



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE TELEINFORMÁTICA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE TELECOMUNICAÇÕES

CARLOS GUILHERME BATISTA DE FREITAS

INTRODUÇÃO MATEMÁTICA À FUNÇÃO DE LAMBERT-TSALLIS E APLICAÇÕES

FORTALEZA

2024

CARLOS GUILHERME BATISTA DE FREITAS

INTRODUÇÃO MATEMÁTICA À FUNÇÃO DE LAMBERT-TSALLIS E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia de Telecomunicações do Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de bacharel em Engenharia de Telecomunicações.

Orientador: Prof. Dr. Kleber Zuza Nobrega.

FORTALEZA

2024

CARLOS GUILHERME BATISTA DE FREITAS

INTRODUÇÃO MATEMÁTICA À FUNÇÃO DE LAMBERT-TSALLIS E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia de Telecomunicações do Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de bacharel em Engenharia de Telecomunicações.

Aprovada em: 08/08/2024.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Kleber Zuza Nobrega (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dra. Vanessa Avansini Botta Pirani
Universidade Estadual Paulista (UNESP)

Prof. Dr. Rubens Viana Ramos
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Don't you dare go hollow.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Kleber Zuza Nobrega, tanto por sua paciência como sua excelente orientação.

Aos professores participantes da banca examinadora, Vanessa Avansini Botta Pirani e Rubens Viana Ramos, pelo seu tempo e participação nesse projeto.

E à minha família, por acreditar em mim.

"Os livros não são feitos para acreditarmos neles, mas para serem submetidos a investigações. Diante de um livro não deveremos nos perguntar o que diz, mas o que quer dizer,[...]." (Umberto Eco, O Nome da Rosa, 1980, p. 353.)

RESUMO

O presente trabalho realiza um estudo da função de Lambert-Tsallis, uma variante da função W de Lambert cujo objetivo é ser mais geral ao utilizar a exponencial generalizada de Tsallis. Com a crescente popularidade da função W de Lambert ao longo dos anos, vê-se a importância de analisar variantes que podem, possivelmente, facilitar estudos e aplicações em diversas áreas da ciência. Portanto, o grande objetivo do trabalho é de estabelecer a base de conhecimento sobre a função de Lambert-Tsallis, cruzando ideias com a função W de Lambert quando possível, e expandindo ideias para as suas idiossincrasias, considerando sua capacidade de oferecer soluções mais simples a certos problemas que exigem métodos numéricos e ferramentas analíticas de alta complexidade.

Palavras-chave: função de Lambert-Tsallis; raízes de polinômios; equações trinômiais.

ABSTRACT

This work aims to study the Lambert-Tsallis function, which is a variant of the W Lambert function, whose objective is to be more generalised by utilising Tsallis' generalised exponential. With W Lambert's function overgrowing popularity throughout the years, there is a value to analyse variants that may, possibly, ease the study in many scientific areas. Therefore, the grand objective of this work is to establish the basis of knowledge about Lambert-Tsallis' function, crossing ideas with W Lambert function whenever possible, and expanding ideas for its own idiosyncrasies, considering its capacity to offer simpler solutions to certain problems that usually require numerical and analytical methods of higher complexity.

Keywords: Lambert-Tsallis function; polynomial roots; trinomial equations.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Função $W(z)$ de Lambert no plano real.	16
Figura 2 – Exponencial de Tsallis e_q^z , para $z \in \mathbb{R}$ e alguns valores de q	17
Figura 3 – Parâmetro de incerteza de Tsallis, q , em função de r . $q = (r - 1)/r$	19
Figura 4 – Processo de refinamento de malha, como ilustrado no artigo de Piotr [6] . . .	27
Figura 5 – Retirada do Artigo de Piotr [6]	28
Figura 6 – $W_r(z)$ e sua inversa, $W_r^{-1}(z)$, em $r = 2$	33
Figura 7 – $W_r(z)$ e sua inversa, $W_r^{-1}(z)$, em $r = 3$	34
Figura 8 – $W_r(z)$ e sua inversa em $r = -2$	36
Figura 9 – $W_r(z)$ e sua inversa em $r = -3$	36
Figura 10 – Disposição de $W_r(z)$ com $r = \frac{17}{8}$	40
Figura 11 – Gráfico de $\log(z)$, incluindo o corte de ramo no eixo real negativo.	42
Figura 12 – Superfície de Riemann da parte imaginária de $\text{Log } z$	43
Figura 13 – Superfícies de Riemann da parte real e imaginária, respectivamente, das funções acima.	43
Figura 14 – Superfícies de Riemann da parte real de $W_r(z)$ para $r = \frac{1}{2}$ e $r = -\frac{1}{2}$, respecti- vamente.	44
Figura 15 – Superfície de Riemann para $r = \frac{1}{2}$ comparada a sua versão no plano real . . .	45
Figura 16 – Superfície de Riemann para $r = -\frac{1}{2}$ comparada a sua versão no plano real . .	45
Figura 17 – Superfícies de Riemann de $W_r(z)$ para $r = \{2, 3\}$ respectivamente.	45
Figura 18 – Raízes de $z^{11} + z^7 - 1 = 0$	55

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Lista de propriedades relacionadas à função de Lambert Tsallis.	22
Tabela 2 – Quantidade de valores de $W_r(z)$ a depender do valor de r	29
Tabela 3 – Todos os casos $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$	39
Tabela 4 – Dados do exemplo	49
Tabela 5 – Dados do exemplo	50
Tabela 6 – Comparação entre valores obtidos pela função de Fox-Wright e de Lambert-Tsallis	52
Tabela 7 – Valores de k que resultam em raízes unimodulares para $n = 70$	54
Tabela 8 – Raízes unimodulares do caso $k=26$	54
Tabela 9 – Raízes de $z^{11} + z^7 - 1 = 0$	55
Tabela 10 – Apresentação de problemas e suas soluções usando $W_r(z)$	56

LISTA DE SÍMBOLOS

$W(z)$	Função de Lambert
e_q^z	Exponencial de Tsallis forma q
$\exp_r(z)$	Exponencial de Tsallis forma r
$W_q(z)$	Função de Lambert-Tsallis forma q
$W_r(z)$	Função de Lambert-Tsallis forma r
w_b	Valor especial da função de Lambert-Tsallis
\mathbb{R}	Conjunto dos números reais
\mathbb{Z}	Conjunto dos números inteiros
\mathbb{Q}	Conjunto dos números racionais
\mathbb{N}	Conjunto dos números naturais
\mathbb{C}	Conjunto dos números complexos
\mathbb{I}	Conjunto dos números irracionais
\wedge	Ou
\setminus	Subtração de conjuntos
$\Gamma(z)$	Função Gamma, $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$
$\Delta_C \arg f(z)$	Variação no caminho do argumento de uma função complexa
mod	Operador módulo da matemática (aritmética modular)
$\lfloor x \rfloor$	Menor valor inteiro mais próximo do número entre os operadores
FV	valor futuro
PMT	pagamento

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
2	FUNDAMENTOS	15
2.1	Função W de Lambert	15
2.2	Exponencial de Tsallis, e_q^z	16
2.3	Função de Lambert-Tsallis, $W_q(z)$	18
2.4	Propriedades	20
2.5	Exemplos	22
3	CÁLCULO NUMÉRICO DE $W_r(z)$	25
3.1	Algoritmo GRPF (<i>Global complex Roots and Poles Finding</i>)	26
3.2	Algoritmo mais abrangente para $r \in \mathbb{Q}$	28
3.3	Truque da Inversa	30
4	COMPORTAMENTO DE $W_r(z), \forall z \in \mathbb{R}$	31
4.1	Caso $r \in \mathbb{Z}_+^*$	31
4.1.1	r Par	32
4.1.2	r Ímpar	33
4.2	Caso $r \in \mathbb{Z}_-^*$	34
4.2.1	r Par	35
4.2.2	r Ímpar	36
4.3	Resultados Gerais	37
5	COMPORTAMENTO DE $W_r(z), \forall z \in \mathbb{C}$	41
5.1	Um pouco de teoria	41
5.2	Mapeando $W_r(z)$	44
5.3	Visualizando todas as raízes	46
6	APLICAÇÕES	48
6.1	Equação Trinomial Geral	48
6.2	Matemática financeira	48
6.3	Uma reformulação do problema de capacidade de Shannon	51
6.4	Raízes Unimodulares e Interiores	53
6.5	Resumo das Aplicações	56
7	CONCLUSÃO	57

Bibliografia	58
-------------------------------	-----------

1 INTRODUÇÃO

O objetivo do presente trabalho é realizar um estudo da função de Lambert-Tsallis, uma variante da função W de Lambert que busca ser mais geral ao utilizar a exponencial generalizada de Tsallis. A importância do trabalho reside no fato de que a função W de Lambert é uma ferramenta que vem crescendo muito em popularidade ao longo dos anos, sendo usada para aplicações em diversas áreas da ciência. Isso sem mencionar que a busca por versões mais abrangentes e completas da função são sempre alvo de muito estudo e análise.

A função W de Lambert, como hoje é conhecida, foi primeiro introduzida pelo software Maple como `ProductLog()`, tendo sua nomenclatura atual sugerida por um artigo que documentou e explorou vários de seus aspectos, popularizando-a [1]. Muito da teoria básica da função foi primeiro estudada e desenvolvida por Lambert em 1758, em um estudo que almejava solucionar uma equação trinomial por desenvolvimento em séries. Euler reformulou os problemas de Lambert em 1779, chegando em outros desenvolvimentos e conclusões. No geral, a função W de Lambert é usada em diversos problemas, sendo aplicada para resolver problemas em diversas áreas da ciência, como física, estatística, matemática, biologia e afins.

Ao longo do trabalho iremos definir a função de Lambert-Tsallis, avaliar métodos para calculá-la computacionalmente com a finalidade de usar tais métodos para estudar seu comportamento nos reais, e posteriormente nos complexos, e, por fim, um breve estudo sobre suas aplicações até então.

2 FUNDAMENTOS

2.1 Função W de Lambert

A função $W(z)$ de Lambert é uma função multivalorada $W(z)$ que satisfaz a seguinte equação para qualquer número complexo z

$$z = W(z)e^{W(z)}. \quad (2.1)$$

Ela também pode ser definida como a inversa da função $f(w) = we^w$. Assim, podemos escrever a seguinte propriedade:

Propriedade 1.

$$ze^z = a \implies W(ze^z) = W(a) \implies z = W(a). \quad (2.2)$$

Isso implica que, ao forçar essa condição em problemas seletos, podemos encontrar suas respectivas soluções em termos da função $W(z)$ de Lambert. Segue alguns exemplos:

Exemplo 1. Considere uma equação da forma $x + e^x = a$. Assim, escreve-se

$$e^x = a - x \implies 1 = (a - x)e^{-x} \implies e^a = (a - x)e^{-x}e^a.$$

Destarte, podemos concluir que

$$\begin{aligned} W[(a - x)e^{a-x}] &= W(e^a) \implies a - x = W(e^a) \\ x &= a - W(e^a). \end{aligned}$$

Exemplo 2. Considere $x \ln x = a$. Podemos usar do fato que $x = e^{\ln x}$ para escrever

$$\begin{aligned} e^{\ln x} \ln x &= a \implies W[e^{\ln x} \ln x] = W(a) \implies \ln x = W(a) \\ x &= e^{W(a)}. \end{aligned}$$

Exemplo 3. Considere $x^x = a$. Assim, escreve-se

$$\begin{aligned} \ln x^x &= \ln a \implies x \ln x = \ln a \implies e^{\ln x} \ln x = \ln a \\ W[e^{\ln x} \ln x] &= W(\ln a) \implies \ln x = W(\ln a) \\ \implies x &= e^{W(\ln a)}. \end{aligned}$$

Como a função é multivalorada, o gráfico da função no plano real tem a seguinte forma:

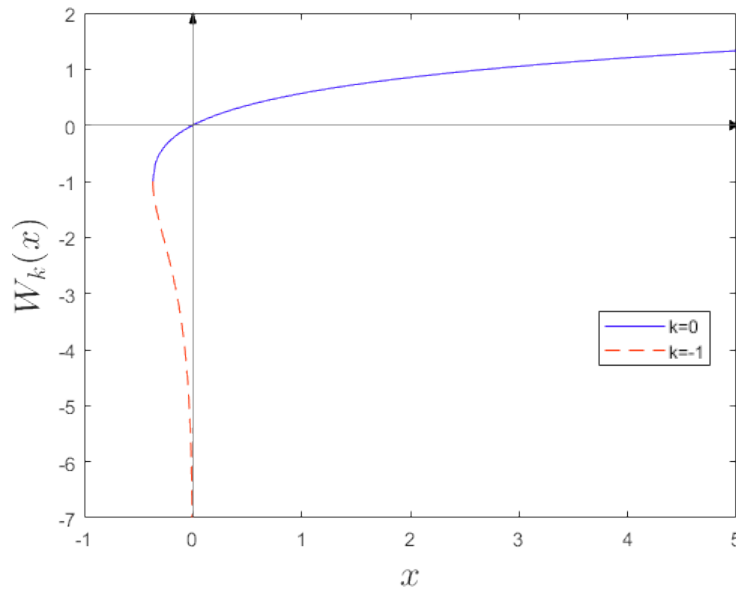


Figura 1 – Função $W(z)$ de Lambert no plano real.

Para analisar a função, dizemos que ela tem dois ramos reais no intervalo $1/e < x < 0$, que se juntam no ponto $x = -1/e$. Portanto, a equação $x = we^w$ tem duas soluções reais nesse intervalo. O ramo correspondente à cor azul no gráfico, no intervalo $-1/e \leq x < \infty$, é o *ramo principal* e é denotado por W_0 . Já o ramo correspondente à parte tracejada do gráfico, no intervalo $-1/e \leq x < 0$, é o *ramo negativo* e é denotado por W_{-1} .

Vale ressaltar que —com a função sendo multivalorada—, apesar da função ter apenas duas soluções no plano dos reais no intervalo $1/e < x < 0$, no plano dos complexos a função $W(z)$ de Lambert possui infinitas soluções, como é estabelecido em [1], na página 349.

