

Слоения, железные дороги Терстона и гиперболическая геометрия на поверхностях.

Гаянэ Юрьевна Панина

26 июля 2021 г.

Литература:

- “Mapping Class group”
-

Определение 1. S_g — поверхность рода g , т.е. связная ориентируемая компактная поверхность. Говоря иначе, это сфера g ручками.

Лемма 1. $\chi(S_g) = 2 - 2g$ — характеристика Эйлера — есть полный инвариант.

Определение 2. Поверхность рода g с n дырками — связная компактная ориентируемая поверхность с краем(-ями). Говоря иначе, сфера с g ручками и n дырками.

Лемма 2. $(\chi; n)$ (или же, что равносильно, $(g; n)$) есть полный инвариант.

Определение 3. Замкнутая кривая γ — непрерывное отображение $\gamma : S^1 \rightarrow S_g$, что

- γ без самопересечений,
- γ гладка,
- γ с точностью до изотопии (гомотопии).

без самопересечений.

Определение 4. Гомеоморфизм — отображение между топологическими пространствами

$$\varphi : X \rightarrow Y,$$

что

- φ — биекция,
- φ — непрерывна,
- φ^{-1} — непрерывна.

Определение 5. Дiffeоморфизм — гладкий гомеоморфизм.

Замечание 1. Для рассматриваемых пространств верно, что гомеоморфные пространства диффеоморфны.

Пример 1.

1. Тожественное отображение на X — диффеоморфизм.
2. К диффеоморфизмам можно применять изотопии.

Задача 1. Любую неразбивающую кривую γ на X (т.е. $X \setminus \gamma$ линейно связно) можно перевести в любую другую неразбивающую.

Определение 6. *Изометрия* — гомеоморфизм, сохраняющий метрику (или, что равносильно, длины кривых).

Задача 2.

1. **Первый тор.** Рассмотрим квадрат $[0; 1]^2$. Склеим его обычным способом в тор. Получим тор, снабжённый плоской метрикой, т.е. у каждой точки есть окрестность изометричная диску.
2. **Второй тор.** Сделаем то же самое, но для параллелограмма натянутого на $(1; 0)$ и $(1; 1)$.
3. **Третий тор.** То же самое, но для параллелограмма натянутого на $(1; 0)$ и $(0.5; 1)$.

Изометричны ли торы?

Замечание 2. Нельзя склеить поверхность рода g из плоскости. Действительно, если, например, взять обычную развёртку $\prod_{i=1}^n (a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1})$. Все вершины будут склеены в одну и сумма углов банально не сойдётся (будет очень большой).

С другой стороны рассмотрим модель плоскости Лобачевского через ортогональные к окружности дуги внутри окружности. Если возьмём правильный $4g$ -угольник с центром в центре нашей плоскости очень малого размера, то её сумма углов будет больше 2π . Если же взять $4g$ -угольник, вершины которого бесконечно удалены (лежат на границе нашей плоскости), то сумма углов будет равна $0 < 2\pi$. Значит где-то “посередине” будет $4g$ -угольник с суммой углов 2π . В таком случае склеивая такой многоугольник таким же образом, мы получаем плоскую метрику. Она называется *гиперболической метрикой с постоянной кривизной -1* .

Определение 7. Модель Пуанкаре плоскости Лобачевского — $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$, где прямые — окружности, перпендикулярные $\text{Im}(z) = 0$, а метрика порождается формулой

$$ds = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}.$$

Множество изометрий модели Пуанкаре $\text{Iso}^+(\mathbb{H})$ — дробно-рациональные функции с вещественными коэффициентами и положительным определителем, т.е. $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$.

Замечание 3. По теореме Брауера у всякой изометрии \mathbb{H} есть неподвижная в замыкании \mathbb{H} . Если она лежит в \mathbb{H} , то такая изометрия равносильно повороту относительно центра в представлении плоскости Лобачевского в качестве круга, где неподвижная точка — центр. Если же она лежит на границе, то это равносильно параллельному переносу на $a \in \mathbb{R}$ в модели плоскости Лобачевского, где неподвижная точка — бесконечно-удалённая точка.

Теорема 3. Рассмотрим на S_g замкнутую простую существенную (т.е. нестягиваемую) кривую c . Пусть на S_g есть гиперболическая метрика τ . Тогда

1. Существует u , если $g \neq 1$, единственная кривая $c' \approx c$ минимальной длины.
2. c' — геодезическая.

Доказательство. В случае тора мы имеем, что он склеивается из квадрата $[0; 1]^2$. Таким образом можно рассмотреть поднятие нашей кривой c на \mathbb{R}^2 . Рассмотрим её поднятие между двумя какими-нибудь эквивалентными (относительно \mathbb{Z}^2) соседними по c точками и натянем между ними. Получим c' минимальной длины, гомотопную c . Но также её можно подвигать параллельно, что означает неединственность минимальной кривой.

Точно также можно замостить \mathbb{H} .

Дописать.

□

Задача 3. Пусть на поверхности t выбрана простая кривая γ . Определим метрику, в которой длина кривой c есть

$$l_\gamma(c) := \min_{c' \approx c} |\gamma \cap c'|.$$

Доказать, что c реализует рассматриваемое минимальное число пересечений тогда и только тогда, когда γ и c не образуют двугульников (дисков, половина границы которых есть часть c , а другая половина — часть γ).

Определение 8.

- $\text{Diff}(S_g)$ — группа диффеоморфизмов S_g .
- $\text{Diff}_0(S_g)$ — группа диффеоморфизмов, изотопных id .
- $\text{Mod}(S_g) := \text{Diff}/\text{Diff}_0$.

