Слоения, железные дороги Терстона и гиперболическая геометрия на поверхностях.

Гаянэ Юрьевна Панина

22 июля 2021 г.

Определение 1. S_g — поверхность рода g, т.е. связная ориентируемая компактная поверхность. Говоря иначе, это сфера g ручками.

Лемма 1. $\chi(S_g) = 2 - 2g$ *— характеристика Эйлера — есть полный инвариант.*

Определение 2. Поверхность рода g с n дырками — связная компактная ориентируемая поверхность с краем(-ями). Говоря иначе, сфера с g ручками и n дырками.

Лемма 2. $(\chi; n)$ *(или же, что равносильно,* $(g; n)$*) есть полный инвариант.*

Определение 3. *Замкнутая кривая* γ — непрерывное отображение $\gamma : S^1 \to S_g$, что

- γ без самопересечений,
- γ гладка,
- γ с точностью до изотопии (гомотопии).

без самопересечений.

Определение 4. *Гомеоморфизм* — отображение между топологическими пространствами

$$\varphi : X \to Y,$$

что

- φ — биекция,
- φ — непрерывна,
- φ^{-1} — непрерывна.

Определение 5. Диффеоморфизм — гладкий гомеоморфизм.

Замечание 1. Для рассматриваемых пространств верно, что гомеоморфные пространства диффеоморфны.

Пример 1.

1. Тождественное отображение на X — диффеоморфизм.
2. К диффеоморфизмам можно применять изотопии.

Задача 1. Любую неразбивающую кривую γ на X (т.е. $X \setminus \gamma$ линейно связно) можно перевести в любую другую неразбивающую.

Определение 6. *Изометрия* — гомеоморфизм, сохраняющий метрику (или, что равносильно, длины кривых).

Задача 2.

1. **Первый тор.** Рассмотрим квадрат $[0;1]^2$. Склеим его обычным способом в тор. Получим *тор, снабжённый плоской метрикой*, т.е. у каждой точки есть окрестность изометричная диску.

2. **Второй тор.** Сделаем то же самое, но для параллелограмма натянутого на $(1;0)$ и $(1;1)$.

3. **Третий тор.** То же самое, но для параллелограмма натянутого на $(1;0)$ и $(0.5;1)$.

Изометричны ли торы?

Замечание 2. Нельзя склеить поверхность рода g из плоскости. Действительно, если, например, взять обычную развёртку $\prod_{i=1}^{n}(a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1})$. Все вершины будут склеены в одну и сумма углов банально не сойдётся (будет очень большой).

С другой стороны рассмотрим модель плоскости Лобачевского через ортогональные к окружности дуги внутри окружности. Если возьмём правильный $4g$-угольник с центром в центре нашей плоскости очень малого размера, то её сумма углов будет больше 2π. Если же взять $4g$-угольник, вершины которого бесконечно удалены (лежат на границе нашей плоскости), то сумма углов будет равна $0 < 2\pi$. Значит где-то "посередине" будет $4g$-угольник с суммой углов 2π. В таком случае склеивая такой многоугольник таким же образом, мы получаем плоскую метрику. Она называется *гиперболической метрикой с постоянной кривизной* -1.

Определение 7. Модель Пуанкаре плоскости Лобачевского — $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$, где прямые — окружности, перпендикулярные $\mathrm{Im}(z) = 0$, а метрика порождается формулой

$$ds = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}.$$

Множество изометрий модели Пуанкаре $\mathrm{Iso}^+(\mathbb{H})$ — дробно-рациональные функции с вещественными коэффициентами и положительным определителем, т.е. $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$.

Замечание 3. По теореме Брауера у всякой изометрии $\mathbb{H}$ есть неподвижная в замыкании $\mathbb{H}$. Если она лежит в $\mathbb{H}$, то такая изометрия равносильно повороту относительно центра в представлении плоскости Лобачевского в качестве круга, где неподвижная точка — центр. Если же она лежит на границе, то это равносильно параллельному переносу на $a \in \mathbb{R}$ в модели плоскости Лобачевского, где неподвижная точка — бесконечно-удалённая точка.

Теорема 3. *Рассмотрим на S_g замкнутую простую существенную (т.е. нестягиваемую) кривую c. Пусть на S_g есть гиперболическая метрика τ. Тогда*

1. *Существует и, если $g \neq 1$, единственна кривая $c' \approx c$ минимальной длины.*

2. *c' — геодезическая.*

Доказательство. В случае тора мы имеем, что он склеивается из квадрата $[0;1]^2$. Таким образом можно рассмотреть поднятие нашей кривой c на $\mathbb{R}^2$. Рассмотрим её поднятие между двумя какими-нибудь эквивалентными (относительно $\mathbb{Z}^2$) соседними по c точками и натянем между ними. Получим c' минимальной длины, гомотопную c. Но также её можно подвигать параллельно, что означает неединственность минимальной кривой.

Точно также можно замостить $\mathbb{H}$.

Дописать.

□

Задача 3. Пусть на поверхности m выбрана простая кривая γ. Определим метрику, в которой длина кривой c есть

$$l_\gamma(c) := \min_{c' \approx c} |\gamma \cap c|.$$

Доказать, что c реализует рассматриваемое минимальное число пересечений тогда и только тогда, когда γ и c не образуют двуугольников (дисков, полвоина границы которых есть часть c, а другая половина — часть γ).

Определение 8.

- $\mathrm{Diff}(S_g)$ — группа диффеоморфизмов S_g.
- $\mathrm{Diff}_0(S_g)$ — группа диффеоморфизмов, изотопных id.
- $\mathrm{Mod}(S_g) := \mathrm{Diff}/\mathrm{Diff}_0$.

Определение 9. Пространство Тейхмюллера —

$$\mathrm{Teich}(S_g) := \{\text{гиперболическая структура на } S_g\}/\mathrm{Diff}_0.$$

Теорема 4.

$$\mathrm{Teich}(S_g) = \mathbb{R}^{6g-6}.$$

Доказательство. Разрежем S_g по геодезическим кривым на “штаны” (сферы с 3 дырками). Итого “штанов” у нас $2g-2$, а разрезов $3g-3$. Далее у каждых штанов каждую пару краёв соединим минимальной кривой и разрежем по ней. Получим $6g-6$ шестиугольников с прямыми углами. При этом пусть в одних штанах длины разрезов — l_1, l_2 и l_3.

Лемма 5. *Шестиугольник с прямыми углами со сторонами l_1, x, l_2, y, l_3, z по циклу существуют и единственны.*

Таким образом каждые штаны распадаются на двое одинаковых шестиугольника, а значит определяются по длинам трёх краёв. Таким образом множество штанов определяется по длинам разрезов, что даёт $3g-3$ параметра (по $3g-3$ разрезам). Далее мы можем склеить эти разрезы с любой закруткой $\in (-\infty; \infty)$. Таким образом

$$\mathrm{Teich}(S_g) \simeq (\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R})^{3g-3} \simeq \mathbb{R}^{6g-6}.$$

$\square$