2.2 Exponencial de Tsallis, e_q^z

A exponencial de Tsallis foi primeiro definida [2] como

$$e_q^z = [1 + (1 - q)z]^{\frac{1}{1-q}}, \quad \forall z. \quad (2.3)$$

Sua proposta é servir, ao longo do artigo original na qual foi desenvolvida, como uma função exponencial generalizada, introduzindo o parâmetro de incerteza q , bastante utilizado hoje em dia em problemas de mecânica estatística, por exemplo. Desta forma, a exponencial

simples é um de seus casos especiais:

$$e_1^z = \lim_{q \rightarrow 1} e_q^z = e^z. \quad (2.4)$$

Isso é facilmente verificável de duas formas: Ou se realiza a expansão de Taylor de (2.4) no limite de $q \rightarrow 1$, ou se nota sua validade para $z = 1$ com

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{r}\right)^r = e^1$$

considerando que $r = \frac{1}{1-q}$. De imediato, também é possível escrever:

Propriedade 2.

$$\begin{aligned} (e_q^z)^\alpha &= [1 + (1-q)z]^\alpha / (1-q) \\ &= \left\{ 1 + \left[1 - 1 + \left(\frac{1-q}{\alpha} \right) \right] z \alpha \right\}^{\frac{1}{1 - \left(\frac{1-q}{\alpha} \right)}} \\ &= e_{1 - \left(\frac{1-q}{\alpha} \right)}^{z\alpha} \end{aligned}$$

Ao se analisar a escrita de Tsallis ao longo do artigo, é possível notar que se está a todo tempo buscando interpretar os resultados propostos de forma mais genérica ao introduzir elementos extras, de tal forma que ainda seja possível retornar a interpretação normal em um caso especial. Destarte, se torna interessante buscar outros problemas nos quais podemos aplicar esses desenvolvimentos, em especial a exponencial de Tsallis.

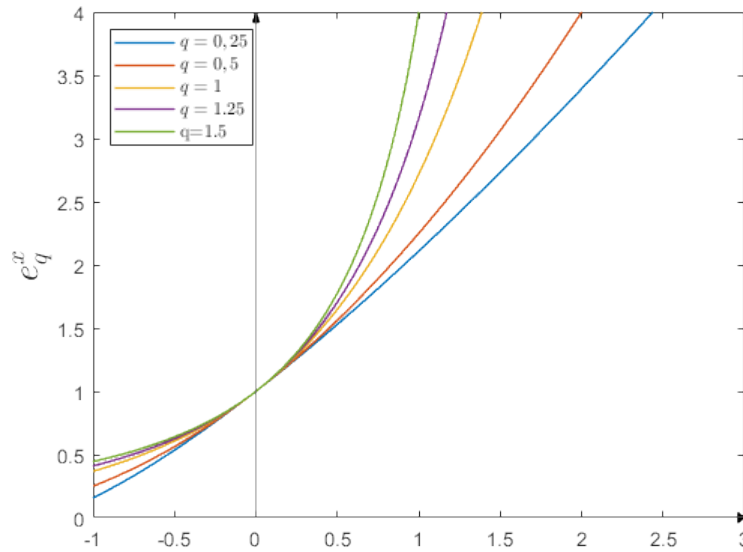


Figura 2 – Exponencial de Tsallis e_q^z , para $z \in \mathbb{R}$ e alguns valores de q .

Por último, também é importante citar que desde que o artigo original foi publicado, muito se foi desenvolvido acerca da função exponencial de Tsallis e os resultados adjacentes do artigo, de tal forma que é comum definí-la de forma diferente, exigindo que ela seja limitada a faixas de intervalos para validar a existência de funções logaritmo regidas pela mesma lógica, e afins. No entanto, no presente trabalho esse não será nosso foco, priorizaremos a definição original.

2.3 Função de Lambert-Tsallis, $W_q(z)$

Agora repensemos o problema que define a função $W(z)$ de Lambert definida pela equação $W(z)e^{W(z)} = z$. A proposta da função $W_q(z)$ surgiu na possibilidade de modificar a função exponencial simples pela exponencial generalizada de Tsallis, $e_q^z = [1 + (1 - q)z]^{\frac{1}{1-q}}$. Desta forma, podemos escrever

$$\begin{aligned} W_q(z)e_q^{W_q(z)} &= z \\ \implies W_q(z) [1 + (1 - q)W_q(z)]^{\frac{1}{1-q}} &= z. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Essa foi a proposta inicial de Rubens [3]. De fato, o seguiremos em grande parte de nosso argumento, mas adotaremos uma notação diferente: Ao invés do parâmetro da função de Lambert-Tsallis a qual Rubens usou q , daqui em diante utilizaremos $r = \frac{1}{1-q}$. O motivo dessa mudança possibilita ao leitor não só um maior entendimento de propriedades, aspectos algébricos e outras características, mas também um manuseio mais fácil da função de Lambert-Tsallis, principalmente no que diz respeito à função e_q^z , que também será descrita a partir de então pelo parâmetro r .

Destarte, a função de Lambert-Tsallis será referenciada como $W_r(z)$ ao invés de $W_q(z)$ daqui em diante, e poderemos, por fim, reformular as equações (2.3) e (2.5) à luz dessa proposta

$$\exp_r(z) = \left(1 + \frac{z}{r}\right)^r. \quad (2.6)$$

Deste ponto, uma reformulação da **Proposição 2** é imediata:

Propriedade 3.

$$\begin{aligned} [\exp_r(z)]^\alpha &= \left[\left(1 + \frac{z}{r} \right)^r \right]^\alpha = \left(1 + \frac{z}{r} \right)^{r\alpha} = \left(1 + \frac{z\alpha}{r\alpha} \right)^{r\alpha} \\ &= \exp_{r\alpha}(z\alpha) \end{aligned}$$

Por fim, temos a definição do problema, i.e., o desafio de saber calcular os valores de $W_r(z)$ na equação

$$W_r(z) \left[1 + \frac{W_r(z)}{r} \right]^r = z. \quad (2.7)$$

É também importante avaliar a dependência que r tem de q isoladamente, uma vez que isso possibilita a identificação de zonas de interesse que surgirão ao longo do nosso estudo. Tipicamente, o parâmetro q é utilizado em problemas práticos de cunho estatístico. Contudo, q não exprime informação suficiente para que seja possível avaliar características da função Lambert-Tsallis. Assim, segue uma figura que usa a equação estabelecida para traçar o gráfico entre $q(r)$. Isto é evidente observando equação (2.7), onde é possível identificar o problema polinomial associando r à ordem ou grau do mesmo. Em outras palavras, matematicamente há riqueza de detalhes em r ao invés de q .

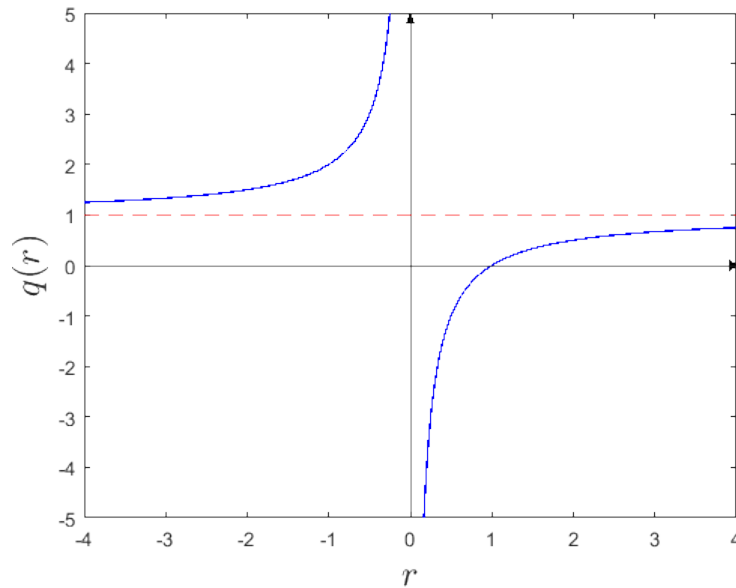


Figura 3 – Parâmetro de incerteza de Tsallis, q , em função de r . $q = (r - 1)/r$.

2.4 Propriedades

Propriedade 4.

$$W_r(z) \left[1 + \frac{W_r(z)}{r} \right]^r = z \implies W_r(z) \exp_r[W_r(z)] = z$$

$$\implies \frac{z}{W_r(z)} = \exp_r[W_r(z)]$$

Propriedade 5.

$$\exp_r(z) = \left(1 + \frac{z}{r} \right)^r = \left(1 + \frac{-z}{-r} \right)^{-(-r)}$$

$$= \frac{1}{\left(1 - \frac{z}{-r} \right)^{-r}} = \frac{1}{\exp_{-r}(-z)}$$

$$\exp_r(z) = \frac{1}{\exp_{-r}(-z)} \implies \exp_r(z) \exp_{-r}(-z) = 1$$

Propriedade 6.

$$\exp_{\alpha r}(\alpha z) \exp_{\beta r}(\beta z) = \exp_{(\alpha+\beta)r}[(\alpha+\beta)z]$$

Propriedade 7.

$$W_r(z) \left[1 + \frac{W_r(z)}{r} \right]^r = z \implies W_r(z) \exp_r[W_r(z)] = z \implies \exp_r[W_r(z)] = \frac{z}{W_r(z)}$$

$$\exp_{-r}[-W_r(z)] = \frac{W_r(z)}{z} \implies \exp_{-1} \left[-\frac{W_r(z)}{r} \right] = \left[\frac{W_r(z)}{z} \right]^{1/r}$$

$$\exp_{-1} \left[-\frac{W_r(z)}{r} \right] = \frac{1}{1 + \frac{W_r(z)}{r}}$$

Propriedade 8.

$$\frac{W_r(z)}{z} = \frac{1}{\exp_r[W_r(z)]} = \exp_{-r}[-W_r(z)] = \frac{1}{\left[1 + \frac{W_r(z)}{r} \right]^r}$$

$$\implies \frac{W_r(z)}{z} = \frac{1}{\left[1 + \frac{W_r(z)}{r} \right]^r}$$

ou

$$\Rightarrow \left[\frac{W_r(z)}{z} \right]^{1/r} = \frac{1}{1 + \frac{W_r(z)}{r}}$$

Propriedade 9.

$$\frac{W_r(r)}{r} = \frac{w_b}{W_{w_b}(w_b)}, \quad w_b = -\frac{r}{r+1}$$

Propriedade 10.

$$\Rightarrow \left[\frac{W_r(z_b)}{z_b} \right]^{1/r} = \frac{r+1}{r}$$

Propriedade 11.

$$\frac{W_r(z)}{z} = 1$$

quando $z = -2r$ e r for um número par positivo.

Propriedade 12.

$$\frac{W_r(z)}{z} = -1$$

quando $z = 2r$ e r for um número ímpar positivo.

Propriedade 13.

$$f(z) = 1 - W_{-1} \left[\frac{1}{f(z)} - 1 \right]$$

Por fim, segue aqui também uma tabela produzida para condensar algumas dessas propriedades.

Propriedades Algébricas		
$\frac{z}{W_r(z)} = e_r^{W_r(z)}$	$e_{-1}^{-\frac{W_r(z)}{r}} = \frac{1}{1 + \frac{W_r(z)}{r}}$	$\frac{W_r(z)}{z} = \left[1 + \frac{W_r(z)}{r}\right]^r$
$e_{\alpha r}^{\alpha z} e_{\beta r}^{\beta z} = e_{(\alpha+\beta)r}^{(\alpha+\beta)z}$ $[e_r^z]^\alpha = e_{\alpha r}^{\alpha z}$	$\frac{W_r(z)}{z} = 1$ quando $z = -2r$ e r for um número par positivo	$\frac{W_r(z)}{z} = -1$ quando $z = 2r$ e r for um número ímpar positivo
Para $\Lambda = -\frac{r}{r+1}$, tem-se $\frac{W_r(r)}{r} = \frac{\Lambda}{W_\Lambda(\Lambda)}$		
Para $\lambda = -\left(\frac{r}{r+1}\right)^{r+1}$, tem-se $\left[\frac{W_r(\lambda)}{\lambda}\right]^{1/r} = \frac{r+1}{r}$		
Para $r \in Z_+^*$		
$W_r(z)$ possui $r+1$ valores	$W_r(0) = \{0, -r\}$ e o último tem multiplicidade r	Quando $r \gg 1$ e $z \in \mathbb{R}$, o comportamento geral de $W_r(z)$ será centrado em $(-r, 0)$ e seus valores entornam a região definida por $W_r(z)/r \approx (z ^{1/r} - 1)$
Para $z \in \mathbb{R}$, $W_r(z)$ terá no máximo 3 valores reais que dependerão da paridade de r e do sinal de z		
Para $r \in Z_-^*$		
$W_r(z)$ possui r valores	$W_r(0) = 0$	$\lim_{z \rightarrow \infty} W_r(z) \approx -r$

Tabela 1 – Lista de propriedades relacionadas à função de Lambert Tsallis.

2.5 Exemplos

Assim como a função $W(z)$ de Lambert, a generalização proposta —ver equação (2.7)—tem várias aplicações. Dentre elas, uma interessante é sua capacidade de encontrar zeros de funções trinômiais. Para tal, faremos uso das **Propriedades 1 e 3** sugeridas previamente. Ambas formam o ideário usado para resolver os exemplos que serão propostos a seguir.

Exemplo 4. Considere $P_1(x) = x^{n+1} - (1 + \beta)x^n + \beta$, para $0 < \beta < 1$

$$x^{n+1} - (1 + \beta)x^n + \beta = 0 \implies -(1 + \beta)x^n \left[1 - \frac{x}{1 + \beta}\right] = -\beta$$

$$x^n \left[1 - \frac{x}{1 + \beta}\right] = \frac{\beta}{1 + \beta} \implies x^n \exp_1\left(\frac{-x}{1 + \beta}\right) = \frac{\beta}{1 + \beta}$$

Elevando ambos os lados da equação a $r = \frac{1}{n}$, temos

$$\left(\frac{-r}{1 + \beta}\right) x \exp_r\left(\frac{-rx}{1 + \beta}\right) = \left(\frac{\beta}{1 + \beta}\right)^r \left(\frac{-r}{1 + \beta}\right)$$

Assim, forçando a condição da **Propriedade 1**, temos que

$$\frac{-rx}{1 + \beta} = W_r\left[\left(\frac{\beta}{1 + \beta}\right)^r \left(\frac{-r}{1 + \beta}\right)\right]$$

Logo,

$$x = -\frac{1+\beta}{r} W_r \left[\left(\frac{\beta}{1+\beta} \right)^r \left(\frac{-r}{1+\beta} \right) \right]$$

Exemplo 5. Considere $P_2(x) = x^n - \alpha x + (\alpha - 1)$, para $\alpha > 1$

$$x^n - \alpha x + (\alpha - 1) = 0 \implies -\alpha x \left(1 - \frac{x^{n-1}}{\alpha} \right) = -(\alpha - 1)$$

$$x \exp_1 \left(\frac{-x^{n-1}}{\alpha} \right) = \frac{\alpha - 1}{\alpha}$$

Elevando ambos os lados da equação a $r = n - 1$, temos

$$\left(\frac{-r}{\alpha} \right) x^r \exp_r \left(\frac{-rx^r}{\alpha} \right) = \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha} \right)^r \left(\frac{-r}{\alpha} \right)$$

$$\frac{-rx^r}{\alpha} = W_r \left[-\frac{r}{\alpha} \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha} \right)^r \right]$$

$$x = \left\{ -\frac{\alpha}{r} W_r \left[-\frac{r}{\alpha} \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha} \right)^r \right] \right\}^{1/r}$$

