

## Lista 2 - Parte 2

1. A probabilidade média de erro é

$$\begin{aligned}
 P(e) &= \frac{1}{2} P(e|S_0) + \frac{1}{2} P(e|S_1) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} p(n|S_0) dn + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} p(n|S_1) dn \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\frac{-A\sqrt{T}}{2\sqrt{N_0}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{n^2}{N_0}} dn + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\frac{A\sqrt{T}}{2\sqrt{N_0}}} \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{(n-A\sqrt{T})^2}{N_0}} dn \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{L} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \text{ onde } L = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{N_0}} A\sqrt{T} \\
 &= Q\left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{N_0}} A\sqrt{T}\right] = Q[\sqrt{SNR}], \text{ onde } SNR = \frac{\frac{1}{2} A^2 T}{N_0}
 \end{aligned}$$

Logo, a sinalização om-off requer um fator de duas vezes mais energia para atingir a mesma probabilidade de erro que a sinalização antipodal.

3- a) Como  $p < 1/2$ , o detector ML seleciona  $\hat{a}=0$  se  $y=0$  e  $\hat{a}=1$  se  $y=L$ . Isso é, escolhe  $\hat{a}=y$ .

b) As probabilidades posteriores são

$$P_{Y|A}(0|\hat{a}) P_A(\hat{a}) = \begin{cases} (1-p)q; & \hat{a}=0 \\ p(1-q); & \hat{a}=1 \end{cases}$$

Usando os números dados, percebe-se que o detector MAP sempre seleciona  $\hat{a}=0$ .

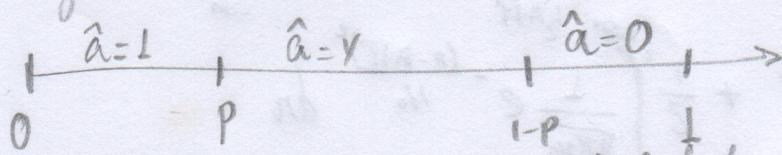
Um erro ocorre sempre que  $a=1$  é transmitido, que dá

com probabilidade  $1-q = 0.1$ . Isso diminui a probabilidade de erros, que é  $p=0.2$ .

O detector MAP não maximiza a probabilidade  $P_{Y|A}(y|\hat{a}) P_A(\hat{a})$ , que é dada na tabela seguinte

$a$	$y$	$P_{Y A}(y \hat{a}) P_A(\hat{a})$
1	1	$(1-p)(1-q)$
1	0	$p(1-q)$
0	1	$pq$
0	0	$(1-p)q$

Se observarmos  $y=0$ , então escolhemos que  $\hat{a}=0$  se  $(1-p)q > p(1-q)$ , ou  $q > p$ . Se observarmos que  $y=1$ , escolheremos que  $\hat{a}=1$  se  $(1-p)(1-q) > pq$ , ou  $q < 1-p$ . Logo, devemos dividir o eixo  $q$  em 3 regiões, como mostrado a seguir:



Para valores pequenos de  $q$ , a probabilidade a priori de  $a=0$  é pequena, então o detector MAP sempre irá selecionar  $\hat{a}=1$ . De forma similar, para valores grandes de  $q$  irá sempre escolher  $\hat{a}=0$ . No caso em que  $q$  está no meio termo, o detector MAP fará sempre a mesma decisão que o detector ML.

4. As regiões de decisão são determinadas por 3 limites, o do meio sendo zero. Os outros dois podem ser determinados ao se achar a observação em que é indiferente a decisão entre +3 e +1. Esse ponto, então, tem que satisfazer a seguinte equação:

$$|y - 3|^2 - 2\sigma^2 \ln(0.1) = |y - 1|^2 - 2\sigma^2 \ln(0.4)$$

$$y = 2 + \gamma_2 \sigma^2 \ln(4)$$

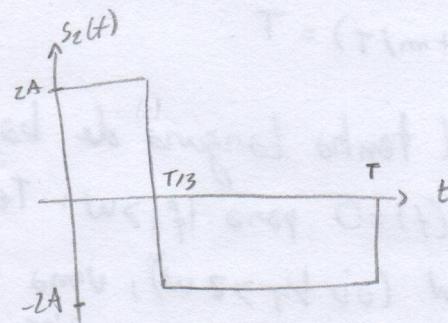
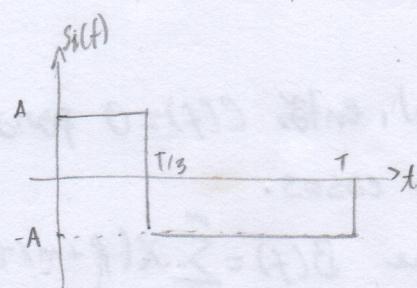
Assim, os limites se encontram em  $\pm [2 + \gamma_2 \sigma^2 \ln(4)]$ . Se  $\sigma^2 = 0.25$ , os limites se encontram em  $\pm 2.17$ , então se observarmos  $y=1$ ,  $\hat{x}=1$ .

