$\wp$-функция Вейерштрасса, ряды Эйзенштейна и модулярные функции.

Виктор Алексеевич Клепцын

23 июля 2021 г.

Определение 1. *Элиптическая кривая* — $E_\Gamma := \mathbb{C}/\Gamma$, где

$$\Gamma := \{az_1 + bz_2 \mid a, b \in \mathbb{Z} \wedge z_1/z_2 \notin \mathbb{R}\}.$$

Замечание 1. Это же банально тор.

Определение 2. *Элиптическая кривая* — $\{(x; y) \mid y^2 = P(x)\}$, где P свободен от кратных корней.

Определение 3. f называется *голоморфной* в $D \subseteq \mathbb{C}$, если f комплексно дифференцируемо в точке D.

Лемма 1 (условие Коши-Римана)**.** *Пусть f дифференцируема в точке $z_0 \in D \subseteq \mathbb{R}^2$ $(= \mathbb{C})$. Тогда если f комплексно дифференцируема в z_0, то $\partial_x f(z_0) = \partial_y f(z_0) = f'(z_0).d$*

Лемма 2. *Голоморфная функция на области восстанавливается по значениям на границе.*

Лемма 3. *Если f голоморфна в D, то она бесконечно комплексно дифференцируема и совпадает со своим рядом Тейлора (для всякой внутренней точки в D).*

Лемма 4. *Голоморфная на области функция имеет экстремумы на области на границе этой области.*

Замечание 2. Рассмотрим голоморфные функции на элиптической кривой, они же голоморфные функции, периодические по двум неколлинеарным векторам. В таком случае понятно, что она константна.

Будем рассматривать функции не в $\mathbb{C}$, а в $\mathbb{C} \sqcup \{\infty\} = \mathbb{C}P^1$.

Определение 4. *Полюс порядка n* у функции f — точка z_0, что $f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} c_k (z - z_0)^n$ и $c_{-k} \neq 0$, т.е. $1/f = (z - z_0)^n + \dots$.

Определение 5. Функция f *мероморфна*, если для всякой точки верно, что либо в её окрестности f голоморфна, либо она является полюсом.

Определение 6. *Элептическая функция* — мероморфная функция на элиптической кривой.

Определение 7. Пусть дана непрерывная функция $f : S^1 \to S^1$. Тогда *порядком f* называется количество оборотов f при прохождении единожды по окружности.

Определение 8. Пусть дана непрерывная дифференцируемая функция $f : S^1 \to S^1$. Тогда для всякой точки $p \in S^1$, если $\{q_1; \ldots; q_n\} = f^{-1}(p)$ и $f'(q_i) \neq 0$, то величина

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{sign}(f'(q_i))$$

является (целой) величиной, независящей от p. Она называется *порядком* f.

Определение 9.

Дописать.

$$\wp(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{\gamma \in E} \frac{1}{(z-\gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2}.$$

Теорема 5.

$$\wp'^2 - 4\wp^3 - A\wp^2 - g\wp - d = 0.$$

Доказательство. Поскольку функция выше мезоморфна и не имеет особенностей, то голоморфна, а значит константна. □

Следствие 5.1. *Отображение*

$$f : \mathbb{C}/\Gamma \to \mathbb{C}^2, z \to (\wp(z), \wp'(z))$$

Переводит тор в кривую $y^2 = 4x^3 + gx + d$.

Определение 10. *Ряд Эйзенштейна —*

$$G_k(\Gamma) := \sum_{\Gamma \setminus \{0\}} \frac{1}{\gamma^k}.$$

Замечание 3. Заметим, что

$$\frac{1}{\gamma - z} = \frac{1}{\gamma} \frac{1}{1 - \frac{z}{\gamma}} = \frac{1}{\gamma}(1 + \frac{z}{\gamma} + \frac{z^2}{\gamma^2} + \ldots),$$

следовательно

$$\frac{1}{(z-\gamma)^2} = \left(\frac{1}{\gamma - z}\right)' = \frac{1}{\gamma^2} + \frac{2z}{\gamma^3} + \frac{3z^2}{\gamma^4} + \ldots.$$

Таким образом

$$\begin{aligned}\wp(z) &= \frac{1}{z^2} + 2z\sum \frac{1}{\gamma^3} + 3z^2 \sum \frac{1}{\gamma^4} + 4z^3 \sum \frac{1}{\gamma^5} + \ldots \\ &=: \frac{1}{z^2} + 3G_4(\Gamma)z^2 + 5G_6(\Gamma)z^4 + 7G_8(\Gamma)z^6 + \ldots \\ &= \frac{1}{z^2}(1 + 3G_4(\Gamma)z^4 + 5G_6(\Gamma)z^6 + 7G_8(\Gamma)z^8 + \ldots)\end{aligned}$$

А значит

$$\begin{aligned}\wp'(z) &= -\frac{2}{z^3} + 6G_4(\Gamma)z + 20G_6(\Gamma)z^3 + 42G_8(\Gamma)z^8 + \ldots \\ &= -\frac{2}{z^3}(1 - 3G_4(\Gamma)z^4 + 10G_6(\Gamma)z^6 + 21G_8(\Gamma)z^8 + \ldots)\end{aligned}$$

Смотря на первые члены рядов, получаем, что $g = 60G_4(\Gamma)$ и $d = 140G_6(\Gamma)$, т.е.

$$\wp'^2 - 4\wp^3 - A\wp^2 - 60G_4(\Gamma)\wp - 140G_6(\Gamma) = 0.$$

Пространство решёток (и модулярная кривая)