Exemplo 6. Considere $P_3(x) = x^n - \gamma x^{n-1} + (\gamma - 1)$, para $\gamma > 1$

$$x^n - \gamma x^{n-1} + (\gamma - 1) = 0 \implies -\gamma x^{n-1} \left(1 - \frac{x}{\gamma} \right) = -(\gamma - 1)$$

$$x^{n-1} \exp_1 \left(-\frac{x}{\gamma} \right) = \frac{\gamma - 1}{\gamma}$$

Elevando ambos os lados da equação a $r = \frac{1}{n-1}$, temos

$$-\frac{r}{\gamma} x \exp_r \left(-\frac{xr}{\gamma} \right) = -\frac{r}{\gamma} \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \right)^r$$

$$-\frac{xr}{\gamma} = W_r \left[-\frac{r}{\gamma} \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \right)^r \right]$$

$$x = -\frac{\gamma}{r} W_r \left[-\frac{r}{\gamma} \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \right)^r \right]$$

Exemplo 7. Considere $P_4(x) = x^{n+1} - (\alpha + 1)x + \alpha$, para $\alpha > 1$

$$x^{n+1} - (\alpha + 1)x + \alpha = 0 \implies -(\alpha + 1)x \left(1 - \frac{x^n}{\alpha + 1} \right) = -\alpha$$

$$x \exp_1 \left(-\frac{x^n}{\alpha + 1} \right) = \frac{\alpha}{\alpha + 1}$$

Elevando ambos os lados da equação a $r = n$, temos

$$-\frac{rx^r}{\alpha + 1} \exp_r \left(-\frac{rx^r}{\alpha + 1} \right) = -\frac{r}{\alpha + 1} \left(\frac{\alpha}{\alpha + 1} \right)^r$$

$$-\frac{rx^r}{\alpha + 1} \exp_r = W_r \left[-\frac{r}{\alpha + 1} \left(\frac{\alpha}{\alpha + 1} \right)^r \right]$$

$$x = \left\{ -\frac{\alpha + 1}{r} W_r \left[-\frac{r}{\alpha + 1} \left(\frac{\alpha}{\alpha + 1} \right)^r \right] \right\}^{1/r}$$

Chegamos, assim, a valores analíticos de z . Apesar de simples exemplos, é importante destacar que não foi em momento algum utilizado ferramentas matemáticas mais sofisticadas, e.g. expansões em séries de potência ou funções hipergeométricas, excluindo-se a necessidade de aproximações e análises de estabilidade e convergência, trivializando a rotina do problema apenas a manipulações algébricas. Portanto, nos resta apenas que consigamos calcular um valor $W_r(z)$ arbitrário para obter nossas respostas. Assim como a função W de Lambert, é possível calcular esse valor computacionalmente [4]. No entanto, a abordagem tomada será bem diferente, como veremos no capítulo a seguir.

3 CÁLCULO NUMÉRICO DE $W_r(z)$

Tendo agora como principal objetivo nos tornarmos capazes de calcular a função numericamente para realizar análises mais completas, iremos ilustrar nesse capítulo os métodos estudados para tal até então.

Antes de tudo, no entanto, vale mencionar que, quando o objetivo é calcular valores de funções ou soluções de equações, é em geral suficiente que se aplique métodos iterativos para achar zeros, como o de Newton ou de Muller [5]. Com isso em mente, também conseguimos adaptar nosso problema geral para tais métodos ao escrever

$$We^W = \beta \implies We^W - \beta = 0$$

$$\implies f(z, \beta) = ze^z - \beta.$$

No entanto, tais métodos iterativos requerem do usuário, por exemplo, uma boa noção de onde o resultado desejado deve estar para que o algoritmo venha a convergir. A depender do problema estudado isso pode ser o suficiente, dada a eficiência do algoritmo utilizado, para se obter o resultado com a eficiência e precisão requerida. Tudo isso é muito bem enunciado no livro de István Mező [5], acerca da função W de Lambert. No entanto, ainda se aponta que existe a possibilidade de experimentar e explorar as possibilidades do problema, a fim não só de se obter maior eficiência computacional, mas também ultrapassar certas limitações previamente estabelecidas pelos métodos mais primitivos, atingindo níveis de precisão tão ou mais rigorosos que os já oferecidos.

Mező segue, assim, construindo matematicamente uma aproximação assintótica da função $W(z)$ de Lambert, que representa um ramo da função muito bem até certa ordem de magnitude. Tudo isso é feito baseado no trabalho de Frederik Johansson [4], que construiu a lógica de um algoritmo que consegue calcular qualquer valor de $W(z)$ independentemente do valor de entrada da função. Ou seja, é possível se montar uma estratégia heurística que não só é capaz de contornar muitas das dificuldades do problema, mas também evitar a necessidade de dar como entrada um valor inicial próximo da solução, separando o problema em partes com sucesso. Vale notar que os métodos heurísticos adotados ainda garantem a condição de existência da solução e a precisão da função no intervalo requerido.

A complexidade da tarefa em mão é clara, ainda mais porque nosso objetivo é obter valores de uma versão generalizada da função $W(z)$ de Lambert, ou seja, $W_r(z)$. Isso implica que pouco reaproveitamos dos esforços envidados para calcular a função $W(z)$ de Lambert, já que problemas antes resolvidos agora são reintroduzidos com uma dezena de outras dificuldades. Tendo isso em mente, chegamos ao primeiro algoritmo estudado para tomar conta de tal tarefa.

3.1 Algoritmo GRPF (*Global complex Roots and Poles Finding*)

Como estamos trabalhando no conjunto dos complexos com uma função relativamente complicada e sensível, uma vez que pode vir a se tratar de um polinômio de ordem grande, é importante escolher um método robusto e capaz de lidar com a função quando o número de zeros e polos aumenta com o grau da função [6].

Para tal se chega no trabalho de Piotr Kowalczyk [6], que, diferentemente dos algoritmos clássicos, pouco se importa com valores de entrada, mas sim com a região (dada como entrada pelo usuário), e em que quadrante cada ponto está. O algoritmo toma por base o Princípio do Argumento de Cauchy, que pode ser encontrado na seção 86 do livro [7], enunciado a seguir:

Teorema 1

Seja C um caminho fechado orientado positivamente. Suponha que

- 1. a função $f(z)$ é meromórfica no domínio interior a C ;*
- 2. $f(z)$ é analítica e diferente de zero em C ;*
- 3. contando multiplicidades, Z é o número de zeros e P o número de polos de $f(z)$ dentro de C .*

Então,

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg f(z) = Z - P.$$

Notas:

- Uma função f é dita meromórfica num domínio D se é analítica ao longo de D , exceto em seus polos.*
- $\Delta_C \arg f(z) = \phi_1 - \phi_0$ é a mudança no argumento de $f(z)$ quando z percorre o caminho fechado C começando de um ponto z_0 fixo escolhido arbitrariamente.*

Na implementação computacional do algoritmo, devemos reescrever nosso problema assim como o da função $W(x)$ de Lambert foi reescrito, obtendo

$$f(z, r, \beta) = z \left(1 + \frac{z}{r}\right)^r - \beta. \quad (3.1)$$

O algoritmo primeiro cria uma malha triangular sob uma região e procede para calcular a fase da função em todos os nós. Com essas informações, o algoritmo avalia a mudança de fase entre os nós. Caso a mudança de fase seja igual a $|2|$, o lado que liga os nós deve ser considerado um potencial vizinho de um zero ou polo. Ao se coletar todos esses lados em um conjunto, os triângulos anexados formarão um conjunto de regiões candidatas, que após subseqüentes divisões, um processo de discretização, e outro de refinamento da malha é possível determinar a localização de zeros e polos para funções no plano complexo. Esse processo de re-discretização torna o zero a ser encontrado naturalmente com uma melhor definição e precisão. Tudo isso é muito bem descrito no artigo de Piotr [6], e seu código em MATLAB é disponibilizado abertamente no GitHub [8].

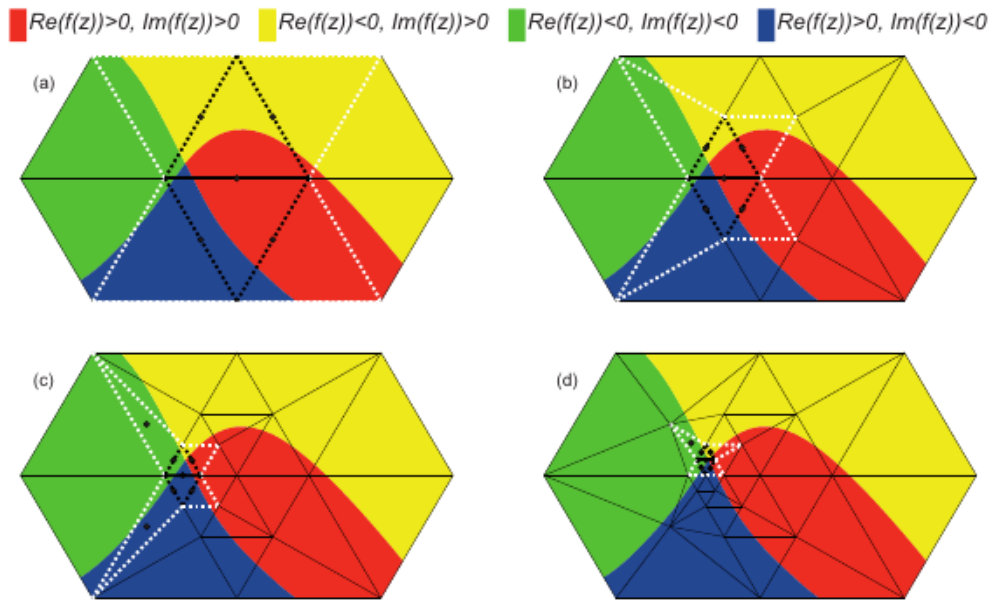


Figura 4 – Processo de refinamento de malha, como ilustrado no artigo de Piotr [6]

Com isso, chegamos em um algoritmo capaz de analisar não só uma grande classe de funções, como também a função de Lambert-Tsallis de forma eficiente. No geral, o algoritmo consegue contornar muitas das peculiaridades da função $W_r(z)$ que podem causar dificuldade a algoritmos de encontrar raízes, como o fato de que ela é uma função multivalorada no plano complexo, ou que ela possui polos nos casos em que $r < 0$. Ainda assim, o algoritmo não alcança o grau de generalidade necessário para analisar a função por todos os ângulos desejados, uma

vez que ele tem dificuldade de calcular a função quando $r \notin \mathbb{Z}$, e pode demorar muito quando os valores de r são muito grandes (normalmente a partir de $|r| > 98$).

Independentemente disso, o algoritmo é extremamente eficiente e uma de suas principais características está em sua capacidade de extrair todos os zeros simultaneamente. Além disso, como é um método que temos completa ciência de que funciona, pode ser usado como um ponto de referência para testar outros métodos e soluções. Por fim, segue uma imagem ilustrativa do mapeamento final do algoritmo para a função $f(z) = (z-1)(z-i)^2(z+1)^3/(z+i)$:

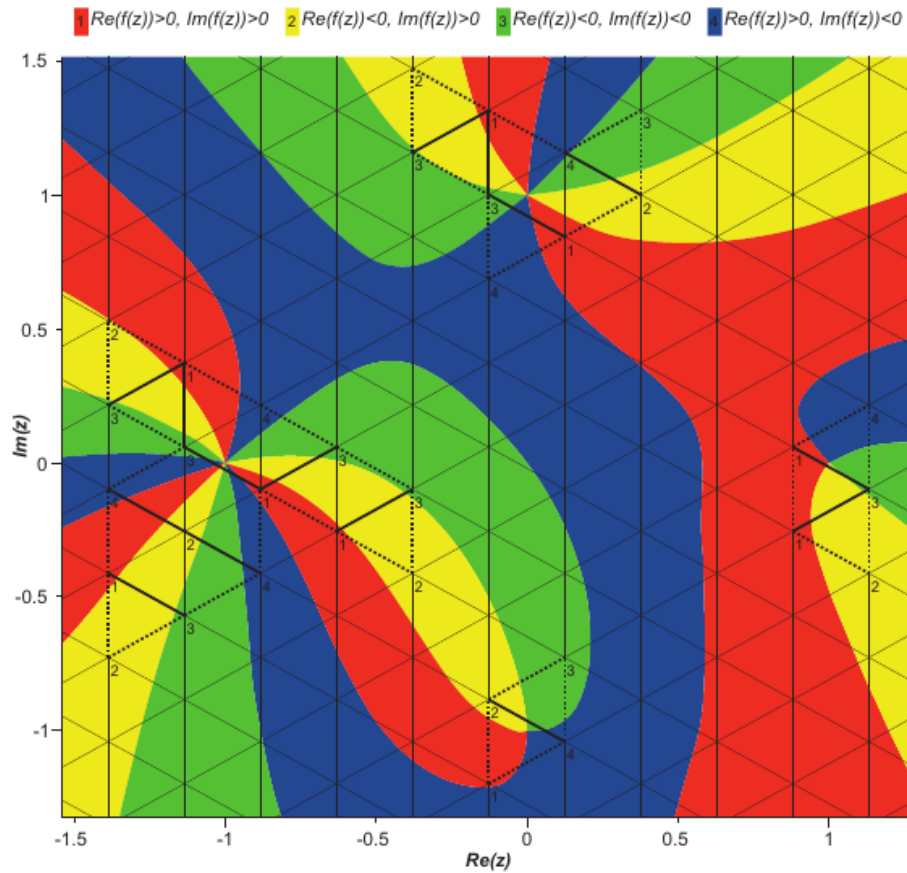


Figura 5 – Retirada do Artigo de Piotr [6]

3.2 Algoritmo mais abrangente para $r \in \mathbb{Q}$

Uma das limitações do algoritmo anterior é que ele pode se tornar consideravelmente complicado, e assim um pouco limitado para alguns dos desafios que enfrentaremos a seguir. Em específico, temos em mãos o desafio de tentar construir uma lógica de algorítmica que nos permite calcular valores da função de forma fácil e eficiente, $W_r(z)$, com $r \in \mathbb{Q}$, ao invés de valores inteiros. Para tal, faremos uso de substituições de variáveis, construindo a lógica algorítmica a seguir:

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{aligned} x \left(1 + \frac{x}{r}\right)^r &= z \\ x^{\frac{d}{n}} \left(1 + x^{\frac{d}{n}}\right)^{n/d} &= z^{\frac{d}{n}} \\ y(1+y)^{n/d} &= z^{\frac{d}{n}} \\ (k^d - 1)k^n &= z^{\frac{d}{n}} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} r &= \frac{n}{d} > 0, \text{ considerando que } \text{mdc}(n, d) = 1 \\ y &= x^{\frac{d}{n}} \\ k &= (1+y)^{1/d} \end{aligned}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Sobre tal equação, observa-se que, agora, tem-se sempre uma equação com coeficientes inteiros e positivos, sendo possível extrair suas raízes via função `roots`, que é implementada em várias linguagens de programação de alto nível (Python, Matlab, Octave). Assim, uma vez que os valores de k são encontrados, é possível fazer o processo inverso $k \rightarrow y \rightarrow x$.

