Слоения, железные дороги Терстона и гиперболическая геометрия на поверхностях.

Гаянэ Юрьевна Панина

20 июля 2021 г.

Определение 1. S_g — поверхность рода g, т.е. связная ориентируемая компактная поверхность. Говоря иначе, это сфера g ручками.

Лемма 1. $\chi(S_g) = 2 - 2g$ *— характеристика Эйлера — есть полный инвариант.*

Определение 2. Поверхность рода g с n дырками — связная компактная ориентируемая поверхность с краем(-ями). Говоря иначе, сфера с g ручками и n дырками.

Лемма 2. $(\chi; n)$ *(или же, что равносильно,* $(g; n)$*) есть полный инвариант.*

Определение 3. *Замкнутая кривая* γ — непрерывное отображение $\gamma : S^1 \to S_g$, что

- γ без самопересечений,
- γ гладка,
- γ с точностью до изотопии (гомотопии).

без самопересечений.

Определение 4. *Гомеоморфизм* — отображение между топологическими пространствами

$$\varphi : X \to Y,$$

что

- φ — биекция,
- φ — непрерывна,
- φ^{-1} — непрерывна.

Определение 5. Диффеоморфизм — гладкий гомеоморфизм.

Замечание 1. Для рассматриваемых пространств верно, что гомеоморфные пространства диффеоморфны.

Пример 1.

1. Тождественное отображение на X — диффеоморфизм.
2. К диффеоморфизмам можно применять изотопии.

Задача 1. Любую неразбивающую кривую γ на X (т.е. $X \setminus \gamma$ линейно связно) можно перевести в любую другую неразбивающую.

Определение 6. *Изометрия* — гомеоморфизм, сохраняющий метрику (или, что равносильно, длины кривых).

Задача 2.

1. **Первый тор.** Рассмотрим квадрат $[0;1]^2$. Склеим его обычным способом в тор. Получим *тор, снабжённый плоской метрикой*, т.е. у каждой точки есть окрестность изометричная диску.

2. **Второй тор.** Сделаем то же самое, но для параллелограмма натянутого на $(1;0)$ и $(1;1)$.

3. **Третий тор.** То же самое, но для параллелограмма натянутого на $(1;0)$ и $(0.5;1)$.

Изометричны ли торы?

Замечание 2. Нельзя склеить поверхность рода g из плоскости. Действительно, если, например, взять обычную развёртку $\prod_{i=1}^{n}(a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1})$. Все вершины будут склеены в одну и сумма углов банально не сойдётся (будет очень большой).

С другой стороны рассмотрим модель плоскости Лобачевского через ортогональные к окружности дуги внутри окружности. Если возьмём правильный $4g$-угольник с центром в центре нашей плоскости очень малого размера, то её сумма углов будет больше 2π. Если же взять $4g$-угольник, вершины которого бесконечно удалены (лежат на границе нашей плоскости), то сумма углов будет равна $0 < 2\pi$. Значит где-то "посередине" будет $4g$-угольник с суммой углов 2π. В таком случае склеивая такой многоугольник таким же образом, мы получаем плоскую метрику.

Определение 7. Модель Пуанкаре плоскости Лобачевского — $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$, где прямые — окружности, перпендикулярные $\Im(z) = 0$, а метрика порождается формулой

$$ds = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}.$$

Множество изометрий модели Пуанкаре $\mathrm{Iso}^+(\mathbb{H})$ — дробно-рациональные функции с вещественными коэффициентами и положительным определителем, т.е. $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$.

Замечание 3. По теореме Брауера у всякой изометрии $\mathbb{H}$ есть неподвижная в замыкании $\mathbb{H}$. Если она лежит в $\mathbb{H}$, то такая изометрия равносильно повороту относительно центра в представлении плоскости Лобачевского в качестве круга, где неподвижная точка — центр. Если же она лежит на границе, то это равносильно параллельному переносу на $a \in \mathbb{R}$ в модели плоскости Лобачевского, где неподвижная точка — бесконечно-удалённая точка.

Определение 8.