



# Trabalho Computacional 2

## Sistema de Comunicações Digitais

**Nome:**

**Matrícula:**

### INSTRUÇÕES

- O trabalho deverá ser enviado para o email: rubem070@alu.ufc.br. Ele deverá ser enviado compactado (em .zip, ou .tar.gz) contendo os seguintes arquivos:
  - Relatório em formato pdf nomeado como "NOMEALUNO\_MATRICULA.pdf"
  - Para a questão 3, o arquivo .slx do modelo de comunicação em ambiente Simulink.
  - Para as demais questões, os arquivos .m ( no caso MATLAB e Octave) utilizados neste Homework.
  - Para os arquivos de programa, eles deverão conter comentários acerca de cada passo desenvolvido. Cada parâmetro setado, cada função criada, cada bloco desenvolvido.
- Campo "Assunto" do email: Trabalho SCD 02
- O trabalho deve ser implementado em ambiente Simulink, a partir do modelo inicial disponibilizado pelo professor
- **ATENÇÃO: NÃO** será permitida a utilização de blocos provenientes de toolboxes em que a detecção do símbolo é realizada de maneira automática. Em outras palavras, deve-se utilizar apenas blocos elementares, tais como: osciladores, filtros, somadores, misturadores (mixers), delays...

**Problema 1:** Considere o esquema de modulação 8-QAM, mostrado na Figura 1.

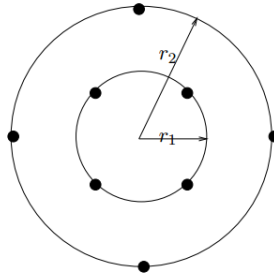


Fig. 1. Constelação de sinais do esquema 8-QAM.

- 1) Calcule a energia média ( $E_m$ ) dessa constelação em função de  $r_1$  e  $r_2$ ;
- 2) Derive uma expressão para a probabilidade de erro teórica com o auxílio da função  $Q$ , em função de  $E_m/N_0$
- 3) Obtenha a curva da taxa de erro de símbolos (SER - *Symbol Error Rate*) simulada em função da razão  $E_m/N_0$ , assumindo que  $r_1 = 1$  e  $r_2 = \sqrt{2}$ . Considere uma faixa de valores entre 0 e 20dB com um passo de 2dB.
- 4) Repita o experimento anterior considerando agora  $r_1 = r_2 = 1$  (observe que esta constelação equivale ao 8-PSK).

**Problema 2:** Considere o seguinte sinal recebido:

$$y = s_i + n,$$

onde  $y$  é o sinal observado,  $s_i$  sinal transmitido (símbolo) de um alfabeto com  $M$  possibilidades, isto é,  $s_i$  é escolhido a partir de um alfabeto  $S = \{s_0, s_1, \dots, s_i, \dots, s_{M-1}\}$ , e  $n$  é definido como o ruído aditivo gaussiano na recepção, isto é  $n \sim \mathcal{CN}(0, \sigma_n^2)$ . Um detector MAP (*maximum a posteriori*) seleciona  $\hat{s}$  de forma a maximizar a seguinte probabilidade a posteriori

$$P_{S|Y}(\hat{s}|y) = f_{Y|S}(y|\hat{s})P_S(\hat{s}),$$

onde  $P_{S|Y}(\hat{s}|y)$  é a probabilidade de ocorrência de  $\hat{s}$  dado a observação  $y$ ,  $f_{Y|S}(y|\hat{s})$  é a p.d.f conjunta, e  $P_S(\hat{s})$  é a probabilidade de ocorrência do símbolo  $\hat{s}$  pertencente ao alfabeto  $S$ . **Exemplo:** Considere o seguinte alfabeto:  $s_0 = -b$  e  $s_1 = b$  e que a probabilidade de ocorrências dos símbolos seja a mesma, isto é,  $P_S(s_0) = P_S(s_1) = 0.5$ . Neste caso binário, há duas hipóteses:  $H_0 \rightarrow s_0$  é detectado e  $H_1 \rightarrow s_1$  é detectado. Duas possíveis decisões:  $D_0 \rightarrow s_0$  é escolhido como símbolo mais provável e  $D_1 \rightarrow s_1$  é escolhido. Logo, podemos montar a seguinte expressão para decisão:

$$\begin{aligned} f_{Y|S}(y|s_0)P_S(s_0) &\underset{D_1}{\overset{D_0}{\geq}} f_{Y|S}(y|s_1)P_S(s_1), \\ \frac{f_{Y|S}(y|s_0)}{f_{Y|S}(y|s_1)} &\underset{D_1}{\overset{D_0}{\geq}} \frac{P_S(s_1)}{P_S(s_0)} \end{aligned} \quad (1)$$

onde temos que

$$f_{Y|S}(y|s_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{|y+b|^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$f_{Y|S}(y|s_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{|y-b|^2}{2\sigma^2}\right),$$

substituindo esta expressão em (1) e aplicando o logaritmo natural, temos

$$\ln\left(\frac{f_{Y|S}(y|s_0)}{f_{Y|S}(y|s_1)}\right) \underset{D_1}{\overset{D_0}{\geq}} \ln(1)$$

$$\frac{2yb}{\sigma^2} \underset{D_1}{\overset{D_0}{\geq}} \ln\left(\frac{P_S(s_1)}{P_S(s_0)}\right).$$