5. Mesmo que o anterior.

$$\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{\sigma^2}{x_1 - x_2} \ln \left[ \frac{p_x(x_2)}{p_x(x_1)} \right]$$

lista 2 - parte 1

2.  $S_3(t) = 0$ ;  $S_1(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t \leq T/3 \\ -A, & T/3 \leq t \leq T \end{cases}$ ;  $S_2(t) = \begin{cases} 2A, & 0 \leq t \leq T/3 \\ -2A, & T/3 \leq t \leq T \end{cases}$

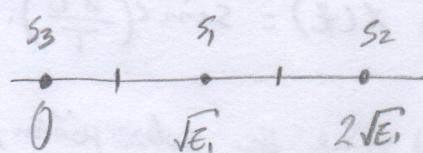


Vale considerar, antes de iniciar a questão, que  $S_2(t) = 2S_1(t)$  e  $S_3(t) = 0S_1(t)$ , logo o sistema é PAM e a função base de forma

$$\phi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} S_1(t) \text{ funcionaria}$$

$$\phi(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T}}, & 0 < t \leq T/3 \\ -\frac{1}{\sqrt{T}}, & T/3 < t < T \end{cases}$$

assumindo, então que  $E_1 = A^2T$ , temos que  $S_3 = 0$ ,  $S_1 = \sqrt{E_1}$ ,  $S_2 = 2\sqrt{E_1}$ . Uma constelação possível é a seguinte:



a) Para mensagens equiprováveis, a regra de decisão ótima é a de menor distância e os bissetores perpendiculares são as regiões de decisão, como indicadas na constelação acima.

b) A distância entre pontos adjacentes da constelação é  $d = \sqrt{E_1} = A\sqrt{T}$ . A energia média é  $E_{avg} = \frac{1}{3}(0 + A^2T + 4A^2T) = \frac{5A^2T}{3}$ , e  $E_{bavg} = \frac{E_{avg}}{\log_2 3} = \frac{5}{3\log_2 3} A^2T$ , de onde obtemos que  $d^2 = \frac{3\log_2 3}{5} E_{bavg} \approx 0,951 E_{bavg}$ .

A probabilidade de erro do detector ótimo é a média das probabilidades de erro dos três sinalis. Para os dois sinalis extremos, a probabilidade de erro é  $P(n > d/2) = Q\left(\frac{d/2}{\sqrt{N_0/2}}\right)$  e para o ponto do meio  $S_1$  é  $P(1n > d/2) = 2Q\left(\frac{d/2}{\sqrt{N_0/2}}\right)$ . Disso, obtemos que

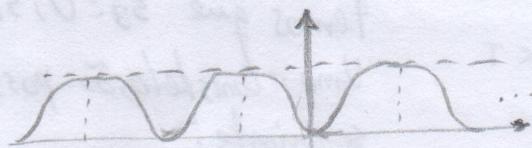
$$P_e = \frac{4}{3} Q\left(\sqrt{\frac{d^2}{2N_0}}\right) = \frac{4}{3} Q\left(\sqrt{\frac{0.951 E_{bavg}}{2N_0}}\right) = 43Q\left(\sqrt{0.475 \frac{E_{bavg}}{2N_0}}\right)$$

7. Critério de Nyquist para zero ISI a)  
Teorema (Nyquist): A condição necessária e suficiente para que  $x(t)$  satisfaça  $x(mT) = \begin{cases} 1 & m=0 \\ 0 & m \neq 0 \end{cases}$  é que sua transformada de Fourier satisfaça  $\sum_{m=-\infty}^{\infty} X(f+m/T) = T$ .