Para o caso em que $r < 0$, onde se assume que $n < 0$ e $d > 0$, podemos prosseguir a partir de (3.2) para encontrar

$$k^d - k^{-n} z^{\frac{d}{n}} - 1 = 0. \tag{3.3}$$

A partir das equações (3.2) e (3.3), pode-se inferir as seguintes informações quanto ao número de valores de $W_r(z)$ para um determinado valor de r

equações	r	$\#W_r(z)$
$k^{d+n} - k^n - z^{\frac{d}{n}} = 0$	$\frac{n}{d} > 0$	$n + d$
	$r \in \mathbb{Z}_*^+$	$n + 1$
$k^d - k^{-n} z^{\frac{d}{n}} - 1 = 0$	$r \in \mathbb{Z}_*^-$	$ n $
	$r < 0$	$\max(d, n)$
	$r = -\frac{1}{d} < 0$	d

Tabela 2 – Quantidade de valores de $W_r(z)$ a depender do valor de r .

Com essa lógica é possível construir um algoritmo que nos permite calcular a função $W_r(z)$ para valores de r arbitrários. Além disso, a Tabela (2) é de fundamental importância para certificar o cálculo da função $W_r(z)$, pois esta indica claramente o número de zeros a serem obtidos, podendo, inclusive, servir de indicador quanto à acuracidade do algoritmo utilizado, independente da técnica.

3.3 Truque da Inversa

Apesar de termos algoritmos mais generalistas, é importante reconhecer certos métodos, consideravelmente mais simples e elegantes, que nos devolvem certos resultados com excelente consistência. Nesse caso, conseguimos obter valores de $W_r(z)$ computacionalmente instantaneamente ao utilizar sua função inversa. Veja que ao considerarmos

$$y = x \left(1 + \frac{x}{r} \right)^r,$$

Temos um gráfico que podemos facilmente plotar em qualquer linguagem de programação. A ideia aqui é trocar os valores de y e x na função *plot*, e obteremos de imediato o gráfico da função $W_r(z)$. Tudo isso será demonstrado em maior capacidade no capítulo a seguir. Vale, no entanto, ressaltar que ainda que essa seja uma metodologia eficiente para plotar a função para valores de r inteiros, quando se trata de valores de r reais, nem sempre o gráfico retornado será completo. Isso se deve a alguns problemas que serão discutidos posteriormente no trabalho. Para valores de r reais, utilizaremos o método anterior.

4 COMPORTAMENTO DE $W_r(z), \forall z \in \mathbb{R}$

Agora com ferramentas capazes de calcular valores de $W_r(z)$ com excelente precisão, iremos direcionar nosso estudo ao comportamento da função de Lambert-Tsallis. Primeiro nos focaremos no caso em que $z \in \mathbb{R}$, e para tal, iremos variar os valores de r para identificar possíveis padrões e propriedades no comportamento da função, efetivamente separando o estudo em uma série de casos e sub casos de análise relevantes.

A motivação dessa análise vem de quando identificarmos diferenças claras nas características da função quando r pertence a certos conjuntos; por exemplo, quando $r \in \mathbb{Z}_*$, notamos uma clara diferença entre os casos positivos e negativos, pois os polinômios gerados serão de grau $r + 1$ e r , respectivamente.

4.1 Caso $r \in \mathbb{Z}_+^*$

Nosso problema retrata um polinômio de grau $r + 1$ com todos os coeficientes sendo reais, e $w = W_r(z)$. Assim, se considerarmos o caso em que $r \in \mathbb{Z}$, tem-se que:

$$w \left(1 + \frac{w}{r} \right)^r = z. \quad (4.1)$$

Para nossa análise, podemos expandir a equação acima e obter

$$\begin{aligned} w \left[1^0 \left(\frac{w}{r} \right)^r \binom{r}{r} + 1^1 \left(\frac{w}{r} \right)^{r-1} \binom{r}{r-1} + \dots + 1^r \left(\frac{w}{r} \right)^0 \binom{r}{0} \right] &= z \\ w \left[\left(\frac{w}{r} \right)^r + r \left(\frac{w}{r} \right)^{r-1} + \dots + 1 \right] - z &= 0 \\ \frac{w^{r+1}}{r^r} + \frac{w^r}{r^{r-2}} + \dots + w - z &= 0, \end{aligned}$$

que nos leva a calcular os valores de soma e produto das raízes como:

$$-\sum w_i = r^2 \implies \sum w_i = -r^2 \quad (4.2)$$

$$(-1)^{r+1} \prod w_i = -zr^r \implies \prod w_i = (-1)^r zr^r. \quad (4.3)$$

A partir da equação (4.3) pode-se observar o efeito da paridade em r , que revela algo em relação ao número de soluções da equação (4.1), e que será discutido em maior profundidade nas subseções seguintes.

Já no caso em que $r \notin \mathbb{Z}$, temos que $r \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ ou $r \in \mathbb{I}^{(1)}$. No primeiro caso, é simples obter o número de raízes da função ao elevá-la ao denominador do expoente; já no segundo, no entanto, chegamos à conclusão de que a função possui infinitas soluções. Por exemplo,

$$x^\pi = 1 \implies x^\pi = r^\pi e^{i\pi\theta} = 1$$

concluimos rapidamente que $r = 1$ e que $\theta = 2\mathbb{Z}$, que gera infinitas soluções.

Outro aspecto relevante quanto à característica multivalorada de $W_r(z)$ está diretamente relacionada à análise de sua derivada. Para isso nos voltamos a equação (4.1), obtendo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left[w \left(1 + \frac{w}{r} \right)^r \right] &= 1 \\ w' \left(1 + \frac{w}{r} \right)^r + wr \left(1 + \frac{w}{r} \right)^{r-1} \frac{1}{r} w' &= 1 \\ w' \left(1 + \frac{w}{r} \right)^r \left[1 + w \left(1 + \frac{w}{r} \right)^{-1} \right] &= 1 \\ w' &= \frac{1}{\left(1 + \frac{w}{r} \right)^r \left[1 + \frac{w}{1 + \frac{w}{r}} \right]} \end{aligned}$$

onde

$$1 + \frac{w}{1 + \frac{w}{r}} = 1 + \frac{wr}{r + w} = \frac{w(r+1) + r}{r + w}.$$

Logo, existem dois pontos onde $W'_r(z) \rightarrow \infty$. São esses:

$$\begin{cases} \left(1 + \frac{w}{r} \right)^r = 0 \implies w = -r \\ \frac{w(r+1) + r}{r + w} = 0 \implies w_b = \frac{-r}{r+1} \end{cases} \quad (4.4)$$

que correspondem a $z = 0$ e $z_b = \frac{-r}{r+1} \left(\frac{r}{r+1} \right)^r$, respectivamente.

4.1.1 r Par

Para explicar apenas o comportamento dos valores reais da função $W_r(z)$, é mais interessante que busquemos analisar sua inversa:

$$w \left(1 + \frac{w}{r} \right)^r = z \xrightarrow{f^{-1}(w)} w = z \left(1 + \frac{z}{r} \right)^r.$$

⁽¹⁾ $\mathbb{I} = \{x | x \in \mathbb{R} \wedge x \notin \mathbb{Q}\}$ é o conjunto dos números irracionais.

Assim, ao ver o problema da perspectiva da inversa, podemos confiantemente traçar o gráfico de $W_r(z)$, uma vez que a construção analítica e numérica da função inversa é trivial, e para voltarmos ao caso original basta espelhar o gráfico. Destarte, podemos nos voltar a analisar algumas peculiaridades observadas no comportamento de $W_r(z)$.

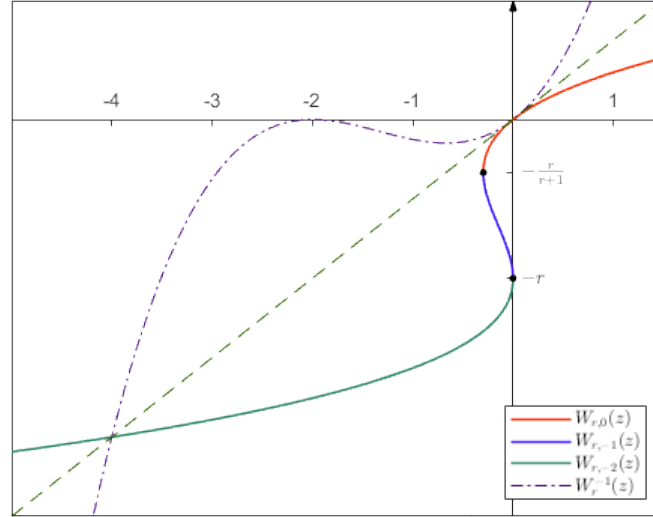


Figura 6 – $W_r(z)$ e sua inversa, $W_r^{-1}(z)$, em $r = 2$.

Felizmente, através do estudo da função inversa $W_r^{-1}(z)$ é possível analisar a função de Lambert-Tsallis sem nenhuma perda de generalidade. Isso facilmente explica muitos dos comportamentos que antes eram observados. Destarte, resta-nos apenas destacar algumas características:

1. A função W_r toca o eixo das ordenadas em $(0, -r)$, diferentemente da função W de Lambert. Isso se deve ao fato de que $\lim_{r \rightarrow \infty} W_r(z) = W(z)$;
2. A função $W_r(z)$ possui 3 ramos reais;
3. Seu terceiro ramo surge na condição $W_r(z) < -r$;
4. Como destacado na construção de (4.4), tem-se que $W_r'(z) \rightarrow \infty$ nas abscissas correspondentes a $z = 0$ e $z = \frac{-r}{r+1} \left(\frac{r}{r+1} \right)^r$;
5. Verifica-se visualmente que para r par o comportamento geral de $W_r(z)$ se assemelha ao de um “S”;
6. Existe um intervalo de z que admite múltiplas soluções de $W_r(z)$.

4.1.2 r Ímpar

Sem nenhuma perda de generalidade, o trabalho feito na seção anterior incluindo as propriedades destacadas é completamente aproveitado, restando-nos apenas apontar uma leve

diferença entre o caso par e ímpar quanto à propriedade 5: Enquanto o caso par tem um *terceiro ramo* voltado à esquerda, o caso ímpar tem sua inclinação voltada para a direita gerando, assim, um gráfico semelhante a um “C”.

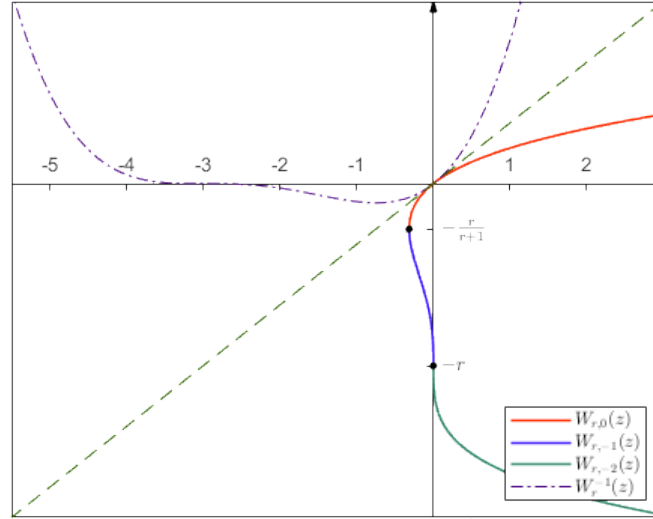


Figura 7 – $W_r(z)$ e sua inversa, $W_r^{-1}(z)$, em $r = 3$.

4.2 Caso $r \in \mathbb{Z}_-$

Para o caso em que $r < 0$ buscaremos realizar as mesmas análises gerais que conduzimos para o caso $r > 0$. Primeiro, observa-se que nosso problema retratará um polinômio de grau r com todos os coeficientes sendo reais. Assim, ao se considerar o caso em que $r \in \mathbb{Z}$, temos que:

$$w \left(1 + \frac{w}{r}\right)^r = z \implies \frac{w}{\left(1 + \frac{w}{r}\right)^{|r|}} = z$$

$$w = z \left(1 + \frac{w}{r}\right)^{|r|}$$

Seguindo a mesma lógica do caso $r > 0$, devemos expandir a equação acima, obtendo

$$\begin{aligned} z \left[\left(\frac{w}{r}\right)^{|r|} \binom{|r|}{|r|} + \left(\frac{w}{r}\right)^{|r|-1} \binom{|r|}{|r|-1} + \dots + \left(\frac{w}{r}\right)^0 \binom{|r|}{0} \right] &= w \\ z \left[\left(\frac{w}{r}\right)^{|r|} + r \left(\frac{w}{r}\right)^{|r|-1} + \dots + 1 \right] - w &= 0 \\ \frac{zw^{|r|}}{r^{|r|}} + \frac{zw^{|r|-1}}{r^{|r|-2}} + \dots + z - w &= 0, \end{aligned}$$

que nos leva a calcular os valores de soma e produto das raízes como:

$$-\sum w_i = r^2 \implies \sum w_i = -r^2 \quad (4.5)$$

$$(-1)^r \prod w_i = \frac{zr^{|r|}}{z} \implies \prod w_i = (-1)^r r^{|r|}. \quad (4.6)$$

Em sequência, realizamos uma análise das derivadas aplicando $\frac{d}{dz}$ em ambos os lados da equação

$$\begin{aligned} w &= z \left(1 + \frac{w}{r}\right)^{|r|} \\ w' \left(1 + \frac{w}{r}\right)^{|r|} - w|r| \left(1 + \frac{w}{r}\right)^{|r|-1} &= \left(1 + \frac{w}{r}\right)^{2|r|} \\ w' &= \frac{\left(1 + \frac{w}{r}\right)^{|r|}}{\frac{w(r+1)+r}{r+w}} = \frac{\left(1 + \frac{w}{r}\right)^{|r|+1}}{w^{\frac{r+1}{r}} + 1} \end{aligned}$$

Daqui tiramos dois casos:

Caso 1. No primeiro caso, temos que $w' \rightarrow \infty$. Para tal, concluímos que $w = -\frac{r}{r+1}$ e que $z = -\frac{r}{r+1} \left(\frac{r}{r+1}\right)^r$.

Caso 2. Já no segundo caso, temos que $w' \rightarrow 0$. Para tal, concluímos que $w = -r$ e $z = 0$.

4.2.1 $|r|$ Par

Assim como no caso em que $r > 0$, faremos uso da inversa de W_r para construir o gráfico. Seguindo especificamente a análise da derivada da função nos casos 4.1 e 4.2, construídos na seção acima, temos que ambos os pontos encontrados dividem os ramos da função. O ponto $\left(-\frac{r}{r+1} \left(\frac{r}{r+1}\right)^r, -\frac{r}{r+1}\right)$ funciona da mesma forma que no caso em que $r > 0$ (seção 4.1), ou seja, é o ponto correspondente ao w_b , onde a $w' \rightarrow \infty$. No outro ponto, $(0, -r)$, temos uma grande diferença: a derivada $w' \rightarrow 0$. Isso se reflete diretamente no gráfico, até porque $-r$ em si se torna um número positivo, logo não se conectando ao segundo ramo. Com isso, a função tem o seu terceiro ramo “pulando” para a parte de cima do eixo das ordenadas, efetivamente *se encontrando no infinito* com o primeiro ramo. Para o caso par, esse terceiro ramo é voltado para a direita do gráfico.

