Слова Арну-Рози.

Иван Алексеевич Дынников

21 июля 2021 г.

G. Hedlund, M. Morse.

Определение 1. Будем рассматривать слова над конечным алфавитом A, бесконечные в обе стороны. Обозначим для слова

$$w = \ldots a_{-3}a_{-2}a_{-1}a_0a_1a_2a_3\ldots$$

функцию

$$f(n) := \text{“число различных факторов (подслов) длины } n\text{”}.$$

Теорема 1. *Если для некоторого n*

$$f(n+1) = f(n),$$

то w периодично.

Определение 2. Пусть $G_n(w)$ — граф, где вершины — подслова длины n, рёбро $u \to v$ проводим тогда и только тогда, когда $ub = av$ — подслово w, где $a, b \in A$.

Определение 3. $L_n(w)$ — все подслова w длины n. $L(w) := \bigcup_n L_n(w)$ — все конченые подслова w.

Определение 4. $u \in L_n$ называется

1. *смещённым вправо*, если из u есть стрелка (т.е. расширимо справа до подслова w),
2. *смещённым влево*, если в u есть стрелка (т.е. расширимо слева до подслова w).

Определение 5. w называется *возвратным* (*recurrent*), если всякое $u \in L(w)$ встречается в w бесконечное число раз (т.е. всякое ребро $G_n(w)$ посещаемо бесконечное число раз).

Замечание 1. Если w возвратно, то $G_n(w)$ сильно связно.

Теорема 2. *В случае $f(n) = n+1$ имеем, что $|A| = 2$. В случае возвратного w и $f(n) = n+1$ имеем, что $G_n(w)$ имеет либо две вершины степени 3, остальные 2, либо одна вершина степени 4, остальные 2. В первом случае $f(n+1) = n+2$, а во втором — $f(n+1) = n+3$.*

Рассмотрим слова w, что

1. $f(n) = 2n+1$,
2. для всякого n есть ровно одно специальное справа и одно специальное слева подслово в $L_n(w)$,
3. w возвратно.