Supondo que o canal tenha largura de banda  $W$ , então  $C(f) = 0$  para  $|f| > W$  e, consequentemente,  $X(f) = 0$  para  $|f| > W$ . Temos 3 casos.

i) Quando  $T < 1/2W$  (ou  $V_T > 2W$ ), vê-se que  $B(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f+n/T)$  consiste de réplicas de  $X(f)$  que não se sobrepõem, separadas por  $V_T$ , não há escolha para  $X(f)$  que garanta que  $B(f) = T$  nesse caso, e não é possível modelar o sistema sem ISI.

ii) Quando  $T = 1/2W$  (caso de Nyquist), as réplicas de  $X(f)$ , separadas por  $V_T$ , são da forma



E é claro que nesse caso existe um  $X(f)$  que resulta em  $B(f) = T$ ,

$X(f) = \begin{cases} T, & |f| < W \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$ , que corresponde ao pulso  $x(t) = \text{sinc}\left(\frac{\pi t}{T}\right)$ .

[...]

iii) Quando  $T > 1/2W$ ,  $B(f)$  consiste de réplicas de  $X(f)$  que se sobrepõem, separadas por  $V_T$ . Existem numerosos casos tais que  $B(f) = T$ .

b) A largura de banda necessária pra satisfazer o resultado é  $W \geq \frac{1}{2T}$ .

c) A maior diferença entre uma modulação ortogonal e uma modulação M-ária é que a modulação ortogonal requer muito mais largura de banda, uma vez que os sinais são ortogonais. Assim, é fácil perceber o quanto os sinais M-ários são eficientes considerando seu consumo energético, potência e largura de banda utilizada para os seus "down sides" (prob. de erro, etc.)

Enfim, no geral as modulações ortogonais não precisam de muito mais banda, e consequentemente potência e complexidade para executar que uma solução M-ária. A vantagem é uma melhor performance no erro.

## Lista 2 - parte 2

3. FDMA → Divide a banda disponível do canal em múltiplos canais menores que serão alocados aos usuários.

TDMA → Subdivide uma janela de tempo em intervalos que não se sobreponem, alocando cada usuário em um desses subintervalos.

CDMA → Permite múltiplos usuários usar a mesma frequência simultaneamente ao associar um código a cada usuário. Os sinalis são separados no receptor usando esses códigos.

SDMA → Usa antenas inteligentes para rastrear usuários e separá-los em regiões espaciais, de tal forma que seja possível direcionar sinalis para os usuários, permitindo que vários usuários usem a mesma faixa de banda disponível, uma vez que estão separados espacialmente.

4. Aloha → Qualquer usuário pode transmitir a qualquer momento.

Slotted Aloha → Só se pode transmitir em um tempo alocado.

CSMA → Os usuários checam se o canal está ocioso. Caso sim, o usam para transmissão.

Não Persistente → Se o canal está ocioso, o usuário transmite. Caso contrário, agendam uma checagem em um delay. No fim do delay, checam novamente se o canal está ocioso; se sim, transmitir, caso contrário repetir.

P-persistente → Se o canal está ocioso, o pacote é transmitido com probabilidade  $p$ , e com probabilidade  $1-p$  a transmissão é atrasada em  $\tau$  segundos. Se em  $t=\tau$  o canal estiver ocioso, o passo anterior é repetido. Se uma colisão ocorre, os usuários reagendam a transmissão dos pacotes de acordo com uma distribuição de outras pré-selecionada. Se no tempo  $t=\tau$  o canal estiver ocupado, o usuário espera até ele estar ocioso e repete os passos anteriores.

5. a) Aloha vs. Slotted Aloha  $\rightarrow$  Ambas têm uma performance ruim, mas o Slotted Aloha oferece um nível de eficiência maior que o normal.
- b) CSMA [não persistente vs. p-Persistente]  $\rightarrow$  São bem eficientes, mas o p-persistente é mais eficiente que o não persistente, ainda mais quando se acha o valor p ótimo.
- c) Slotted Aloha vs. CSMA p-persistente  $\rightarrow$  Os protocolos CSMA têm uma performance significativamente superior aos Aloha.

1. Para comecar, é importante diferenciar CFO e CPO. Ambas irão rotacionar os símbolos modulados da constelação, mas o CFO irá rotacionar cada ponto, individualmente, aleatoriamente e CPO irá rotacionar todos, conjuntamente, por um valor fixo.

Possíveis causas:

CFO  $\rightarrow$  Incompatibilidade entre os osciladores do receptor e transmissor  
Efeito doppler

CPO  $\rightarrow$  Incompatibilidade entre receptor e transmissor  
Atraso de propagação no canal  
Fase residual na correção de erro de fase

Possíveis Soluções:

CFO  $\rightarrow$  Estimação de fase e correção

Loops de feedback, como PLL para compensar o offset

CPO  $\rightarrow$  Estimação e correção

Loops de feedback também

2.