Isso se deve ao fato de que, no caso par, quando utilizamos o método dos intervalos⁽²⁾ na função $z = \frac{x}{(1+x/r)^{|r|}}$, o sinal dos intervalos $[0, -r]$ e $(-r, \infty]$ é positivo; ou seja, em ambos intervalos a função se encontrará na mesma região $x > 0$ e $z > 0$.

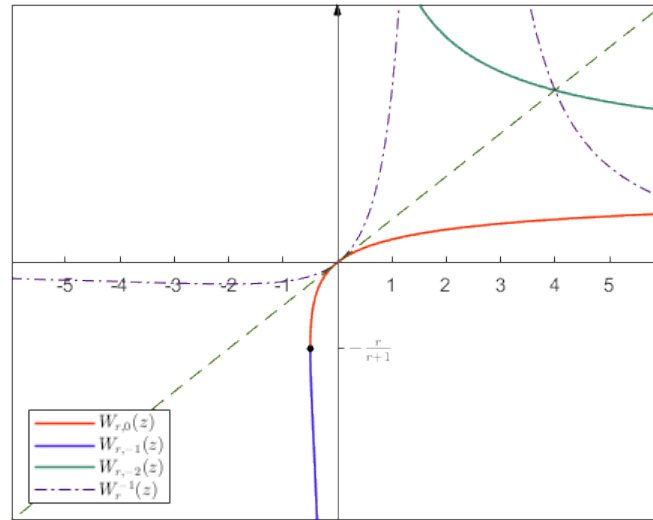


Figura 8 – $W_r(z)$ e sua inversa em $r = -2$.

4.2.2 $|r|$ Ímpar

A análise do caso par é completamente reaproveitada, exceto o fato de que o terceiro ramo é voltado para a esquerda, ao invés da direita. Assim como no caso anterior, isso se deve ao fato de que, no caso ímpar, quando utilizamos o método dos intervalos na função $z = \frac{x}{(1+x/r)^{|r|}}$, o sinal dos intervalos $[0, -r]$ e $(-r, \infty]$ é oposto; ou seja, o intervalo $[0, -r]$ se encontrará na região $x > 0$ e $z > 0$, enquanto $(-r, \infty]$ na região $x < 0$ e $z > 0$.

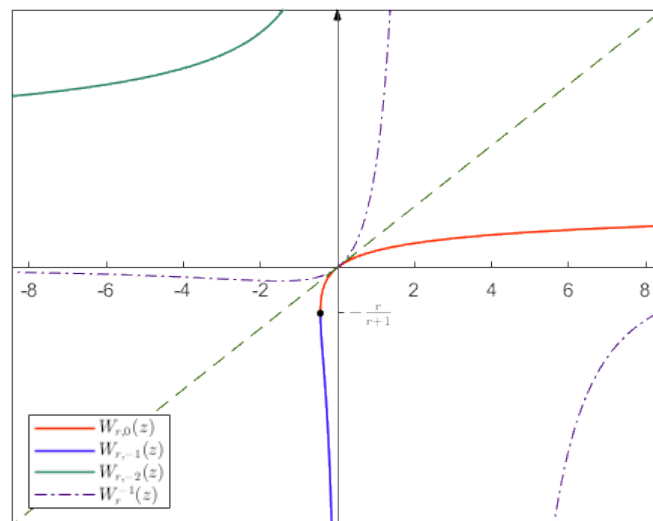
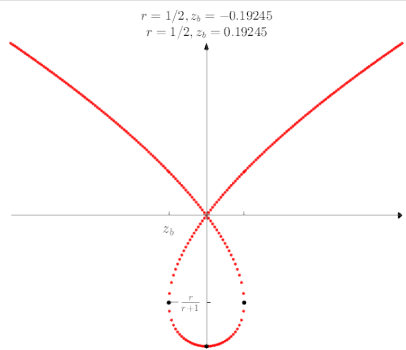
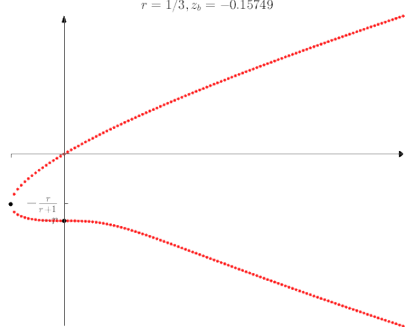
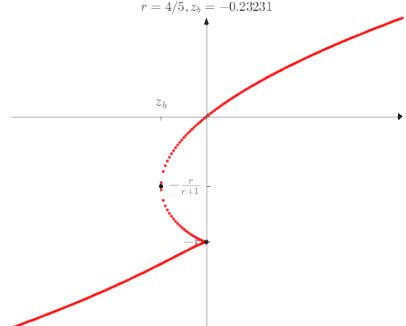


Figura 9 – $W_r(z)$ e sua inversa em $r = -3$.

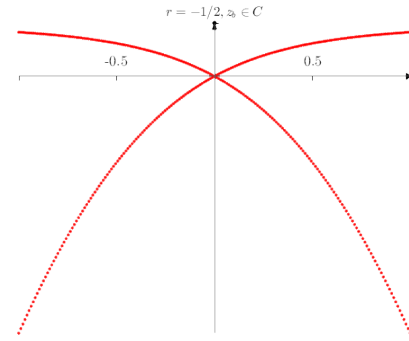
⁽²⁾ Método de análise de desigualdades, mais conhecido como *wavy curve method* em inglês, baseado no Teorema do valor intermediário.

4.3 Resultados Gerais

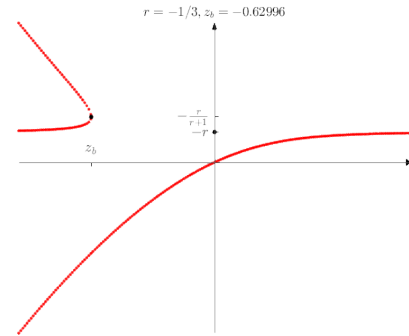
Já temos métodos para encontrar valores de $W_r(z)$ quando $r \in \mathbb{Z}$, desenvolvidos nas seções anteriores. Assim, nos resta estudar o resto da reta racional ($r \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$); esse exercício rapidamente se prova ser de grande complexidade, uma vez que não só há a necessidade de analisar os valores de r , mas também se exige avaliar valores em que $W_r(z) \in \mathbb{C}$ para garantir que todas as possíveis soluções da função sejam visualizadas, uma vez que a função é multivalorada. Com essa análise será possível visualizar e explicar características e comportamentos da função, resultando em 12 possíveis casos distintos, documentados a seguir.

Características de $W_r(z)$, $ r < 1$		
r	Características	Ilustração
1. $r = \frac{2n+1}{2m}$ $n, m \in \mathbb{N}$	<ul style="list-style-type: none"> Dois valores de z_b, um positivo e um negativo a função é par 	
2. $r = \frac{2n+1}{2m+1}$ $n, m \in \mathbb{N}$	<ul style="list-style-type: none"> o terceiro ramo <i>se inverte</i> para baixo justamente onde z_b se encontra 	
3. $r = \frac{2n}{2m+1}$, $n, m \in \mathbb{N}$	<ul style="list-style-type: none"> z_b é sempre negativo 	

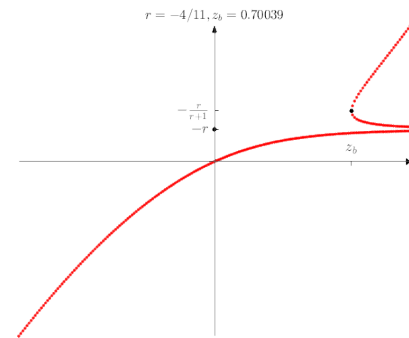
4. $r = -\frac{2n+1}{2m}$
 $n, m \in \mathbb{N}$
- $z_b \in \mathbb{C}$
 - a função é par



5. $r = -\frac{2n+1}{2m+1}$
 $n, m \in \mathbb{N}$
- z_b é sempre negativo



6. $r = -\frac{2n}{2m+1}$
 $n, m \in \mathbb{N}$
- z_b é sempre positivo

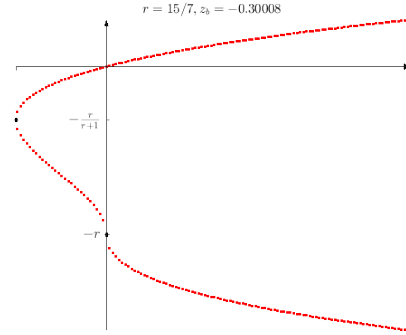


Características de $W_r(\mathbf{z}), |\mathbf{r}| > 1$

r	Características	Ilustração
7. $r = \frac{2n+1}{2m}$ $n, m \in \mathbb{N}$	<ul style="list-style-type: none"> • Dois valores de z_b, um positivo e um negativo • a função é par 	

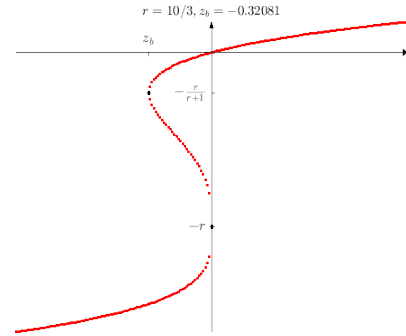
8. $r = \frac{2n+1}{2m+1}$
 $n, m \in \mathbb{N}$

- comportamento igual ao do caso $r = 2n + 1$
- z_b é sempre negativo



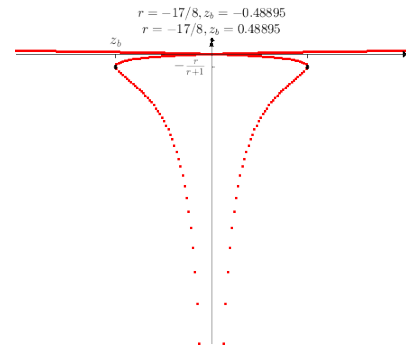
9. $r = \frac{2n}{2m+1}$,
 $n, m \in \mathbb{N}$

- comportamento igual ao do caso $r = 2n$
- z_b é sempre negativo



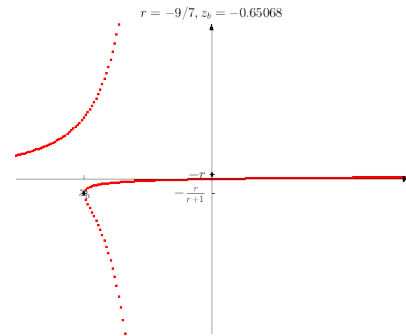
10. $r = -\frac{2n+1}{2m}$
 $n, m \in \mathbb{N}$

- dois valores z_b , um positivo e um negativo
- a função é par
- $W_r(0) \rightarrow -\infty$ assintoticamente



11. $r = -\frac{2n+1}{2m+1}$
 $n, m \in \mathbb{N}$

- z_b é sempre negativo
- comportamento igual ao do caso $r = -(2n + 1)$



12. $r = -\frac{2n}{2m+1}$
 $n, m \in \mathbb{N}$

- z_b é sempre negativo
- comportamento igual ao do caso $r = -2n$

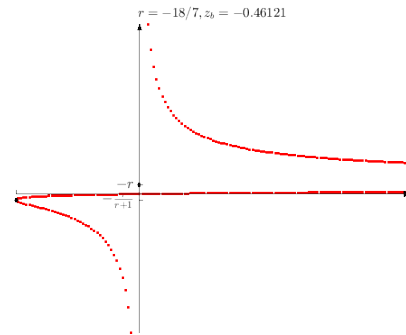


Tabela 3 – Todos os casos $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Por fim, vale a pena notar que todas as raízes estudadas até então são no plano dos reais somente. É possível visualizar todas as raízes, incluindo as complexas, como pode ser visto a seguir.

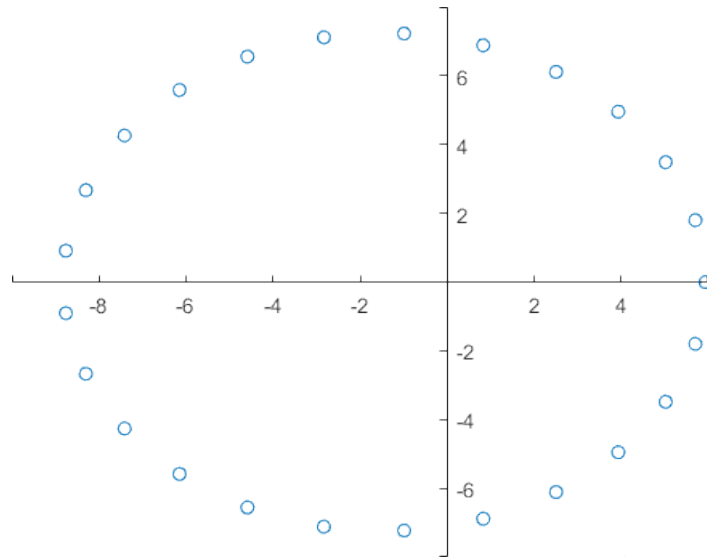


Figura 10 – Disposição de $W_r(z)$ com $r = \frac{17}{8}$

5 COMPORTAMENTO DE $W_r(z), \forall z \in \mathbb{C}$

Nesta seção nos voltaremos a estudar a função de Lambert-Tsallis mas, diferentemente daquilo feito anteriormente, serão considerados argumentos complexos. Antes de tudo, no entanto, iremos estudar como funções elementares e a função W de Lambert são efetivamente mapeadas no plano dos complexos. Dessa forma, teremos uma boa ideia de como prosseguir a análise de $W_r(z)$.

5.1 Um pouco de teoria

Quando se trata da maioria das funções elementares, existem diversas alternativas para mapeá-las no plano complexo, como por exemplo colorir o domínio, construir um campo vetorial ou a criação de mapas conformes. A efetividade desses métodos varia de acordo com a função estudada; no entanto, quando começamos a tratar de funções elementares que no plano complexo são multi valoradas a abordagem tende a mudar um pouco, uma vez que estas possuem características únicas que acabam exigindo diferentes níveis de sofisticação para realizar a análise de forma satisfatória.

Dirijamos nossa atenção a função logarítmica de uma variável complexa diferente de zero $z = re^{i\theta}$:

$$w = \ln|z| + i\text{Arg } z.$$

Uma boa maneira de visualizar o que precisamos é se fazer um caminho fechado *que inclui o zero* no plano complexo. Quando voltamos ao local geométrico que *seria* o mesmo ponto de que começamos, a função nos retorna um valor diferente. Isso se deve ao fato de que, obviamente, a função logarítmica complexa é multivalorada. Verificamos assim, que a origem é o que se chama de *ponto de ramo*⁽¹⁾ para a função logarítmica complexa; ou seja, é um ponto em que a função é multivalorada.

