ABC-гипотеза и ее следствия.

Дмитрий Олегович Орлов

22 июля 2021 г.

Утверждение 1 ((бинарная) гипотеза Гольдбаха, открыта)**.** *Всякое чётное число, начиная с 4, можно представить в виде суммы 2 простых чисел.*

Утверждение 2 ((тернарная) гипотеза Гольдбаха, доказана)**.** *Всякое нечётное число, начиная с 7, можно представить в виде суммы 3 простых чисел.*

Утверждение 3 (гипотеза близнецов, открыта)**.** *Существует бесконечно много пар простых чисел вида $(p; p+2)$.*

Утверждение 4 (открыта)**.** *Для всякого n есть простое $p \in [n^2; (n+1)^2]$.*

Утверждение 5 (открыта)**.** *Существует бесконечно много простых чисел вида n^2+1.*

Определение 1. Для всякого натурального числа $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ назовём его *радикалом* число

$$\mathrm{rad}(n) := \prod_{i=1}^{k} p_i.$$

Утверждение 6 (abc-гипотеза, открыта)**.** *Для всякого $\varepsilon > 0$ существует постоянная $K(\varepsilon)$, что для всякой тройки a, b, c попарно взаимно натуральных чисел, что $a+b=c$, выполняется неравенство*

$$c \leqslant K(\varepsilon) \cdot \mathrm{rad}(abc)^{1+\varepsilon}.$$

Пример 1. Есть бесконечно много троек, где $c \geqslant \mathrm{rad}(abc)$. Действительно, если $a=1$, $b = 3^{2^k}-1$, $c = 3^{2^k}$, то по лемме об уточнении показателя $\nu_2(b) = k+2$, а значит

$$\mathrm{rad}(abc) \leqslant \frac{3b}{2^{k+1}} \ll c.$$

Пример 2. Пусть

$$\rho(a,b,c) := \frac{\ln(c)}{\ln(\mathrm{rad}(abc))}$$

Самые известные “плохие” примеры:

1. $a = 2$, $b = 3^{10} \cdot 109$, $c = 23^5$,
$$\rho \approx 1{,}62991.$$
2. $a = 11^2$, $b = 3^2 \cdot 5^6 \cdot 7^3$, $c = 2^{21} \cdot 23$,
$$\rho \approx 1{,}62599.$$

Утверждение 7 (открыта)**.** *Для всякой тройки a, b, c попарно взаимно натуральных чисел, что $a+b=c$, выполняется неравенство*

$$c \leqslant \mathrm{rad}(abc)^2.$$

Следствие 7.1 (почти великая теорема Ферма)**.** *Уравнение*

$$x^2 + y^2 = z^2$$

не имеет нетривиальных решений при $n > 6$.

Доказательство. Пусть $a = x^n$, $b = y^n$, $c = z^n$. Тогда

$$z^n = c \leqslant \operatorname{rad}(abc)^2 \leqslant (xyz)^2 \leqslant z^6$$

— противоречие. $\square$

Утверждение 8 (гипотеза Морделла, доказана)**.** *Количество рациональных точек на алгебраической кривой рода* $\geqslant 2$ *конечно.*