Дискретные интегрируемые системы и геометрия.

Антон Викторович Джамай

24 июля 2021 г.

Литература:

- "Discrete integrable system. QRT-map. ???" Johennes J., Duistermaast.

Что такое динамическая система? Это система, которая меняется с течением "времени". В непрерывном случае у нас есть конфигурационное пространство X, после чего мы рассматриваем некоторое отображение $[0;1] \to X$ (или $[0;\mathbb{R}) \to X$), удовлетворяющее определённому дифференциальному уравнению — функция движения системы. В дискретном случае мы будем рассматривать $\{1;\ldots;n\} \to X$ (или $\mathbb{N} \to X$), которое будет удовлетворять рекурентному соотношению.

В непрерывном случае мы можем рассматривать

- интегрируемость,
- нелинейность,
- обратимость.

Хотим того же для дискретного случая.

Пример 1. Числа Фиббоначчи:

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_3 = 2, \ldots$$

С одной стороны

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

С другой стороны

$$\begin{pmatrix} F_{n+2} \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix},$$

что указывает на линейность системы.

Определение 1. *Отображение QRT (G.R.W. Qinspil, L.A.G. Roberts, C. Thomas).* Пусть есть кривая $\Gamma : p(x,y) = 0$, $\deg_x(p) = \deg_y(p) = 2$ (биквадратный многочлен, $(2,2)$).

Чтобы иметь алгебраическую замкнутость, будем сидеть в $\mathbb{C}^2$, а чтобы не терять корней, будем сидеть в $(\mathbb{C}P^1)^2$.

Для всякой точки $(x_0, y_0) \in \Gamma \subseteq (\mathbb{C}P^1)^2$ можно рассмотреть прямую $l : x = x_0$. Эта прямая пересечёт Γ в двух точках: (x_0, y_0) и (x_0, y_0'). Таким образом мы получаем инволюцию

$$r_x : \Gamma \to \Gamma, (x_0, y_0) \mapsto (x_0, y_0');$$

аналогично определяется r_y. Обе r_x и r_y являются инволюциями. Таким образом рассматриваемое отображение QRT будет

$$\eta := r_y \circ r_x, \qquad \eta : (\mathbb{C}P^1)^2 \to (\mathbb{C}P^1)^2, (x_0, y_0) \mapsto (\overline{x_0}, \overline{y_0}).$$

Определение 2. Пусть
$$p(x,y)=\sum_{d_1,d_2\in\{0;1;2\}} a_{d_1,d_2}x^{d_1}y^{d_2}.$$
Тогда $p(x,y)=0$ записывается как
$$\begin{pmatrix}1 & x & x^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{0,0} & a_{0,1} & a_{0,2}\\ a_{1,0} & a_{1,1} & a_{1,2}\\ a_{2,0} & a_{2,1} & a_{2,2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ y\\ y^2\end{pmatrix}=0 \qquad \text{или} \qquad \vec{x}^T A\vec{y}=0.$$

Замечание 1. Пусть $r_y(x_0,y_0)=(x_0,y_1)$. Тогда по теореме Виета
$$y_0+y_1=\frac{-a_1(x_0)}{a_2(x_0)},$$
где временно $p(x,y)=a_2(x)y^2+a_1(x)y+a_0$.

Определение 3. Теперь пусть у нас есть кривые Γ_A и Γ_B с матрицами A и B. Для всякой точки (x_0,y_0), не лежащей не пересечении $\Gamma_A\cap\Gamma_B$ (пересечение в общем случае имеет 8 точек), имеет $\vec{x}_0^T A\vec{y}_0$ и $\vec{x}_0^T B\vec{y}_0$, где одно не равно 0. Следовательно можно найти их однородную комбинацию равную 0:
$$\vec{x}_0^T(\lambda_0 A+\lambda_1 B)\vec{y}_0=0, \qquad [\lambda_0:\lambda_1]=[-\vec{x}_0^T B\vec{y}_0:\vec{x}_0^T A\vec{y}_0].$$
Следовательно можно рассмотреть преобразование почти всего $(\mathbb{C}P^1)^2$
$$\eta(x_0,y_0)=\eta_{\lambda_0 A+\lambda_1 B}(x_0,y_0)=\dots$$

Замечание 2. Поскольку при η мы применяем преобразование $\eta_{\lambda_0 A+\lambda_1 B}$, то точка остаётся на кривой, а значит мы остаёмся на той же кривой, а значит значение $[\lambda_0:\lambda_1]$ не меняется и называется *интегралом.*

Lyness map.

Найдём формулу η. Обозначим
$$\vec{x}_0^T A=:\begin{pmatrix}a_0(x_0)\\ a_1(x_0)\\ a_2(x_0)\end{pmatrix}, \qquad \vec{x}_0^T B=:\begin{pmatrix}b_0(x_0)\\ b_1(x_0)\\ b_2(x_0)\end{pmatrix}.$$

Напомним, что
$$\lambda_0=-\vec{x}_0^T B\vec{y}_0=-(b_0(x_0)+b_1(x_0)y_0+b_2(x_0)y_0^2), \qquad \lambda_1=\vec{x}_0^T A\vec{y}_0=(a_0(x_0)+a_1(x_0)y_0+a_2(x_0)y_0^2).$$
Значит, если $r_y(x_0,y_0)=(x_0,y_1)$, то y_0 и y_1 суть корни
$$\lambda_0\vec{x}_0^T A\vec{y}+\lambda_1\vec{x}_0^T B\vec{y}=0.$$

Переписывая выражение, получаем
$$\begin{aligned}
-(b_0(x_0)+b_1(x_0)y_0+b_2(x_0)y_0^2)(a_0(x_0)+a_1(x_0)y+a_2(x_0)y^2)&\\
+(a_0(x_0)+a_1(x_0)y_0+a_2(x_0)y_0^2)(b_0(x_0)+b_1(x_0)y+b_2(x_0)y^2)&=0
\end{aligned}$$
$$\begin{gathered}
((b_0a_1-a_0b_1)y_0+(a_2b_0-a_0b_2)y_0^2)\\
+((a_0b_1-a_1b_0)+(a_2b_1-a_1b_2)y_0^2)y\\
+((b_2a_0-a_0b_2)+(a_1b_2-a_2b_1)y_0)y^2=0\\
(f_1y_0^2-f_2y_0)+(f_2-f_0y_0^2)y+(f_0y_0-f_1)y^2=0.\\
(f\times\vec{y}_0)\vec{y}=0.
\end{gathered}$$

где
$$(f_0; f_1; f_2) = f := (\vec{x}_0^T A) \times (\vec{x}_0^T B) = \left(\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ b_2 & b_0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} \right).$$
Таким образом по теореме Безу
$$y_0 + y_1 = -\frac{f_2 - f_0 y_0^2}{f_0 y_0 - f_1}.$$
Следовательно,
$$y_1 = \frac{-f_2 + f_1 y_0}{f_0 y_0 - f_1}.$$

Пусть
$$\sigma(x, y, A, B) := (y, x, A^T, B^T).$$
Тогда
$$\eta = r_x \circ r_y = \sigma \circ r_y \circ \sigma \circ r_y = (\sigma \circ r_y)^2.$$
Таким образом можно смотреть на $\sigma \circ r_y$. При этом если A и B симметричны, то $\sigma \circ r_y$ не меняется как отображение от (x, y).