

# Дискретные интегрируемые системы и геометрия.

Антон Викторович Джамай

24 июля 2021 г.

Литература:

- “Discrete integrable system. QRT-map. ???” Johannes J., Duistermaat.

Что такое динамическая система? Это система, которая меняется с течением “времени”. В непрерывном случае у нас есть конфигурационное пространство  $X$ , после чего мы рассматриваем некоторое отображение  $[0; 1] \rightarrow X$  (или  $[0; \mathbb{R}] \rightarrow X$ ), удовлетворяющее определённому дифференциальному уравнению — функция движения системы. В дискретном случае мы будем рассматривать  $\{1; \dots; n\} \rightarrow X$  (или  $\mathbb{N} \rightarrow X$ ), которое будет удовлетворять рекуррентному соотношению.

В непрерывном случае мы можем рассматривать

- интегрируемость,
- нелинейность,
- обратимость.

Хотим того же для дискретного случая.

*Пример 1.* Числа Фибоначчи:

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_3 = 2, \dots$$

С одной стороны

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

С другой стороны

$$\begin{pmatrix} F_{n+2} \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix},$$

что указывает на линейность системы.

**Определение 1.** *Отображение QRT (G.R.W. Qinspil, L.A.G. Roberts, C. Thomas).* Пусть есть кривая  $\Gamma : p(x, y) = 0$ ,  $\deg_x(p) = \deg_y(p) = 2$  (биквадратный многочлен,  $(2, 2)$ ).

Чтобы иметь алгебраическую замкнутость, будем сидеть в  $\mathbb{C}^2$ , а чтобы не терять корней, будем сидеть в  $(\mathbb{C}P^1)^2$ .

Для всякой точки  $(x_0, y_0) \in \Gamma \subseteq (\mathbb{C}P^1)^2$  можно рассмотреть прямую  $l : x = x_0$ . Эта прямая пересечёт  $\Gamma$  в двух точках:  $(x_0, y_0)$  и  $(x_0, y'_0)$ . Таким образом мы получаем инволюцию

$$r_x : \Gamma \rightarrow \Gamma, (x_0, y_0) \mapsto (x_0, y'_0);$$

аналогично определяется  $r_y$ . Обе  $r_x$  и  $r_y$  являются инволюциями. Таким образом рассматриваемое отображение QRT будет

$$\eta := r_y \circ r_x, \quad \eta : (\mathbb{C}P^1)^2 \rightarrow (\mathbb{C}P^1)^2, (x_0, y_0) \mapsto (\overline{x_0}, \overline{y_0}).$$

**Определение 2.** Пусть

$$p(x, y) = \sum_{d_1, d_2 \in \{0;1;2\}} a_{d_1, d_2} x^{d_1} y^{d_2}.$$

Тогда  $p(x, y) = 0$  записывается как

$$\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & a_{0,2} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,0} & a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ y^2 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \vec{x}^T A \vec{y} = 0.$$

*Замечание 1.* Пусть  $r_y(x_0, y_0) = (x_0, y_1)$ . Тогда по теореме Виета

$$y_0 + y_1 = \frac{-a_1(x_0)}{a_2(x_0)},$$

где временно  $p(x, y) = a_2(x)y^2 + a_1(x)y + a_0$ .

**Определение 3.** Теперь пусть у нас есть кривые  $\Gamma_A$  и  $\Gamma_B$  с матрицами  $A$  и  $B$ . Для всякой точки  $(x_0, y_0)$ , не лежащей на пересечении  $\Gamma_A \cap \Gamma_B$  (пересечение в общем случае имеет 8 точек), имеет  $\vec{x}_0^T A \vec{y}_0$  и  $\vec{x}_0^T B \vec{y}_0$ , где одно не равно 0. Следовательно можно найти их однородную комбинацию равную 0:

$$\vec{x}_0^T (\lambda_0 A + \lambda_1 B) \vec{y}_0 = 0, \quad [\lambda_0 : \lambda_1] = [-\vec{x}_0^T B \vec{y}_0 : \vec{x}_0^T A \vec{y}_0].$$

Следовательно можно рассмотреть преобразование почти всего  $(\mathbb{CP}^1)^2$

$$\eta(x_0, y_0) = \eta_{\lambda_0 A + \lambda_1 B}(x_0, y_0) = \dots$$

*Замечание 2.* Поскольку при  $\eta$  мы применяем преобразование  $\eta_{\lambda_0 A + \lambda_1 B}$ , то точка остаётся на кривой, а значит мы остаёмся на той же кривой, а значит значение  $[\lambda_0 : \lambda_1]$  не меняется и называется *интегралом*.

Lyness map.

Пусть

$$\sigma(x, y, A, B) := (y, x, A^T, B^T).$$

Тогда

$$\eta = r_x \circ r_y = \sigma \circ r_y \circ \sigma \circ r_y = (\sigma \circ r_y)^2.$$

Таким образом можно смотреть на  $\sigma \circ r_y$ . При этом если  $A$  и  $B$  симметричны, то  $\sigma \circ r_y$  не меняется как отображение от  $(x, y)$ .