A partir disso, vem o conceito de *cortes de ramo*⁽²⁾, que é intrinsecamente relacionado com os pontos de ramo. Os cortes de ramo são curvas definidas, normalmente entre dois (ou uma série de) pontos de ramo, em que é possível definir um ramo (ou seção) de uma função multivalorada quando **se exclui** a curva do corte de ramo em si. Assim, os ramos definem, a partir

⁽¹⁾ em inglês, *branch point*

⁽²⁾ em inglês, *branch cut*

de uma função multivalorada, uma função analítica em um domínio complexo, e ao *colá-los* teríamos então a função multivalorada como um todo.

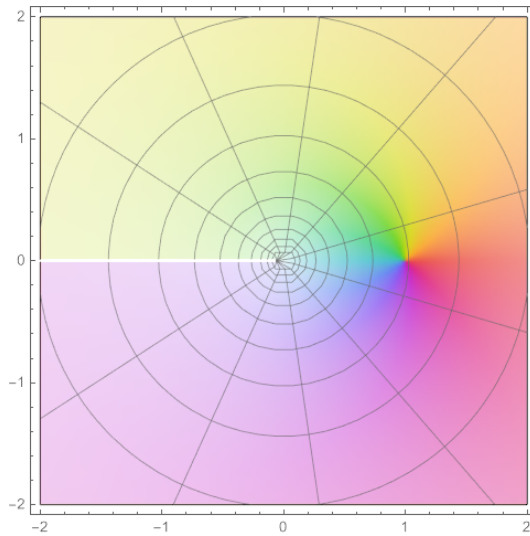


Figura 11 – Gráfico de $\log(z)$, incluindo o corte de ramo no eixo real negativo.

Ao analisarmos a figura a cima, temos que a função é analítica em todos os pontos, exceto na curva do corte de ramo por definição. Por fim, ao tomarmos uma terceira dimensão, a função analítica definida entre os cortes de ramo a partir da função original forma o que chamamos de folhas de Riemann⁽³⁾, uma folha de superfície que ao ser *colada* às outras forma o que chamamos de Superfície de Riemann. Vale notar que é importante adotarmos uma quarta dimensão como um código de cores, para que possamos visualizar *de que lado* um ponto está em relação ao outro, assim como fizemos no gráfico da figura acima.

⁽³⁾ em inglês, *Riemann sheet*

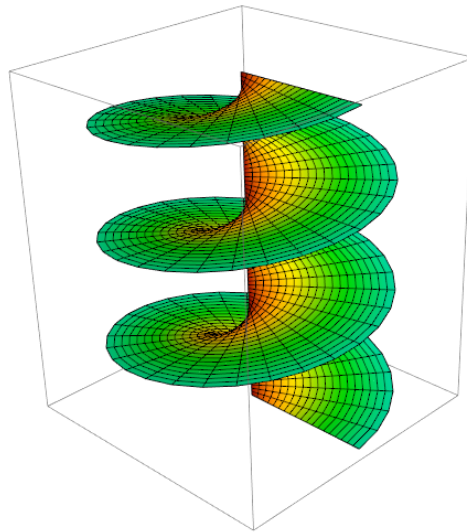


Figura 12 – Superfície de Riemann da parte imaginária de $\text{Log } z$.

Destarte, nota-se que as Superfícies de Riemann, e toda a teoria que carregam, são um excelente meio pelo qual podemos conduzir a análise das funções aqui estudadas, uma vez que nosso objetivo tem sido a visualização e categorização do comportamento das funções. Antes de seguirmos para o próximo tópico, é interessante documentar algumas superfícies de Riemann de algumas funções, em especial \sqrt{z} e a função W de Lambert. Seguem.

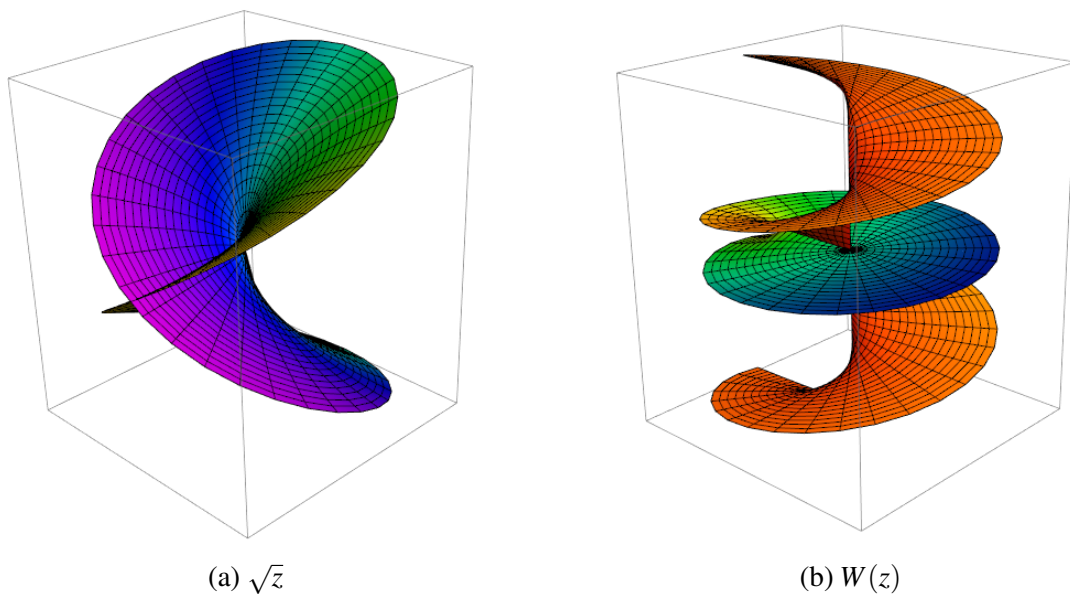


Figura 13 – Superfícies de Riemann da parte real e imaginária, respectivamente, das funções acima.

Ambos os gráficos acima foram feitos com o software Mathematica, que separa a

parte real e imaginária das superfícies de Riemann. Caso o leitor tenha interesse em ter acesso a discussões mais aprofundadas dos assuntos discutidos nessa seção, recomenda-se:

- a leitura de [7] nas seções 31 e 99;
- a leitura das primeiras seções do capítulo 11 de [9];
- assistir [10] e [11];
- a leitura de [5] no segundo capítulo;
- visitar visitar [12];
- a leitura de [13].

5.2 Mapeando $W_r(z)$

Agora com uma ferramenta em mãos que podemos utilizar para mapear $W_r(z)$ no plano complexo de forma efetiva, podemos extrair alguns esboços dos quais poderemos traçar alguns paralelos em relação a resultados obtidos previamente. Por exemplo, para os valores de $r = \frac{1}{2}$ e $r = -\frac{1}{2}$, temos que a superfície de Riemann da parte real das funções tem um semblante parecido ao resultado obtido previamente:

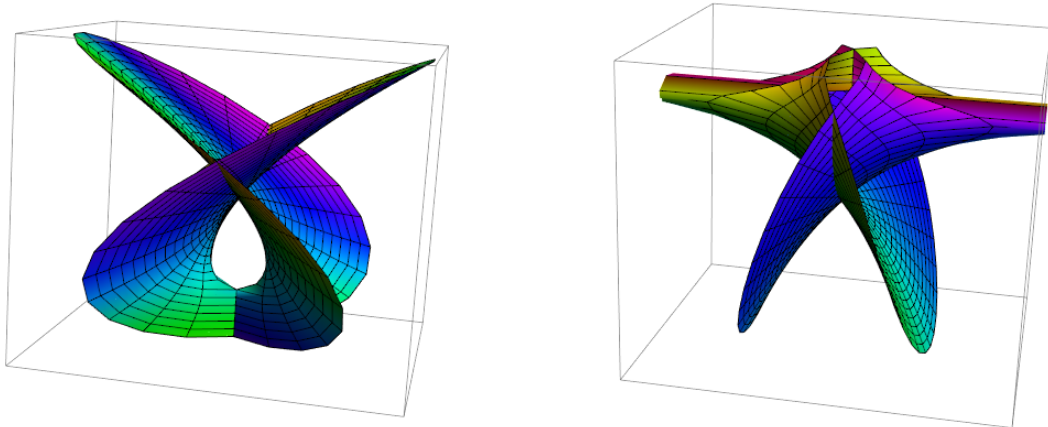


Figura 14 – Superfícies de Riemann da parte real de $W_r(z)$ para $r = \frac{1}{2}$ e $r = -\frac{1}{2}$, respectivamente.

Vale notar que aqui as figuras estão rotacionadas de tal forma que seja possível para o leitor identificar de onde se puxa a semelhança entre os resultados. Ainda que seja um pouco difícil traçar o paralelo entre as superfícies acima e os casos ilustrados anteriormente, é completamente possível identificar um paralelo, como visto a seguir:

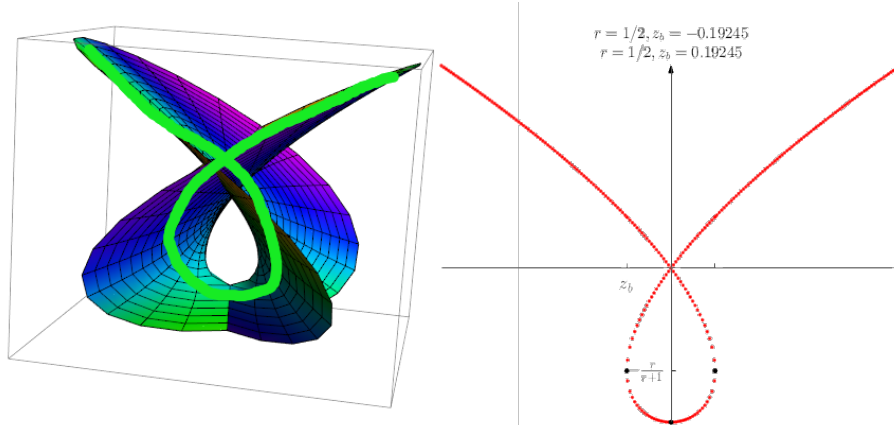


Figura 15 – Superfície de Riemann para $r = \frac{1}{2}$ comparada a sua versão no plano real

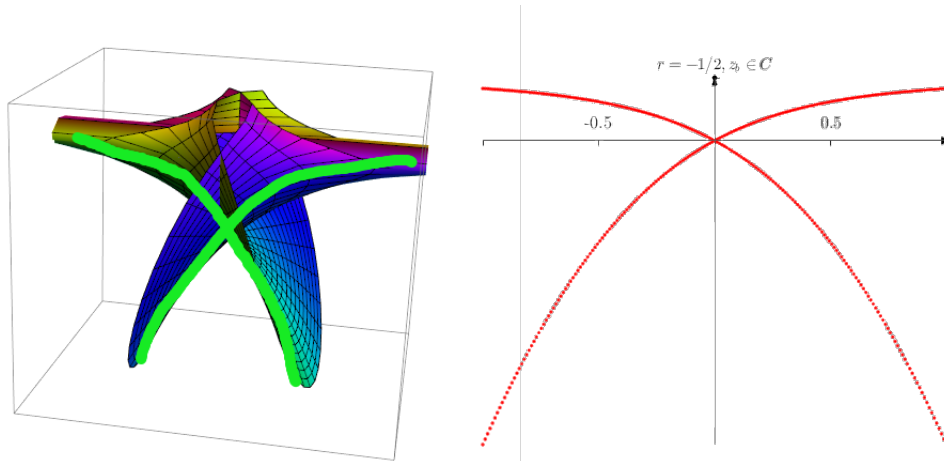


Figura 16 – Superfície de Riemann para $r = -\frac{1}{2}$ comparada a sua versão no plano real

Quando se trata dos casos em que $r \in \mathbb{Z}$, a visualização fica consideravelmente melhor, e é mais fácil comparar as superfícies as suas versões no plano real. Assim, trazemos aqui os exemplos em que $r = \{2, 3\}$.

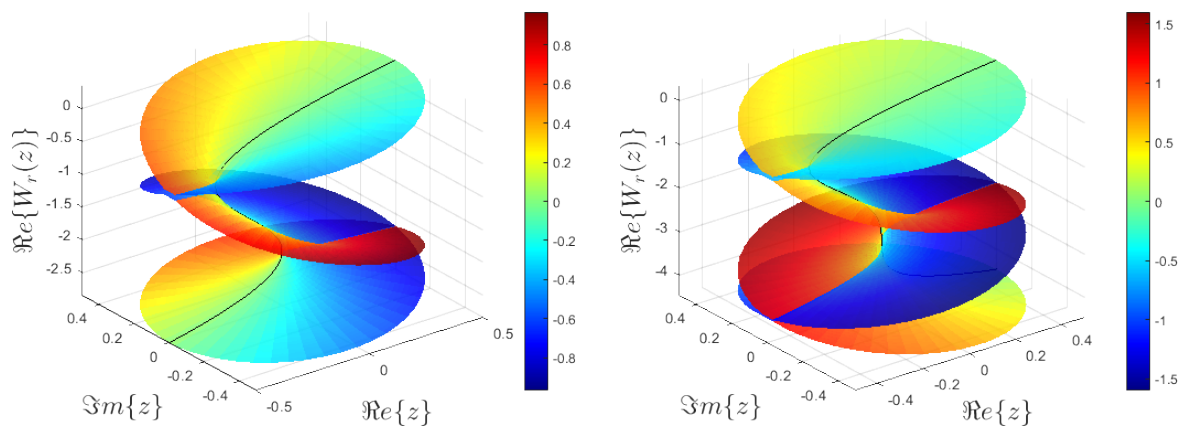


Figura 17 – Superfícies de Riemann de $W_r(z)$ para $r = \{2, 3\}$ respectivamente.

Como se percebe, todos os exemplos dados são simples (assemelhando-se aos casos dados na Tabela 3), e isso se deve ao fato de que ao progredir no nível de complexidade dos exemplos, as superfícies de Riemann se tornam cada vez mais complexas. O problema em si não é que seja necessariamente custoso gerá-las computacionalmente, mas sim que se torna cada vez mais difícil visualizar a superfície de forma clara, uma vez que para os casos mais gerais muitas superfícies se sobrepõem e se entrelaçam. De qualquer forma, o esforço é válido e nos entrega justamente o que procurávamos: Um claro vislumbre da função $W_r(z)$ em variável complexa, sem filtros e limitações. Caso o leitor tenha interesse em explorar o que aqui foi discutido, uma breve leitura de [14], [15] e [16] na seção 1.12.2 especificamente lhe guiará bem o suficiente para reproduzir o que foi discutido nessa seção.