**Questão:** Considere o alfabeto de símbolos a serem transmitidos  $S = \{s_0 = -3, s_1 = -1, s_2 = 1, s_3 = 3\}$ , com as seguintes probabilidades *a priori*,  $P_S(s_0) = 0.2, P_S(s_3) = 0.2, P_S(s_1) = 0.3, P_S(s_2) = 0.3$ . Dada a observação  $y = s_i + n$ , para  $i = \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $n \sim \mathcal{CN}(0, \sigma^2 = 0.25)$ , determine:

- i As regiões de decisões para o estimador MAP
- ii Qual símbolo será detectado se:  $y = -2$ ?

**Problema 3:** Sabe-se que o detector de máxima verossimilhança (*maximum likelihood* - ML) é equivalente ao detector MAP quando as probabilidades de ocorrência dos símbolos de um alfabeto são equivalentes, ou seja, para um alfabeto com M possíveis escolhas temos  $P_S(s_i) = 1/M$ , onde  $i = \{0, 1, 2, \dots, M-1\}$ . Considere o sinal recebido:

$$y = s_i + n,$$

onde  $n \sim \mathcal{CN}(0, \sigma^2)$  é o ruído gaussiano aditivo de média zero e variância  $\sigma^2$ ,  $s_i$  é o símbolo transmitido de uma constelação 4-QAM, isto é  $S = \{s_0 = 1 + j, s_1 = -1 + j, s_2 = -1 - j, s_3 = 1 - j\}$ . Implemente o detector ML supondo um alfabeto 4-QAM, e obtenha as curvas de taxa de erro de símbolos (SER) em função da SNR (*Signal Noise Ratio* - Relação Sinal Ruído), isto é  $\mathcal{E}_m/N_0$  comparando com a taxa de erro teórica (usando a função  $Q$  do MATLAB, por exemplo). Dados: A SNR deve variar de  $-20$  dB a  $10$  dB ao passo de  $5$  dB. A SER deve ser obtida sob a média de pelo menos  $5 \cdot 10^4$  realizações. Ou seja, para cada realização gera-se um sinal transmitido, ruído aditivo, sinal recebido, e a estimação via o ML implementado.

**Problema 4:** Considere o modulador QPSK desenvolvido em ambiente Simulink (.slx) e disponibilizado pelo professor. Observe que o sistema possui duas fontes independentes de perturbações:

- Um canal AWGN (Additive White Gaussian Noise) com uma dada relação de energia média de bit por densidade espectral de ruído.
- Um desvio de fase, que é modelado como sendo um valor constante  $\varphi \in \mathbb{R}$ . Esse valor é desconhecido para o demodulador digital.

- 1) Considere inicialmente um sistema de comunicação perfeito, i.e., com  $\varphi = 0$  e sem ruído (dê um *bypass* no bloco de ruído AWGN). Implemente o demodulador QPSK, isto é, construa os modelos lógicos do *down-converter* e do detector ótimo para o esquema QPSK. A saída do demodulador digital deve ser o *stream* de bits detectado.
- 2) Insira agora ruído branco ao modelo Simulink, e obtenha a BER do sistema para o intervalo de 0 a 20dB.
- 3) Insira agora um desvio de fase de  $\varphi = \pi/4$  na fase da portadora do modulador. Obtenha novamente a BER do sistema para esta condições.
- 4) Acrescente ao seu demodulador um modelo lógico do estimador que recupere a fase do sinal transmitido. Corrija o desvio de fase no demodulador. Obtenha novamente a BER do sistema para o intervalo de 0 a 20dB.
- 5) Plote em um mesmo gráficos as curvas do item 2), 3), e 4), em adição a probabilidade de erro teórica da modulação. Comente sobre o comportamento do sistema operando com e sem desvio de fase, e com e sem a recuperação de fase da portadora.

**Problema 5:** Para um sinal CPM (do inglês, *Continuous Phase Modulation*) com um índice de modulação dado por  $h = n/m$ , em que  $n, m \in \mathbb{N}_+ \setminus \{0\}$ , responda os seguintes itens:

- 1) Desenhe a treliça para uma transmissão binária com  $h = 1/3$  e com um pulso de frequência retangular com  $L = 1$  (full-response)
- 2) Desenhe a treliça para uma transmissão binária com  $h = 1/2$  e com um pulso de frequência retangular com  $L = 2$  (partial-response)
- 3) No item anterior, se fosse adotado um pulso de frequência retangular de resposta completa ( $L = 1$ ), qual seria nome do modulação correspondente a essa treliça? Qual é a principal característica que a torna distinta dos outros sinais de fase contínua?