Определение 9. Пространство Тейхмюллера —

$$\text{Teich}(S_g) := \{\text{гиперболическая структура на } S_g\} / \text{Diff}_0.$$

Теорема 4.

$$\text{Teich}(S_g) = \mathbb{R}^{6g-6}.$$

Доказательство. Разрежем S_g по геодезическим кривым на “штаны” (сферы с 3 дырками). Итого “штанов” у нас $2g - 2$, а разрезов $3g - 3$. Далее у каждого штана каждую пару краёв соединим минимальной кривой и разрежем по ней. Получим $6g - 6$ шестиугольников с прямыми углами. При этом пусть в одних штанах длины разрезов — l_1, l_2 и l_3 .

Лемма 5. Шестиугольник с прямыми углами со сторонами l_1, x, l_2, y, l_3, z по циклу существуют и единственны.

Таким образом каждые штаны распадаются на двое одинаковых шестиугольников, а значит определяются по длинам трёх краёв. Таким образом множество штанов определяется по длинам разрезов, что даёт $3g - 3$ параметра (по $3g - 3$ разрезам). Далее мы можем склеить эти разрезы с любой закруткой $\in (-\infty; \infty)$. Таким образом

$$\text{Teich}(S_g) \simeq (\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R})^{3g-3} \simeq \mathbb{R}^{6g-6}.$$

□

Замечание 4. Резать на штаны — легко. Оказывается, что пока выбрано менее $3g - 3$ негомотопных, непересекающихся простых существенных кривых, можно к ним добавить ещё одну.

Замечание 5. Оказывается, что если менять скручивающий параметр, то длина класса кривой будет меняться непрерывным и, неожиданно, выпуклым образом.

Определение 10. Пространство модулей — Teich/Mod .

Теорема 6 ($9g - 9$ -теорема). *Существуют кривые c_1, \dots, c_{9g-9} , что отображение*

$$\sigma : \text{Teich}(S_g) \rightarrow \mathbb{R}^{9g-9}, \tau \mapsto (l_\tau(c_i))_{i=1}^{9g-9}$$

является инъективным.

Замечание 6. Несложно понять, что σ непрерывно. Таким образом у нас есть осмысленное вложение \mathbb{R}^{6g-6} в \mathbb{R}^{9g-9} .

Определение 11. Слоение — “расслоение” S_g на кривые, что

- в окрестности регулярной точки оно выглядит как расслоение на горизонтальные прямые,
- количество особых точек конечно, и в окрестности каждой особой точки расслоение выглядит как несколько семейств проходящих мимо кривых.

Движение Уайтхеда —

Картинка.

Измеримое слоение — слоение с трансверсальной мерой, т.е. с мерой, что

- длина аддитивна,
- длина трансверсальной (не касающейся слоёв) кривой не зависит от изотопии с закреплёнными концами,
- длина трансверсальной кривой не меняется при скольжении концов по слоям.

Пространство измеримых слоений обозначается \mathcal{MF} .

Замечание 7. В измеримом слоении фактически определяется расстояние между слоями.

Замечание 8. Слоения можно получать, если взять кривую, и рисуя параллельные, растягивать её в слоение (ещё нужно аккуратно разбираться со случаями, когда нарастающее слоение начинает себя касаться). В таком случае слои — довольно простые кривые. Оказывается, множество таких расслоений всюду плотно в множестве всех расслоений.

Лемма 7. *Критерий минимальной в новой метрике — отсутствие двуугольников.*

Теорема 8 ($9g - 9$ -теорема для измеримых кривых). *Существуют кривые c_1, \dots, c_{9g-9} , что отображение*

$$\sigma : \mathcal{MF}(S_g) \rightarrow \mathbb{R}^{9g-9}, \Phi \mapsto (l_\Phi(c_i))_{i=1}^{9g-9}$$

является инъективным.

Лемма 9. *Образы Teich и \mathcal{MF} в \mathbb{R}^{9g-9} не пересекаются.*

Замечание 9. Несложно понять, что метрики из \mathcal{MF} можно масштабировать, поэтому образ \mathcal{MF} есть конус (с вершиной в 0). Но оказывается, что эти лучи на бесконечности есть компактификация образа Teich .

Задача 4. Рассмотрим расслоения штанов, где края трансверсальны и непараллельны слоям. Опишите все возможные расслоения.

Определение 12 (железные дороги Тёрстона, train tracks.). *Железнодорожный путь* — граф, вложенный в $S_{g,b}$ (поверхность с g ручками и b дырками), что

- степени вершин равны либо 1 (конец, может лежать только на дырке; путь там должен входить прямо в дырку), либо 2 (промежуточный пункт; две дороги в нём гладко соединяются), либо 3 (развилка; в ней два пути гладко сходятся в третий),
- на каждом ребре есть вес $\alpha \geq 0$,
- всякая дорога переходящая через вершину (степени 2) в другую дорогу имеет с ней одинаковые веса,
- для всяких двух дорог с весами α_1 и α_2 , сходящимися в путь с весом α_3 , верно, что $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3$,
- запрещены регионы вида:

Рисунок.

- с точностью до изотопии и банальностей

Рисунок.

Лемма 10.

1. Если все веса в ЖД пути целые, то данный путь эквивалентен набору кривых (т.е. метрике, где длина кривой — сумма масс кривых с кратностью в виде количества пересечений в минимальном положении по пересечениям).
2. Если у ЖД пути могут быть веса $\{\alpha_i\}$, то могут быть и веса $\{\lambda\alpha_i\}$ для всякого $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$
3. Всякое измеримое слоение соответствует ЖД пути и наоборот.
4. $\text{TT}(S_{g,b}) \simeq \mathbb{R}^{6g-6+28} \times [0; \infty]^b$.