Дискретные интегрируемые системы и геометрия.

Антон Викторович Джамай

22 июля 2021 г.

Что такое динамическая система? Это система, которая меняется с течением “времени”. В непрерывном случае у нас есть конфигурационное пространство X, после чего мы рассматриваем некоторое отображение $[0;1] \to X$ (или $[0;\mathbb{R}) \to X$), удовлетворяющее определённому дифференциальному уравнению — функция движения системы. В дискретном случае мы будем рассматривать $\{1;\ldots;n\} \to X$ (или $\mathbb{N} \to X$), которое будет удовлетворять рекурентному соотношению.

В непрерывном случае мы можем рассматривать

- интегрируемость,
- нелинейность,
- обратимость.

Хотим того же для дискретного случая.

Пример 1. Числа Фиббоначчи:

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_3 = 2, \ldots$$

С одной стороны

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

С другой стороны

$$\begin{pmatrix} F_{n+2} \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix},$$

что указывает на линейность системы.

Определение 1. *Отображение QRT (G.R.W. Qinspil, L.A.G. Roberts, C. Thomas).* Пусть есть кривая $\Gamma : p(x,y) = 0$, $\deg_x(p) = \deg_y(p) = 2$ (биквадратный многочлен, $(2,2)$).

Чтобы иметь алгебраическую замкнутость, будем сидеть в $\mathbb{C}^2$, а чтобы не терять корней, будем сидеть в $(\mathbb{C}P^1)^2$.

Для всякой точки $(x_0, y_0) \in \Gamma \subseteq (\mathbb{C}P^1)^2$ можно рассмотреть прямую $l : x = x_0$. Эта прямая пересечёт Γ в двух точках: (x_0, y_0) и (x_0, y_0'). Таким образом мы получаем инволюцию

$$r_x : \Gamma \to \Gamma, (x_0, y_0) \mapsto (x_0, y_0');$$

аналогично определяется r_y. Обе r_x и r_y являются инволюциями. Таким образом рассматриваемое отображение QRT будет

$$\eta := r_y \circ r_x, \qquad \eta : (\mathbb{C}P^1)^2 \to (\mathbb{C}P^1)^2, (x_0, y_0) \mapsto (\overline{x_0}, \overline{y_0}).$$

Определение 2. Пусть

$$p(x,y) = \sum_{d_1,d_2 \in \{0;1;2\}} a_{d_1,d_2} x^{d_1} y^{d_2}.$$

Тогда $p(x,y)=0$ записывается как

$$\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & a_{0,2} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,0} & a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ y^2 \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{или} \qquad \vec{x}^T A \vec{y} = 0.$$

Замечание 1. Пусть $r_y(x_0,y_0) = (x_0,y_1)$. Тогда по теореме Виета

$$y_0 + y_1 = \frac{-a_1(x_0)}{a_2(x_0)},$$

где временно $p(x,y) = a_2(x)y^2 + a_1(x)y + a_0$.

Определение 3. Теперь пусть у нас есть кривые Γ_A и Γ_B с матрицами A и B. Для всякой точки (x_0,y_0), не лежащей не пересечении $\Gamma_A \cap \Gamma_B$ (пересечение в общем случае имеет 8 точек), имеет $\vec{x_0}^T A \vec{y_0}$ и $\vec{x_0}^T B \vec{y_0}$, где одно не равно 0. Следовательно можно найти их однородную комбинацию равную 0:

$$\vec{x_0}^T(\lambda_0 A + \lambda_1 B)\vec{y_0} = 0, \qquad [\lambda_0 : \lambda_1] = [-\vec{x_0}^T B \vec{y_0} : \vec{x_0}^T A \vec{y_0}].$$

Следовательно можно рассмотреть преобразование почти всего $(\mathbb{C}P^1)^2$

$$\eta(x_0,y_0) = \eta_{\lambda_0 A + \lambda_1 B}(x_0,y_0) = \dots$$

Замечание 2. Поскольку при η мы применяем преобразование $\eta_{\lambda_0 A + \lambda_1 B}$, то точка остаётся на кривой, а значит мы остаёмся на той же кривой, а значит значение $[\lambda_0 : \lambda_1]$ не меняется и называется *интегралом.*