Множество Мандельброта.

Владлен Анатольевич Тиморин

23 июля 2021 г.

Множество Мандельброта появляется из динамических систем при рассмотрении орбит состояний, т.е. $\{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Будем рассматривать полиномиальную комплексную динамику: $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f \in \mathbb{C}[x]$.

Лемма 1. *Любой квадратный многочлен движением можно перевести к виду $z^2 + c$.*

Определение 1.

$$Q_c(x) := x^2 + c$$

Определение 2. Пусть $P \in \mathbb{C}[x]$.

- *Заполненное множество Жюлиа —*

$$K(P) := \{z \in \mathbb{C} \mid \lim_{n\to\infty} P^n(z) \neq \infty\}.$$

- *Множество Жюлиа —*

$$J(P) := \partial K(P).$$

- *Множество Фату —*

$$\mathbb{C}P^1 \setminus J(P).$$

- *Множество Мандельброта —*

$$\mathcal{M} := \{c \in \mathbb{C} \mid K(Q_c) \text{ связно}\}.$$

Теорема 2. *Для всякой точки $c \in \mathbb{C}$*

$$c \in \mathcal{M} \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} Q_c^{\circ n}(0) \neq \infty,$$

где $f^{\circ n} := \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ раз}}$.

Доказательство.

Лемма 2.1. *Пусть D — открытая область, ограниченная простой замкнутой кривой. Тогда*

- *если $c \in D$, то $Q_c^{\circ -1}(D)$ — одна область;*
- *если $c \notin D$, то $Q_c^{\circ -1}(D)$ — две области.*

Доказательство. 0 — особая точка Q_c, поэтому $Q_c(0) = c$ — особая точка $Q_c^{\circ -1}$. Поэтому, понятно, что $Q_c^{\circ -1}(D)$ получается из D разрезом по радиусу из c, сжатием по углу относительно c в два раза и дублированием с поворотом на π. Таким образом если $c \in D$, то дубликаты склеятся в одну область, а иначе нет. $\square$

Для всякого $c \in \mathbb{C}$, что $\lim_{n\to\infty} Q_c^{\circ n}(0) \neq \infty$, возьмём очень большой диск $D_0 = B_r(0)$, где $r \gg c$. Тогда всякая точка вне D_0 убегает на бесконечность. Следовательно $K(Q_c) \subseteq D_0$, и по той же причине $Q_c^{\circ -1}(D_0) \subseteq D_0$. Поскольку $c \in D_0$, то $D_n := Q_c^{\circ -n}(D_0)$ содержит c и $K(Q_c)$, а значит D_n — "диск". Таким образом

$$K(Q_c) = \bigcap_{n=0}^{\infty} D_n,$$

так как $\lim_{n\to\infty} Q_c^{\circ n}(z) \neq \infty$ тогда и только тогда, когда z лежит во всех D_n, так как $Q_c^{\circ n}(z) \in D_0$. Следовательно $K(Q_c)$ как пересечение "дисков" является связным.

Аналогично, если $\lim_{n\to\infty} Q_c^{\circ n}(0) = \infty$, то c не будет содержаться в D_n начиная с некоторого n, следовательно D_n с некоторого момента перестанут быть связными, а с ними и $K(Q_c)$. Таким образом получаем равносильность. $\square$