$

где

$$(f_0; f_1; f_2) = f := (\vec{x}_0^T A) \times (\vec{x}_0^T B) = \left(\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ b_2 & b_0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} \right).$$

Таким образом по теореме Безу

$$y_0 + y_1 = -\frac{f_2 - f_0 y_0^2}{f_0 y_0 - f_1}.$$

Следовательно,

$$y_1 = \frac{-f_2 + f_1 y_0}{f_0 y_0 - f_1}.$$

Пусть

$$\sigma(x, y, A, B) := (y, x, A^T, B^T).$$

Тогда

$$\eta = r_x \circ r_y = \sigma \circ r_y \circ \sigma \circ r_y = (\sigma \circ r_y)^2.$$

Таким образом можно смотреть на $\sigma \circ r_y$. При этом если A и B симметричны, то $\sigma \circ r_y$ не меняется как отображение от (x, y) .