Спектральные преобразования в теории солитонов.

Игорь Моисеевич Кричевер

21 июля 2021 г.

Мы будем разговаривать о теории систем солитонов.

Пример 1.

1. $$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{3}{2}u\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{4}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$
   описывает волны на воде.

2. Ряды Тоды (Toda lattice):
   $$\frac{1}{4}\ddot{x}_n = e^{2(x_n - x_{n+1})} - e^{2(x_{n-1}-x_n)}.$$

3. Система CM:
   $$\ddot{x}_n = \sum_{m=1}^{N} \frac{4}{(x_n - x_m)^2}$$

4. Система ??:
   $$\sum_{i+j} \frac{2}{u_i^{(m)} - u_j^{(m)}} - \sum_{i+j} \frac{1}{u_i^{(m)} - u_j^{(m+1)}} - \sum_{i+j} \frac{1}{u_i^{(m)} - u_j^{(m-1)}}$$
   Рассмотрим матрицу
   $$M_{i,i} = a_i + t_1 + 2\mu_i t_2 + 3\mu_i^2 t_3 + \cdots + n\mu_i^{n-1} \qquad M_{i,j} = \frac{1}{\mu_i \cdot \mu_j}$$
   Тогда
   $$u = -2\partial x^2 \ln(\det(M)) \qquad u = -2\partial x^2 \ln(\Theta(Ux + Vy + Wt + z(B))).$$

Что общее у всех этих примеров? Интегральные системы $\Leftrightarrow$ условия совместимости переопределённой системы линейных уравнений.

Пример 2. Рассмотрим преобразование $L : C(\mathbb{R})^n \to C(\mathbb{R})^n, (\psi_k(t))_{k=1}^n \mapsto (L\psi_k(t))_{k=1}^n$, что

$$L(\psi)_n = c_n\psi_{n+1} + v_n\psi_n + c_{n-1}\psi_{n-1}.$$

Попытаемся найти собственные вектора L. Пусть $L\psi = E\psi$. Также попросим

$$\partial_t\psi_n = c_{n+1}\psi_{n+1} - c_{n-1}\psi_{n+1}$$

Тогда

$$\dot{c}_n\psi_{n+1} + c_n(c_n\psi_{n+2} - c_n\psi_n) + \dot{v}_n\psi_n + v_n(c_n\psi_{n+1} - c_{n-1}\psi_{n-1}) + \dot{c}_{n-1}\psi_{n-1} + c_{n-1}(c_n\psi_n - c_{n-2}\psi_{n-2})$$
$$= c_n(c_{n+1}\psi_{n+2} + v_{n+1}\psi_{n+1} + c_n\psi_n) - c_{n-1}(c_{n-1}\psi_n + v_{n-1}\psi_{n-1} + c_{n-2}\psi_{n-2})$$

Следовательно
$$\dot{c}_n = c_n(v_{n+1} - v_n) \qquad \dot{v_n} = 2(c_n^2 - c_{n-1}^2).$$
Если, например, $c_n = e^{x_n - x_{n-1}}$, а $v_n = \dot{x}_n$;
$$\ddot{x}_n = Qe^{2(x_n - x_{n+1})} - e^{2(x_n - 1 - x_n)}.$$

Условие совместимости системы
$$\begin{cases} L\psi = E\psi \\ \partial\psi = A\psi \end{cases}$$
— $\dot{L} = [A, L]$ (уравнение Лакса).

Фазовое пространство — пространство $l(z)$ — пространство в зависимости от ??

Пусть $c_{n+N} = c_n$, $v_{n+N} = v_n$, $\psi_{n+N} = z\psi_n$ для всех n. Тогда
$$L = \begin{pmatrix} v_n & c_n & & zc_0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots \\ z^{-1}c_0 & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Рассмотрим матрицу
$$L(z) = \begin{pmatrix} l_{1,1}(z) & l_{1,2}(z) \\ l_{2,1}(z) & l_{2,2}(z) \end{pmatrix},$$
где
$$l_{i,j}(z) = \sum_{k=0}^{n} l_{i,j,k} z^k.$$
Найдём её собственные значения w.
$$\det(L(z) - wI) = w^2 - (l_{1,1}(z) + l_{2,2}(z))w + (l_{1,1}(z)l_{2,2}(z) - l_{1,2}(z)l_{2,1}(z)) = w^2 + Q_n(z)w + R_{2n}(z) = 0.$$
Заметим, что можно смотреть на L с точностью до $\mathrm{GL}(z)$, т.е. $(L_{i,j,n})$ имеет форму Жордана, но будем считать, что диагональна. Таким образом
$$w = \frac{-Q \pm \sqrt{Q^2 - 4R}}{2},$$
а соответствующий собственный вектор — $\begin{pmatrix} l_{1,2} \\ w - l_{1,1} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ \psi \end{pmatrix}$.

Дивизор полюсов ψ: $l_{1,2}(\gamma_s) = 0$ ($s \in \{1; \ldots; n-1\}$). Для одного z не более 1 полюса.

Кривая рода $g = n - 1$ и дивизор степени $g + 1 = n$.

Теорема 1 (Римана-Роха)**.** *Размерность пространства мероморфных функций с полюсом в d различных точках общего положения.*

$y^2 = P_{2n}(z)$ и $y = (w + \frac{Q}{z})$. Тогда всякая f имеет вид
$$\frac{r_1(z)y + r_2(z)}{r_3(z)}.$$
Видимо, потому что
$$r_3(z) = \prod_{s=1}^{d}(z - \tilde{\gamma}_s), \quad r_2(\gamma_s) = r_1(\gamma_s)\sqrt{P_{2n}(\gamma_s)}.$$

$$L(z) = \hat{\psi}(z)\hat{w}(z)\hat{\psi}^{-1}(z),$$

где $\hat{w}$ диагональна.

$$\hat{w} = \begin{pmatrix} w^+(z) & \\ & w^-(z) \end{pmatrix}$$

Таким образом

$$L(z) = \frac{1}{\psi^- - \psi^+} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \psi^+ & \psi^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w^+ & \\ & w^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^- & 1 \\ -\psi^+ & 1 \end{pmatrix}$$

$$\dot{L} = [A, L],$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1}(z) & a_{1,2}(z) \\ a_{2,1}(z) & a_{2,2}(z) \end{pmatrix}$$

$$\hat{L} = \sum \frac{u_i}{z - z_i} = \frac{L(z)}{\prod (z - z_i)}$$