$\wp$-функция Вейерштрасса, ряды Эйзенштейна и модулярные функции.

Виктор Алексеевич Клепцын

20 июля 2021 г.

Определение 1. *Элиптическая кривая* — $E_\Gamma := \mathbb{C}/\Gamma$, где

$$\Gamma := \{az_1 + bz_2 \mid a, b \in \mathbb{Z} \wedge z_1/z_2 \notin \mathbb{R}\}.$$

Замечание 1. Это же банально тор.

Определение 2. *Элиптическая кривая* — $\{(x; y) \mid y^2 = P(x)\}$, где P свободен от кратных корней.

Определение 3. f называется *голоморфной* в $D \subseteq \mathbb{C}$, если f комплексно дифференцируемо в точке D.

Лемма 1 (условие Коши-Римана). *Пусть f дифференцируема в точке $z_0 \in D \subseteq \mathbb{R}^2$ ($= \mathbb{C}$). Тогда если f комплексно дифференцируема в z_0, то $\partial_x f(z_0) = \partial_y f(z_0) = f'(z_0).d$*

Лемма 2. *Голоморфная функция на области восстанавливается по значениям на границе.*

Лемма 3. *Если f голоморфна в D, то она бесконечно комплексно дифференцируема и совпадает со своим рядом Тейлора (для всякой внутренней точки в D).*

Лемма 4. *Голоморфная на области функция имеет экстремумы на области на границе этой области.*

Замечание 2. Рассмотрим голоморфные функции на элиптической кривой, они же голоморфные функции, периодические по двум неколлинеарным векторам. В таком случае понятно, что она константна.

Будем рассматривать функции не в $\mathbb{C}$, а в $\mathbb{C} \sqcup \{\infty\} = \mathbb{C}P^1$.

Определение 4. *Полюс порядка n* у функции f — точка z_0, что $f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} c_k(z - z_0)^n$ и $c_{-k} \neq 0$, т.е. $1/f = (z - z_0)^n + \dots$.

Определение 5. Функция f *мероморфна*, если для всякой точки верно, что либо в её окрестности f голоморфна, либо она является полюсом.

Определение 6. *Элептическая функция* — мероморфная функция на элиптической кривой.

Определение 7. Пусть дана непрерывная функция $f : S^1 \to S^1$. Тогда *порядком* f называется количество оборотов f при прохождении единожды по окружности.

Определение 8. Пусть дана непрерывная дифференцируемая функция $f : S^1 \to S^1$. Тогда для всякой точки $p \in S^1$, если $\{q_1; \dots; q_n\} = f^{-1}(p)$ и $f'(q_i) \neq 0$, то величина

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{sign}(f'(q_i))$$

является (целой) величиной, независящей от p. Она называется *порядком* f.