Гомологические сферы и алгоритмическая неразрешимость в топологии.

Александр Александрович Гайфуллин

22 июля 2021 г.

Определение 1. Пусть дана поверхность S и на ней некоторая точка $p \in S$. Рассмотрим все петли в S с началом (и концом) в p с точностью до деформации (изотопии) (с сохранением начала-конца). Используя конкатенацию петель как операцию сложения получаем группу, называемую *фундаментальную группу.*

Определение 2. Будем рассматривать формальные комбинации петель. При этом две комбинации эквивалентны, если есть ориентируемая поверхность, "соединяющая" эти комбинации (т.е. её граница состоит из совокупности комбинаций, но первая группа ориентирована в одну сторону, а вторая — в другую), вкладываемая в исходную поверхность так, что соответствующие петли переходят в соответствующие с правильной ориентацией. Получаем элементы *группы гомологий.*

Сложение в группе — формальная сумма линейных комбинаций (т.е. $(2\alpha+\beta)+(\gamma-\alpha+\beta) = \alpha + 2\beta + \gamma$).

Теорема 1. *Если поверхность линейно связна, то группа гомологий — абелизация фундаментальной группы.*