5.3 Visualizando todas as raízes

Ao longo da pesquisa, trabalhou-se com valores de r inteiros a valores racionais ou irracionais. O caso inteiro já é bem definido e, como já foi estabelecido na seção 4.1, funções com expoentes irracionais têm infinitas soluções, então esse caso não é muito interessante para nosso estudo. Assim, nos voltamos ao caso em que $r \in \mathbb{Q}$. Destarte, é de nosso interesse trabalhar com funções do tipo

$$f(x) = \sum_{i \in \mathbf{L}} a_i x^{c_i},$$

onde $a_i \in \mathbb{R}$ e $c_i \in \mathbb{Q}$, e \mathbf{L} é um conjunto qualquer que podemos definir para o alcance de r . Por tal motivo, vê-se a necessidade de discutir as idiosincrasias computacionais de certas operações matemáticas (seja a exponenciação a expoentes racionais, seja a solução de equações de funções multivaloradas) que podem ser um impeditivo para a análise de funções multivaloradas. Esta é, inclusive, uma discussão relativamente velha (veja [17]). A pergunta inicial, como muito bem indicada no artigo, é a de ‘*seria $\sqrt{z^2} = z$?*’

A resposta, obviamente, muda a depender da perspectiva, mas uma resposta mais completa e generalista assumiria que $\sqrt{z} = \pm|z|$. Para elucidar esse problema, os autores do artigo detalham diferentes definições da raiz enésima de um valor z que podem ser aplicadas para obter soluções de equações polinomiais (conceitos que se estendem a funções multivaloradas). De qualquer forma, para o nosso problema é importante ter essa discussão em mente para não descartarmos soluções sem perceber. É com esse ideário que o estudo da função $W_r(z)$ se torna

completo e possível computacionalmente, revelando a existência de uma estrutura de ramos mais complexa e variável a depender de casos.

6 APLICAÇÕES

Como já estabelecido na seção 1.5, a função $W_r(z)$ é capaz de encontrar zeros de trinômios com certa facilidade ao utilizar as **Propriedades 1 e 3**. Com isso em mente, buscamos problemas nesse âmbito para estabelecer nosso universo de aplicações.

6.1 Equação Trinomial Geral

Construiremos a solução de uma equação trinomial geral a partir da função de Lambert-Tsallis. Para tal, partiremos de $ax^n + bx^m + c = 0$, com $n, m \in \mathbb{R}$ sendo $m < n$ e $a, b, c \in \mathbb{C}$. Segue:

$$\begin{aligned}
 ax^n + bx^m + c &= 0 \\
 ax^n + bx^m &= -c && \left. \begin{array}{l} \text{Isola-se o termo independente} \\ \text{Coloca-se a menor potência de } x \text{ em evidência} \end{array} \right\} \\
 x^m \left(1 + \frac{a}{b}x^{n-m}\right) &= -\frac{c}{b} \\
 x^m \exp_1\left(\frac{a}{b}x^{n-m}\right) &= -\frac{c}{b} && \left. \begin{array}{l} \text{Reescreve-se o binômio em termos de } \exp_1(z) \\ \wedge \left(r = \frac{n-m}{m}\right) \text{ para igualar o expoente de } x \end{array} \right\} \\
 x^{rm} \exp_r\left(\frac{ra}{b}x^{n-m}\right) &= \left(-\frac{c}{b}\right)^r \\
 \left(\frac{ra}{b}x^{rm}\right) \exp_r\left(\frac{ra}{b}x^{n-m}\right) &= \frac{ra}{b} \left(-\frac{c}{b}\right)^r && \left. \begin{array}{l} \text{Mesmo radical no lado esquerdo} \\ \text{Escreve-se a equação usando } W_r(z) \end{array} \right\} \\
 \frac{ra}{b}x^{rm} &= W_r\left[\frac{ra}{b} \left(-\frac{c}{b}\right)^r\right] \\
 x &= \left\{ \frac{b}{ra} W_r\left[\frac{ra}{b} \left(-\frac{c}{b}\right)^r\right] \right\}^{1/(rm)} && \left. \begin{array}{l} \text{Expressão final de } x \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

a

6.2 Matemática financeira

Alguns problemas da matemática financeira podem ser simplificados por certos polinômios [18]; alguns desses que conseguimos obter uma solução em termos da função $W_r(z)$. Inclusive, esses polinômios já foram explorados na [seção 3.3]. Aqui, tiramos um excerto de alguns exemplos que podem ser encontrados em [19], para analisar a capacidade da função $W_r(z)$ de encontrar as raízes de certos polinômios, assim auxiliando a resolução de problemas.

Antes de seguirmos aos exemplos, vale a pena notar que n representa o número de períodos, FV o valor futuro, PMT o pagamento e I a taxa de juros. (PV é o valor presente)

Exemplo 8. Seja $P(z) = z^m + a_p z^p + a_0$ e consideremos $p = 1$, $a_p = -\frac{FV}{PMT}$ e $a_0 = \frac{FV}{PMT} - 1$, para alguns valores de m , FV e PMT . Na próxima tabela temos os zeros e os coeficientes dos trinômios $P_j(z)$, $j = 1, 2$ e a taxa de juros I .

n	FV	PMT	$P_j(z)(j = 1, 2)$	Zeros de $P_j(z)$	I(%)
6	4500	420	$P_1(z) = z^6 - 10.7z + 9.7$	$z_1 = -1.443 - 0.963i$ $z_2 = -1.443 + 0.963i$ $z_3 = 0.327 - 1.587i$ $z_4 = 0.327 + 1.587i$ $z_5 = 1$ $z_6 = 1.23024$	23
Zeros de $P_1(z)$ via $W_r(z)$					
$z_1 = -1.4425 - 0.9625i$ $z_2 = -1.4425 + 0.9625i$ $z_3 = 0.3274 - 1.5869i$ $z_4 = 0.3274 + 1.5869i$ $z_5 = 1$ $z_6 = 1.2302359$					
7	2500	180	$P_2(z) = z^7 - 13.89z + 12.89$	$z_1 = -1.669$ $z_2 = -0.899 - 1.369i$ $z_3 = -0.899 + 1.369i$ $z_4 = 0.623 - 1.401i$ $z_5 = 0.623 + 1.401i$ $z_6 = 1$ $z_7 = 1.2235$	22.35
Zeros de $P_2(z)$ via $W_r(z)$					
$z_1 = -1.6689$ $z_2 = -0.8998 - 1.3694i$ $z_3 = -0.8998 + 1.3694i$ $z_4 = 0.6225 - 1.4011i$ $z_5 = 0.6225 + 1.4011i$ $z_6 = 0.99999$ $z_7 = 1.223497$					

Tabela 4 – Dados do exemplo

Exemplo 9. Seja $P(z) = z^m + a_p z^p + a_0$ e consideremos $p = m - 1$, $a_p = -\left(\frac{FV}{PMT} + 1\right)$ e $a_0 = \frac{FV}{PMT}$, para alguns valores de m , FV e PMT . Na tabela a seguir temos os zeros e os coeficientes dos trinômios $P_j(z)$, $j = 1, 2$ e a taxa de juros I .

n	FV	PMT	$P_j(z)(j=1,2)$	Zeros de $P_j(z)$	I(%)
7	1500	720	$P_1(z) = z^8 - 1.48z^7 + 0.48$	$z_1 = -0.731 - 0.333i$ $z_2 = -0.731 + 0.333i$ $z_3 = -0.232 - 0.789i$ $z_4 = -0.232 + 0.789i$ $z_5 = 0.481 - 0.729$ $z_6 = 0.481 + 0.729$ $z_7 = 1$ $z_7 = 1.44319$	44.32
Zeros de $P_1(z)$ via $W_r(z)$					
$z_1 = -0.73048 - 0.33276i$ $z_2 = -0.73048 + 0.33276i$ $z_3 = -0.2321 - 0.78905i$ $z_4 = -0.2321 + 0.78905i$ $z_5 = 0.4809 - 0.7291i$ $z_6 = 0.4809 + 0.7291i$ $z_7 = 0.9999$ $z_8 = 1.44318$					
12	24000	3500	$P_2(z) = z^{13} - 1.15z^{12} + 0.15$	$z_1 = -0.80561$ $z_2 = -0.706 - 0.392i$ $z_3 = -0.706 + 0.392i$ $z_4 = -0.431 - 0.691i$ $z_5 = -0.431 + 0.691i$ $z_6 = -0.042 - 0.825i$ $z_7 = -0.042 + 0.825i$ $z_8 = 0.375 - 0.759i$ $z_9 = 0.375 + 0.759i$ $z_{10} = 0.731 - 0.496i$ $z_{11} = 0.731 + 0.496i$ $z_{12} = 1$ $z_{13} = 1.0987$	9.87
Zeros de $P_2(z)$ via $W_r(z)$					
$z_1 = -0.80561$ $z_2 = -0.7063 - 0.3916i$ $z_3 = -0.7063 + 0.3916i$ $z_4 = -0.431 - 0.6905i$ $z_5 = -0.431 + 0.6905i$ $z_6 = -0.0417 - 0.8249i$ $z_7 = -0.0417 + 0.8249i$ $z_8 = 0.3747 - 0.7586i$ $z_9 = 0.3747 + 0.7586i$ $z_{10} = 0.7307 - 0.4961i$ $z_{11} = 0.7307 + 0.4961i$ $z_{12} = 0.9999$ $z_{13} = 1.0987$					

Tabela 5 – Dados do exemplo

Vale notar que esses exemplos têm sua solução, respectivamente, no mesmo formato que os exemplos 3.4 e 3.1. Sendo assim, o que resta é obter as raízes computacionalmente a partir da solução construída, que foi feito e implementado nas tabelas dos exemplos. Isso implica, obviamente, que o nível de precisão obtido será um pouco diferente, mas os resultados ainda são próximos o suficiente para confirmar a validade do método quando comparados ao resultado original dos exemplos.

6.3 Uma reformulação do problema de capacidade de Shannon

O trabalho [20], consegue definir de forma bem sucedida a solução real positiva da equação trinomial

$$x^N + kx^{N-Q} - 1 = 0, N > Q > 0. \quad (6.1)$$

à luz da teoria desenvolvida no artigo. Posteriormente, os autores ligam essa aplicação a uma reformulação do problema de Capacidade da teoria da informação de Shannon, obtendo-se

Teorema 2 (Shannon)

A capacidade é dada por $C = \log_2(y)$, onde y é a única raiz positiva da equação

$$z^N - z^{N-Q} - 1 = 0.$$

Tudo isso é expandido com maior detalhe em [21]. Em ambos os trabalhos, as raízes de (6.1) são expressadas com o uso de um Resultado de Mellin e a função Psi de Wright a seguir:

$$y = {}_1\Psi_1 \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{N}, \frac{N-Q}{N} \\ 1 + \frac{1}{N}, \frac{-Q}{N} \end{pmatrix}; -k \right], \quad (6.2)$$

onde Q e N são números reais tais que

$$|k| < (Q/N)^{-Q/N} (1 - Q/N)^{Q/N-1} \leq 2,$$

com a função Psi de Wright (6.2) sendo definida por

$${}_1\Psi_1 \left[\begin{pmatrix} \alpha, A \\ \beta, B \end{pmatrix}; -k \right] = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + An)}{\Gamma(\beta + Bn)} \frac{z^n}{n!}. \quad (6.3)$$

A formulação da resposta nesta forma é importante, pois atinge o objetivo do trabalho citado, que é descrever de forma analítica a raiz real positiva do trinômio em questão. De acordo com [21], isso é importante para analisar diversos fatores no problema, como pequenas

perturbações nos canais, diferenças de capacidade, ver a relação entre capacidade e outros parâmetros do canal, etc. Apesar da elegância e simplicidade da solução proposta até então, é possível que um usuário se veja limitado pela natureza da matemática da solução proposta, visto que sua implementação computacional pode depender de muitos fatores para que a convergência da solução seja garantida. Contudo, interessantemente, por estarmos lidando com um trinômio, conseguimos formular uma solução em termos de $W_r(z)$. Segue.

$$x^N + kx^{N-Q} - 1 = 0, N > Q > 0$$

$$kx^{N-Q} \left(1 + \frac{x^Q}{k}\right) = 1 \implies x^{N-Q} \exp_1\left(\frac{x^Q}{k}\right) = \frac{1}{k}$$

seja $r = \frac{Q}{N-Q}$,

$$\left(\frac{Q}{N-Q}\right) x^Q \exp_{\frac{Q}{N-Q}}\left[\frac{Qx^Q}{(N-Q)k}\right] = \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{Q}{N-Q}} \left(\frac{Q}{N-Q}\right)$$

$$\frac{r}{k} x^Q \exp_r\left[\frac{rx^Q}{k}\right] = \frac{r}{k} \left(\frac{1}{k}\right)^r$$

$$\frac{r}{k} x^Q = W_r\left[\frac{r}{k} \left(\frac{1}{k}\right)^r\right]$$

$$x = \left\{ \frac{k}{r} W_r\left[\frac{r}{k} \left(\frac{1}{k}\right)^r\right] \right\}^{1/Q}$$

Note que nossa solução em termos de $W_r(z)$ não é a solução que leva a raiz real positiva do trinômio, mas sim a todas as raízes. No entanto, a troca da exatidão da solução proposta nos artigos, por uma solução computacionalmente mais viável e consideravelmente mais simples de lidar vale muito a pena, levando o usuário a obter seus resultados com maior facilidade. De fato, conseguimos confirmar alguns dos resultados obtidos nos artigos. Segue

$2^{C(N,Q)}$	${}_1\Psi_1\left[\begin{smallmatrix}(\alpha, A) \\ (\beta, B)\end{smallmatrix}; -k\right]$	$x = \left\{ \frac{k}{r} W_r\left[\frac{r}{k} \left(\frac{1}{k}\right)^r\right] \right\}^{1/Q}$
$2^{C(2,1)}$	1.6180	1.6180
$2^{C(3,1)}$	1.4656	1.4656
$2^{C(3,2)}$	1.3247	1.3247
$2^{C(4,2)}$	1.2720	1.2720
$2^{C(5,1)}$	1.3247	1.3247

Tabela 6 – Comparação entre valores obtidos pela função de Fox-Wright e de Lambert-Tsallis

6.4 Raízes Unimodulares e Interiores

Em um estudo sobre raízes unimodulares ⁽¹⁾ [22], tem-se como objetivo caracterizar quando e onde elas ocorrem na família de polinômios do tipo $p(z) = z^n + z^k - 1$. Chega-se em:

Teorema 3

Seja $p(z) = z^n + z^k - 1$ e defina $g = \text{mdc}(n, k)$. Se 6 divide $\frac{n}{g} + \frac{k}{g}$, então p tem exatamente $2g$ raízes unimodulares, pares conjugados z_m e \bar{z}_m determinados por

$$z_m = \exp \left[i \left(\frac{\pi}{3g} + \frac{2\pi m}{g} \right) \right]$$

onde $0 \leq m \leq g - 1$.

Num artigo subsequente [23], os autores decidem tomar a tarefa de prever *quantas* raízes estarão dentro do círculo unitário, chegando em uma primeira conjectura ⁽²⁾:

Conjectura 1. Seja $p(z) = z^n + z^k - 1$, com $n, k \in \mathbb{N}$ e $1 \leq k \leq n - 1$. Defina agora $\sigma(n, k)$ como o número de raízes interiores. Se $\text{gdc}(n, k) = 1$, então

$$\sigma(n, k) = 2 \left\lfloor \frac{n + k - 1}{6} \right\rfloor + 1$$

onde $\lfloor x \rfloor$ denota o maior inteiro menor o igual a x .

E posteriormente num resultado principal:

Teorema 4

O número de raízes interiores do polinômio $p(z) = z^n + z^k - 1$ é dado por $\sigma(n, 1) = 2 \lfloor n/6 \rfloor + 1$.

É desde já bem claro que os resultados obtidos pelos autores não necessariamente se beneficiam muito de uma solução dos trinômios usados em termos de $W_r(z)$. No entanto, a simplicidade dessa solução é inegável, sendo possivelmente uma boa ferramenta para confirmar e ilustrar o uso dos teoremas. Podemos assim ilustrar o uso do teorema 3 (caso o número mude, é o primeiro teorema dessa seção) com um exemplo citado no primeiro artigo [22] a seguir:

Supondo-se que $n = 70$, é possível concluir que há somente seis valores de k que satisfazem

⁽¹⁾ Define-se raízes unimodulares como raízes que se encontram no círculo unitário.

⁽²⁾ Conjectura essa que foi provada, de acordo com os autores, após a publicação do artigo, por um estudante e seu orientador na época. Checar [Howell, R., Kyle, D. (2018). Locating trinomial zeros. *Involve*. 11(4): 711–720].

$$\frac{70}{\text{mdc}(70.k)} + \frac{k}{\text{mdc}(70,k)} = 0 \pmod{6}$$

Valores esses que podem ser encontrados na tabela a seguir

k	$\text{mdc}(70.k)$	$\#(\text{Raízes Unimodulares})$
2	2	4
14	14	28
26	2	4
38	2	4
50	10	20
62	2	4

Tabela 7 – Valores de k que resultam em raízes unimodulares para $n = 70$

Com esses dados, a partir da solução do trinômio em função de $W_r(z)$ a seguir

Sejam n e k inteiros com $n \geq 2$ e $1 \leq k \leq n - 1$.

$$p(z) = z^n + z^k - 1$$

$$z^n + z^k = 1 \implies z^k(1 + z^{n-k}) = 1 \implies z^k \exp_1(z^{n-k}) = 1$$

seja $r = \frac{n-k}{k}$

$$rz^{kr} \exp_r[rz^{n-k}] = r(1)^r$$

$$rz^{kr} = W_r[r(1)^r]$$

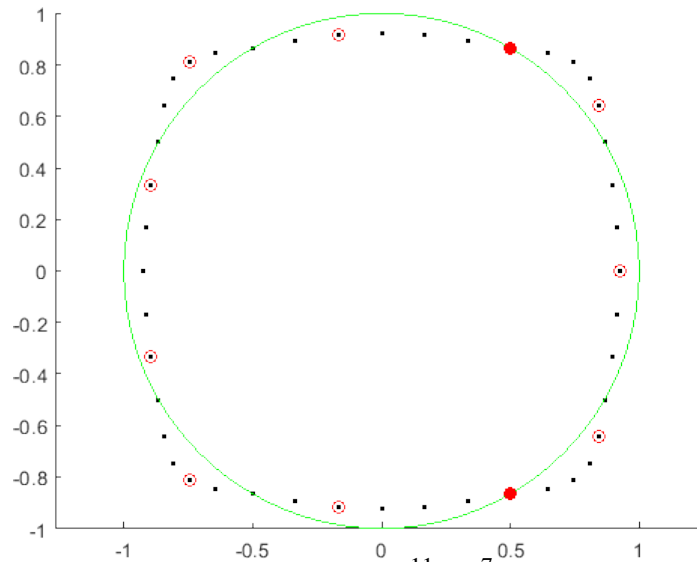
$$z = \left\{ \frac{1}{r} W_r[r(1)^r] \right\}^{1/kr}.$$

Assim, podemos verificar um desses casos para corroborar com os resultados propostos.

$k = 26$	$\text{mdc}(70.k) = 2$	$\#(\text{Raízes Unimodulares}) = 4$
Raízes		
$ z_1 =$	$ -0.866025427913141 + 0.499999997609957i $	$= 1.000000019701047$
$ z_2 =$	$ +0.866025427913141 - 0.499999997609956i $	$= 1.000000019701047$
$ z_3 =$	$ +0.866025399812293 + 0.5000000025710621i $	$= 1.000000009415331$
$ z_4 =$	$ -0.866025399812292 - 0.5000000025710621i $	$= 1.000000009415331$

Tabela 8 – Raízes unimodulares do caso $k=26$.

$k = 7$	$\text{mdc}(11.k) = 1$	$\#(\text{Raíces Unimodulares}) = 2$
Raíces		
$ z_1 = +0.924616832801644 + 0.000000132793322i $	$= 0.924616832801653$	
$ z_2 = +0.844404938245606 + 0.644629140793486i $	$= 1.062340072149080$	
$ z_3 = +0.499999647980000 + 0.866025481380478i $	$= \mathbf{0.99999989119020}$	
$ z_4 = -0.167174803237271 + 0.916442660293553i $	$= 0.931565652245372$	
$ z_5 = -0.745541496883559 + 0.810059008334886i $	$= 1.100921305343791$	
$ z_6 = -0.893997409825620 + 0.334484000066859i $	$= 0.954521301530586$	
$ z_7 = -0.745541461269672 - 0.810058950389149i $	$= 1.100921238589613$	
$ z_8 = -0.893997615352978 - 0.334484195766810i $	$= 0.954521562603266$	
$ z_9 = -0.167174740730548 - 0.916442634302820i $	$= 0.931565615459382$	
$ z_{10} = +0.844405025571797 - 0.644629391759195i $	$= 1.062340293846909$	
$ z_{11} = +0.499999958827793 - 0.866025082236891i $	$= \mathbf{0.99999970094556}$	

Tabela 9 – Raíces de $z^{11} + z^7 - 1 = 0$.Figura 18 – Raíces de $z^{11} + z^7 - 1 = 0$.

6.5 Resumo das Aplicações

Problema	Solução	Descrição
$x^{n+1} - (1 + \beta)x^n + \beta = 0$, para $0 < \beta < 1$	$x = -\frac{1+\beta}{r} W_r \left[\left(\frac{\beta}{1+\beta} \right)^r \left(\frac{-r}{1+\beta} \right) \right]$ para $r = \frac{1}{n}$	Reformulação das equações para séries uniformes de pagamentos em matemática financeira [19]
$x^n - \alpha x + (\alpha - 1) = 0$, para $\alpha > 1$	$x = \left\{ -\frac{\alpha}{r} W_r \left[-\frac{r}{\alpha} \left(\frac{\alpha-1}{\alpha} \right)^r \right] \right\}^{1/r}$ para $r = n - 1$	
$x^n - \gamma x^{n-1} + (\gamma - 1) = 0$, para $\gamma > 1$	$x = -\frac{\gamma}{r} W_r \left[-\frac{r}{\gamma} \left(\frac{\gamma-1}{\gamma} \right)^r \right]$ para $r = \frac{1}{n-1}$	
$x^{n+1} - (\alpha + 1)x + \alpha = 0$, para $\alpha > 1$	$x = \left\{ -\frac{\alpha+1}{r} W_r \left[-\frac{r}{\alpha+1} \left(\frac{\alpha}{\alpha+1} \right)^r \right] \right\}^{1/r}$ para $r = n$	
$x^N - x^{N-Q} - 1 = 0$, para $N > Q > 0$	$x = \left\{ \frac{-1}{r} W_r [-r(-1)^r] \right\}^{\frac{1}{Q}}$, com $r = \frac{Q}{N-Q}$.	Modelagem da capacidade de um canal de comunicação
$z^n - az^k - 1 = 0$	$z = \left\{ -\frac{a}{r} W_r \left[-\frac{r}{a} \left(-\frac{1}{a} \right)^r \right] \right\}^{1/(rk)}$ para $r = \frac{n-k}{k}$	Para $a = 1, 6 + i$, chega-se em um problema discutido em 1887 [24], 1928 [25] e 2012

Tabela 10 – Apresentação de problemas e suas soluções usando $W_r(z)$.

7 CONCLUSÃO

Tendo como principal objetivo estudar a função de Lambert-Tsallis, ao longo deste trabalho os autores também buscaram explorar suas propriedades, aplicações e peculiaridades. Além disso, foi dada especial atenção a não só como a função é computada por diferentes algoritmos, mas também como a função se comporta e se molda quando alteramos seus parâmetros.

Apesar de tudo que foi feito aqui, ainda existem muitos desafios quando se trata da função de Lambert-Tsallis, que buscaremos atacar em trabalhos futuros. Independentemente disso, esperamos que este trabalho seja um bom passo para introduzir a comunidade científica a função.

Alguns dos códigos utilizados ao longo do trabalho estão disponíveis no link do github a seguir <https://github.com/loup675/Lambert-Tsallis>.

BIBLIOGRAFIA

- [1] R. M. Corless et al. “On the Lambert W function”. Em: **Advances in Computational Mathematics** 5 (1996), pp. 329–359. DOI: [10.1007/BF02124750](https://doi.org/10.1007/BF02124750).
- [2] C. Tsallis. “What are the numbers that experiments provide?” Em: **Química Nova** 17 (1994), pp. 468–471.
- [3] G.B. da Silva e R.V. Ramos. “The Lambert–Tsallis W_q function”. Em: **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications** 525 (2019), pp. 164–170. DOI: [10.1016/j.physa.2019.03.046](https://doi.org/10.1016/j.physa.2019.03.046).
- [4] Fredrik Johansson. **Computing the Lambert W function in arbitrary-precision complex interval arithmetic**. 2017. arXiv: [1705.03266](https://arxiv.org/abs/1705.03266) [cs.MS].
- [5] I Mezo. **The Lambert W Function: Its Generalizations and Applications** (1st ed.) Chapman e Hall/CRC, 2022. DOI: <https://doi.org/10.1201/9781003168102>.
- [6] Piotr Kowalczyk. “Global Complex Roots and Poles Finding Algorithm Based on Phase Analysis for Propagation and Radiation Problems”. Em: **IEEE Transactions on Antennas and Propagation** 66.12 (dez. de 2018), pp. 7198–7205. DOI: [10.1109/tap.2018.2869213](https://doi.org/10.1109/tap.2018.2869213). URL: <https://doi.org/10.1109%2Ftap.2018.2869213>.
- [7] James Ward Brown e Ruel V. Churchill. **Complex Variables and Applications**. Eighth. McGraw-Hill Higher Education, 2009.
- [8] **GRPF**. Wikibooks. URL: <https://github.com/PioKow/GRPF>.
- [9] Richard A. Silverman A. I. Markushevich. **Theory of Functions of a Complex Variable: Second Edition**. Second. AMS Chelsea Publishing: An Imprint of the American Mathematical Society, 1977. ISBN: 978-0-8218-3780-1.
- [10] Mathemaniac. **What do complex functions look like? | Essence of complex analysis 4**. <https://youtu.be/TaWBXRaNEcc>. Out. de 2021.
- [11] Welch Labs. **Imaginary Numbers Are Real [Part 13: Riemann Surfaces]**. Set. de 2016. URL: <https://youtu.be/4MmSZrAlqKc>.
- [12] **Branch point**. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Branch_point.
- [13] Rodolfo R. Rosales. **Branch Points and Branch Cuts**. Out. de 1999. URL: https://math.mit.edu/classes/18.305/Notes/n00Branch_Points_B_Cuts.pdf.

- [14] Michael Trott. “The Return of the Riemann Surface”. Em: **The Mathematica Journal** 10 (2010).
- [15] xslittlegrass. **How to visualize Riemann surfaces?** Set. de 2013. URL: <https://mathematica.stackexchange.com/questions/31904/how-to-visualize-riemann-surfaces>.
- [16] Michael Trott. **The Mathematica GuideBook for Numerics**. Springer, 2006.
- [17] D. J. Jeffrey e A. C. Norman. “Not Seeing the Roots for the Branches: Multivalued Functions in Computer Algebra”. Em: **SIGSAM Bull.** 38.3 (set. de 2004), pp. 57–66. ISSN: 0163-5824. DOI: [10.1145/1040034.1040036](https://doi.org/10.1145/1040034.1040036). URL: <https://doi.org/10.1145/1040034.1040036>.
- [18] Vanessa Avansini Botta Pirani. “Roots of Some Trinomial Equations”. Em: **Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics** 5 (2017). DOI: <https://doi.org/10.5540/03.2017.005.01.0024>. URL: <https://proceedings.sbmaccemnuvens.com.br/sbmac/article/view/1178>.
- [19] V. Botta e J. V. da Silva. “Raízes de equações trinômiais e quadrimômiais”. Dissertação de mestrado. UNESP, 2018.
- [20] A.R. Miller e I.S. Moskowitz. “Reduction of a class of Fox-Wright psi functions for certain rational parameters”. Em: **Computers Mathematics with Applications** 30 (1995), pp. 73–82. DOI: [10.1016/0898-1221\(95\)00165-U](https://doi.org/10.1016/0898-1221(95)00165-U).
- [21] I.S. Moskowitz e A.R. Miller. “Simple timing channels”. Em: **Proceedings of 1994 IEEE Computer Society Symposium on Research in Security and Privacy**. 1994, pp. 56–64. DOI: [10.1109/RISP.1994.296592](https://doi.org/10.1109/RISP.1994.296592).
- [22] Michael Brilleslyper e Beth Schaubroeck. “Locating Unimodular Roots”. Em: **The College Mathematics Journal** 45.3 (2014), pp. 162–168. DOI: [10.4169/college.math.j.45.3.162](https://doi.org/10.4169/college.math.j.45.3.162). URL: <https://doi.org/10.4169/college.math.j.45.3.162>.
- [23] Michael A. Brilleslyper e Lisbeth E. Schaubroeck. “Counting Interior Roots of Trinomials”. Em: **Mathematics Magazine** 91.2 (2018), pp. 142–150. DOI: [10.1080/0025570X.2017.1420332](https://doi.org/10.1080/0025570X.2017.1420332). URL: <https://doi.org/10.1080/0025570X.2017.1420332>.
- [24] P. Nekrassoff. “Ueber trinomische Gleichungen”. Em: **Math. Ann.** 29 (1887), pp. 413–430. URL: <http://eudml.org/doc/157293>.

- [25] M. Biernacki. “Sur les équations algébriques contenant des paramètres arbitraires”. Tese de doutorado. Faculté des Sciences de Paris, 1928. URL: http://www.numdam.org/item/THESE_1928__86__1_0.pdf.